



Dr. Égert János – Dr. Nagy Zoltán – Dr. Nagy Tamás – Aczél Ákos
SZE-MTK, Alkalmazott Mechanika Tanszék

Alkalmazott mérnöki rugalmasságtan

2013

Műszaki és természettudományos alapismeretek
tananyagainak fejlesztése a mérnökképzésben
Pályázati azonosító: TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0054



IMPRESSZUM

©COPYRIGHT: Dr. Égert János, Dr. Nagy Zoltán, Aczél Ákos, Dr. Nagy Tamás, Szüle Veronika
Széchenyi István Egyetem, Műszaki Tudományi Kar, Alkalmazott Mechanika Tanszék, Műszaki Tanárképző
Tanszék

Lektor: Dr. Szabó Tamás, egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Robert
Bosch Mechatronikai Tanszék

©Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)

A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon
másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

ISBN 978-963-7175-81-7

Kiadó: Széchenyi István Egyetem, Műszaki Tudományi Kar

Támogatás:

Készült a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0054 számú, "Műszaki és természettudományos alapismeretek
tananyagainak fejlesztése a mérnökképzésben" című projekt keretében.

Kulcsszavak: rugalmasságtan, alakváltozási állapot, a feszültségi állapot, főtengely probléma, rugalmasságtani
peremérték feladat, szilárdságtani méretezés és ellenőrzés, síkgörbe rudak, szabad csavarás, sík-alakváltozás,
általánosított síkfeszültségi állapot, forgásszimmetrikus feladat, vastagfalú csövek, gyorsan forgó tengelyek,
csőtengelyek, kör és körgyűrű alakú tárcsák, gyorsan forgó kör és körgyűrű alakú tárcsák, héjak membránelmélete

Tartalmi összefoglaló: A tananyag összeállításánál a szerzők arra törekedtek, hogy a rugalmasságtannak a
járműmérnöki és gépészmérnöki szakterület számára fontos, elsősorban a mérnöki gyakorlatban alkalmazható
fejezeteire térjenek ki. Erre utal a tananyag címében az „alkalmazott” jelző. A modulokra és azon belül

leckékre bontott elméleti tananyagot kidolgozott gyakorló feladatok egészítik ki, amelyek önálló gyakorlásra is lehetőséget biztosítanak. Az első modul a rugalmasságtani alapfogalmakat ismerteti. A második modul a szilárdságtani állapotokat: az elmozdulási állapotot, az alakváltozási állapotot, a feszültségi állapotot, az ehhez kapcsolódó főtengety problémát sajátérték feladatot, a deviátor és gömbi tenzorokat, a Mohr-féle feszültségi és alakváltozási kördiagramot és az általános Hooke – törvényt tárgyalja részletesen. A harmadik modul a méretezés és ellenőrzés kérdéseivel foglalkozik statikus terhelés esetén. Ismerteti a feszültségcsúcsra és a szerkezeti jellemzők alapján történő méretezés, ellenőrzés elméleteit és rúdszerkezetekre mutat be méretezési, ellenőrzési alkalmazásokat. A negyedik modul levezeti a rugalmasságtan egyenleteit: az egyensúlyi egyenleteket, a kinematikai /geometriai/ kompatibilitási egyenleteket, az anyagegyenleteket lineárisan rugalmas anyagra, valamint a peremfeltételeket és kitűzi a rugalmasságtani peremérték feladatot. Az ötödik modul az egyetemi alapképzésben nem tárgyalt két rúdfeladatra: a síkgörbe rudak hajlítására és prizmatikus rudak szabad csavarására tér ki. A hatodik modul a rugalmasságtan 2D feladatait tárgyalja: sík-alakváltozás, általánosított síkfeszültségi állapot, forgásszimmetrikus feladat, vastagfalú csövek, gyorsan forgó tengelyek, csőtengelyek, kör és körgyűrű alakú tárcsák, gyorsan forgó kör és körgyűrű alakú tárcsák feladatai. A hetedik modul pedig vékonyfalú forgáshéjak membránelméletével foglalkozik, amire gyakorlati példákat is bemutat. A tananyag függeléként matematikai összefoglalót és rudak egyszerű és összetett igénybevételének ismételését is tartalmazza.

Győr, 2013. június

Technikai megjegyzések a jegyzet használatához.

Ez a tananyag egy *elektronikus jegyzet*.

2013-ban, a megjelenés évében annyira elterjedtek az elektronikus tartalomfogyasztásra alkalmas eszközök, hogy bátran feltételezhetjük: az egyetemisták túlnyomó többsége rendelkezik saját számítógéppel, tablet-géppel vagy elektronikus könyvolvasóval. A tananyag elektronikus formája sok előnnyel rendelkezik a nyomtatotthoz képest:

- **Aktív tartalmak:** az elektronikus változatban belső kereszthivatkozások, külső linkek, mozgóképek, stb. helyezhetők el. A tartalomjegyzék fejezetszámai, az egyenlet- és ábraszámok automatikusan belső linket jelentenek, így biztosítják a kényelmes és gyors belső hivatkozást, de a Szerző tetszőleges helyre tud akár a dokumentum belsejébe, akár egy külső webhelyre mutató linket elhelyezni, ami a szokásos klikkintéssel aktivizálható.
- **Rugalmasság:** a nyomtatott könyv statikus, míg az elektronikus jegyzet esetében könnyű hibajavításokat, frissítéseket alkalmazni.
- **Erőforrás-takarékosság, környezetvédelem:** az elektronikus formában való terjesztés sokkal kisebb terhelést jelent a környezetre, mint a nyomtatott. Különösen igaz ez, ha a tananyagban sok a színes ábra.

A használt fájlformátum: *PDF*.

A Portable Document Format az **Adobe** által kifejlesztett formátum, mely igen széles körben elterjedt. Sok helyről szerezhetünk be programot, mely a PDF fájlok olvasására alkalmas. Ezek egy része azonban nem tartalmazza a teljes szabvány minden elemét, ezért speciális tartalmak nem, vagy nem pontosan jelenhetnek meg, ha nem az Adobe olvasóját, az AdobeReader-t használjuk. (Letölthető **innen**.)

A legtöbb megjelenítőprogram jól fogja kezelni az alapszöveget, ábrákat és linkeket, de gondok lehetnek a speciálisabb funkciókkal, pl. a beágyazott dokumentumok kezelésével, az aktív tesztek, kérdőívek használatával.

A jegyzet *képernyőn való megjelenítésre* lett optimalizálva.

A jelenlegi általánosan elérhető könyvolvasó hardverek mérete és felbontása kisebb, mint a nyomtatott könyveké és a számítógépek monitorai általában fektetett helyzetűek. Ehhez igazítottuk a formátumot arra optimalizálva, hogy fektetett kijelzőn teljes képernyős üzemmódban lehessen olvasni. Ehhez állítottuk be a karaktertípust és -méretet valamint azt is, hogy csak kis margót hagyunk, minél több pixelt biztosítva ezzel a tartalomnak. Azért, hogy teljes képernyős üzemmódban is lehessen navigálni, a margón kis navigáló-ikonokat helyeztünk el, melyek a megszokott módon kezelhetők:

- Lapozás előre és hátra: a függőleges oldalak közepén elhelyezett, nyújtott nyilakkal.
- Címoldalra ugrás: kis házikó szimbólum a bal felső sarokban.
- Vissza és előreugrás a dokumentumban: két kicsi szimbólum a bal felső részen. Ezek nem azonosak a lapozással, hanem a web-böngészők vissza- és előrelépéséhez hasonlóan a hiperlinkeken való navigálást szolgálják.

A jegyzet *segítséget nyújt a tanulás ütemezésében.*

A megtanulandó tananyag a szokásos fejezet-alfejezet felosztáson túl leckékre való bontást is tartalmaz. A leckék különböző számú alfejezetből állhatnak, de közös bennük, hogy a Szerző megítélés szerint egy lecke „együttő helyben” megtanulható, azaz várhatóan 1–1,5 óra alatt feldolgozható.

A leckék elején rövid leírás található a tárgyalt témakörökről, a szükséges előismeretekről, a végén pedig önellenőrző kérdések, melyek sok esetben a PDF fájlban (AdobeReader-rel) aktív tartalomként jelennek meg feleletkiválasztós teszt, számszerű vagy képletszerű kérdés formájában. Érdemes tehát leckénként haladni a tanulásban, mert ez segít az ütemezés tervezésében illetve a leckevegi ellenőrzések segítenek annak eldöntésében, tovább szabad-e haladni vagy inkább ezt vagy az előző leckéket kell újra elővenni.

Ha a tananyag indokolja, nagyobb egységeket „modulokba” szervezünk és a modulok végén a leckevegi önellenőrzéshez képest komolyabb feladatblokkot találhatunk.

Tartalom

I. MODUL | Alapfogalmak

1. Rugalmasságtani alapfogalmak

1. lecke

II. MODUL | Szilárdságtani állapotok

2. Szilárdságtani állapotok

2. lecke

2.1. Elmozdulási állapot

2.1.1. Elmozdulási állapot

2.1.2. Fajlagos relatív elmozdulási állapot

2.1.3. A fajlagos relatív elmozdulási állapot felbontása

2.2. Alakváltozási állapot

3. lecke

2.3. Feszültségi állapot, belső erőrendszer

4. lecke

2.4. Főtengely probléma \equiv sajátérték feladat

5. lecke

2.5. Deviátor és gömbi tenzorok

6. lecke

2.6. A Mohr-féle feszültségi kördiagram és alakváltozási kördiagram

7. lecke

2.7. Energia állapot

2.7.1. Alakváltozási energia

2.7.2. Mechanikai energia tétel

2.8. Az általános Hooke-törvény

8. lecke

III. MODUL | Méretezés, ellenőrzés statikus terhelés esetén

3. Méretezés, ellenőrzés statikus terhelés esetén

9. lecke

3.1. Méretezés, ellenőrzés feszültségcsúcsra

3.2. Méretezés, ellenőrzés szerkezeti jellemzők alapján

10. lecke

IV. MODUL | Rugalmassági egyenletek

4. Rugalmassági egyenletek

11. lecke

4.1. Egyensúlyi egyenletek – feszültségi állapot

4.2. Kinematikai (geometriai) kompatibilitási egyenletek

12. lecke

4.2.1. Az elmozdulásmező derivált tenzora

4.2.2. Az alakváltozási tenzor

4.2.3. A forgató tenzor

4.3. Anyagegyenletek – lineárisan rugalmas anyag

13. lecke

4.3.1. Általános Hooke-törvény izotróp anyagra

4.3.2. Általános Hooke-törvény ortotróp anyagra

4.4. Peremfeltételek, a rugalmasságtan egyenletrendszere

14. lecke

4.4.1. Peremfeltételek

4.4.2. A rugalmasságtan egyenletrendszere

4.5. A kompatibilitási egyenlet más alakjai

15. lecke

4.5.1. A Saint-Venant-féle kompatibilitási egyenlet

4.5.2. A Beltrami-Michell-féle kompatibilitási egyenlet

V. MODUL | Rúdfeladatok

5. Rúdfeladatok

16. lecke

5.1. Síkgörbe rudak hajlítása

5.2. Síkgörbe rudak Grashof-féle elmélete

5.2.1. Az alakváltozási jellemzők előállítása

5.2.2. A feszültség és az igénybevétel kapcsolata

5.2.3. Redukált másodrendű nyomaték

5.2.4. A *Grashof* elmélet alkalmazhatósága

5.2.5. A középvonal alakváltozási jellemzői

5.2.6. Az eredmények általánosítása

5.3. Prizmatikus rudak szabad csavarása

17. lecke

5.3.1. Egzakt megoldás - a rúd keresztmetszetének alakja tetszőleges

5.3.2. Közelítő megoldás

VI. MODUL | A rugalmasságtan 2D feladatai

6. A rugalmasságtan 2D feladatai

18. lecke

6.1. 2D feladatok egyenletei és definíciója

6.1.1. Sík alakváltozási feladat (SA)

6.1.2. Általánosított sík feszültségi feladat (ÁSF)

6.1.3. Forgásszimmetrikus/tengelyszimmetrikus feladatok (FSZ)

6.1.4. Síkfeladatok (SA, ÁSF feladat) megoldása feszültségfüggvény bevezetésével

6.1.5. Forgásszimmetrikus síkbeli feladatok

6.2. Vastagfalú csövek

19. lecke

6.2.1. Egyszerű vastagfalú cső

6.2.2. Összetett vastagfalú cső

6.3. A túlfedés következtében kialakuló állapot

6.4. Összetett vastagfalú cső külső és belső terheléssel

6.5. A túlfedés meghatározása

6.6. Optimális csőméretek

6.7. Gyorsan forgó tengelyek, csőtengelyek

20. lecke

6.7.1. A gyorsan forgó csőtengely diagramja

6.7.2. A gyorsan forgó tengely diagramja

6.8. Kör és körgyűrű alakú tárcsák

21. lecke

6.8.1. Furatos tárcsa

6.8.2. Túlfedéssel illesztett összetett furatos tárcsa

6.9. Gyorsan forgó kör és körgyűrű alakú tárcsák

22. lecke

6.9.1. Gyorsan forgó furatos tárcsa

6.9.2. Gyorsan forgó tömör tárcsa

6.9.3. Gyorsan forgó egyenszilárdságú tömör tárcsa

VII. MODUL | Vékony forgáshéjak membrán elmélete

7. Vékony forgáshéjak membrán elmélete

23. lecke

7.1. Alapfogalmak, egyenletek, példák

7.2. Példák héjak membrán feszültségi állapotának meghatározására

VIII. MODUL | F.I. FÜGGELÉK: MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

8. F.I. FÜGGELÉK: MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

- 8.1. Vektorok és vektorműveletek
- 8.2. Gyakorló feladatok vektorműveletekre
- 8.3. Mátrixalgebrai összefoglaló
- 8.4. Vektorok skaláris, kétszeres vektoriális, vegyes és diadikus szorzata
- 8.5. Mátrix sajátértékei és sajátvektorai
- 8.6. Tenzorok előállítása
- 8.7. Gyakorló feladatok mátrixokra, tenzorokra
- 8.8. Tenzorok kétszeres skaláris szorzata
- 8.9. Differenciálegyenletek
- 8.10. Koordináta-transzformáció

IX. MODUL | F.II. FÜGGELÉK: RUDAK EGYSZERŰ IGÉNYBEVÉTELEI

9. F.II. FÜGGELÉK: RUDAK EGYSZERŰ IGÉNYBEVÉTELEI

- 9.1. Alapfogalmak
- 9.2. Prizmatikus rúd húzása, zömök rudak nyomása
- 9.3. Húzott - nyomott rudak tönkremenetele
- 9.4. Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarása



- 9.5. Prizmatikus rudak egyenes hajlítása
 - 9.6. Gyakorló feladatok rudak egyszerű igénybevételeire
-

X. MODUL | F.III. FÜGGELÉK RUDAK ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEI

10. F.III. FÜGGELÉK RUDAK ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEI

- 10.1. Tönkremeneteli elméletek
- 10.2. Húzás – nyomás és egyenes hajlítás
- 10.3. Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak húzás – nyomása és csavarása
- 10.4. Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak hajlítása és csavarása
- 10.5. Ferde hajlítás
- 10.6. Nyírás és hajlítás
- 10.7. Gyakorló feladatok rudak összetett igénybevételeire

11. SZAKIRODALOM

BEVEZETÉS

A Rugalmasságtan tárgy a Széchenyi István Egyetem Műszaki Tudományi Karán a Járműmérnöki egyetemi mesterképzési (MSc) szak tantervében szereplő kötelező tantárgy.

A tantárgy az egyetemi alapképzés mechanika oktatását meghaladó színvonalon, igényes matematikai apparátus felhasználásával, rendkívül tömören, vázaltszerűen foglalja össze a járműmérnöki és gépészmérnöki munkához szükséges szilárdságtani és mérnöki (alkalmazott) rugalmasságtani fogalmaikat és összefüggéseket. Ezzel lehetőséget teremt az egyetemi alapképzést a járműmérnöki és a gépészmérnöki mesterszakon folytató hallgatóknak szilárdságtani ismereteik bővített, magasabb színvonalú megerősítésére, a kevesebb mechanikai ismeretet szerzett hallgatóknak pedig tudásuk egyetemi szintre hozására és kibővítésére, valamint a rugalmasságtan mérnöki szempontból érdekes néhány problémájának megismerésére. A tananyag összeállításánál a szerzők arra törekedtek, hogy a rugalmasságtannak a járműmérnöki és gépészmérnöki szakterület számára fontos, elsősorban a mérnöki gyakorlatban alkalmazható fejezeteire térjenek ki. Erre utal a tananyag címében az „alkalmazott” jelző.

Az elméleti tananyagot kidolgozott gyakorló feladatok, valamint további ki nem dolgozott gyakorló feladatok egészítik ki, amelyek önálló gyakorlásra is lehetőséget biztosítanak. Az önálló feladatmegoldásnak az elméleti anyag megértése és megtanulása, valamint a kidolgozott feladatok gondolatmenetének megértése után célszerű neki kezdeni. A tananyag elsajátítása folyamatos munkát igényel. A vizsgára történő eredményes felkészüléshez célszerű a tananyaggal heti 3-4 órát intenzíven foglalkozni.

