

10. A központi határeloszlás tétel

Szükséges új ismeretek: *A központi (centrális) határeloszlástétel, speciális eset: a Moivre-Laplace-tétel.*

Elméleti anyag, példák, kidolgozott feladatok: *J1: 12., 13. és 14. fejezet; J2: 15., 18. és 20. fejezet.*

1. Egy fűrészüzemben 2 cm vastag deszkákat készítenek, a tapasztalat szerint 2 mm szórással. Raktározáskor 100 db deszka kerül közvetlenül egymásra. Milyen magas tároló helyiségre van szükség ahhoz, hogy a deszkák 98 %-os valószínűséggel elférjenek benne?
2. Adott 150 darab független, azonos eloszlású valószínűségi változó, melyek várható értéke 20, szórása 5. Közelítőleg mekkora annak valószínűsége, hogy ezek átlaga nagyobb, mint 22?
3. Egy légitársaság tapasztalata szerint az elfoglalással rendelkező utasok átlagosan 95%-a utazik ténylegesen az adott időpontban. Egyszer egy 300 személyes járatra 324 jegyet adtak el előre.
 - a) Tegyük fel, hogy az utasok egymástól függetlenül utaznak (vagy nem utaznak). Mi a valószínűsége, hogy valaki nem fér fel a járatra?
 - b) Tegyük fel, hogy az utasok párosával utaznak. Így mi a valószínűsége, hogy valaki nem fér fel a járatra?
 - c) Tegyük fel, hogy az utasok egymástól független csoportokban utaznak. Ez növeli vagy csökkenti a fenti valószínűséget?
4. Egy szabályos pénzérmét 10000-szer feldobunk. Határozzuk meg azt az m számot, melyre a fejek száma kb.
 - a) 0,5,
 - b) $2/3$,
 - c) 0,9,
 - d) 0,99valószínűséggel legalább $5000 - m$, de legfeljebb $5000 + m$! Oldjuk meg a feladatot egymillió dobással is! Mit állapíthatunk meg az m /dobások száma kifejezésről?
5. Rullettezni megyünk. Minden egyes játékban egy egységet teszünk a pirosra, így $18/37$ valószínűséggel nyerünk egy egységet, $19/37$ valószínűséggel pedig veszítünk. Mi a valószínűsége annak, hogy 100 kör után legalább annyi pénzünk lesz, mint az elején?
6. Egy alkalommal a 130 fős évfolyam számára kiírt *Valószínűség-számítás és matematikai statisztika* című előadást egy 80 fő befogadására alkalmas terembe tették. A hallgatók egymástól függetlenül $0,5$ valószínűséggel mennek el az órára.
 - a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy alkalommal nem fér be minden megjelent a terembe?
 - b) Mi a valószínűsége annak, hogy a félév során mindig minden megjelent befér a terembe?
7. Egy 100 személyes sétahajó kapitánya hosszú idő alatt azt tapasztalja, hogy a jeggyel rendelkezőknek mindössze 90 %-a jelenik meg a beszállásnál. Ezen felbuzdulva egy alkalommal 110 jegyet ad el. Mi a valószínűsége, hogy lesz olyan utas, aki nem fér fel a hajóra?
8. Micimackó mézet akart lopni a méhektől, de rajtavesztett: mind a 200 méhecske egyszerre támadt rá. Tudjuk, hogy minden egyes méh $0,2$ valószínűséggel csípi meg a tolvajt. Mi a valószínűsége, hogy Micimackó 50 csípésnél kevesebbel megússza a kalandot?
9. Egy gyár 300 egyforma energiaigényű gépe közül átlagosan csak 70%-uk működik, a többi 30% javításra vár, időnként azonban előfordul, hogy mind a 300 gép jó. Mennyi energiát kell biztosítani akkor, ha azt akarjuk, hogy 99,9%-os
 - a) 99,9%-os
 - b) 99%-os
 - c) 98%-osbiztonsággal minden működőképes gép valóban működni is tudjon?
10. Egy tömegkiszolgáló rendszerbe reggel nyolctól véletlenszerű időpontokban érkeznek az igények. Az igények beérkezése között eltelt idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó 2 perc várható értékkel. Mi a valószínűsége annak, hogy

- a) a 100. igény beérkezéséig legalább három és fél órát kell várni,
- b) a 100. igény beérkezése 11 és féltizenkettő között történik,
- c) Átlagosan mennyit kell várni a 100. igény beérkezéséig?

11. Egy közvéleménykutató cég szeretné felmérni egy képviselőjelölt támogatottságát egy választókerületben. Mekkora mintát vizsgáljanak meg (visszatevéssel), hogy a jelölt támogatottságát 95%-os biztonsággal

- a) 1%-nál,
- b) 2%-nál,
- c) 5%-nál

kisebb abszolút hibával meg tudják adni?

12. Egy szabályos pénzérmét sokszor feldobunk. Az alábbiak közül melyiknek nagyobb a valószínűsége:

- a) 400 dobásból legalább 180 fej;
- b) 2000 dobásból legalább 900 fej.

13. Tételezzük fel, hogy a felnőtt férfiak testtömege normális eloszlást követ 77 kg várható értékkel és 13 kg szórással.

- a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott ember nehezebb, mint 86 kg?
- b) Mi a valószínűsége annak, hogy 25 véletlenszerűen választott ember tömegének átlaga több, mint 86 kg?
- c) A liftben elhelyezett biztonsági tájékoztató szerint az utasok együttes tömege legfeljebb 900 kg lehet, továbbá maximum 10 ember utazhat egyszerre. Tíz véletlenszerűen kiválasztott ember beszáll a liftbe. Mi a valószínűsége, hogy össztömegük meghaladja a határt?

14. A terhesség időtartama normális eloszlású, 268 nap várható értékkel és 15 nap szórással. Véletlenszerűen kiválasztunk 100 terhes nőt. Mi a valószínűsége, hogy a terhességük átlagos időtartama

- a) 260 napnál kevesebb;
- b) 260 és 270 nap közé esik?

15. A bukósisakok tervezésénél természetesen figyelembe kell venni a fej szélességét. Mérések szerint a férfiak fejének szélessége (a fülek mögött mérve) normális eloszlású 15,5 cm várható értékkel és 2,5 cm szórással.

- a) Véletlenszerűen választunk egy embert. Mi a valószínűsége, hogy 16 cm-nél nagyobb a fejszélessége?
- b) Mi a valószínűsége, hogy 100 véletlenszerűen választott ember átlagos fejszélessége 16 cm-nél nagyobb?
- c) A b) pontban kapott eredmény alapján a termékmenedzser kijelenti, hogy olyan sisakokat kell gyártani, amelyek a 16 cm-nél kisebb fejszélességű embereknek jók, mert ekkor csak nagyon kevés olyan ember lesz, akire nem lesz jó. Mi a baj ezzel az okoskodással?

16. Az irodában olyan lámpa működik, amely élettartama exponenciális eloszlású, 1000 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy a hét öt napján pontosan 8 órát ég a lámpa. Mi a valószínűsége annak, hogy a következő 20 évben

- a) harmincnél
- b) negyvennél
- c) ötvennél

több égőre lesz szükségünk?