

1. Egy dobozban 20 fehér golyó van. Egy szabályos dobókockával dobunk, majd a következőt tesszük: ha a dobott szám 1,2 vagy 3, akkor tíz golyót cserélünk ki pirosra; ha a dobott szám 4 vagy 5, akkor hat golyót cserélünk pirosra; ha a dobott szám 6, akkor tizenkét golyót cserélünk pirosra. Ezután véletlenszerűen húzunk egy golyót a dobozból.

- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy pirosat húzunk? (0,45)
(b) Feltéve, hogy pirosat húztunk, mi a valószínűsége, hogy hatost dobtunk? ($2/9 \approx 0,2222$)
(c) Mit értünk teljes eseményrendszer alatt?

2. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 81}{x^4} & \text{ha } 3 < x \\ 0 & \text{különbén} \end{cases}.$$

- (a) Határozzuk meg ξ várható értékét! (4)
(b) Határozzuk meg ξ szórását! ($\sqrt{2} \approx 1,4142$)
(c) Mondjunk példát olyan valószínűségi változóra, amelynek a várható értéke és a szórása megegyezik!

3. Egy útkereszteződésben a 10 perc alatt áthaladó személygépjárművek száma Poisson-eloszlással modellezhető, 10 perc alatt átlagosan mindössze hat autót látunk.

- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy 5 perc alatt pontosan két autót látunk? (0,2240)
(b) Mekkora az az időtartam, amely alatt kb. 0,9 valószínűséggel látunk legalább egy autót? (kb. 3 perc 50 másodperc)
(c) Mit értünk azon, hogy két esemény független egymástól?

4. Barátnőnk telefonbeszélgetéseinek hossza exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A tapasztalat szerint a beszélgetéseinek 60%-a legalább 4 perig tart.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy egy beszélgetés legalább 10 perig tart? (0,2788)
(b) Feltéve, hogy a beszélgetés hossza eléri az 8 percet, mi a valószínűsége, hogy a következő két percben befejeződik? (0,2254)
(c) Exponenciális eloszlású valószínűségi változók esetén mit jelent az örökifjú tulajdonság?

5. Egy szabályos pénzérmét sokszor feldobunk. Az alábbiak közül melyiknek nagyobb a valószínűsége:

- 100 dobásból legalább 40 fej; ($\approx 0,9821$)
- 1000 dobásból legalább 400 fej? (≈ 1)
- Melyik tételt lehet használni ennek eldöntésére és miért?

6. Egy termék tömege normális eloszlást követ, a szórás $\sigma = 1,2$ dkg. Tíz esetben megvizsgáltuk a termék tömegét, a kapott eredmények (dkg):

11,5	11,3	11,5	12,5	12,8	12,2	13,6	11,6	12,7	12,4
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

- (a) Igaz-e 95%-os szignifikanciaszinten, hogy termék tömegének várható értéke 12 dkg?
(b) Mit jelent az elsőfajú hiba? Mekkora most ennek a valószínűsége?

1. A $[0; 3]$ intervallumból teljesen véletlenszerűen választunk két számot.
- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy összegük nagyobb kettőnél, de mindkettő kisebb kettőnél? ($2/9 \approx 0,2222$)
 - (b) Milyen eloszlás szerint választottuk az egyes számokat a feladatban?

2. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^5} & \text{ha } 2 < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

- (a) Határozzuk meg a c paraméter értékét! (64)
 - (b) Határozzuk meg ξ várható értékét! ($8/3 \approx 2,6667$)
 - (c) Milyen kapcsolat van a sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény között?
3. A sarki bolt eladója megfigyelte, hogy a 10 perc alatt érkező vevők száma Poisson-eloszlást követ. Azt is észrevette, hogy annak valószínűsége hogy 10 perc alatt pontosan három vevő jön ugyanannyi, mint annak a valószínűsége, hogy kettő.
- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy 10 perc alatt legalább 2 vevő jön? (0,8009)
 - (b) Mi a valószínűsége annak, hogy 15 perc alatt pontosan öt vevő érkezik? (0,1708)
 - (c) Van-e olyan Poisson-eloszlású valószínűségi változó, amelynek a várható értéke és a szórása megegyezik?
4. Egy város lakosainak magassága normális eloszlású valószínűségi változó. A lakosok 60%-a 170 cm-nél magasabb, 95%-a pedig 190 cm-nél alacsonyabb.
- (a) Határozzuk meg a magasság várható értékét és szórását! ($m \approx 172,6$ cm, $\sigma \approx 10,6$ cm)
 - (b) Adjuk meg az m várható értékű és σ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvényét!