A tananyag - az előadásokon, gyakorlatokon és konzultációkon történő részvételt feltételezve - segítséget szándékoznak nyújtani a nappali tagozatos hallgatóknak a tantárgy elsajátításához és a vizsgára történő eredményes felkészüléshez. Hasznos segédeszközök lehetnek azonban a levelező tagozatos egyetemi mesterképzésben résztvevő hallgatók számára is, akik nagyobb részt önállóan készülnek fel a félévközi házi feladatok megoldására és a vizsgára.

A szerzők ezen a helyen mondanak köszönetet Dr. Szabó Tamás tanszékvezető egyetemi docensnek, a tananyag lektorának hasznos és érdemi szakmai észrevételeiért, amelyek a tananyag végleges változatába beépültek.

Győr, 2013. január



I. MODUL

Alapfogalmak

1. LECKE

Rugalmasságtani alapfogalmak

1. Rugalmasságtani alapfogalmak

Cél: a hallgató megismerje a legfontosabb rugalmasságtani alapfogalmakat.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja fogalmazni a szilárdságtan, a terhelés, az alakváltozás, a test modell, a merevtest és a szilárdtest fogalmát;
2. fel tudja rajzolni a szilárdságtan felosztását szemléltető ábrát;
3. csoportosítani tudja az alakváltozás típusait és jellemzőit;
4. meg tudja fogalmazni a statikai és szilárdságtani egyenértékűség meghatározását;
5. rajz segítségével szemléltetni tudja a statikai és a szilárdságtani egyenértékűség különbségét;
6. meg tudja fogalmazni a Saint-Venant-elvet;
7. rajz segítségével szemléltetni tudja a Saint-Venant-elv lényegét;
8. fel tudja sorolni az elemi környezet szilárdságtani állapotainak megnevezését.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 25 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. szilárdságtan, terhelés, alakváltozás
2. test modell, merev test, szilárd test
3. Saint-Venant-elv
4. elmozdulási-, alakváltozási-, feszültségi-, energia állapot.

Aktivitás: Olvassa el a leckét! Jegyezze meg a definíciókat! Rajzolja le füzetébe az ábrákat! Keressen kapcsolatot az ábrák és a definíciók, meghatározások között!

Szilárdságtan: a terhelés előtt és után is tartós nyugalomban lévő, alakváltozásra képes testek kinematikája, dinamikája és anyagszerkezeti viselkedése.

Az értelmezésben előforduló kifejezések magyarázata:

Terhelés: az általunk vizsgált rendszerhez (testekhez) nem tartozó testekről származó ismert nagyságú hatás. Ez a hatás szilárd halmazállapotú testeknél általában felületi érintkezéssel valósul meg.

Terhelés \equiv ismert külső erőrendszer (ER).

A tartós nyugalom feltételei:

- a testre ható erőrendszer egyensúlyi,
- a test megtámasztása nem enged meg merevtestszerű elmozdulást.

Alakváltozás:

- a test pontjai terhelés hatására egymáshoz képest elmozdulnak és ezért
- anyagi, geometriai alakzatai (hossz, szög, felület, térfogat) megváltoznak.

Kinematika a szilárdságtanban: leírja a terhelés hatására a testben bekövetkező elmozdulásokat és alakváltozásokat.

Dinamika a szilárdságtanban: megadja az alakváltozás és a belső erőrendszer közötti kapcsolatot.

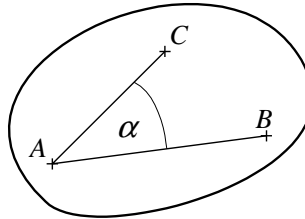
Anyagszerkezeti viselkedés a szilárdságtanban: megadja az alakváltozást jellemző mennyiségek és a belső erőrendszer közötti kapcsolatot.

A valóságos testek helyett modelleket vizsgálunk.

Test modell:

Olyan idealizált tulajdonságokkal rendelkező test, amely a valóságos test vizsgálata szempontjából leglényegesebb tulajdonságait tükrözi. A valóságos test lényegesnek tartott tulajdonságait megtartjuk, a lényegtelennek ítélt tulajdonságokat pedig elhanyagoljuk.

Például: merev test, szilárd test.

Merev test:

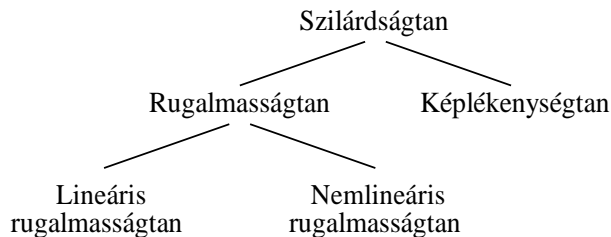
Bármely két pontjának távolsága állandó, a távolság terhelés hatására nem változik meg. A test pontjai (részei) egymáshoz képest terhelés hatására sem mozdulnak el. Pl. az \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} távolságok és az α szög nem változnak.

Szilárd test:

Alakváltozásra képes test. A test pontjainak távolsága, egyeneseinek egymással bezárt szöge terhelés hatására megváltozik. A test felületeinek és térfogatainak alakja és nagysága is megváltozik. Pl. az \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} távolságok és az α szög is megváltozik.

A szilárdságtan szilárd testek terhelés hatására történő viselkedését vizsgálja.

A szilárdságtan több részterületre osztható:



Rugalmas alakváltozás / rugalmas test:

A terhelés hatására alakváltozott szilárd test a terhelés megszüntetése (levétele) után visszanyeri eredeti alakját.

Lineárisan rugalmas alakváltozás:

A terhelés és alakváltozás, a belső erőrendszer (feszültségek) és az alakváltozás között lineáris kapcsolat van.



Nemlineárisan rugalmas alakváltozás:

A terhelés és alakváltozás, a belső erőrendszer (feszültségek) és az alakváltozás közötti kapcsolat nem lineáris.



Képlékeny alakváltozás / képlékeny test:

Az alakváltozott test tehermentesítés után nem nyeri vissza eredeti alakját.

A tantárgy lineárisan rugalmas testek kis elmozdulásaival és kis alakváltozásaival foglalkozik.

Kis elmozdulás: A test pontjainak elmozdulása nagyságrendekkel kisebb a test jellemző geometriai méreteinél.

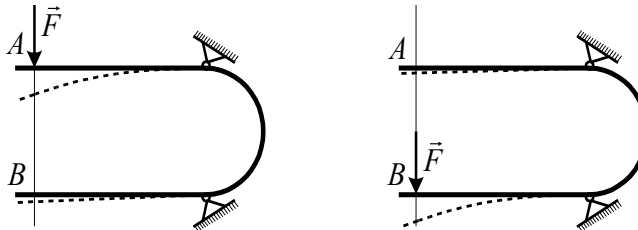
Kis alakváltozás: A test alakváltozását jellemző mennyiségek lényegesen kisebbek, mint 1. $\varepsilon \ll 1$, $\gamma \ll 1$. ($\varepsilon, \gamma \approx 10^{-3} - 10^{-5}$)

Erőrendszerek egyenértékűsége lehet: statikai, vagy szilárdságtani.

Statikai egyenértékűség: Két erőrendszer statikailag egyenértékű, ha azonos nyomatéki vektorteret hoznak létre.

Szilárdságtani egyenértékűség: Két, ugyanazon testre ható erőrendszer szilárdságtanilag egyenértékű, ha azok – a test egy kis részétől eltekintve – a testnek ugyanazt az alakváltozási állapotát hozzák létre.

Például:



Ez a két erőrendszer statikailag egyenértékű, szilárdságtanilag viszont nem.

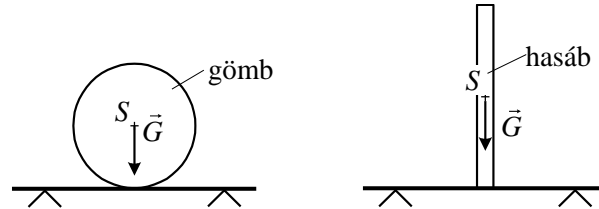
Az \vec{F} erő a nyomaték vonatkozásában hatásvonala mentén eltolható \Rightarrow a két erőrendszer statikailag egyenértékű.

A fenti szerkezet az \vec{F} erő támadáspontjától függően egészen másképpen alakváltozik (az ábrán szaggatott vonal) \Rightarrow a két erőrendszer szilárdságtanilag nem egyenértékű.

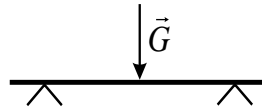
A Saint-Venant¹ (san vönan)-elv:

Szilárd test alakváltozásakor a test valamely ugyanazon kis felületén ható, nyomatéki terük vonatkozásában egyenértékű erőrendszerek - a kis felület közvetlen környezetének kivételével – jó közelítéssel ugyanazt az alakváltozási állapotot állítják elő.

Például:



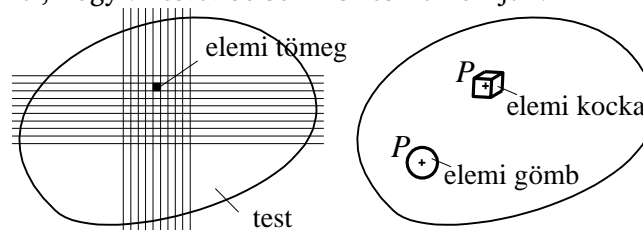
A tartóban, a terhelés környezetén kívül jó közelítéssel ugyanaz az alakváltozási állapot jön létre. A fenti két terhelés azonos módon modellezhető:



Elemi környezet / elemi tömeg:

Minden test ∞ sok tömegpontból felépülő rendszernek is tekinthető.

A tömegpontokhoz úgy jutunk el, hogy a testet ∞ sok kis részre bontjuk.



¹Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886) francia mérnök.

Tömegpontnak / elemi tömegnek / elemi környezetnek a szilárdságtanban egy olyan kis testrészt tekintünk, amelynek méretei a test méreteihez képest elhanyagolhatóan kicsik.

Az elemi környezet szilárdságtani állapotait az elemi környezet egy pontjához (a középpontjához) kötött mennyiségekkel írjuk le.

Elemi környezet szilárdságtani állapotai:

- elmozdulási állapot,
- alakváltozási állapot,
- feszültségi állapot,
- energia állapot.

Test szilárdságtani állapotai:

Az elemi környezetek szilárdságtani állapotainak összessége (halmaza).

A test szilárdságtani állapotait mezőkkel (terekkel) írjuk le.

Mező / tér: Az adott mennyiségeket a hely függvényében ismerjük.

Pl.: $\rho = \rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z)$, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x, y, z)$, vagy $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\vec{r}) = \underline{\underline{A}}(x, y, z)$.

Önellenőrzés

1. Mit nevezünk terhelésnek? Írja le egy papírra meghatározást!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
2. Határozza meg a szilárdságtan fogalmát! Írja le egy papírra meghatározást!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
3. Mit nevezünk alakváltozásnak? Írja le egy papírra meghatározást!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
4. Határozza meg a test modell fogalmát! Írja le egy papírra meghatározást!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
5. Mit nevezünk merev testnek? Írja le egy papírra meghatározást!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
6. Mit nevezünk szilárd testnek? Írja le egy papírra meghatározást!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
7. Rajzolja fel a szilárdságtan felosztását szemléltető ábrát!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

8. Kapcsolja össze a fogalmakat a megfelelő meghatározásokkal! Írja a fogalmak előtti kisbetűt a neki megfelelő meghatározás elé!

r: Rugalmas alakváltozás / rugalmas test

l: Lineárisan rugalmas alakváltozás

n: Nemlineárisan rugalmas alakváltozás

k: Képlékeny alakváltozás / képlékeny test

Jel

Meghatározás

A kapcsolat nem lineáris.

A terhelés és alakváltozás, a terhelés és a belső erőrendszer (ER) között lineáris kapcsolat van.

Az alakváltozott test tehermentesítés után nem nyeri vissza eredeti alakját.

A terhelés hatására alakváltozott szilárd test a terhelés megszüntetése (levétele) után visszanyeri eredeti alakját.

9. Mit nevezünk statikai egyenértékűségnek? Írja le egy papírra meghatározást!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

10. Mit nevezünk szilárdságtani egyenértékűségnek? Írja le egy papírra meghatározást!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

11. Készítsen magyarázó ábrát, ahol az erőrendszer statikailag egyenértékű, de szilárdságtanilag nem egyenértékű!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

12. Ismertesse a Saint-Venant-elvet! Írja le egy papírra meghatározást!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)



13. Készítsen magyarázó ábrát, a Saint-Venant-elv szemléltetésére! Rajzolja fel az azonos terhelési modellt is!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
14. Sorolja fel az elemi környezet szilárdságtani állapotait Írja le egy papírra a 4 nevet!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

II. MODUL

Szilárdságtani állapotok

2. LECKE

Elmózdulási állapot

2. Szilárdságtani állapotok

Cél: a hallgató megismerje az elmozdulási állapotot leíró összefüggéseket és a fajlagos relatív elmozdulási állapot jellemzőit.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. fel tudja írni az elmozdulási állapotot leíró összefüggéseket;
2. fel tudja sorolni, hogy egy P pont elemi környezetének elmozdulása milyen részekre bontható;
3. fel tudja rajzolni a fajlagos elmozdulási állapotot szemléltető ábrát;
4. fel tudja írni az elmozdulásmező derivált tenzorát diadikus és mátrixos alakban;
5. fel tudja írni a derivált tenzor felbontását szimmetrikus és ferdeszimmetrikus részre;
6. rajz segítségével szemléltetni tudja a fajlagos relatív elmozdulási állapotot;
7. adatok alapján meg tudja határozni adott pontok elmozdulás és relatív elmozdulás vektorait.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 35 percre lesz szüksége.

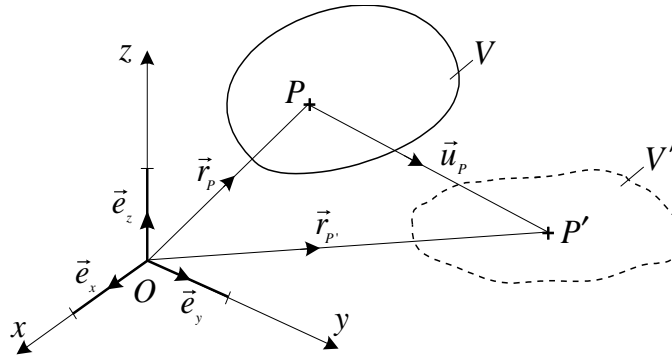
Kulcsfogalmak:

1. elmozdulási állapot, elmozdulásmező, skaláris koordináta, fajlagos relatív elmozdulási állapot
2. derivált tenzor, szimmetrikus-, ferdeszimmetrikus rész

2.1. Elmozdulási állapot

2.1.1. Elmozdulási állapot

Aktivitás: Olvassa el a bekezdést! Írja fel az egy pont elmozdulását megadó egyenletet! Írja fel az elmozdulásmező egyenletét! Írja fel az elmozdulás-mező skaláris koordinátáit!



A terhelés utáni geometriai alakzatokat vesszővel jelöljük.

\vec{u}_P - a test tetszőleges P pontjának elmozdulás vektora.

$$\vec{r}_{P'} = \vec{r}_P + \vec{u}_P \Rightarrow \vec{u}_P = \vec{r}_{P'} - \vec{r}_P.$$

Pont / elemi környezet elmozdulási állapotának jellemzése:

A P pont elmozdulásvektora: $\vec{u}_P = u_P \vec{e}_x + v_P \vec{e}_y + w_P \vec{e}_z$. *Test elmozdulási állapotának jellemzése:*

A test elmozdulásmezője:

$$\vec{u}(x,y,z) = u(x,y,z) \vec{e}_x + v(x,y,z) \vec{e}_y + w(x,y,z) \vec{e}_z.$$

$$u(\vec{r}) = u(x,y,z),$$

$$v(\vec{r}) = v(x,y,z),$$

$$w(\vec{r}) = w(x,y,z).$$

} az elmozdulásmező skaláris koordinátái.

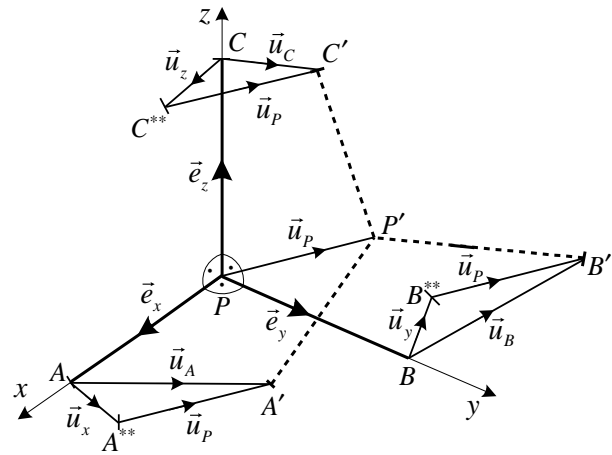
2.1.2. Fajlagos relatív elmozdulási állapot

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Rajzolja fel a P pont elemi környezetének elmozdulását szemléltető ábrát! Írja fel az elemi triéder végpontjainak fajlagos relatív elmozdulás vektorait! Írja fel az elmozdulásmező derivált tenzorát mátrixos és diadikus alakban!

