

1. Egy dobozban hat fehér golyó van. Egy szabályos dobókockával dobunk, majd annyi piros golyót teszünk a dobozba, amennyit dobtunk. Ezután véletlenszerűen húzunk egy golyót a dobozból.
 - (a) Mi a valószínűsége, hogy pirosat húzunk?
 - (b) Feltéve, hogy fehéret húztunk, mi a valószínűsége, hogy a kockával hatost dobtunk?
 - (c) Mit értünk események függetlensége alatt?

2. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2} & \text{ha } 10 < x < 40 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

- (a) Határozzuk meg a c paraméter értékét!
 - (b) Határozzuk meg ξ várható értékét!
 - (c) Van-e olyan binomiális eloszlású valószínűségi változó, melynek a várható értéke és a szórása egyenlő?
3. Egy gyér forgalmú útszakaszon a 10 perc alatt áthaladó autók száma Poisson-eloszlással írható le. Annak valószínűsége, hogy 10 perc alatt egyetlen autót sem látunk ugyanakkora, mint annak a valószínűsége, hogy kettőt.
 - (a) Mi a valószínűsége, hogy 15 perc alatt pontosan három autót látunk?
 - (b) Mekkora az az időtartam, ami alatt kb. 0,5 valószínűséggel látunk autót?
 - (c) Melyik diszkrét eloszlással áll közeli kapcsolatban a Poisson-eloszlás? Miért?
 4. Egy normális eloszlású valószínűségi változó 0,8 valószínűséggel vesz fel tíznél nagyobb, és 0,1 valószínűséggel vesz fel nyolcnál kisebb értéket.
 - (a) Határozzuk meg a várható értékét és a szórását!
 - (b) Egy normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 5, szórása 3. Adjuk meg a sűrűségfüggvényét!
 5. Egy színház egyik előadására 600 ingyenjegyet osztottak szét. Tudjuk, hogy akinek van jegye, az a többiek közül függetlenül 0,75 valószínűséggel megy el az előadásra.
 - (a) Mi a valószínűsége annak, hogy a jeggyel rendelkezők legalább fele elmegy az előadásra, de legalább 150 hely üresen marad?
 - (b) Melyik tételt lehetett használni? Miért?

6. A túrórudikat úgy csomagolják, hogy belülről a *terméket nyert* vagy pedig a *nem nyert* felirat kerül. Ezeket a termékeket ötös csomagokba rakják, az egyes csomagokban így lehet 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 nyerő. Hatszáz esetben megvizsgálták, hogy hány nyerő van a csomagban. A kapott gyakoriságok:

nyertes termékek száma	0	1	2	3	4	5
gyakoriság	181	225	147	36	9	2

- (a) Modellezhető-e 95%-os szignifikancia szinten az egy csomagban található nyerő termékek száma olyan binomiális eloszlással, melynél $p = 1/5$?
- (b) Mit jelent az elsőfajú és mit a másodfajú hiba?

1. (a) A 40 és 50 év közötti nőknél végzett mammográfiás vizsgálat módszeréről tudjuk, hogy a betegség jelenlétekor az esetek 10%-ában nem jelez betegséget, viszont az esetek 7%-ában akkor is betegséget jelez, ha az nincs jelen. Tudjuk azt is, hogy az adott populációban a mellrák előfordulási aránya 0,8%. Feltéve, hogy a teszt mellrákot jelez, mi a valószínűsége, hogy valóban ebben a betegségben szenved az illető? Hogyan változna a válasz, ha a betegség előfordulási aránya 8% vagy 80% lenne?
(b) Mit értünk teljes eseményrendszer alatt?
2. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^4} & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$.
(a) $c = ?$
(b) $D(\xi) = ?$
(c) Melyek a sűrűségfüggvény tulajdonságai?
3. Tegyük fel, hogy az év minden napján százszor elgurítunk egy dobókockát, és azt figyeljük, hogy naponta hány hatost dobunk. Annak valószínűsége, hogy 100 dobásból legalább 30 hatost kapunk kb. 0,00067. Mi a valószínűsége annak, hogy az évben
(a) lesz olyan nap, amikor a hatosok száma legalább 30,
(b) legalább négy ilyen nap lesz?
(c) Melyik diszkrét eloszlással áll közeli kapcsolatban a Poisson-eloszlás? Miért?
4. A hét törpe a közeli gyémántbányába jár dolgozni. Egymástól függetlenül, exponenciális eloszlású idő alatt találnak egy gyémántot. A keresésre fordított idő várható értéke mindegyikükénél 2 óra.
(a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 2 óra alatt egyikük sem talál gyémántot?
(b) A munka kezdetén megbeszélik, hogy ha *valamelyikük* talál egy gyémántot, akkor a többiek nem keresgélnek tovább, hanem együtt hazamennek. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 1 óra múlva még mindig dolgoznak?
(c) Mit jelent az örökifjú tulajdonság (szavakkal és képlettel is)?
5. Egy alkalommal a 130 fős évfolyam számára kiírt *Valószínűség-számítás és matematikai statisztika* című előadást egy 80 fő befogadására alkalmas terembe tették. A hallgatók egymástól függetlenül 0,5 valószínűséggel mennek el az órára.
(a) Mi a valószínűsége, hogy egy alkalommal nem fér be minden megjelent a terembe?
(b) Mi a valószínűsége, hogy a félév során mindig minden megjelent befér a terembe?
(c) Milyen eloszlású a megjelentek száma? Miért úgy számolt, ahogy?
6. A szem színének és az irányultságnak (balkezes vagy jobbkezes) az összefüggését kutatták. A felmérés eredményei:

