

9. Nevezetes folytonos eloszlások

Szükséges új ismeretek: *Exponenciális eloszlás, örökifjú tulajdonság, soros és párhuzamos rendszerek megbízhatósága. Normális eloszlás, standard normális eloszlás, standardizálás.*

Elméleti anyag, példák, kidolgozott feladatok: *J1: 7. fejezet; J2: 10. fejezet.*

Exponenciális eloszlás

1. Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Egy ilyen típusú alkatrész átlagosan 5000 óra időtartam alatt megy tönkre.
 - a) Mi a valószínűsége, hogy egy ilyen alkatrész 6000 órát kibír?
 - b) Mi a valószínűsége, hogy 4000 óránál hamarabb elromlik?
 - c) Feltéve, hogy már 3000 órája működik hiba nélkül, mi a valószínűsége annak, hogy élettartama eléri a várható értéket?
 - d) A fenti alkatrész egy újabb változatánál azt tapasztalták, hogy az esetek 85%-ában 8000 órát is működik hiba nélkül. Hány óra lehet most az átlagos élettartam?
 - e) Az új alkatrész piacra dobásakor a cég 10 000 Ft kárpótlást ígér, ha az 5000 óránál hamarabb tönkremegy. Átlagosan mennyi kárpótlást fizetnek egy termék után?
2. Egy cég olyan mosógépeket gyárt, melyek élettartama exponenciális eloszlású. A terméket a tervezett elavulás jegyében úgy készítik, hogy legfeljebb 10%-uk élettartama érje el a 8 évet.
 - a) Mennyi a termékek élettartamának várható értéke?
 - b) A cég két év cseregaranciát ad a termékekre. Átlagosan a termékek hány százaléka hibásodik meg ezalatt?
 - c) Feltéve, hogy a mosógép az első három évben elromlik, mi a valószínűsége annak, hogy a harmadik évben hibásodik meg?
 - d) Feltéve, hogy a mosógép az első három évben nem romlik el, mi a valószínűsége annak, hogy a következő két évben meghibásodik?
 - e) Feltéve, hogy a mosógép az első három évben nem romlik el, mi a valószínűsége annak, hogy a következő két évben sem hibásodik meg?
3. Egy ablaktalan folyosón három izzó világít, melyek mindegyikének élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó 4000 óra várható értékkel. Az izzók sorosan vannak bekötve (vagyis ha az egyik kiég, akkor a többi sem világít).
 - a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 6000 óra múlva a folyosón sötét lesz?
 - b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 2000 óra múlva még minden izzó világítani fog?
 - c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 2000 óra múlva még nem lesz teljesen sötét?
 - d) Várhatóan mennyi idő múlva lesz sötét a folyosón?
4. Válaszoljunk a fenti kérdésekre abban az esetben, ha az izzók párhuzamosan vannak bekötve!
5. A hét törpe a közeli gyémántbányába jár dolgozni. Egymástól függetlenül, exponenciális eloszlású idő alatt találnak egy gyémántot. A keresésre fordított idő várható értéke mindegyikükénél 2 óra.
 - a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 2 óra alatt egyikük sem talál gyémántot?
 - b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 2 óra alatt mindegyikük talál gyémántot?
 - c) A munka kezdetén megbeszélik, hogy ha *valamelyikük* talál egy gyémántot, akkor a többiek nem keresgélnek tovább, hanem együtt hazamennek.
 - α) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 1 óra múlva még mindig dolgoznak?
 - β) Várhatóan mennyi idő múlva indulnak haza?
 - d) A munka kezdetén megbeszélik, hogy akkor mennek haza, ha *mindegyikük* talál egy gyémántot (aki talált egyet, az kimegy a bányából a friss levegőre, és ott elmélkedik az exponenciális eloszlás mibenlétéről).
 - α) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 8 óra múlva még mindig dolgoznak?

β) Várhatóan mennyi idő múlva indulnak haza?

6. A rádium felezési ideje 1600 év, egy rádium atom elbomlásáig eltelt idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó.
- a) A rádium tömegének hány százaléka bomlik el 800 év alatt?
- b) Hány év alatt bomlik el a rádium tömegének 1%-a?

Normális eloszlás

7. Egy normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 16, szórása 3. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a valószínűségi változó értéke
- a) kisebb, mint 10 b) 13 és 16 közé esik c) nagyobb, mint 8!
8. Egy normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 24, szórása 5. Határozzuk meg azt a c értéket, melyre
- a) $P(\xi < c) = 0,8$, b) $P(\xi > c) = 0,6$, c) $P(24 - c < \xi < 24 + c) = 0,95$.
9. Egy normális eloszlású valószínűségi változó 0,1 valószínűséggel vesz fel 9,2-nél kisebb értéket, és 0,25 valószínűséggel 11,3-nél nagyobbat. Mennyi a várható értéke és a szórása?
10. Egy város lakosainak magasságáról a következőket tudjuk: a lakosság 70%-a 180 cm-nél alacsonyabb, 5%-a pedig 190 cm-nél magasabb. Tételezzük fel, hogy a város lakosainak magasság adatai normális eloszlást követnek. Határozzuk meg ennek várható értékét és szórását!
11. Egy mérés hibája normális eloszlású, várható értéke 0, szórása 0,02. Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba $-0,04$ és $0,04$ közé esik? Adjuk meg azt az x értéket, amelyre igaz, hogy 0,9 valószínűséggel a hiba abszolút értéke kisebb mint, x !
12. A 100 gramm névleges tömegű Boci csokoládé tényleges tömege 100 gramm várható értékű, normális eloszlású valószínűségi változó. A csokoládék 92%-ának a tömege 96 és 104 gramm közé esik. Mekkora hányaduk könnyebb, mint 90 gramm?
13. Egy automata által kiadott ital mennyisége normális eloszlást követ 1,5 dl várható értékkel.
- a) Nagyszámú megfigyelés alapján az esetek 90%-ában az ital mennyisége kevesebb, mint 1,6 dl. Mennyi a kiadott mennyiség szórása?
- b) Az esetek 98%-ában a folyadék mennyisége több, mint ...
- c) Milyen c -re igaz, hogy az esetek 95%-ában a folyadék mennyisége (dl) $1,6 - c$ és $1,6 + c$ közé esik?
14. Az IQ-tesztet úgy állítják össze, hogy a teszt eredménye a népességen belül normális eloszlást kövessen 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással.
- a) A népesség hány százalékának 130 pont feletti az intelligencia hányadosa?
- b) A népesség hány százalékának 80 pont alatti az intelligencia hányadosa?
- c) A népesség legintelligensebb 5%-ának nagyobb az IQ-ja, mint ...
15. Egy termék mérethibája normális eloszlású valószínűségi változó 0 mm várható értékkel és 5 mm szórással. A termék első osztályú, ha a mérethiba abszolút értéke legfeljebb 2 mm és selejtes, ha legalább 9 mm. Ekkor 100 termékből átlagosan hány termék lesz elfogadható (tehát nem selejt), de nem első osztályú?

A normális hibatörvény kiemelkedik az emberiség tapasztalati anyagából, mint egyike a természetfilozófia legszélesebb körű általánosításainak. Vezető eszközként szolgál a kutatásokban, a fizikai és társadalomtudományokban, az orvostudományban, mezőgazdaságban és mérnöki tevékenységben. Nélkülözhetetlen segítség a megfigyelés és a kísérlet révén kapott adathalmazok elemzéséhez és értelmezéséhez.