Elemi triéder: A P pontban felvett terhelés előtt egymásra merőleges $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ egységvektor hármas.

Feltételezzük, hogy az elemi triéder a P pont elemi környezetén belül helyezkedik el.



A P pont elemi környezetének elmozdulása felbontható:

- párhuzamos eltolásra és
- fajlagos relatív elmozdulásra.

Párhuzamos eltolás : \vec{u}_P .

A P pontra vonatkoztatott relatív elmozdulások:

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_x &= \vec{u}_A - \vec{u}_P \\ \vec{u}_y &= \vec{u}_B - \vec{u}_P \\ \vec{u}_z &= \vec{u}_C - \vec{u}_P \end{aligned} \right\} \text{ az elemi triéder végpontjainak fajlagos relatív elmozdulás vektorai.}$$

Relatív, mert a P ponthoz viszonyított.

Fajlagos, mert a P ponttól egységnyi távolságra lévő pontok elmozdulása.

Az elemi triéder mozgása:

$$PABC \xrightarrow{\text{relatív elmozdulás}} PA^{**}B^{**}C^{**} \xrightarrow{\text{párhuzamos eltolás}} P'A'B'C'.$$

Célkitűzés: meg akarjuk határozni a P elemi környezetében, a P -től egységnyi távolságra levő tetszőleges N pont relatív fajlagos elmozdulását.

Az \vec{n} - a P -ből az N pontba mutató helyvektor (egységvektor).

$|\vec{n}| = 1 \Rightarrow$ az N pontok a P középpontú egységnyi sugarú gömbfelületen helyezkednek el.

\vec{n} hozzárendelés (leképezés) \vec{u}_n .

Az elmozdulásmező derivált tenzora:

- Diadikus előállítás: $\underline{\underline{D}}_P = \vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z$.

- Mátrixos előállítás: $\left[\underline{\underline{D}}_P \right] = \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{bmatrix}$, nem szimmetrikus tenzor.

A derivált tenzor egyértelműen jellemzi a P pont környezetének fajlagos, relatív elmozdulási állapotát.

A $\underline{\underline{D}}$ derivált tenzor fizikai tartalma: megadja a P pont elemi környezetében az elmozdulás hely szerinti megváltozását.

Az N pont fajlagos relatív elmozdulásvektora: $\vec{u}_n = \underline{\underline{D}}_P \cdot \vec{n}$.

2.1.3. A fajlagos relatív elmozdulási állapot felbontása

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel a derivált tenzor felbontását szimmetrikus és ferdeszimmetrikus részre! Rajzolja fel a fajlagos relatív elmozdulási állapotot szemléltető ábrát!

Minden tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy ferdeszimmetrikus részre.

$$\text{A derivált tenzor felbontása: } \underline{\underline{D}}_P = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{D}}_P + \underline{\underline{D}}_P^T \right)}_{\underline{\underline{A}}_P} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{D}}_P - \underline{\underline{D}}_P^T \right)}_{\underline{\underline{\Psi}}_P} .$$

szimmetrikus rész ferdeszimmetrikus rész

Tetszőleges N pont fajlagos, relatív elmozdulásának felbontása:

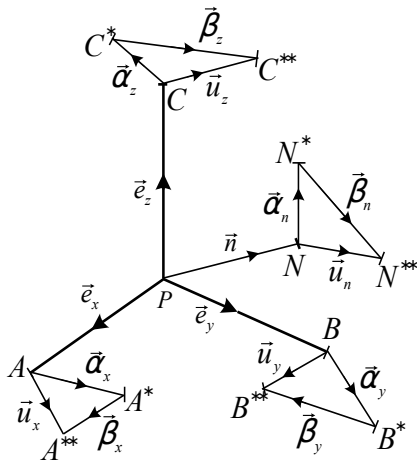
$$\vec{u}_n = \underline{\underline{D}}_P \cdot \vec{n} = \left(\underline{\underline{A}}_P + \underline{\underline{\Psi}}_P \right) \cdot \vec{n} = \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n} + \underline{\underline{\Psi}}_P \cdot \vec{n} = \vec{\alpha}_n + \vec{\beta}_n .$$

Az N a P pont elemi környezetében levő pont: $\overline{PN} = |\vec{n}| = 1$.

Az N pont *alakváltozási vektora*: $\vec{\alpha}_n = \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n}$, ahol $\underline{\underline{A}}_P$ a P pont alakváltozási tenzora.

Az N pont *merevtestszerű forgási vektora*: $\vec{\beta}_n = \underline{\underline{\Psi}}_P \cdot \vec{n}$, ahol $\underline{\underline{\Psi}}_P$ a P pont merevtestszerű forgási tenzora.

A fajlagos relatív elmozdulási állapot szemléltetése:



$$|\vec{n}| = 1,$$

$$\vec{u}_n = \vec{\alpha}_n + \vec{\beta}_n,$$

$$\vec{u}_x = \vec{\alpha}_x + \vec{\beta}_x,$$

$$\vec{u}_y = \vec{\alpha}_y + \vec{\beta}_y,$$

$$\vec{u}_z = \vec{\alpha}_z + \vec{\beta}_z.$$

$PABC \xrightarrow{\text{alakváltozás}} PA^*B^*C^* \xrightarrow{\text{mervetestszerű forgás}} PA^{**}B^{**}C^{**}.$

Gyakorló feladatok

Tevékenység:

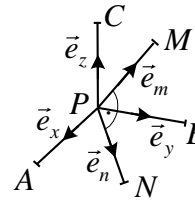
Kövesse végig a megoldást! Önállóan is végezze el a számításokat!

A P pont elemi környezetének relatív elmozdulási állapota

Adott: A szilárd test P pontjában a derivált tenzor:

$$\left[\underline{\underline{D}}_P \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} 10^{-3}, \vec{e}_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_z \right),$$

$$\vec{e}_m = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_z \right), |\vec{e}_m| = |\vec{e}_n| = 1.$$



Feladat:

- Az A , B és C pontok relatív elmozdulás vektorainak meghatározása.
- Az \vec{e}_n egységvektor végpontjában levő N pont relatív elmozdulás vektorának meghatározása.
- Az \vec{e}_m egységvektor végpontjában levő M pont relatív elmozdulás vektorának meghatározása.

Kidolgozás:

- Az A , B és C pontok relatív elmozdulás vektorainak meghatározása:

A relatív elmozdulás vektorok a derivált tenzor oszlopaiban álló elemek:

$$\vec{u}_A = (2 \vec{e}_x + 4 \vec{e}_z) \cdot 10^{-3}, \vec{u}_B = (2 \vec{e}_y - 4 \vec{e}_z) \cdot 10^{-3}, \vec{u}_C = (-2 \vec{e}_x - 4 \vec{e}_z) \cdot 10^{-3}.$$

b) Az \vec{e}_n egységvektor végpontjában levő N pont relatív elmozdulás vektorának meghatározása:

$$[\vec{u}_N] = \left[\underline{\underline{D}}_P \right] \cdot [\vec{e}_n] = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} 10^{-3}.$$

$$\vec{u}_N = \left(\sqrt{2} \vec{e}_x + \sqrt{2} \vec{e}_y + \sqrt{2} \vec{e}_z \right) \cdot 10^{-3}.$$

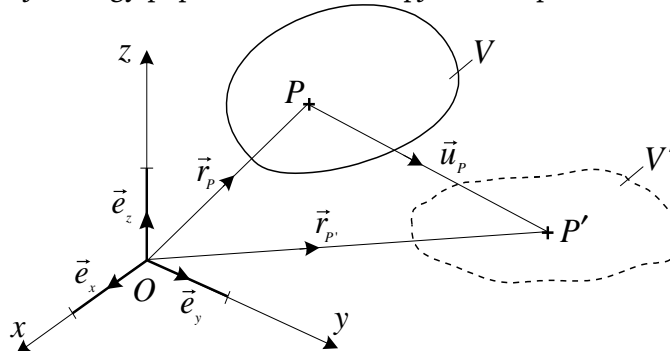
c) Az \vec{e}_m egységvektor végpontjában levő M pont relatív elmozdulás vektorának meghatározása:

$$[\vec{u}_M] = \left[\underline{\underline{D}}_P \right] \cdot [\vec{e}_m] = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} \end{bmatrix} 10^{-3},$$

$$\vec{u}_M = \left(-\sqrt{2} \vec{e}_x + \sqrt{2} \vec{e}_y - 3\sqrt{2} \vec{e}_z \right) \cdot 10^{-3}.$$

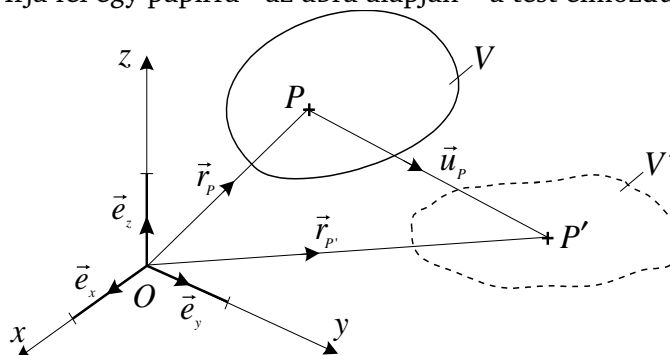
Önellenőrzés

1. Írja fel egy papírra - az ábra alapján - a P pont elmozdulásvektorát!



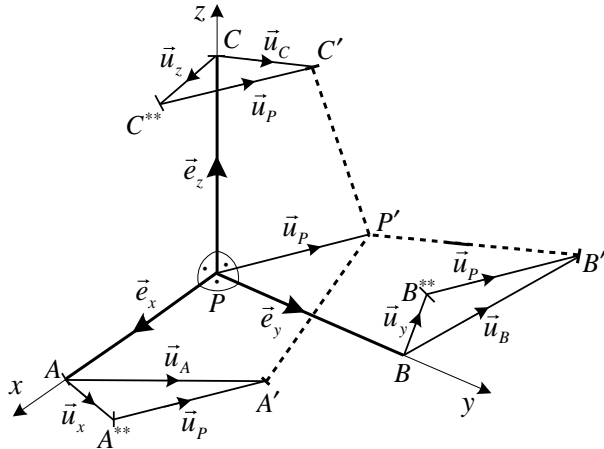
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

2. Írja fel egy papírra - az ábra alapján - a test elmozdulásmezőjét!



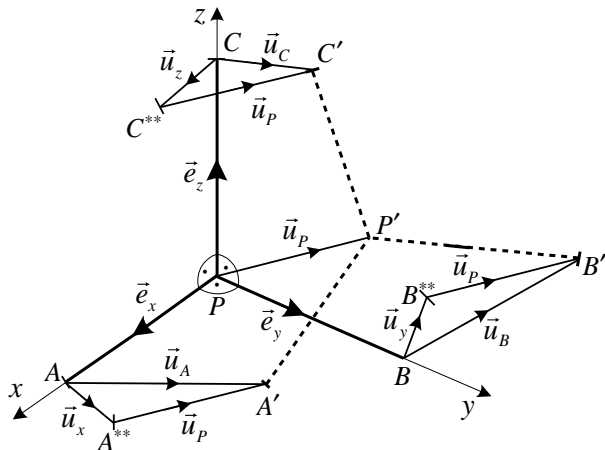
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

3. Írja fel egy papírra - az ábra alapján – az elmozdulásmező derivált tenzorát diadikus alakban!



A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

4. Írja fel egy papírra - az ábra alapján – az elmozdulásmező derivált tenzorát mátrixos alakban!

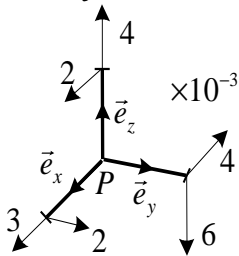


A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

5. Írja fel egy papírra - az ábra alapján – a derivált tenzor felbontását szimmetrikus és ferdeszimmetrikus részre! Jelölje a részeket!

A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

6. A P pont elemi környezetének relatív elmozdulási állapota. Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



Adott: A P pont környezetének fajlagos relatív elmozdulás állapota szemléltetése az elemi triéderen.

Feladat:

- a) A $\underline{\underline{D}}_P$ derivált tenzor felírása szimbolikus és mátrixos alakban.
 b) A $\underline{\underline{\Psi}}_P$ forgató tenzor felírása szimbolikus és mátrixos alakban.

- a) A $\underline{\underline{D}}_P$ derivált tenzor felírása szimbolikus és mátrixos alakban:

I./ Határozza meg/írja fel a $\underline{\underline{D}}_P$ derivált tenzort szimbolikus alakban!

Írja fel egy papírra a szimbolikus alakot!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

II./ Határozza meg/írja fel a $\underline{\underline{D}}_P$ derivált tenzort mátrixos alakban!

Írja be a hiányzó adatokat (egész számokat). Csak a negatív előjelet adja meg!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

- b) A $\underline{\underline{\Psi}}_P$ forgató tenzor felírása szimbolikus és mátrixos alakban:

III./ Határozza meg/írja fel a $\underline{\underline{\Psi}}_P$ forgató tenzort szimbolikus alakban!

Írja fel egy papírra a szimbolikus alakot!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

IV./ Határozza meg/írja fel a $\underline{\underline{\Psi}}_P$ forgató tenzort mátrixos alakban!

Írja be a hiányzó adatokat (egész számokat). Csak a negatív előjelet adja meg!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

3. LECKE

Alakváltozási állapot

2.2. Alakváltási állapot

Cél: a hallgató megismerje az alakváltási állapot fogalmait, valamint meg tudja határozni egy pont elemi környezetének alakváltási állapotát.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja határozni az elemi környezet alakváltási állapotához tartozó fogalmakat,
2. meg tudja határozni az alakváltási jellemzőket, előjeleiket, mértékegységüket,
3. fel tudja írni az alakváltási tenzort,
4. fel tudja írni az alakváltási vektorok koordinátáit,
5. ki tudja számítani egy pont elemi környezetének alakváltási állapotát,
6. ábrázolni tudja az elemi triéderen az alakváltási állapotot.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 35 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

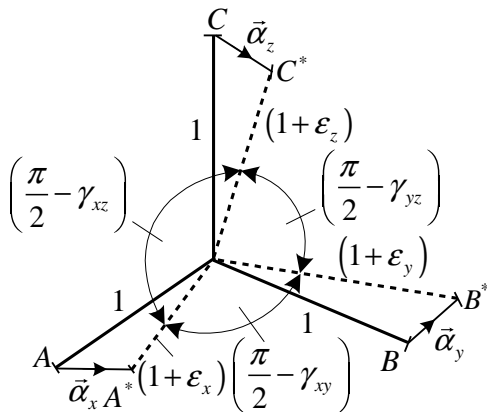
1. elemi környezet alakváltása, alakváltás,
2. alakváltási jellemzők, fajlagos nyúlások, fajlagos szögtorzulások, alakváltási tenzor, diadikus előállítás, mátrixos előállítás, szimmetrikus tenzor.

Alakváltozási állapot

Tevékenység: Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki, majd tanulja meg az alakváltozási jellemzőket, előjeleiket, mértékegységüket! Írja fel és tanulja meg az alakváltozási tenzor alakjait! Írja fel és tanulja meg az alakváltozási tenzor koordinátáit! Rajzolja fel az elemi triédert! Szemléltesse elemi triéder segítségével az alakváltozási állapotot!

Az alakváltozási állapot során megváltozik a P pontra illeszkedő \vec{n} egységvektorok hossza és egymással bezárt szöge.

Az elemi triéder alakváltozása: $PABC \rightarrow PA^*B^*C^*$.



Megváltozott
hosszak:

$$\overline{PA^*} = 1 + \vec{\varepsilon}_x,$$

$$\overline{PB^*} = 1 + \vec{\varepsilon}_y,$$

$$\overline{PC^*} = 1 + \vec{\varepsilon}_z,$$

Megváltozott
szögek:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right),$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xz}\right),$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{yz}\right).$$

Az értelmezésből következik:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}.$$

Alakváltozási jellemzők: - fajlagos nyúlások : $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

- fajlagos szögváltozások : $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$.

Előjel: $\varepsilon > 0$ megnyúlás, $\varepsilon < 0$ megrövidülés,

$\gamma > 0$ ha az eredeti 90° -os szög csökken, $\gamma < 0$ ha az eredeti 90° -os szög nő.

Mértékegység: ε : mm/mm=1, γ : rad=1.

Kis alakváltozás: $\varepsilon = 10^{-3} \sim 10^{-4}, \gamma = 10^{-3} \sim 10^{-4}$

Az alakváltozási tenzor:

- Diadikus előállítás: $\underline{\underline{A}}_P = \vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z .$

- Mátrixos előállítás:
$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} . \quad \left. \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \end{array} \right\} \text{szimmetrikus tenzor.}$$

 $\vec{\alpha}_x \quad \vec{\alpha}_y \quad \vec{\alpha}_z$

Az alakváltozási tenzor a derivált tenzor szimmetrikus része – hat egymástól független skaláris koordinátával adható meg.