		irányultság	
		balkezes	jobbkezes
szem színe	kék	15	85
	barna	20	80

- (a) Elfogadható-e 95%-os szignifikancia szinten az az állítás, hogy összefüggés van a szem színe és az irányultság között?
- (b) Mit jelent az elsőfajú a feladatban? Mennyi most ennek a valószínűsége?

1. Egy pakli magyar kártyából 3 lapot húzunk.

- (a) Mikor nagyobb annak a valószínűsége, hogy húzunk pirosat: ha visszatevéssel, vagy ha visszatevés nélkül húzunk?
- (b) Adjunk példát a feladatban olyan teljes eseményrendszerre, melynek kettőnél több tagja van!

2. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x^3}{1000} & \text{ha } 0 < x \leq 10 \\ 1 & \text{ha } x > 10 \end{cases}.$$

- (a) Határozzuk meg ξ szórását!
- (b) $P(5 < \xi < 18 \mid 4 < \xi) = ?$
- (c) Mik az eloszlásfüggvény tulajdonságai?

3. Egy hivatalban a 10 perc alatt érkező ügyfelek száma Poisson-eloszlást követ. Annak valószínűsége, hogy 10 perc alatt nem jön senki kb. 0,1653.

- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy negyedóra alatt pontosan 3 ügyfél érkezik?
- (b) Mi a valószínűsége annak, hogy a 10 perc alatt érkező ügyfelek száma a várható értéktől legfeljebb egy szórásnyival tér el?
- (c) Adjunk példát olyan Poisson-eloszlású valószínűségi változóra, melynek várható értéke és szórása egyenlő!

4. Egy termék élettartama exponenciális eloszlással modellezhető. A megfigyelések szerint annak valószínűsége, hogy az élettartam legalább 1 év éppen kétszer annyi, mint annak a valószínűsége, hogy az élettartam legalább 2 év.

- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy termék élettartama legalább 3 év?
- (b) Feltéve, hogy egy termék élettartama legalább 1 év, mi a valószínűsége annak, hogy a *harmadik évben* megy tönkre?
- (c) Milyen tulajdonságai vannak a sűrűségfüggvénynek?

5. Egy szabályos pénzérmét 2500-szor feldodunk.

- (a) Adjuk meg azt a b számot, melyre a dobott fejek száma kb. 0,95 valószínűséggel legfeljebb b -vel tér el a várható értéktől!
- (b) Milyen eloszlású a dobott fejek száma? Miért számolt úgy, ahogy?

6. Egy termék méretéről tudjuk, hogy normális eloszlást követ. Tíz esetben megvizsgáltuk a termék hosszát, a kapott eredmények (mm):

104,5	104,3	105,2	105,5	104,8	104,2	105,6	104,1	104,7	105,4
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

- (a) Igaz-e 98%-os szignifikanciaszinten, hogy termék hosszának várható értéke 105 mm?
- (b) Mit jelent a másodfajú hiba? Hogyan csökkenthető a valószínűsége?

1. Egy szabályos dobókockával dobunk, majd egy szabályos pénzérmét annyiszor dobunk fel, ahányat a kockával dobtunk.
 - (a) Mi a valószínűsége annak, hogy dobunk fejet?
 - (b) Feltéve, hogy *nem* dobtunk fejet, mi a valószínűsége, hogy a kockával kettőt dobtunk?
 - (c) Mit értünk teljes eseményrendszer alatt?

2. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{216}{x^3} & \text{ha } 6 < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

- (a) Határozzuk meg ξ várható értékét!
 - (b) Határozzuk meg ξ szórását!
 - (c) Melyek a sűrűségfüggvény legfontosabb tulajdonságai?
3. A Kis Kifli pékség által készített túrós táskákban a mazsolák száma Poisson-eloszlással modellezhető. Megfigyelésünk szerint átlagosan 4 mazsola van egy termékben.
 - (a) Vásárolunk egy túrós táskát. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább három mazsola van benne?
 - (b) Vásárolunk három darabot. Mi a valószínűsége annak, hogy mindegyikben van mazsola?
 - (c) Van-e olyan Poisson-eloszlású valószínűségi változó, amelynél nulla annak a valószínűsége, hogy egyenlő a saját várható értékével?
 4. Egy konzerv töltőtömege normális eloszlású valószínűségi változó 25 dkg várható értékkel.
 - (a) A termékek 97%-ának töltőtömege 23 és 27 dkg közé esik. Határozzuk meg a szórást!
 - (b) Ha a szórás 15 g lenne, akkor mekkora hányaduk esne 23 és 27 dkg közé?
 - (c) Adjuk meg egy olyan normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényét, ahol a várható érték kisebb a szórásnál!
 5. A sokéves tapasztalat szerint a zárthelyire az évfolyam átlagosan 70%-a jön el. Egy alkalommal 250 hallgatót osztanak be 200 helyre.
 - (a) Mi a valószínűsége, hogy minden megjelentnek jut hely?
 - (b) Melyik tételt lehetett használni? Miért?
 6. A 3. feladatban szereplő pékségnél a kakaós csigák tömegét vizsgáltuk, feltételezve, hogy az normális eloszlást követ. Tizenkét esetben megmértük a termék tömegét, a kapott eredmények (g):

143	156	144	148	161	154	139	152	155	153	147	156
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

 - (a) Igaz-e 98%-os szignifikanciaszinten, hogy a tömeg várható értéke 150 g?
 - (b) Miért nem lehet nulla az elsőfajú hiba valószínűsége?

1. Egy dobozban 10 alkatrész van, ezekből 3 hibás. Hármát kiveszünk.
 - (a) Mikor nagyobb annak a valószínűsége, hogy több hibátlanat húzunk, mint hibásat: ha visszatevéssel vagy ha visszatevés nélkül húzunk?
 - (b) Van-e olyan binomiális eloszlású valószínűségi változó, melynek a várható értéke 10, szórása pedig 4?
2. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2} & \text{ha } 2 < x < 10 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

- (a) Határozzuk meg a c paraméter értékét!
 - (b) Határozzuk meg ξ várható értékét!
 - (c) Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$. Mennyi a várható értéke és a szórása?
3. Egy újságosnál a 2 perc alatt érkező vevők száma Poisson-eloszlást követ, 1,8 várható értékkel.
 - (a) Mi a valószínűsége, hogy 5 perc alatt pontosan hat vevő érkezik?
 - (b) Mi a valószínűsége, hogy a két perc alatt érkező vevők száma egy szórásnyinál kevesebbel tér el a várható értéktől?
 - (c) Milyen esetekben használhatunk Poisson-eloszlást?
4. Egy fénycső élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A tapasztalat szerint az ilyen típusú fénycsövek 50%-a éri el a 3000 óra élettartamot.
 - (a) Mi a valószínűsége, hogy egy fénycső legalább 4000 óráig működik?
 - (b) Egy fénycső már 2300 órája működik. Mi a valószínűsége, hogy a következő 1000 órában tönkremegy?
 - (c) Határozzuk meg a fenti valószínűségi változó szórását!
5. Egy tömegkiszolgáló rendszerbe reggel 8-tól jönnek az igények. Az igények beérkezése között eltelt idő exponenciális eloszlású 3 perc várható értékkel. Mi a valószínűsége annak, hogy
 - (a) a 100. igény tizenegy előtt megérkezik?
 - (b) a 100. igény 12 és fél egy között érkezik meg?
 - (c) Melyik tételt lehetett használni és miért?
6. Egy kávéautomata által kiadott ital mennyisége normális eloszlást követl. Tíz esetben megvizsgáltuk a kiadott mennyiséget, a kapott eredmények (dl):

1,52	1,43	1,59	1,62	1,47	1,66	1,54	1,52	1,55	1,49
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

- (a) Igaz-e 95%-os szignifikanciaszinten, hogy a kiadott mennyiség várható értéke 1,5 dl?
 - (b) Előfordulhat-e, hogy egy hipotézist 98%-os szignifikancia szinten elutasítunk, de 95%-os szignifikancia szinten elfogadunk? Miért?