5. Adjunk becslést arra, hogy hányszor kell egy szabályos dobókockát feldobnunk ahhoz, hogy a dobott hatosok relatív gyakorisága legalább 0,95 valószínűséggel 0,05-nál kevesebbel térjen el az elméleti valószínűségtől! (A feladatra mindenképpen adjunk szöveges választ!)

Melyik tételt lehetett alkalmazni és miért?

(Ha legalább n -szer feldobjuk a dobókockát, akkor teljesül. A Bernoulli-féle törvénnyel számolva $n \geq 1112$, a központi határeloszlás tétellel számolva $n \geq 214$.)

6. Egy termék tömegéről tudjuk, hogy normális eloszlást követ. Tíz esetben megvizsgáltuk a termék tömegét, a kapott eredmények (dkg):

24,5	24,3	25,2	25,5	24,8	24,2	25,6	24,1	24,7	25,4
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

- (a) Igaz-e 95%-os szignifikanciaszinten, hogy termék tömegének várható értéke 25 dkg?
- (b) Mit értünk másodfajú hiba alatt? Mennyi most ennek a valószínűsége?

1. Egy pakli magyar kártyából 2 lapot húzunk visszatevéssel, majd egy szabályos pénzérmét annyiszor feldobunk, ahány pirosat húztunk.
 - (a) Mi a valószínűsége annak, hogy nem dobunk fejet? ($49/64 \approx 0,7656$)
 - (b) Feltéve, hogy dobtunk fejet, mi a valószínűsége annak, hogy pontosan két pirosat húztunk? (0,2)
 - (c) Adjunk meg a feladatban egy teljes eseményrendszert!

2. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x^4}{256} & \text{ha } 0 < x \leq 4 \\ 1 & \text{ha } x > 4 \end{cases}.$$

- (a) Határozzuk meg ξ várható értékét! (3,2)
 - (b) $P(\xi < 2 \mid 1 < \xi < 3) = ?$ (0,1875)
 - (c) Adjunk példát olyan valószínűségi változóra, melynek eloszlásfüggvénye nem folytonos!
3. Két szabályos dobókockával dobunk egyszerre egészen addig, amíg mindegyikkel ugyanazt nem dobjuk.
 - (a) Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan tíz kísérletre lesz szükség? (0,0323)
 - (b) Mi a valószínűsége annak, hogy a szükséges kísérletek száma kevesebb, mint a várható érték? (0,5981)
 - (c) Melyik nevezetes diszkrét eloszlás származtatható a geometriai eloszlásból és miért?
4. Egy konzerv töltőtömege normális eloszlással írható le. A tapasztalat szerint az esetek 95%-ában a töltőtömeg több, mint 24 dkg, 10%-ában pedig kevesebb, mint 24,8 dkg.
 - (a) Határozzuk meg a töltőtömeg várható értékét és szórását! ($m \approx 27,6$ dkg, $\sigma \approx 2,2$ dkg)
 - (b) Elképzelhető-e, hogy egy normális eloszlású valószínűségi változó szórása több, mint a várható értéke? Miért?
5. Egy pénzérméről nem tudjuk, hogy szabályos-e. Azt szeretnénk elérni, hogy legalább 0,98 valószínűséggel a dobott fejek számának relatív gyakorisága 0,05-nél kevesebbel térjen el az elméleti valószínűségtől. Adjunk becslést a szükséges dobások számára (mindenképpen adjunk szöveges választ is)!

Melyik tételt lehetett alkalmazni és miért?

(Ha legalább n -szer feldobjuk a pénzérmét, akkor teljesül. A Bernoulli-féle törvénnyel számolva $n \geq 5000$, a központi határeloszlás tétellel számolva $n \geq 539$.)
6. Egy fagylaltosnál a kiadott gombócok tömegét vizsgáljuk. A nagy melegre való tekintettel 100 független mérést hajtottunk végre. Az ebből kapott értékek (dkg):

$$\hat{m}_{100} = 4,8 \quad \hat{s}_{100} = 0,3$$

- (a) Igaz-e 95%-os szignifikanciaszinten, hogy egy gombóc tömegének várható értéke 5 dkg?
 - (b) Milyen kapcsolat van a tapasztalati és a korrigált tapasztalati szórás között?