Az alakváltozási tenzor oszlopaiban az alakváltozási vektorok koordinátái találhatóak.

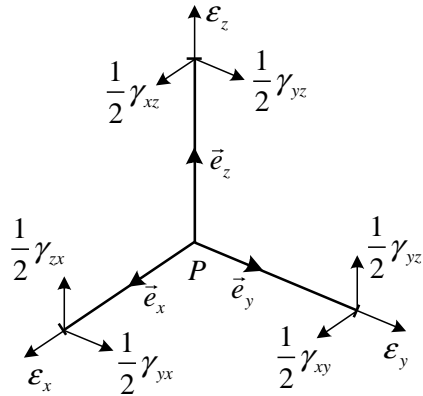
Az alakváltozási vektorok:

$$\vec{\alpha}_x = \varepsilon_x \vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yx} \vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zx} \vec{e}_z ,$$

$$\vec{\alpha}_y = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \vec{e}_x + \varepsilon_y \vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zy} \vec{e}_z ,$$

$$\vec{\alpha}_z = \frac{1}{2}\gamma_{xz} \vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yz} \vec{e}_y + \varepsilon_z \vec{e}_z .$$

Az alakváltozási állapot szemléltetése:



Az alakváltozási jellemzők számítása:

$$\varepsilon_n = \vec{n} \cdot \vec{\alpha}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n},$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\alpha}_n = \vec{\alpha}_m \cdot \vec{n} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{m}.$$

A test alakváltozási állapota: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\vec{r}) = \underline{\underline{A}}(x, y, z).$

A test alakváltozási állapota alakváltozási tenzormezővel jellemezhető.

Gyakorló feladatok

Tevékenység:

Kövesse végig a megoldást! Önállóan is végezze el a számításokat!

P pont elemi környezetének alakváltozási állapota

Adott: A *P* pont elemi környezetében az alakváltozási jellemzők és egy irány egységvektora:

$$\varepsilon_x = 5 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_y = 4 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_z = 10 \cdot 10^{-3},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = -10 \cdot 10^{-3}, \quad \vec{e}_n = 0,8 \vec{e}_x + 0,6 \vec{e}_z.$$

Feladat:

- Az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzor mátrixának a felírása és a pontbeli alakváltozási állapot szemléltetése az elemi triéderen.
- Az ε_n fajlagos nyúlás és γ_{ny} fajlagos szögtorzulás meghatározása.

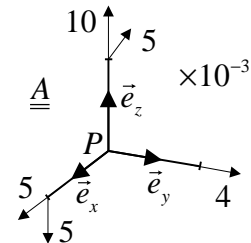
Kidolgozás:

- Az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzor mátrixának a felírása és a pontbeli alakváltozási állapot szemléltetése az elemi triéderen:

Az alakváltozási tenzor:

$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix} 10^{-3}.$$

Az alakváltozási állapot szemléltetése:



b) Az ε_n fajlagos nyúlás és γ_{ny} fajlagos szögtorzulás meghatározása:

$$\vec{\alpha}_n = \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n},$$

$$[\vec{\alpha}_n] = [\underline{\underline{A}}_P] \cdot [\vec{n}] = 10^{-3} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0 \\ 0,6 \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 4 - 3 \\ 0 \\ -4 + 6 \end{bmatrix}, [\vec{\alpha}_n] = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\varepsilon_n = \vec{e}_n \cdot \vec{\alpha}_n = [0,8 \quad 0 \quad 0,6] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} 10^{-3} = (0,8 + 1,2) 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3},$$

$$\gamma_{ny} = 2 \vec{e}_y \cdot \vec{\alpha}_n = 0.$$

Önellenőrzés

1. Egészítse ki a következő meghatározást a megfelelő szavakkal (2 db)!

Az alakváltozási jellemzők:

- fajlagos

: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z,$

- fajlagos

: $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}.$

2. Válassza ki a helyes megoldást!

Az alakváltozási tenzor helyes alakja:

$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \frac{1}{2}\gamma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & 1 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_z \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & 1 \end{bmatrix}$$

3. Válassza ki a helyes megoldást!

Az alakváltozási tenzor:

ferde szimmetrikus

szimmetrikus

a főátlóban mindig nulla van

a főátlóban csak egyesek lehetnek

alakjára nincs szabály

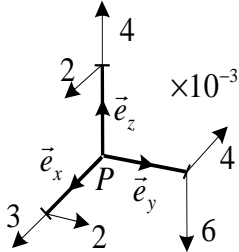
4. Írja fel egy papírra az alakváltozási vektorokat!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

5. Rajzolja fel/szemléltesse az alakváltozási állapotot!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

6. A P pont elemi környezetének alakváltozási állapota. Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



Adott: A P pont környezetének fajlagos relatív elmozdulás állapotának szemléltetése az elemi triéderen.

Feladat:

a) Az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzor felírása szimbolikus és mátrixos alakban.

a) Az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzor felírása szimbolikus és mátrixos alakban.

I./ Határozza meg/írja fel az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzort szimbolikus alakban!

Írja fel egy papírra a szimbolikus alakot!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

II./ Határozza meg/írja fel az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzort mátrixos alakban!

Írja be a hiányzó adatokat (egész számokat). Csak a negatív előjelet adja meg!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

III./ Szemléltesse az alakváltozási állapotot az elemi triéderen!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

4. LECKE

Feszültségi állapot, belső erőrendszer

2.3. Feszültségi állapot, belső erőrendszer

Cél: a hallgató megismerje a feszültségi állapot fogalmait valamint meg tudja határozni egy elemi pont környezetének feszültségi állapotát.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja határozni a feszültségi állapot fogalmait,
2. meg tudja határozni a feszültségvektor, pontbeli feszültségi állapot fogalmát,
3. fel tudja sorolni a feszültségvektor összetevőit,
4. fel tudja írni a feszültségvektor koordinátáit,
5. fel tudja írni a feszültségi tenzort,
6. ábrázolni tudja a feszültségvektorokat az elemi kockán,
7. feszültségi tenzorból elő tudja állítani a más irányokhoz tartozó feszültségkoordinátákat,
8. meg tudja határozni a feszültségi főtengely és a főfeszültség definícióját,
9. fel tudja írni a főirányok koordináta-rendszerében a feszültségi tenzort,
10. ábrázolni tudja a főirányok koordináta-rendszerében a feszültségeket,
11. ki tudja számítani egy pontban a feszültségvektorokat,
12. ábrázolni tudja a pont feszültségi állapotát az elemi kockán,
13. ki tudja számítani a feszültségkoordinátákat.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 35 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. feszültségvektor, sűrűségvektor, pontbeli feszültségi állapot
2. normál feszültségvektor, csúsztató feszültségvektor, normál feszültségi koordináta, csúsztató feszültségi koordináta, feszültségi tenzor, homogén lineáris függvény, szimmetrikus tenzor
3. feszültségi főtengelek, főfeszültségek

Feszültségi állapot, belső erőrendszer

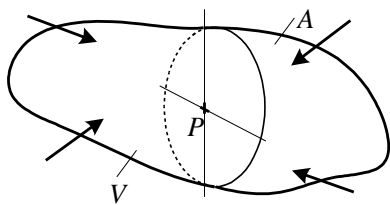
Tevékenység: Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki, majd tanulja meg a feszültségi állapothoz tartozó fogalmakat! Rajzolja fel a feszültségvektor összetevőit!

A belső erőrendszert úgy tudjuk vizsgálni, ha a testet gondolatban részekre bontjuk és az így keletkezett testrészek egyensúlyát vizsgáljuk.

Feltételezés: Az egész testre egyensúlyi erőrendszer hat.

Egyensúlyi erőrendszer = terhelések + támasztó erőrendszer.

A testet a P pontra illeszkedő síkkal vágjuk ketté. A P ponton át végtelen sok sík vehető fel.

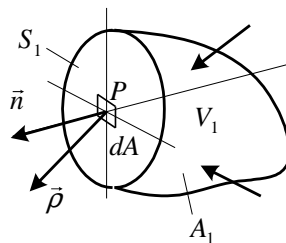
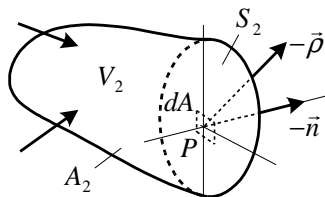


$$(V) = (V_1) + (V_2)$$

$$(A) = (A_1) + (A_2)$$

$$(S_1) \equiv (S_2)$$

V – a test térfogata,
 A – a test külső felülete,
 S_1, S_2 – a metszetsfelület.



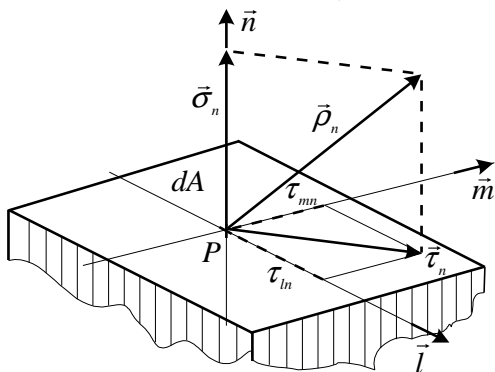
A szétvágás után az egyes részek egyensúlya akkor biztosított, ha az (S_1) és (S_2) felületen belső erőrendszer lép fel.

Feszültségvektor: Az (S_1) és (S_2) metszetsfelületen megoszló belső erőrendszer sűrűségvektora.

$\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{r}, \vec{n})$, ahol \vec{r} a P pont helyvektora és \vec{n} az (S_1) sík normális egységvektora.

Pontbeli feszültség állapot ($\vec{r} = \text{állandó}$): $\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{n}) = \vec{\rho}_n$, $\vec{\rho}_{-n} = -\vec{\rho}_n$.

\vec{n} – a dA elemi felület kifelé mutató normálisa,
 \vec{l}, \vec{m} – az elemi felület síkjába eső egységvektorok.



Tevékenység: Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki, majd tanulja meg a feszültségvektor összetevőit! Írja fel a feszültségvektor koordinátáit! Tanulja meg a feszültség mértékegységét!

A feszültségvektor összetevői, koordinátái:

Összetevők: - Normál feszültségvektor: $\vec{\sigma}_n = \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{\rho}_n)}_{\sigma_n} \vec{n}$.

- Csúsztató feszültségvektor: $\vec{\tau}_n = \vec{\rho}_n - \sigma_n \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{\rho}_n) \times \vec{n}$

Koordináták: - Normál feszültségi koordináta: $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{n}$.

- Csúsztató feszültségi koordináták: $\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{m} \cdot \vec{\tau}_n$, $\tau_{ln} = \vec{l} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{l} \cdot \vec{\tau}_n$.

Mértékegység: $\frac{N}{m^2} = \text{Pascal}^2$ (paszkál), $\frac{N}{mm^2} = \frac{MN}{m^2} = \text{MPa}$ (megapaszkál).

² Blaise Pascal (1623-1662) francia természettudós.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel a feszültségi tenzort! Írja fel a feszültségvektorok koordinátáit! Ábrázolja a feszültségvektorokat az elemi kockán!

Feszültségi tenzor:

A test P pontjában a $\vec{\rho}_n$ feszültségvektor az \vec{n} lineáris homogén függvénye : $\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}$.

- Diadikus előállítás: $\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z$.

- Mátrixos előállítás:

$$\underline{\underline{[F]}} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array} \right] \\ \hline \vec{\rho}_x \quad \vec{\rho}_y \quad \vec{\rho}_z \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \end{array} \right\} \text{ szimmetrikus tenzor.}$$

Az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor mátrixa hat darab független skalár mennyiséggel adható meg.

A feszültségvektorok koordinátái: $\vec{\rho}_x = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_x = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{yx} \vec{e}_y + \tau_{zx} \vec{e}_z$,

$$\vec{\rho}_y = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_y = \tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z ,$$

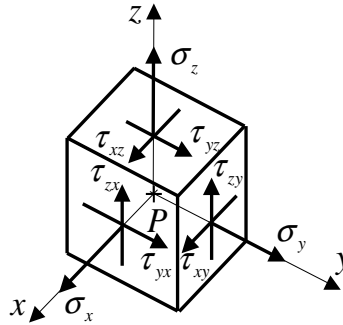
$$\vec{\rho}_z = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z .$$

Előírt irányokhoz tartozó feszültségkoordináták számítása:

$$\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}, \sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} ,$$

$$\tau_{mn} = \tau_{nm} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{m} .$$

A P ponti feszültségi állapot szemléltetése:



Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Tanulja meg a feszültségi főtengetyek, főfeszültségek definícióját! Írja fel a főirányok koordináta-rendszerében a feszültségi tenzort!

Feszültségi főtengetyek, főfeszültségek:

Ha az \vec{e} egységvektorra merőleges elemi felületen $\vec{\tau}_e = \vec{0}$ s $\Rightarrow \vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e}$, akkor az \vec{e} feszültségi főtengety (feszültségi főirány), σ_e főfeszültség és az \vec{e} -re merőleges elemi felület síkja főfeszültségi sík.

Megjegyzések:

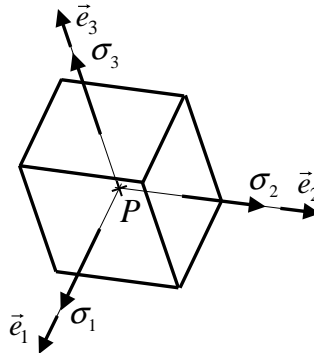
- σ_e is lehet zérus $\Rightarrow \vec{\rho}_e = \vec{0}$.
- Minden P pontban létezik legalább három főirány, melyek kölcsönösen merőlegesek egymásra.

Feszültségi állapot a főteengelyek koordináta-rendszerében:

$$\underline{[F]}_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Megállapodás a főfeszültségek jelölésére:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$



Gyakorló feladatok

Tevékenység:

Kövesse végig a megoldást! Önállóan is végezze el a számításokat!

P pont elemi környezetének feszültségi állapota

Adott: A P pontban az \underline{F}_P feszültségi tenzor és három, egymásra kölcsönösen merőleges irány.

$$\underline{[F]}_P = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa,}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{3}\vec{e}_x + \frac{2}{3}\vec{e}_y + \frac{2}{3}\vec{e}_z, \quad \vec{m} = -\frac{2}{3}\vec{e}_x - \frac{1}{3}\vec{e}_y + \frac{2}{3}\vec{e}_z, \quad \vec{l} = \frac{2}{3}\vec{e}_x - \frac{2}{3}\vec{e}_y + \frac{1}{3}\vec{e}_z$$

$$|\vec{n}| = |\vec{m}| = |\vec{l}| = 1, \quad \vec{n} \cdot \vec{m} = \vec{l} \cdot \vec{m} = \vec{n} \cdot \vec{l} = 0.$$

- Feladat:** a) A P pontban a $\vec{\rho}_x, \vec{\rho}_y, \vec{\rho}_z$ feszültségvektorok meghatározása.
 b) A pontbeli feszültségi állapot szemléltetése az elemi kockán.
 c) A P pontban a $\vec{\rho}_n$ feszültségvektor és a $\sigma_n, \tau_{nm}, \tau_{nl}$ feszültség koordináták meghatározása.