1. Egy dobozban 20 fehér golyó van. Egy szabályos dobókockával dobunk, majd a következőt tesszük: ha a dobott szám 1,2 vagy 3, akkor tíz golyót cserélünk ki pirosra; ha a dobott szám 4 vagy 5, akkor hat golyót cserélünk pirosra; ha a dobott szám 6, akkor tizenkét golyót cserélünk pirosra. Ezután véletlenszerűen húzunk egy golyót a dobozból.

- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy pirosat húzunk?
- (b) Feltéve, hogy pirosat húztunk, mi a valószínűsége, hogy hatost dobtunk?
- (c) Adjunk a feladatból példát teljes eseményrendszerre!

2. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{64}{x^3} & \text{ha } 4 < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

- (a) Határozzuk meg ξ várható értékét!
 - (b) Határozzuk meg a $P(-2 < \xi < 10 \mid 8 < \xi)$ valószínűséget!
 - (c) Sorolja fel az eloszlásfüggvény tulajdonságait!
3. Az oroszánoknál állítólag csak átlagosan minden tizedik vadászat jár sikerrel. Tételezzük fel, hogy a próbálkozások egymástól függetlenek.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy még a 15. próbálkozás sem hoz eredményt?
- (b) Mi a valószínűsége, hogy a szükséges kísérletek száma kevesebb, mint a várható érték?
- (c) Leó addig próbálkozik, amíg sikerrel nem jár. Mennyi a szükséges kísérletek számának legvalószínűbb értéke?

4. Barátnőnk telefonbeszélgetéseinek hossza exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A tapasztalat szerint a beszélgetéseinek 50%-a legalább 8 percig tart.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy egy beszélgetés legalább 10 percig tart?
- (b) Feltéve, hogy a beszélgetés hossza eléri az 6 percet, mi a valószínűsége, hogy a következő két percben befejeződik?
- (c) Adjunk példát olyan exponenciális eloszlású valószínűségi változóra, ahol a szórás pontosan kétszerese a várható értéknek!

5. Egy kávéautomata által kiadott egy adagnyi kávéban a csótányok száma Poisson-eloszlással modellezhető, egy pohár italba átlagosan 0,4 csótány jut.

- (a) Egy teljes tanév (14+7+14+7 hét) során minden egyes munkanapon vásárolunk egy pohár kávé (tételezzük fel, hogy minden héten pontosan öt munkanap van). Mi a valószínűsége, hogy az így szerzett csótányok teljes száma 70 és 90 közé esik?
- (b) Melyik tételt lehetett használni? A feladatsor melyik feladatában használjuk még fel ezt a tételt?

6. Egy termék mérete normális eloszlást követ, a szórás $\sigma = 4,2$ mm. Tíz esetben megvizsgáltuk a termék hosszát, a kapott eredmények (mm):

204,5	204,3	205,2	205,5	204,8	204,2	205,6	204,1	204,7	205,4
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

- (a) Igaz-e 98%-os szignifikanciaszinten, hogy termék hosszának várható értéke 205 mm?
- (b) Mi a valószínűsége annak (még a mintavétel előtt), hogy a fenti hipotézis igaz, és el is fogadjuk azt?

1. Az $\{1, 2, \dots, 9\}$ számok közül véletlenszerűen választunk kétszer.
 - (a) Tegyük fel, hogy visszatevéssel választunk. Mi a valószínűsége, hogy a számok szorzata hárommal osztható?
 - (b) Mi a válasz akkor, ha visszatevés nélkül választunk?
 - (c) Legyen ξ az első választott szám. Mennyi a várható értéke és a szórása?
2. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{64}{x^6} & \text{ha } 2 < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