1. (a) Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre fennáll a következő:

$$(A - B) \cdot (A - C) = A \cdot (\overline{B + C})$$

- (b) Milyen kapcsolat van egy esemény relatív gyakorisága és a valószínűsége között? Melyik tétel utal erre?

2. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{81}{x^4} & \text{ha } x > 3 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

- (a) Határozzuk meg ξ várható értékét! (4)
(b) $P(6 < \xi \mid 4 < \xi < 7) = ?$ (0,1018)
(c) Adjunk példát olyan valószínűségi változóra, melynek sűrűségfüggvénye sehol sem nulla!
3. Egy irodaházban 1000 telefon van, melyek egymástól függetlenül 0,005 valószínűséggel romlanak el naponta. Az elromlott készülékeket másnapra mindig megjavítják.
- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy napon pontosan két telefon romlik el? (Binomiális eloszlással számolva 0,0839, Poisson-eloszlással számolva 0,0842.)
(b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy napon a meghibásodások száma a várható értéktől legfeljebb egy szórással tér el? (Binomiális eloszlással számolva 0,7431, Poisson-eloszlással számolva 0,7420.)
(c) Milyen kapcsolat van a binomiális eloszlás és a Poisson-eloszlás között?
4. Egy valószínűségi változó várható értéke és szórása megegyezik.
- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy a valószínűségi változó értéke kevesebb, mint két szórással tér el a várható értéktől? (legalább 0,75)
(b) Mi a válasz akkor, ha tudjuk, hogy a valószínűségi változó exponenciális eloszlású? (0,9502)
(c) Melyik tételt lehetett használni az (a) részben és miért?
5. Összeszedjük minden pénzünket és bátorságunkat, és elmegyünk ruletkezni. Minden körben egy egységet teszünk a pirosra, így minden körben $18/37$ valószínűséggel nyerünk egy egységet, illetve $19/37$ valószínűséggel veszítünk ugyanennyit.
- (a) 400 kört játszunk. Mi a valószínűsége, hogy legalább a játzmák felében nyerünk? ($\approx 0,3121$)
(b) Mi a válasz akkor, ha 4000 kört játszunk? ($\approx 0,0455$)
(c) Melyik tételt lehetett alkalmazni és miért?
6. Egy termék mérete normális eloszlást követ, a szórás $\sigma = 2,3$ mm. Tíz esetben megvizsgáltuk a termék hosszát, a kapott eredmények (mm):

104,5	104,3	105,2	105,5	104,8	104,2	105,6	104,1	104,7	105,4
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

- (a) Igaz-e 98%-os szignifikanciaszinten, hogy termék hosszának várható értéke 105 mm?
(b) Elképzelhető-e olyan nullhipotézis, amelyet adott minta esetén 98%-os szignifikanciaszinten elutasítunk, de 95%-os szignifikanciaszinten viszont elfogadunk? Miért?

1. Egy pakli magyar kártyából 4 lapot húzunk.

- (a) Mikor nagyobb annak a valószínűsége, hogy húzunk pirosat: ha visszatevéssel, vagy ha visszatevés nélkül húzunk? (visszatevéssel 0,6836, visszatevés nélkül 0,7045)
- (b) Melyik esetben nagyobb a kihúzott pirosak számának várható értéke?

2. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x^3}{1000} & \text{ha } 0 < x \leq 10 \\ 1 & \text{ha } x > 10 \end{cases}.$$

- (a) Határozzuk meg ξ várható értékét! (7,5)
 - (b) $P(5 < \xi < 18 \mid 4 < \xi) = ?$ (0,9348)
 - (c) Képezzünk egy újabb valószínűségi változót, legyen $\eta = 4 \cdot \xi - 2$. Mennyi lesz a várható értéke?
3. Egy hivatalban a 10 perc alatt érkező ügyfelek száma Poisson-eloszlást követ. Annak valószínűsége, hogy 10 perc alatt nem jön senki kb. 0,1653.
- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy negyedóra alatt pontosan 4 ügyfél érkezik? (0,1488)
 - (b) Mi a valószínűsége annak, hogy a 10 perc alatt érkező ügyfelek száma a várható értéktől legfeljebb egy szórásnyival tér el? (0,7260)
 - (c) Milyen esetekben használhatunk Poisson-eloszlást?
4. Egy termék élettartama exponenciális eloszlással modellezhető. A megfigyelések szerint annak valószínűsége, hogy az élettartam legalább 1000 óra éppen kétszer annyi, mint annak a valószínűsége, hogy az élettartam legalább 2000 óra.
- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy termék élettartama legalább 3000 óra? (0,125)
 - (b) Feltéve, hogy egy termék élettartama legalább 1000 óra, mi a valószínűsége annak, hogy 2000 óránál hamarabb tönkremegy? (0,5)
 - (c) Milyen „furcsa” tulajdonsága van az exponenciális eloszlásnak?