Kidolgozás:

- a) A P pontban a $\vec{\rho}_x, \vec{\rho}_y, \vec{\rho}_z$ feszültségvektorok meghatározása:

$$[\vec{\rho}_x] = \left[\underline{\underline{F}}_P \right] [\vec{e}_x] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ -40 \end{bmatrix} \text{ MPa,}$$

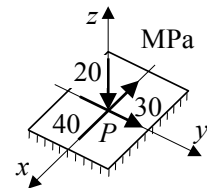
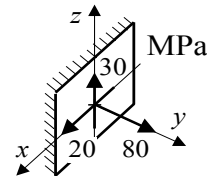
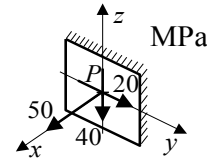
$$\vec{\rho}_x = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{xy} \vec{e}_y + \tau_{xz} \vec{e}_z = (50\vec{e}_x + 20\vec{e}_y - 40\vec{e}_z) \text{ MPa.}$$

$$[\vec{\rho}_y] = \left[\underline{\underline{F}}_P \right] [\vec{e}_y] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} \text{ MPa,}$$

$$\vec{\rho}_y = \tau_{yx} \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{yz} \vec{e}_z = (20\vec{e}_x + 80\vec{e}_y + 30\vec{e}_z) \text{ MPa.}$$

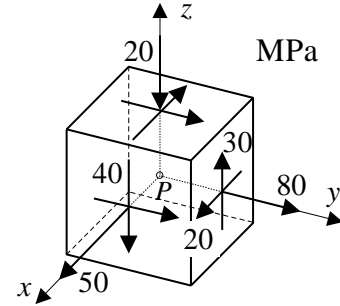
$$[\vec{\rho}_z] = \left[\underline{\underline{F}}_P \right] [\vec{e}_z] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ 30 \\ -20 \end{bmatrix} \text{ MPa,}$$

$$\vec{\rho}_z = \tau_{zx} \vec{e}_x + \tau_{zy} \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z = (-40\vec{e}_x + 30\vec{e}_y - 20\vec{e}_z) \text{ MPa.}$$



b) A feszültségi állapot szemléltetése az elemi kockán:

Az elemi kocka \vec{e}_x normálisú lapjára a $\vec{\rho}_x$ koordinátáit, az \vec{e}_y normálisú lapra a $\vec{\rho}_y$ koordinátáit, a \vec{e}_z normálisú lapra pedig a $\vec{\rho}_z$ koordinátáit rajzoljuk fel.



c) A P pontban a $\vec{\rho}_n$ feszültségvektor és a $\sigma_n, \tau_{mn}, \tau_{ln}$ feszültség koordináták meghatározása:

$$[\vec{\rho}_n] = [\underline{F}_P][\vec{n}] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & -40 \\ 20 & 80 & 30 \\ -40 & 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/3 + 40/3 - 80/3 \\ 20/3 + 160/3 + 60/3 \\ -40/3 + 60/3 - 40/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 80 \\ -20/3 \end{bmatrix} \text{ MPa,}$$

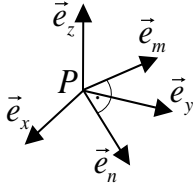
$$\sigma_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{n} = \left[\frac{10}{3} \quad 80 \quad -\frac{20}{3} \right] \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \frac{10}{9} + \frac{160}{3} - \frac{40}{9} = 50 \text{ MPa,}$$

$$\tau_{ln} = \tau_{nl} = \vec{\rho}_n \cdot \vec{l} = \left[\frac{10}{3} \quad 80 \quad -\frac{20}{3} \right] \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \frac{20}{9} - \frac{160}{3} - \frac{20}{9} = -\frac{160}{3} \text{ MPa,}$$

$$\tau_{mn} = \tau_{nm} = \vec{\rho}_n \cdot \vec{m} = \left[\frac{10}{3} \quad 80 \quad -\frac{20}{3} \right] \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = -\frac{20}{9} - \frac{80}{3} + \frac{40}{9} = -\frac{100}{3} \text{ MPa.}$$

7. P pont elemi környezetének feszültségi állapota

Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



Adott:

$$\sigma_x = -60 \text{ MPa}, \sigma_z = 60 \text{ MPa}, \tau_{xz} = 60 \text{ MPa}, \tau_{yz} = 0,$$

$$\vec{e}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y, \quad \vec{e}_m = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y,$$

$$\sigma_n = -85 \text{ MPa}, \tau_{mn} = 15 \text{ MPa}.$$

Feladat: a) A σ_y normál feszültség és a τ_{xy} csúsztató feszültség meghatározása.

b) A τ_{zn} csúsztató feszültség meghatározása.

a) A σ_y normál feszültség és a τ_{xy} csúsztató feszültség meghatározása

I./ Írja fel a feszültségi tenzort az ismert és ismeretlen koordinátákkal!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

II. / Írja fel a feszültségi tenzort mátrixát!

Adja meg a koordinátákat az alábbi formában! Az eredmények egész számok! Csak a negatív előjelet adja meg!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

III./ Rajzolja fel az elemi kockán az eredményt!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

b) A τ_{zn} csúsztató feszültség meghatározása
Válassza ki a helyes megoldást!

$$\tau_{zn} =$$

32,4 MPa

42,3 MPa

21,4 MPa

16,9 MPa

57,1 MPa

5. LECKE

Főtengely probléma \equiv sajátérték feladat

2.4. Főtengely probléma \equiv sajátérték feladat

Cél: a hallgató megismerje a főtengely probléma megoldásának módját.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja határozni a főtengely probléma matematikai módszerét,
2. fel tudja írni a főtengely feladatot feszültségi és alakváltozási állapot esetén,
3. fel tudja írni az egységtenzort,
4. fel tudja írni a karakterisztikus egyenletet,
5. fel tudja írni a karakterisztikus egyenlet megoldásait,
6. fel tudja írni a feszültségi tenzor skalár invariánsait,
7. meg tudja határozni a főirányokat.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 30 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. főtengely probléma, sajátérték feladat
2. homogén, lineáris algebrai egyenletrendszer
3. nemtriviális megoldás, determináns
4. karakterisztikus egyenlet
5. skalár invariáns
6. főirány, főfeszültség

Főtengely probléma \equiv sajátérték feladat

Tevékenység: Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki, majd tanulja meg a feladatkitűzés módját!

A főtengely probléma matematikai szempontból sajátérték feladatnak tekinthető.

A feladat kitűzése:

Feszültségi állapot esetén:

$$\begin{aligned}\vec{\rho}_e &= \sigma_e \vec{e}, \\ \underline{F} \cdot \vec{e} &= \sigma_e \underline{E} \cdot \vec{e}, \\ (\underline{F} - \sigma_e \underline{E}) \cdot \vec{e} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Alakváltozási állapot esetén:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_e &= \varepsilon_e \vec{e}, \\ \underline{A} \cdot \vec{e} &= \varepsilon_e \underline{E} \cdot \vec{e}, \\ (\underline{A} - \varepsilon_e \underline{E}) \cdot \vec{e} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Az egységtenzor:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A főtengely probléma azonos módon írható fel a feszültségi és az alakváltozási állapot esetén.

Az \vec{e} egységvektor koordinátáira nézve mindkét esetben homogén, lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk.

Kérdés: Van-e olyan \vec{e} irány, mely kielégíti a fenti egyenleteket?

Válasz: Van, legalább három.

Elnevezés: \vec{e} – főirány/főtengely irány egységvektora, σ_e – főfeszültség, ε_e – főnyúlás.

Tevékenység: Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki, majd tanulja meg karakterisztikus egyenletet, a karakterisztikus egyenlet megoldásait! Írja fel/jegyezze meg a skaláris invariánsok alakját!

A homogén lineáris algebrai egyenletrendszer nemtriviális megoldásának feltétele:

(Itt csak a feszültségi állapotra mutatjuk be a megoldást, az alakváltozási állapotra a megoldás gondolatmenete azonos.)

$$\det \left[\underline{F} - \sigma_e \underline{E} \right] = 0.$$

A determináns részletesen felírva:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_e) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_e) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst kifejtve \Rightarrow karakterisztikus egyenlet: $\sigma_e^3 - F_I \sigma_e^2 + F_{II} \sigma_e - F_{III} = 0$.

A karakterisztikus egyenlet megoldásai: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ főfeszültségek.

A karakterisztikus egyenlet együtthatói, a feszültségi tenzor skaláris invariánsai:

$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ - az első skalár invariáns,

$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix}$ - a második skalár invariáns,

$F_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$ - a harmadik skalár invariáns.

Invariáns: Olyan mennyiség, amely a koordináta transzformáció során nem változik.

Főirányok meghatározása:

A $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ főfeszültségeket visszahelyettesítjük a homogén, lineáris algebrai egyenletrendszerbe és megoldjuk az egyenletrendszert az irányvektor koordinátáira.

$$\sigma_1 \rightarrow \vec{e}_1, \quad \sigma_2 \rightarrow \vec{e}_2, \quad \sigma_3 \rightarrow \vec{e}_3.$$

A három egyenlet nem független egymástól \Rightarrow az egyenletrendszerből csak az \vec{e}_i irányvektor koordinátáinak aránya határozható meg.

Az egyértelmű megoldáshoz szükséges a pótlólagos feltétel: $e_{ix}^2 + e_{iy}^2 + e_{iz}^2 = 1, (i = 1,2,3)$.

A feltétel geometriai tartalma, hogy az \vec{e}_i legyen egységvektor, $|\vec{e}_i| = \sqrt{e_{ix}^2 + e_{iy}^2 + e_{iz}^2} = 1$.

Gyakorló feladatok

Tevékenység:

Kövesse végig a megoldást! Önállóan is végezze el a számításokat!

Feszültségi főirányok, főfeszültségek

Adott: A szilárd test P pontjában az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor mátrixának elemei: $\sigma_x = -20$ MPa, $\sigma_y = 30$ MPa, $\sigma_z = 90$ MPa, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = -40$ MPa, $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ MPa.

Feladat:

- A főfeszültségek és a feszültségi főirányok meghatározása sajátérték feladat megoldásával.
- Az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor F_I, F_{II} és F_{III} skalár invariánsainak kiszámítása.

Kidolgozás:

- A főfeszültségek és a feszültségi főirányok meghatározása sajátérték feladat megoldásával

Az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor mátrixa:
$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix} \text{ MPa .}$$

- A sajátérték feladat megoldása:

$$(\underline{F} - \sigma \underline{E}) \vec{e} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (-20 - \sigma) e_x + 0 + 0 = 0, \\ 0 + (30 - \sigma) e_y - 40 e_z = 0, \\ 0 - 40 e_y + (90 - \sigma) e_z = 0. \end{cases}$$

A karakterisztikus egyenlet: $\det |\underline{F} - \sigma \underline{E}| = 0$,

$$(-20 - \sigma) [(30 - \sigma)(90 - \sigma) - 40^2] = 0 \Rightarrow \sigma_e = -20 \text{ MPa.}$$

$$2700 - 90\sigma - 30\sigma + \sigma^2 - 1600 = 0,$$

$$\sigma^2 - 120\sigma + 1100 = 0,$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása: $\sigma_{1,2} = \frac{120 \pm \sqrt{14400 - 4400}}{2} = \frac{120 \pm 100}{2} = \langle \begin{matrix} 110, \\ 10. \end{matrix} \right.$

A főfeszültségek: $\sigma_1 = 110 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 10 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = \sigma_x = -20 \text{ MPa}$.

- Főirányok meghatározása:

Mivel $\sigma_x = \sigma_3 = -20$ MPa főfeszültség, ezért $\vec{e}_3 = \vec{e}_x$,

A σ_1 főfeszültség visszahelyettesítése a lineáris algebrai egyenletrendszerbe:

$$\begin{aligned}
 (\underline{F} - \sigma_1 \underline{E}) \vec{e}_1 = 0 &\Rightarrow \begin{aligned} (-20 - \sigma_1) e_{1x} + 0 + 0 &= 0 \\ 0 + (30 - \sigma_1) e_{1y} - 40 e_{1z} &= 0 \\ 0 - 40 e_{1y} + (90 - \sigma_1) e_{1z} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} (-20 - 110) e_{1x} + 0 + 0 &= 0 \\ 0 + (30 - 110) e_{1y} - 40 e_{1z} &= 0 \\ 0 - 40 e_{1y} + (90 - 110) e_{1z} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{aligned} -130 e_{1x} + 0 + 0 &= 0 \\ 0 + -80 e_{1y} - 40 e_{1z} &= 0 \\ 0 - 40 e_{1y} + -20 e_{1z} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} e_{1x} &= 0 \\ e_{1z} &= -2 e_{1y} , \\ e_{1z} &= -2 e_{1y} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$|\vec{e}_1| = 1 = \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2} = \sqrt{e_{1y}^2 + 4e_{1y}^2} = \sqrt{5} e_{1y} \Rightarrow e_y = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Az első főirány irány egységvektora: $\vec{e}_1 = \left(0 \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_y - \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_z\right) = (0,447 \vec{e}_y - 0,894 \vec{e}_z)$.

A második főirány:

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_x \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_y - \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_z\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_z\right) = (0,894 \vec{e}_y + 0,447 \vec{e}_z).$$

Önellenőrzés

1. Írja fel egy papírlapra a karakterisztikus egyenletet!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
2. Írja fel egy papírlapra a karakterisztikus egyenlet megoldásait!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
3. Írja fel egy papírlapra a karakterisztikus egyenlet együtthatóit:
 - a./ az első skalár invariáns
 - b./ a második skalár invariáns
 - c./ a harmadik skalár invariánsA megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

4. A P pontban a főfeszültségek és a feszültségi főirányok meghatározása
Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!

Adott: $\underline{\underline{F}}_P = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix}$ MPa.

Feladat: A P pontbeli főfeszültségek és feszültségi főirányok meghatározása.

I./ Határozza meg a karakterisztikus egyenlet megoldását!

Írja be a hiányzó egész számot! Csak negatív számoknál írjon előjelet!

A karakterisztikus egyenlet megoldása: $\sigma_3 =$

MPa.

II./ Határozza meg a σ_3 főfeszültséghez tartozó feszültségi főirányt!

A megoldást írja le egy papírlapra!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

III./ Határozza meg a karakterisztikus egyenlet σ_1, σ_2 megoldását!

Írja be a hiányzó egész számot! Csak negatív számoknál írjon előjelet!

$\sigma_1 =$ MPa

$\sigma_2 =$ MPa

IV. Határozza meg az 1. főirányt!

A megoldást írja le egy papírlapra!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

V. Határozza meg a 2. főirányt!

A megoldást írja le egy papírlapra!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

6. LECKE

Deviátor és gömbi tenzorok

2.5. Deviátor és gömbi tenzorok

Cél: a hallgató megismerje a deviátor- és gömbi tenzorok jellemzőit.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja határozni a deviátor és gömbi tenzor jelentését,
2. fel tudja írni a feszültségi- és alakváltozási deviátor tenzor értelmezését,
3. fel tudja sorolni a feszültségi és az alakváltozási tenzor részeit,
4. fel tudja írni a közepes feszültséget és a közepes nyúlást meghatározó összefüggéseket,
5. meg tudja határozni a deviátor tenzorok tulajdonságait.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 20 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. deviátor-, gömbi tenzor
2. torzulás, térfogatváltozás
3. első skalár invariáns

Főtengely probléma \equiv sajátérték feladat

Tevékenység: Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki, majd tanulja meg a feszültségi- és alakváltozási deviátor tenzor értelmezését! Jegyezze meg a feszültségi és az alakváltozási tenzor részeit! Jegyezze meg a deviátor tenzor tulajdonságait!

Értelmezés:

Feszültségi deviátor tenzor:

$$\underline{\underline{F}}_d = \underline{\underline{F}} - \sigma_k \underline{\underline{E}}.$$

Alakváltozási deviátor tenzor:

$$\underline{\underline{A}}_d = \underline{\underline{A}} - \varepsilon_k \underline{\underline{E}}.$$

Közepes feszültség:

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{F_I}{3}.$$

Közepes nyúlás:

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{A_I}{3}.$$

Átrendezve:

$$\underline{\underline{F}} = \underbrace{\underline{\underline{F}}_d}_{\text{deviátoros rész}} + \underbrace{\sigma_k \underline{\underline{E}}}_{\text{gömbi rész}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\underline{\underline{A}}_d}_{\text{tisztá torzulás}} + \underbrace{\varepsilon_k \underline{\underline{E}}}_{\text{tisztá térfogatváltozás}}$$

A feszültségi és az alakváltozási tenzor is felbontható tiszta torzulási (deviátoros) és tiszta térfogatváltozási (gömbi) részre.

A deviátor tenzorok tulajdonságai: $F_{d_I} = 0$, $A_{d_I} = 0$. (A deviátor tenzorok első skalár invariánsa zérus.)

Gyakorló feladatok

Tevékenység:

Kövesse végig a megoldást! Önállóan is végezze el a számításokat!

A P pont elemi környezetének feszültségi állapota

Adott:

A szilárd test P pontjában az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor mátrixa.

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 20 & 50 \\ 20 & -40 & 0 \\ 50 & 0 & 130 \end{bmatrix} \text{ MPa .}$$

Feladat:

- Az $\underline{\underline{F}}_d$ feszültségi deviátor tenzor mátrixának meghatározása.
- A feszültségi deviátor tenzor F_{dI} és F_{dII} skalár invariánsainak meghatározása.
- A karakterisztikus egyenlet felírása.