- (a) Határozzuk meg ξ várható értékét!
 - (b) Határozzuk meg a $P(4 < \xi \mid -4 < \xi < 8)$ valószínűséget!
 - (c) Adjunk példát olyan valószínűségi változóra, melynek várható értéke kétszer akkora, mint a szórása!
3. Egy irodaházban 2000 telefon van, amelyek egymástól függetlenül naponta 0,0015 valószínűséggel romlanak el. Az elromlott készülékeket másnapra mindig megjavítják.
 - (a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy napon pontosan annyi telefon romlik el, amennyi az egy napon elromlott telefonok számának várható értéke?
 - (b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy napon legalább kettő telefon romlik el?
 - (c) Milyen kapcsolat van a binomiális eloszlás és a Poisson-eloszlás között?
 4. A 100 g névleges tömegű Riska csoki tényleges tömege normális eloszlású valószínűségi változó 100 g várható értékkel.
 - (a) Tudjuk, hogy a csokik 95%-ának tömege 97 és 103 g közé esik. Határozzuk meg a szórást!
 - (b) Az új gyártósorról tudjuk, hogy az eddigi szórás felével dolgozik. Ekkor a termékek hány %-ának tömege esik 97 és 103 g közé?
 - (c) Adjuk meg annak a normális eloszlású valószínűségi változónak a sűrűségfüggvényét, melynek várható értéke 23, szórása pedig 3!
 5. Egy céltáblára lövünk, a találat valószínűsége minden esetben (függetlenül az előzményektől) 0,55. Összesen 200 lövést adunk le.
 - (a) Mi a valószínűsége annak, hogy legalább a lövések fele, de legfeljebb 60%-a talál?
 - (b) Mi a válasz akkor, ha a 1000 lövést adunk le?
 - (c) Melyik tételt lehetett használni? Miért?
 6. Egy gyártósornál rendszeresen 5 elemű mintát vesznek a termékekből. Egy hét alatt ötszáz mintát vettek. A mintákban talált selejtek gyakorisága az alábbi volt:

selejtek száma	0	1	2	3	4	5
gyakoriság	170	180	120	20	8	2

- (a) Modellezhető-e a mintában levő selejtek száma olyan binomiális eloszlással, melynek várható értéke a fentiekből számolt átlag?
- (b) Milyen eloszlással közelíthető a χ^2 eloszlás, ha a szabadsági fok nagyon nagy?

1. Egy boltos három helyről kap árut. Az elsőtől a készlet 30%-át, a másodiktól a 45%-át, a harmadiktól a többit szerzi be. Az elsőnél a termékek átlagosan 5%-a hibás, a másik kettőnél ez az arány csak 2%. Véletlenszerűen választunk egy terméket.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy nem hibás?
- (b) Feltéve, hogy hibás, mi a valószínűsége, hogy az első beszállítótól való?
- (c) Mit értünk események függetlensége alatt?

2. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1000}{x^3} & \text{ha } 10 < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

- (a) Határozzuk meg ξ várható értékét!
 - (b) Határozzuk meg ξ szórását!
 - (c) Van-e olyan binomiális eloszlású valószínűségi változó, melynek a várható értéke kevesebb, mint a szórása?
3. Egy gyér forgalmú útkereszteződésben a 10 perc alatt látott autók száma Poisson-eloszlással írható le. Annak valószínűsége, hogy 10 perc alatt egyetlen autót sem látunk kb. 0,05.
- (a) Mi a valószínűsége, hogy 10 perc alatt pontosan három autót látunk?
 - (b) Mi a valószínűsége, hogy 6 perc alatt legalább kettő autót látunk?
 - (c) Melyik diszkrét eloszlással áll közeli kapcsolatban a Poisson-eloszlás? Miért?
4. Egy normális eloszlású valószínűségi változó 0,6 valószínűséggel vesz fel tíznél nagyobb, és 0,2 valószínűséggel vesz fel nyolcnál kisebb értéket.
- (a) Határozzuk meg a várható értékét és a szórását!
 - (b) Egy normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke -20 , szórása 4. Adjuk meg a sűrűségfüggvényét!
5. Az egy túrós táskában található mazsolák száma Poisson-eloszlással modellezhető. Egy túrós táskában átlagosan 5 mazsola van. 100 napon keresztül minden nap vásárolunk egy túrós táskát és rendeltetésszerűen el is fogyasztjuk azt.
- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy legalább 480 mazsolát fogyasztunk el?
 - (b) Melyik tételt lehetett használni? Miért?
6. A színvakság és a nem összefüggését kutatták. A felmérés eredményei:

		színvakság	
		színvak	nem színvak
nem	férfi	36	964
	nő	19	981

- (a) Elfogadható-e 95%-os szignifikancia szinten az az állítás, hogy összefüggés van a színvakság és a nem között?
- (b) Mit jelent az elsőfajú hiba? Mennyi most ennek a valószínűsége?