5. Egy szabályos pénzérmét 2500-szor feldobunk.

- (a) Adjuk meg azt a b számot, melyre a dobott fejek száma kb. 0,95 valószínűséggel legfeljebb b -vel tér el a várható értéktől! ($b = 49$)
- (b) Melyik tételt lehetett alkalmazni és miért?

6. Egy termék méretéről tudjuk, hogy normális eloszlást követ. Tíz esetben megvizsgáltuk a termék hosszát, a kapott eredmények (mm):

104,5	104,3	105,2	105,5	104,8	104,2	105,6	104,1	104,7	105,4
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

- (a) Igaz-e 98%-os szignifikanciaszinten, hogy termék hosszának várható értéke 105 mm?
- (b) Igaz-e, hogy most az elsőfajú hiba valószínűsége 0,01. Miért?

1. A $[0; 10]$ intervallumból teljesen véletlenszerűen választunk két számot.

- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy összegük nagyobb, mint 8? (0,68)
- (b) Mi a valószínűsége annak, hogy mindkettő nagyobb, mint 3? (0,49)
- (c) Feltéve, hogy mindkettő nagyobb, mint 3, mi a valószínűsége, hogy összegük nagyobb, mint 8? ($47/49 \approx 0,9591$)
- (d) Milyen eloszlás szerint választottuk a számokat?

2. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{16}{x^4} & \text{ha } 2 < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

- (a) Határozzuk meg ξ várható értékét! ($8/3 \approx 2,6667$)
- (b) Határozzuk meg ξ szórását! ($2\sqrt{2}/3 \approx 0,9428$)
- (c) Képezzünk egy újabb valószínűségi változót, legyen $\eta = -3 \cdot \xi + 4$. Mennyi lesz a szórása?

3. Egy romantikus augusztusi éjszakán a 20 perc alatt látott hullócsillagok száma Poisson-eloszlással modellezhető. Megfigyelésünk szerint 20 perc alatt átlagosan 3 hullócsillagot látunk.

- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy 15 perc alatt pontosan két hullócsillagot látunk? (0,2668)
- (b) Mekkora az az időtartam, amely alatt kb. 0,99 valószínűséggel látunk legalább egy hullócsillagot? (kb. 30 perc 42 másodperc)
- (c) Miért lehet modellezni ezt a jelenséget Poisson-eloszlással?

4. Egy termék élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A tapasztalat szerint az ilyen típusú termékek 30%-ánál haladja meg az élettartam a 6000 órát.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy egy termék legalább 7000 óráig működőképes lesz? (0,2455)
- (b) Feltéve, hogy az élettartam eléri az 5000 órát, mi a valószínűsége, hogy 5000 és 6000 óra közé esik? (0,1818)
- (c) A termékek hány százalékának kevesebb az élettartama a várható értéknél legalább egy szórással?

5. Egy szabályos dobókockát 6000-szer feldobunk.

- (a) Adjunk jó becslést annak valószínűségére, hogy a dobott hatosok száma legalább 960, de legfeljebb 1020! (0,6803)
- (b) Melyik tételt lehetett használni? Miért?

6. Egy termék tömege normális eloszlást követ, a szóráss $\sigma = 1,2$ dkg. Tíz esetben megvizsgáltuk a termék tömegét, a kapott eredmények (dkg):

24,5	24,3	25,2	25,5	24,8	24,2	25,6	24,1	24,7	25,4
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

- (a) Igaz-e 95%-os szignifikanciaszinten, hogy termék tömegének várható értéke 25 dkg?
- (b) Elképzelhető-e olyan nullhipotézis, amelyet adott minta esetén 95%-os szignifikancia szinten elutasítunk, de 98%-os szignifikancia szinten viszont elfogadunk? Miért?