Kidolgozás:

- Az $\underline{\underline{F}}_d$ feszültségi deviátor tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{F}}_d] = [\underline{\underline{F}}] - \frac{F_I}{3} [\underline{\underline{E}}], \text{ ahol } F_I \text{ az } \underline{\underline{F}} \text{ feszültségi tenzor első skalár invariánsa:}$$

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 60 - 40 + 130 = 150 \text{ MPa.}$$

$$[\underline{\underline{F}}_d] = \begin{bmatrix} f_{d11} & f_{d12} & f_{d13} \\ f_{d21} & f_{d22} & f_{d23} \\ f_{d31} & f_{d32} & f_{d33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 20 & 50 \\ 20 & -40 & 0 \\ 50 & 0 & 130 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 50 \\ 20 & -90 & 0 \\ 50 & 0 & 80 \end{bmatrix} \text{ MPa .}$$

b) A feszültségi deviátor tenzor F_{dI} és $F_{d_{II}}$ skalár invariánsainak meghatározása:

$$F_{dI} = f_{d_{11}} + f_{d_{22}} + f_{d_{33}} = 10 - 90 + 80 = 0 \text{ MPa},$$

$$F_{d_{II}} = \begin{vmatrix} f_{d_{22}} & f_{d_{23}} \\ f_{d_{32}} & f_{d_{33}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{d_{11}} & f_{d_{13}} \\ f_{d_{31}} & f_{d_{33}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{d_{11}} & f_{d_{12}} \\ f_{d_{21}} & f_{d_{22}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -90 & 0 \\ 0 & 80 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 50 \\ 50 & 80 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 20 & -90 \end{vmatrix} = -10200 \text{ MPa}^2.$$

c) A karakterisztikus egyenlet felírása:

$$\sigma_e^3 - F_I \sigma_e^2 + F_{II} \sigma_e - F_{III} = 0, \text{ ahol}$$

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 60 - 40 + 130 = 150 \text{ MPa},$$

$$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 0 \\ 0 & 130 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 60 & 50 \\ 50 & 130 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 60 & 20 \\ 20 & -40 \end{vmatrix} = -2700 \text{ MPa}^2,$$

$$F_{III} = \begin{vmatrix} 60 & 20 & 50 \\ 20 & -40 & 0 \\ 50 & 0 & 130 \end{vmatrix} = -264000 \text{ MPa}^3.$$

A karakterisztikus egyenlet: $\sigma_e^3 - 150 \sigma_e^2 - 2700 \sigma_e + 264000 = 0.$

Önellenőrzés

1. Írja fel egy papírlapra a feszültségi deviátor tenzor értelmezését!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
2. Írja fel egy papírlapra az alakváltozási deviátor tenzor értelmezését!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
3. Írja fel a közepes feszültséget meghatározó összefüggést!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
4. Írja fel a közepes nyúlást meghatározó összefüggést!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
5. Egészítse ki a következő mondatot a szükséges kifejezésekkel!
A feszültségi és az alakváltozási tenzor is felbontható
részre.
6. Egészítse ki a következő mondatot a szükséges kifejezésekkel!
A feszültségi és az alakváltozási tenzor is felbontható **tiszta torzulási**, azaz
és **tiszta térfogatváltozási**, azaz részre.
7. Válassza ki a helyes megoldást!
A deviátor tenzorok tulajdonságai:

$$F_{d_I} > 0, \quad A_{d_I} = 0.$$

$$F_{d_I} = 0, \quad A_{d_I} < 0.$$

$$F_{d_I} < 0, \quad A_{d_I} < 0.$$

$$F_{d_I} = 0, \quad A_{d_I} = 0.$$

$$F_{d_I} > 0, \quad A_{d_I} > 0.$$

7. LECKE

A Mohr-féle feszültségi kördiagram és alakváltozási kördiagram

2.6. A Mohr-féle feszültségi kördiagram és alakváltozási kördiagram

Cél: a hallgató megismerje a Mohr-féle feszültségi és alakváltozási kördiagram jellemzőit és alkalmazását, az energia állapot és energia tétel jellemzőit.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja határozni, hogy mit szemléltet a Mohr-féle feszültségi kördiagram,
2. fel tudja sorolni a Mohr-féle feszültségi kördiagram szerkesztésének lépéseit/gondolatmenetét,
3. adatokból meg tudja szerkeszteni a Mohr-féle feszültségi kördiagramot,
4. meg tudja határozni a főfeszültségeket a kördiagram alapján,
5. meg tudja határozni a főirányokat a kördiagram alapján,
6. fel tudja írni a fajlagos alakváltozási energiát, torzulási energiát, térfogatváltozási energiát meghatározó összefüggéseket,
7. meg tudja határozni a mechanikai energia tételt és ennek jellemzőit.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 40 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. Mohr-féle feszültségi és alakváltozási kördiagram, alakváltozási kördiagram
2. főfeszültség, főirány
3. fajlagos alakváltozási energia, torzulási energia, térfogatváltozási energia
4. mechanikai energia tétel

1. A Mohr-féle feszültségi kördiagram és alakváltozási kördiagram

Tevékenység: Olvassa el a bekezdést! Kövesse végig a kördiagrammal kapcsolatos leírást! Tanulmányozza a kördiagramot szemléltető ábrát! Egyeztesse a jelöléseket a levezetéssel és a különféle adatokkal!

a) A feszültségi kördiagram:

A Mohr³ (mór) -féle feszültségi kördiagram a P pontbeli feszültségi állapotot szemlélteti a $\sigma_n, |\tau_n|$ síkon.

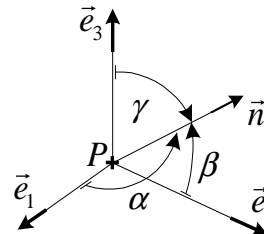
Legyen ismert az $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ feszültségi főirány.

A P pontban felvett tetszőleges normális egységvektor:

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{e}_1 + \cos \beta \vec{e}_2 + \cos \gamma \vec{e}_3.$$

A szemléltetés alapja:

$$\vec{\rho}_n \rightarrow N \text{ pont a } \sigma_n, |\tau_n| \text{ síkon.}$$

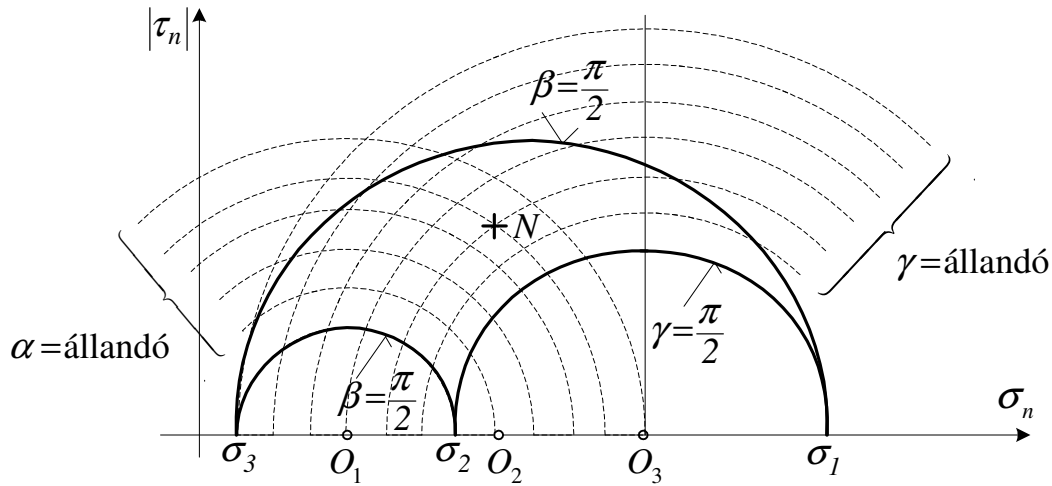


Bizonyítható:

- A $\gamma =$ állandó normálisok $\vec{\rho}_n$ feszültségvektoraihoz tartozó N pontok a $\sigma_n, |\tau_n|$ síkon félkörívét alkotnak.
- Ez a megállapítás az $\alpha =$ állandó és $\beta =$ állandó feltételek esetén is igaz.
- A főfeszültségi síkokba eső normálisok $\vec{\rho}_n$ feszültségvektoraihoz tartozó N pontok a $\sigma_n, |\tau_n|$ síkon félkörívét alkotnak. Például: az $(\vec{e}_1 \vec{e}_2)$ sík normálisai: $\gamma = 90^\circ$.

³ Christian Otto Mohr (1835-1918) német építőmérnök.

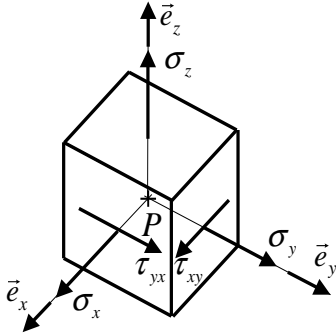
A kördiagram:



A tetszőleges \vec{n} irányhoz tartozó $\vec{\rho}_n$ feszültségvektornak megfelelő N pontok a folytonos félkörívekkel határolt tartományon belül vannak.

Tevékenység: Olvassa el a bekezdést! Kövesse végig a szerkesztés gondolatmenetét! Jegyezze meg a szerkesztés lépéseit! Végezze el adatok alapján a szerkesztést!

Kördiagram szerkesztése, ha egy főfeszültség (például a σ_z) ismert:



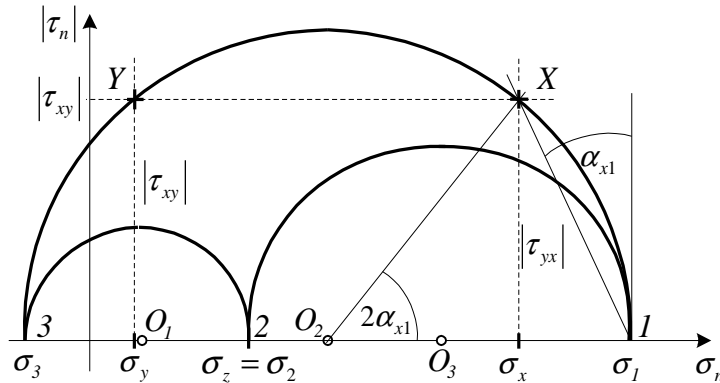
Az \vec{e}_z feszültségi főirány \Rightarrow az xy sík feszültségi fősíka (nincs $\vec{\tau}_z$ csúsztató feszültség)

\Downarrow

A kördiagramban az X, Y pontok egy félkörön (főkörön) helyezkednek el.

\Downarrow

Az X, Y pontokra fektetett félkör határozza meg az x, y síkba eső σ_1, σ_3 főfeszültségi pontokat / irányokat.



A szerkesztés gondolatmenete:

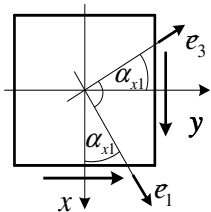
- Felvesszük az X, Y pontokat. Koordinátáik: $\sigma_x, |\tau_{xy}|$, illetve $\sigma_y, |\tau_{xy}|$.
- Meghatározzuk a félkör O_2 középpontját : $\sigma_{O_2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$.
- Megrajzoljuk az X, Y pontokon átmenő, O_2 középpontú félkört $\Rightarrow \sigma_1, \sigma_3$.
- A $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ főfeszültségek ismeretében megrajzoljuk a másik két félkört.

Tevékenység: Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a főfeszültségek és a főirányok meghatározásának módszerét, a szükséges összefüggéseket!

A főfeszültségek meghatározása a kördiagramból:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \sigma_2 = \sigma_z, \sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

A főirányok meghatározása a kördiagramból:



A kördiagramból: $\operatorname{tg} 2\alpha_{x1} = \frac{2|\tau_{xy}|}{|\sigma_x - \sigma_y|}$.

A τ csúsztató feszültségek mindig a σ növekedésének irányában mutatnak.

↓

Az α_{x1} szög felmérésének iránya.

Tevékenység: Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg az alakváltozási kördiagram jellemzőit!

b) Az alakváltozási kördiagram:

A Mohr-féle alakváltozási kördiagram a P pontbeli alakváltozási állapotot szemlélteti az $\varepsilon_n, \left|\frac{1}{2}\gamma_{mn}\right|$ síkon.

A Mohr-féle alakváltozási kördiagramra minden ugyanúgy érvényes, mint a Mohr-féle feszültségi kördiagramra.

Gyakorló feladatok

Tevékenység:

Kövesse végig a megoldást! Önállóan is végezze el a szerkesztést és a számításokat!

Mohr-féle feszültségi kördiagram

Adott:

A szilárd test P pontjában az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor mátrixa, továbbá $\nu = 0,3$, $G = 0,8 \cdot 10^5$ MPa.

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 40 \\ 0 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

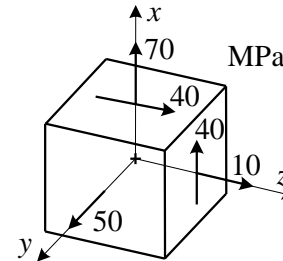
Feladat:

- A P pont feszültségi állapotának szemléltetése az elemi kockán.
- A P pont feszültségi állapotának szemléltetése *Mohr*-féle feszültségi kördiagrammal.
- A főfeszültségek és a főirányok meghatározása a *Mohr*-féle feszültségi kördiagramból.

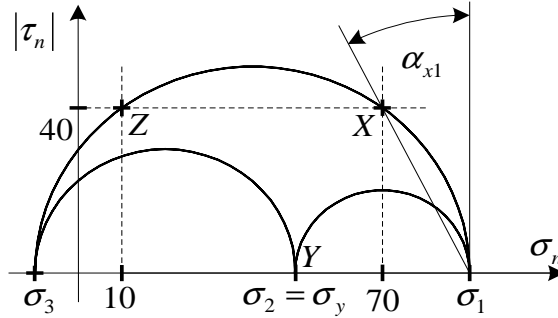
Kidolgozás:

- A P pont feszültségi állapotának szemléltetése az elemi kockán:

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 40 \\ 0 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ MPa .}$$



b) A P pont feszültségi állapotának szemléltetése *Mohr*-féle kördiagrammal:



c) A főfeszültségek és a főirányok meghatározása a *Mohr*-féle kördiagramból:

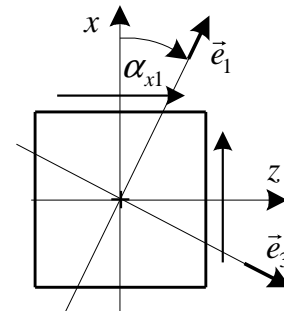
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 40 + \sqrt{30^2 + 40^2} = 90 \text{ MPa}, \sigma_2 = \sigma_y = 50 \text{ MPa},$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 40 - \sqrt{30^2 + 40^2} = -10 \text{ MPa}.$$

A főirányok meghatározása:

$$\operatorname{tg} \alpha_{x1} = \frac{20}{40} = 0,5 \Rightarrow \alpha_{x1} = 26,57^\circ.$$

Az α_{x1} szöget a τ feszültség növekedésének irányában kell felmérni!



2.7. Energia állapot

Tevékenység: Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a fajlagos alakváltozási energiát, torzulási energiát, térfogatváltozási energiát, test alakváltozási energiáját meghatározó összefüggéseket!

2.7.1. Alakváltozási energia

a) Fajlagos alakváltozási energia (egységnyi térfogat alakváltozási energiája):

$$\begin{aligned} u(\vec{r}) &= \frac{1}{2} \underline{\underline{F}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \cdot (\vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z) = \\ &= \frac{1}{2} (\vec{\rho}_x \cdot \vec{\alpha}_x + \vec{\rho}_y \cdot \vec{\alpha}_y + \vec{\rho}_z \cdot \vec{\alpha}_z) = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \end{aligned}$$

$u \geq 0$. A fajlagos alakváltozási energia pozitív skaláris mennyiség.

Az alakváltozási energia felbontása: $u = \underbrace{u_T}_{\text{tiszta torzulás}} + \underbrace{u_V}_{\text{tiszta térfogatváltozás}}$.

A fajlagos torzulási energia:

$$u_T = \frac{1}{12G} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)].$$

$u_T \geq 0$. A fajlagos torzulási energia pozitív skaláris mennyiség.

A fajlagos térfogatváltozási energia:

$$u_V = \frac{1}{6} A_I F_I = \frac{1}{12G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} F_I^2.$$

$u_V \geq 0$. A fajlagos térfogatváltozási energia pozitív skaláris mennyiség.

Határeset: tökéletesen összenyomhatatlan anyag (nem képes térfogatváltozásra).

Például: kaucsuk, gumi, stb $u_V = 0 \Rightarrow 1 - 2\nu = 0 \Rightarrow \nu = 0,5$.

A többi anyagra: $u_V > 0 \Rightarrow \nu < 0,5$.

b) Test alakváltozási energiája:

$U = \int_{(V)} u dV$, ahol V a test térfogata.

Tevékenység: Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a mechanikai energia tételt!

2.7.2. Mechanikai energia tétel

Csak a mechanikai hatásokból származó energiákat vesszük figyelembe.

$$E_2 - E_1 = W_K + W_B$$

E – kinetikai (mozgási) energia, 1 – terhelés előtti állapot, 2 – terhelés utáni állapot.

W_K – a külső erők munkája, W_B – a belső erők munkája.

Szilárdságtan/rugalmasságtan: test a terhelés előtt és után is tartós nyugalomban van.

$$E_1 = E_2 \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad W_K + W_B = 0.$$

$$W_K = -W_B = \underbrace{U}_{\substack{\text{rugalmas} \\ \text{alakváltozási} \\ \text{energia} \\ \text{(visszanyerhető} \\ \text{rész)}}} + \underbrace{W_D}_{\substack{\text{disszipációs} \\ \text{energia} \\ \text{(nem visszanyerhető} \\ \text{rész)}}}.$$

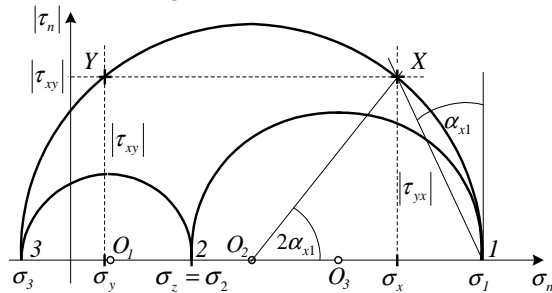
Rugalmas alakváltozás:

A külső munka teljes egészében visszanyerhető: $W_K = -W_B = U$.

Fontos tulajdonság: az energia pozitív skaláris mennyiség.

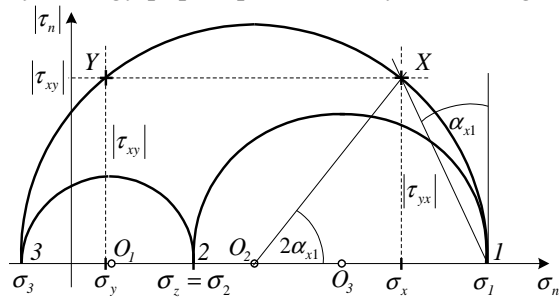
Önellenőrzés

1. Írja fel egy papírlapra, hogy mit szemléltet a Mohr-féle feszültségi kördiagram!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
2. Írja fel egy papírlapra a Mohr-féle feszültségi kördiagram szerkesztésének gondolatmenetét/lépéseit!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
3. Írja fel egy papírlapra a főfeszültségek kördiagram alapján történő meghatározásának összefüggéseit, ha σ_z főfeszültség!



A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

4. Írja fel egy papírlapra a főirányok kördiagram alapján történő meghatározásának összefüggését!



A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

5. Döntse el az állításról, hogy igaz vagy hamis!

A τ csúsztató feszültségek mindig a σ csökkenésének irányában mutatnak.

6. Mohr-féle feszültségi kördiagram

Adott: A szilárd test P pontjában az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor mátrixa.

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 40 \\ 0 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 70 \end{bmatrix} \text{ MPa .}$$

Feladat:

- A P pont feszültségi állapotának szemléltetése Mohr-féle kördiagrammal.
- A főfeszültségek és a főirányok meghatározása a Mohr-féle kördiagramból.

a) A pont feszültségi állapotának szemléltetése Mohr-féle kördiagrammal

I./ Rajzolja/szerkessze meg az adatok alapján a kördiagramot!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

b) A főfeszültségek és a főirányok meghatározása a *Mohr*-féle kördiagramból

Határozza meg a σ_1 σ_2 σ_3 értékeit! Az eredmény egész szám! Csak a negatív előjelet adja meg!

II./ Határozza meg a σ_1 értékét!

$\sigma_1 =$ MPa

III./ Határozza meg a σ_2 értékét!

$\sigma_2 =$ MPa

IV./ Határozza meg a σ_3 értékét!

$\sigma_3 =$ MPa

V./ Határozza meg a főirányokat!

Válassza ki a helyes megoldást!

$\alpha_{z1} = 41,58^\circ$

$\alpha_{z1} = 13,56^\circ$

$\alpha_{z1} = 35,12^\circ$

$\alpha_{z1} = 85,14^\circ$

$\alpha_{z1} = 26,57^\circ$

VI./ Rajzolja fel a α_{z1} elhelyezkedését az x/z koordináták mentén!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

7. Írja le egy papírlapra a fajlagos torzulási energiát meghatározó összefüggést!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

8. Írja le egy papírlapra a fajlagos térfogat változási energiát meghatározó összefüggést!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

9. Válassza ki a helyes megoldást!

A fajlagos torzulási energia:

vektor mennyiség

pozitív skaláris mennyiség

negatív skaláris mennyiség

10. Válassza ki a helyes megoldást!

A fajlagos térfogat változási energia:

pozitív skaláris mennyiség

negatív skaláris mennyiség

vektor mennyiség

8. LECKE

Az általános Hooke-törvény

2.8. Az általános Hooke-törvény

Cél: a hallgató megismerje az általános Hooke⁴-törvényt.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja határozni az általános Hooke törvény érvényességét;
2. meg tudja határozni a lineárisan rugalmas és izotróp fogalmak jelentését;
3. fel tudja írni a Hooke törvény két alakját;
4. fel tudja írni a Hooke törvény két alakjának skaláris egyenleteit;

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 25 percre lesz szüksége.

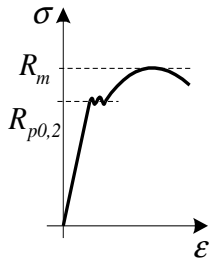
Kulcsfogalmak:

1. általános *Hooke* törvény, egyenértékű alak, skaláris egyenlet
2. lineárisan rugalmas, izotróp

⁴ Robert Hooke (1635-1703) angol természettudós.

Az általános Hooke-törvény

Tevékenység: Olvassa el a bekezdést! Rajzolja le a szakítódiagramot a jellemző szakaszok jelölésével! Tanulja meg az általános Hooke törvényt és a lineárisan rugalmas, az izotróp fogalmak jelentését! Írja fel és tanulja meg az általános Hooke törvény két alakját!



R_m - szakítószilárdság,
 $R_{p0,2}$ - folyáshatár.

Az általános Hooke (huk) törvény a lineárisan rugalmas, izotróp anyagi viselkedést írja le.

Lineárisan rugalmas: az alakváltozások és a feszültségek között lineáris függvénykapcsolat van.

Izotróp: az anyagi viselkedés iránytól független. (Például a fémek esetében.)

Lineárisan rugalmas alakváltozás esetén az alakítható anyag szakító diagramjának lineáris szakaszán vagyunk.

Alakítható anyagról beszélünk, ha az anyag képlékeny alakváltozásra képes.

Az általános Hooke törvény két, egymással egyenértékű alakja:

$$\alpha) \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu F_I}{1 + \nu} \underline{\underline{E}} \right), \quad \beta) \underline{\underline{F}} = 2G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1 - 2\nu} \underline{\underline{E}} \right).$$

Az egyenletekben szereplő mennyiségek jelentése:

G – csúsztató rugalmassági modulus } anyagjellemzők,
 ν – Poisson tényező }

F_I – a feszültségi tenzor } első skalár invariánsa,
 A_I – az alakváltozási tenzor }

$$[\underline{\underline{E}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ az egységtenzor.}$$

Tevékenység: Írja fel és tanulja meg az általános Hooke törvény két alakjához tartozó skaláris egyenleteket!

Az α) alak skaláris egyenletei:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}.\end{aligned}$$

A β) alak skaláris egyenletei:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xz} &= G \gamma_{xz}.\end{aligned}$$

Gyakorló feladatok

Tevékenység:

Kövesse végig a megoldást! Önállóan is végezze el a számításokat!

Általános Hooke-törvény

Adott:

A szilárd test P pontjában az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor mátrixa, továbbá $\nu = 0,3$, $G = 0,8 \cdot 10^5$ MPa.

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 40 \\ 0 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Feladat:

a) A P pont alakváltozási állapotának meghatározása és szemléltetése elemi triéderen.

Kidolgozás

a) A P pont alakváltozási állapotának meghatározása és szemléltetése az elemi triéderen:

Az általános *Hooke*-törvény: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}} \right)$,

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 70 + 50 + 10 = 130 \text{ MPa}, \quad \frac{\nu}{1+\nu} F_I = \frac{0,3}{1+0,3} 130 = 30 \text{ MPa}.$$

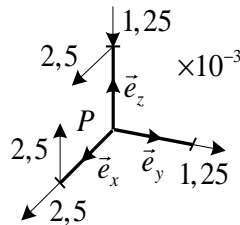
$$\varepsilon_x = \frac{10^{-5}}{1,6} (70 - 30) = 2,5 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0,$$

$$\varepsilon_y = \frac{10^{-5}}{1,6} (50 - 30) = 1,25 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0,$$

$$\varepsilon_z = \frac{10^{-5}}{1,6} (10 - 30) = -1,25 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{40}{0,8 \cdot 10^{-5}} = 5 \cdot 10^{-4}.$$

Az alakváltozási tenzor:

$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} 2,5 & 0 & 2,5 \\ 0 & 1,25 & 0 \\ 2,5 & 0 & -1,25 \end{bmatrix} 10^{-4}.$$



Önellenőrzés

1. Rajzolja le egy papírlapra az alakítható anyag szakítódiagramját a jellemző szakaszok jelölésével!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
2. Egészítse ki a következő meghatározást a megfelelő szavakkal!
Az általános *Hooke*-törvény a $\sigma = E \cdot \epsilon$, σ anyagi viselkedést írja le.
3. Egészítse ki a következő meghatározást a megfelelő kifejezéssel!
Lineárisan rugalmas: az alakváltozások és a feszültségek között függvénykapcsolat van.
4. Egészítse ki a következő meghatározást a megfelelő szavakkal!
Izotróp: az anyagi viselkedés $\sigma = E \cdot \epsilon$.
5. Írja fel egy lapra az általános *Hooke*-törvény két, egymással egyenértékű alakját!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
6. Írja fel egy lapra az α) alak skaláris egyenleteit!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
7. Írja fel egy lapra a β) alak skaláris egyenleteit!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

III. MODUL

Méretezés, ellenőrzés statikus terhelés esetén

9. LECKE

Méretezés, ellenőrzés feszültségcsúcsra

3. Méretezés, ellenőrzés statikus terhelés esetén

Cél: a hallgató megismerje a feszültségcsúcsra történő méretezés és ellenőrzés elvét, megoldásait.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja fogalmazni saját szavaival a méretezés és ellenőrzés célkitűzését;
2. fel tudja sorolni a károsodás szokásos típusait, az anyagszilárdsági jellemzőket;
3. meg tudja fogalmazni a méretezés, ellenőrzés elvét speciális és általános esetre;
4. meg tudja nevezni a méretezés, ellenőrzés során használt összefüggés elemeit;
5. fel tudja írni a méretezés, ellenőrzés során használt összefüggést (egyenlőtlenséget);
6. fel tudja rajzolni az egytengelyű feszültségi állapotot bemutató mechanikai modelleket;
7. meg tudja fogalmazni a redukált feszültség definícióját
8. fel tudja írni a tetszőleges térbeli feszültségi állapothoz tartozó feszültség tenzort;
9. meg tudja fogalmazni a rideg anyag és az alakítható anyag definícióját;
10. fel tud sorolni néhány rideg és alakítható anyagot;
11. fel tudja rajzolni a rideg anyagok és az alakítható anyagok jellemző szakítódiagramját a szükséges jelölésekkel;
12. meg tudja fogalmazni a tönkremenetelre vonatkozó Coulomb-, Mohr- és Huber-Mises-Hencky elméleteket;
13. fel tudja írni a redukált feszültségek arányait megadó egyenlőtlenséget;
14. fel tudja írni a legnagyobb normálfeszültséget, a Coulomb-féle, a Mohr-féle és a Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültséget meghatározó összefüggéseket;

15. fel tudja írni a Coulomb-féle a Mohr-féle és a Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültségre történő méretezés, ellenőrzés egyenlőtlenségét;
16. meg tudja fogalmazni a méretezés és ellenőrzés általános gondolatmenetét rúdszerkezetek esetén;
17. adatok alapján el tudja végezni a feszültségcsúcsra történő méretezést, ellenőrzést.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 40 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. méretezés, ellenőrzés, statikus terhelés
2. károsodás, anyagszilárdsági jellemzők: $R_{p0,2}$, R_m
3. főfeszültségek, biztonsági tényező, károsodáshoz tartozó szilárdsági jellemző
4. egytengelyű-, térbeli feszültségi állapot, feszültség tenzor
5. rideg-, alakítható anyag
6. Coulomb-, Mohr- és Huber-Mises-Hencky-féle elmélet

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a méretezés és ellenőrzés célkitűzését, a statikus terhelés meghatározását, a méretezés és ellenőrzés lehetséges megoldásait!

A méretezés, ellenőrzés célkitűzése:

Annak elérése, hogy a szerkezet rendeltetésszerű használat esetén előírt ideig és előírt biztonsággal elviselje az adott terhelést anélkül, hogy benne károsodás lépne fel.

Statikus terhelés: a terhelés időben nem változik.

Méretezés, ellenőrzés statikus terhelésnél:

- Pontbeli jellemző alapján (feszültségcsúcsra).
- Szerkezeti jellemző alapján (teherbírásra, alakváltozásra).

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a károsodás típusait és a két anyagszilárdsági jellemző jelentését, jelölését!

3.1. Méretezés, ellenőrzés feszültségcsúcsra

Feszültségcsúcsra történő méretezés, ellenőrzés esetén a szerkezet veszélyes pontjában kiszámított, a tönkremenetelre jellemző redukált feszültséget hasonlítjuk össze azzal a megengedett feszültséggel, amelynél már károsodás lép fel.

Károsodás:

- maradó (képlékeny) alakváltozás,
- törés, szakadás.

Anyagszilárdsági jellemző:

- $R_{p0,2}$ - folyáshatár,
- R_m - szakítószilárdság.

Ezek az anyagszilárdsági jellemzők szakító kísérletekkel határozhatóak meg.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg az egytengelyű feszültségi állapot esetén a méretezés, ellenőrzés elvét, a szükséges összefüggéseket! Rajzoljon fel egytengelyű feszültségi állapotot bemutató mechanikai modelleket!

a) Speciális eset: egytengelyű feszültségi állapot.

A méretezés, ellenőrzés a következő egyenlőtlenség alapján történik:

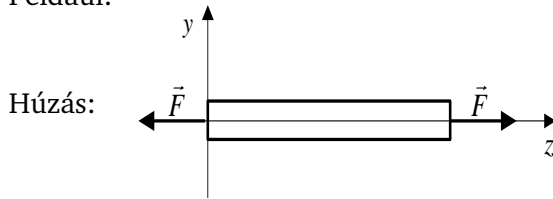
$$\sigma_z \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}, \text{ ahol } n \text{ a biztonsági tényező,}$$

σ_{jell} a károsodáshoz tartozó szilárdsági jellemző.

Itt nincs probléma, mert csak egy főfeszültség koordináta nem nulla: $\sigma_z \neq 0$.

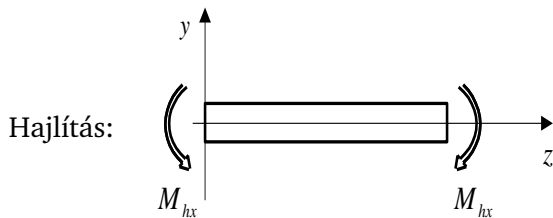
A szilárdsági jellemzők is az egytengelyű feszültségi állapotra állnak rendelkezésre.

Például:



A feszültségi állapot:

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$



$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a tetszőleges térbeli feszültségi állapot esetén a méretezés, ellenőrzés elvét, a szükséges összefüggéseket! Jegyezze meg a redukált feszültség definícióját!

b) Általános eset: tetszőleges térbeli feszültségi állapot.

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Probléma: nem tudjuk, hogy melyik feszültség koordinátát hasonlítsuk össze a σ_{meg} -tel!

Redukált feszültség / egyenértékű feszültség / összehasonlító feszültség:

Definíció: Olyan feszültség, amely a pontbeli feszültségi állapotot a károsodás szempontjából egyértelműen jellemzi.

A redukált feszültség bevezetésével a tetszőleges térbeli feszültségi állapotot egytengelyű feszültségi állapotra vezetjük vissza. A redukált feszültség kiszámítására különböző elméletek vannak.

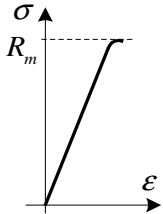
A redukált feszültség meghatározására több elméletet is kidolgoztak. Az elméletek nem általános érvényűek, vannak olyanok, amelyek rideg anyagok és vannak olyanok, amelyek alakítható anyagok esetén alkalmazhatók előnyösebben, azaz írják le a valósághoz közel-állóbban a tönkremenetelt.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a rideg anyag definícióját, keressen példákat rideg anyagokra! Rajzolja fel a rideg anyagok jellemző szakítódiagramját a szükséges jelölésekkel!

Jegyezze meg a Coulomb-féle elméletet! Írja fel/jegyezze meg a Coulomb-féle redukált feszültségre történő méretezés, ellenőrzés egyenlőtlenségét!

α) Rideg anyagok:



Rideg anyag: nem képes képlékeny alakváltozásra.

A rugalmas alakváltozás után hirtelen (képlékeny alakváltozás nélkül) törik/szakad el.

Például az öntött vas, kerámia, üveg, stb.

$R_m \equiv \sigma_B$ az anyag szakítószilárdsága.

Coulomb⁵-elmélet:

egy feszültségi állapot akkor nem okoz károsodást, ha a feszültségi állapothoz tartozó legnagyobb normál feszültség kisebb az anyag szakítószilárdságánál.

Főfeszültségek jelölése: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

A pontban fellépő legnagyobb normálfeszültség: $\sigma_{\max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|)$.

A Coulomb-féle redukált feszültség: $\sigma_{red}(Coulomb) = \sigma_{\max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|)$.

Méretezés, ellenőrzés:

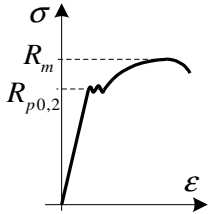
$\sigma_{red}(Coulomb) \leq \sigma_{meg} = \frac{R_m}{n}$, ahol n az előírt biztonsági tényező.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg az alakítható anyag definícióját, keressen példákat alakítható anyagokra! Rajzolja fel az alakítható anyagok jellemző szakítódiagramját a szükséges jelölésekkel! Jegyezze meg a Mohr- és Huber- Mises- Hencky elméleteket! Írja fel/jegyezze meg a Mohr-féle és a Huber- Mises- Hencky-féle redukált feszültségre történő méretezés, ellenőrzés egyenlőtlenségét!

⁵Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) francia fizikus és hadmérnök.

β) Alakítható anyagok:



Alakítható anyag: képlékeny alakváltozásra képes.
A törés csak a képlékeny alakváltozás után következik be.
Például a fémek, acél, alumínium, stb.
 $R_{p0,2} \equiv \sigma_F$ az anyag folyáshatára.

Mohr⁶- elmélet:

egy pontbeli feszültségi állapot akkor nem okoz károsodást, ha a feszültségi állapothoz tartozó legnagyobb *Mohr*-kör átmérője kisebb, mint a megengedett feszültség.

A *Mohr*-féle redukált feszültség: $\sigma_{red}(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3$.

Méretezés, ellenőrzés: $\sigma_{red}(Mohr) \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}$,

ahol σ_{jell} az anyag tönkremenetelét jellemző szilárdsági érték.

Itt általában $\sigma_{jell} = R_{p0,2}$, vagy $\sigma_{jell} = R_m$ és n az előírt biztonsági tényező.

Huber⁷- Mises⁸- Hencky⁹- elmélet: Két feszültségi állapot a károsodás szempontjából akkor azonosan veszélyes, ha a torzulási alakváltozási energiájuk megegyezik:

$$u_{T_1} = u_{T_2}.$$

⁶Christian Otto Mohr (1835-1918) német mérnök.

⁷Makszimillian Titus Huber (1872-1950) lengyel mérnök.

⁸Richard Edler von Mises (1883-1953) osztrák mérnök.

⁹Heinrich Hencky (1885-1951) német mérnök.

A *Huber-Mises-Hencky*-féle elmélet szerinti redukált feszültség arányos az u_T torzulási energiával.

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{6 G u_T} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]},$$

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]}.$$

Méretezés, ellenőrzés: $\sigma_{red}(HMH) \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}$.

Itt $\sigma_{jell} = R_{p0,2}$, vagy $\sigma_{jell} = R_m$ és n az előírt biztonsági tényező.

A *Mohr* és a *HMH* szerint redukált feszültség csak kis mértékben tér el egymástól.

Általában: $\sigma_{red}(HMH) < \sigma_{red}(Mohr)$.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg rúdszerkezetek esetén a méretezés, ellenőrzés általános gondolatmenetét!

c) Méretezés, ellenőrzés általános gondolatmenete rúdszerkezetek esetén:

- A rúdszerkezet veszélyes keresztmetszetének megkeresése, meghatározása. A veszélyes keresztmetszet az, ahol legnagyobbak az igénybevételek.
- A veszélyes keresztmetszeten a veszélyes pontok megkeresése, meghatározása. A veszélyes pontok azok, ahol nagyobb a σ_{red} redukált feszültség.
- A veszélyes pontokban a méretezés, ellenőrzés elvégzése: $\sigma_{red\max} \leq \sigma_{meg}$.

Önellenőrzés

1. Írja fel egy papírra a méretezés és ellenőrzés célkitűzését!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
2. Sorolja fel/írja fel egy papírra a meghatározó fontosságú anyagszilárdsági jellemzőket!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
3. Rajzolja fel egy papírra a rideg anyagok jellemző szakítódigramját a szükséges jelölésekkel!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
4. Rajzolja fel egy papírra az alakítható anyagok jellemző szakítódigramját a szükséges jelölésekkel!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
5. Rajzoljon fel egy papírra 2 eltérő egytengelyű feszültségi állapotot bemutató mechanikai modellt!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
6. Írja fel egy papírra - egytengelyű feszültségi állapot esetén - a méretezés, ellenőrzés során használt összefüggést (egyenlőtlenséget)!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
7. Egészítse ki a következő mondatot a szükséges kifejezéssel!
A _____ anyag: nem képes képlékeny alakváltozásra.
8. Egészítse ki a következő mondatot a szükséges kifejezéssel!
Alakítható anyag: _____ alakváltozásra képes
9. Írja fel egy papírra a Coulomb-féle elméletet!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
10. Írja fel egy papírra a Mohr-féle elméletet!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

11. Írja fel egy papírra a Huber-Mises-Hencky-féle elméletet!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
12. Írja fel egy papírra a Coulomb-féle redukált feszültséget meghatározó összefüggést!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
13. Írja fel egy papírra a Mohr-féle redukált feszültséget meghatározó összefüggést!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
14. Írja fel egy papírra a Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültséget meghatározó összefüggés két alakját!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
15. Írja le egy papírra a méretezés, ellenőrzés általános gondolatmenetét rúdszerkezetek esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

10. LECKE

Méretezés, ellenőrzés szerkezeti jellemzők alapján

3.2. Méretezés, ellenőrzés szerkezeti jellemzők alapján

Cél: a hallgató megismerje a szerkezeti jellemzők alapján történő méretezés és ellenőrzés elvét, megoldásait.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja fogalmazni saját szavaival a teherbírásra történő méretezés és ellenőrzés kiinduló feltételezéseit;
2. fel tudja rajzolni húzás-nyomás esetén a terhelés hatására kialakuló σ_z feszültség eloszlás és a $R_{p0,2}$ folyáshatárhoz tartozó határfeszültség eloszlás ábráit;
3. fel tudja írni húzás-nyomás esetén a méretezés, ellenőrzés összefüggéseit;
4. fel tudja rajzolni egyenes hajlítás esetén a terhelés hatására kialakuló σ_z feszültség és a $R_{p0,2}$ folyáshatárhoz tartozó határfeszültség ábráit;
5. fel tudja írni egyenes hajlítás esetén a méretezés, ellenőrzés összefüggéseit;
6. fel tudja írni csavarás esetén a méretezés, ellenőrzés összefüggéseit;
7. fel tudjon sorolni néhány olyan szerkezeteket, amelyeket alakváltozásra kell méretezni;
8. fel tudja írni az alakváltozásra történő méretezés, ellenőrzés összefüggéseit húzás-nyomás esetén;
9. adatok alapján el tudja végezni a teherbírásra és feszültségcsúcsra történő méretezést, ellenőrzést.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 40 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. méretezés, ellenőrzés, szerkezeti jellemzők
2. teherbírás, feszültségcsúcs, alakváltozás

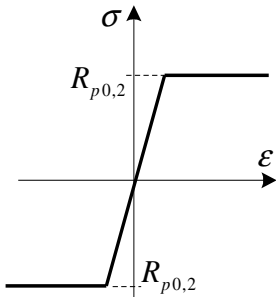
Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a szerkezeti jellemzők alapján történő méretezés és ellenőrzés előfeltételeit!

Méretezés, ellenőrzés szerkezeti jellemzők alapján

a) Méretezés, ellenőrzés teherbírásra:

A teherbírásra történő méretezés, ellenőrzés esetén azt az állapotot tekintjük tönkremenetelnek, amikor a szerkezet minden pontjában eléri a feszültség a folyáshatár értékét.



A teherbírásra történő méretezés, ellenőrzés kiinduló feltételezése, hogy:

- az anyag jól alakítható,
- az anyag lineárisan rugalmas, ideálisan képlékeny.

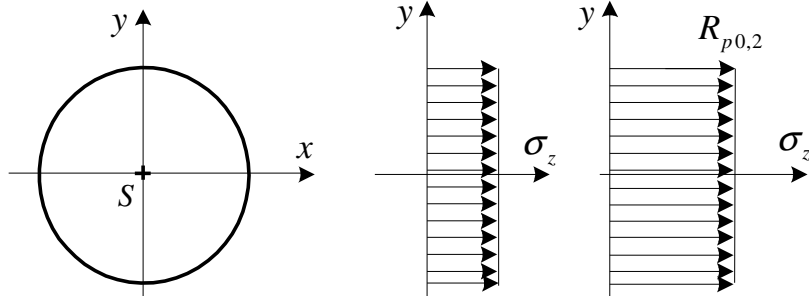
Az ábrán egy ilyen idealizált anyagmodell, a lineárisan rugalmas, ideálisan képlékeny anyag szakító diagramja látható.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Rajzolja fel a feszültségábrákat! Jegyezze meg a méretezés és ellenőrzés összefüggéseit húzás-nyomás esetén!

- Méretezés-ellenőrzés teherbírásra húzás-nyomás esetén:

Ha húzás-nyomás esetén az N húzó/nyomó erőt folyamatosan növeljük, akkor a rúdkeresztmetszet minden pontjában egyszerre lép fel $R_{p0,2}$ nagyságú feszültség. Ehhez az állapothoz tartozó húzó/nyomó igénybevételt N_K határerőnek nevezzük. Tönkremenetel az N_K határerőnél lép fel.



N növelése \rightarrow tönkremenetel.

$$N = \sigma_z A, N_K = R_{p0,2} A. (N_K \text{ határerő})$$

Méretezés, ellenőrzés: $N_{\max} \leq N_{meg} = \frac{N_K}{n_K}$, N_{\max} - a rúdban fellépő legnagyobb rúderő,
 n_K - előírt biztonsági tényező.

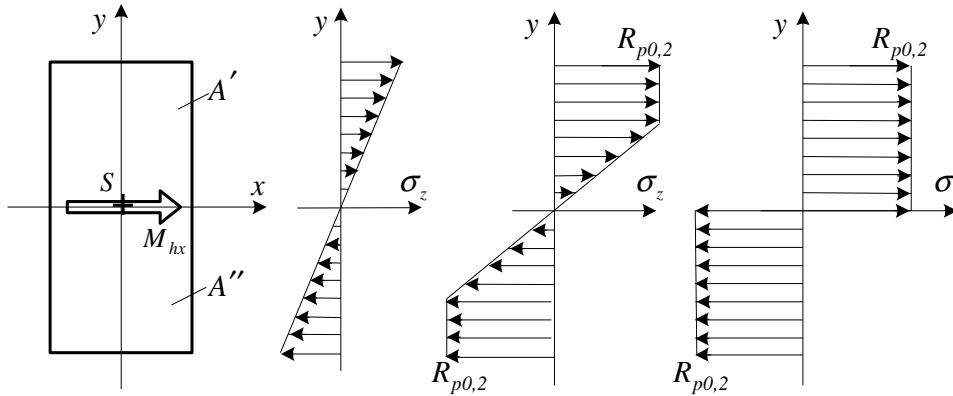
Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Rajzolja fel a feszültségábrákat! Jegyezze meg a méretezés és ellenőrzés összefüggéseit egyenes hajlítás esetén!

- Méretezés-ellenőrzés teherbírásra egyenes hajlítás esetén:

Ha tiszta egyenes hajlítás esetén az M_{hx} hajlító nyomatékot folyamatosan növeljük, akkor a rúdkeresztmetszet szélső pontjaiban lép fel először $R_{p0,2}$ nagyságú feszültség. Az M_{hx} hajlító nyomatékot tovább növelve a keresztmetszet egyre nagyobb részén fogja elérni a σ_z feszültség az $R_{p0,2}$ értéket. Az M_{hx} hajlító nyomatékot tovább növelve végül olyan állapot alakul ki, hogy a keresztmetszet x tengely fölötti részén minden pontban $R_{p0,2}$, a keresztmetszet x tengely alatti részén pedig minden pontban $-R_{p0,2}$ feszültség fog fellépni.

Ehhez az állapothoz tartozó hajlító igénybevétel M_K határnyomatéknak nevezzük és azt mondjuk, hogy tönkremenetel az M_K határnyomatéknál lép fel.



M_{hx} növelése
→

tönkremenetel.

Hajlító nyomaték: $M_{hx} = \int_{(A)} y \sigma_z dA$.

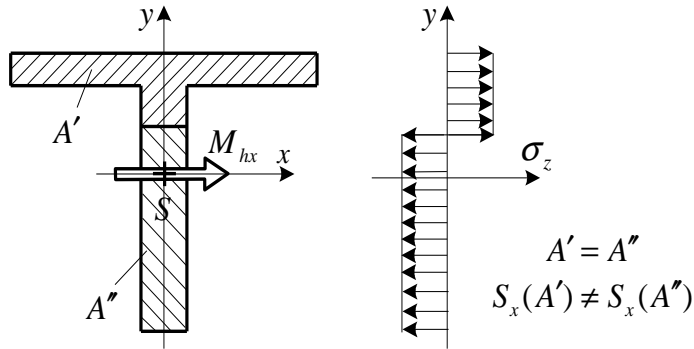
A tönkremenetelhez tartozó határ hajlító nyomaték:

$$M_K = \int_{(A)} y \sigma_z dA = R_{p0,2} \underbrace{\int_{(A')} y dA}_{S_x(A')} + (-R_{p0,2}) \underbrace{\int_{(A'')} y dA}_{S_x(A'')}.$$

$$M_K = R_{p0,2} [S_x(A') - S_x(A'')].$$

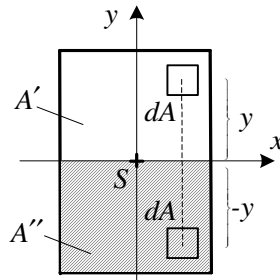
Tiszta hajlítás \Rightarrow a feszültségeloszlásból nem származhat eredő erő $\Rightarrow A' = A''$.

Például:



Kétszeres szimmetrikus keresztmetszet:

A keresztmetszetnek két egymásra merőleges szimmetria tengelye van.



$$S_x = \int_{(A)} y dA, \quad A' = A'' = \frac{A}{2},$$

$$S_x(A'') = -S_x(A').$$

$$M_K = R_{p0,2} S_x \left(\frac{A}{2} \right).$$

Méretezés, ellenőrzés: $M_{hx \max} \leq M_{h \text{ meg}} = \frac{M_K}{n_K},$

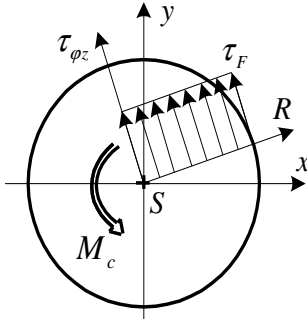
$M_{hx \max}$ - a rúdszerkezetben fellépő legnagyobb hajlító nyomaték,

n_K - az előírt biztonsági tényező.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Rajzolja fel a feszültségábrát! Jegyezze meg a méretezés és ellenőrzés összefüggéseit csavarás esetén!

- Méretezés-ellenőrzés teherbírásra csavarás (kör, körgyűrű) esetén:



Határnyomaték:

$$M_{cK} = \int_{(A)} R \tau_F dA = \tau_F \underbrace{\int_{(A)} R dA}_{S_p}$$

S_p – poláris statikai nyomaték.

$$M_{cK} = \tau_F S_p.$$

Méretezés, ellenőrzés: $M_{c \max} \leq M_{cmeg} = \frac{M_{cK}}{n_K},$

- $M_{c \max}$ - a rúdban fellépő legnagyobb csavaró nyomaték,

- n_K - előírt biztonsági tényező.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg az alakváltozásra történő méretezés összefüggéseit húzás-nyomás esetén. Jegyezze meg azoknak a szerkezeteknek a neveit, amelyeket alakváltozásra kell méretezni!

b) Méretezés, ellenőrzés alakváltozásra

Alakváltozásra történő méretezés esetén a vizsgált szerkezetet akkor tekintjük normál üzemszerű működésre alkalmatlannak, ha a szerkezet alakváltozása egy előírt mértéket túllép.

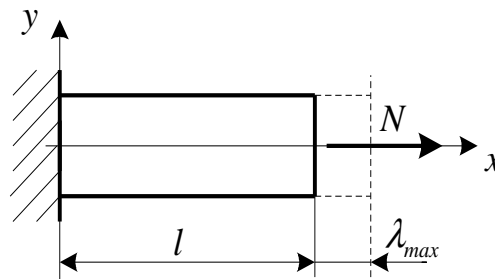
Például, ha egy megmunkáló gép állványában a megmunkálás során túl nagy deformációk lépnek fel, akkor a gép pontos megmunkálásra alkalmatlan lesz.

Például húzás – nyomás esetén:

$$\lambda_{\max} = \frac{N}{A E} l, \lambda_{\max} \leq \lambda_{\text{meg.}}$$

Alakváltozásra kell méretezni például:

megmunkáló gépeket, hidakat, zsilipeket, nagyméretű csőelzárókat, stb.

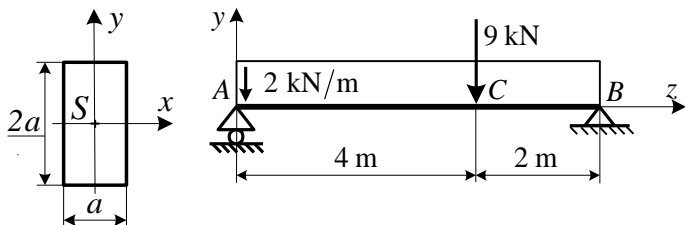


Gyakorló feladatok

Tevékenység:

Kövesse végig a megoldást! Önállóan is végezze el a számításokat!

1./ Méretezés teherbírásra és feszültségcsúcsra



Adott:

A tartó méretei, téglalap keresztmetszetének oldaláránya és terhelése, valamint:

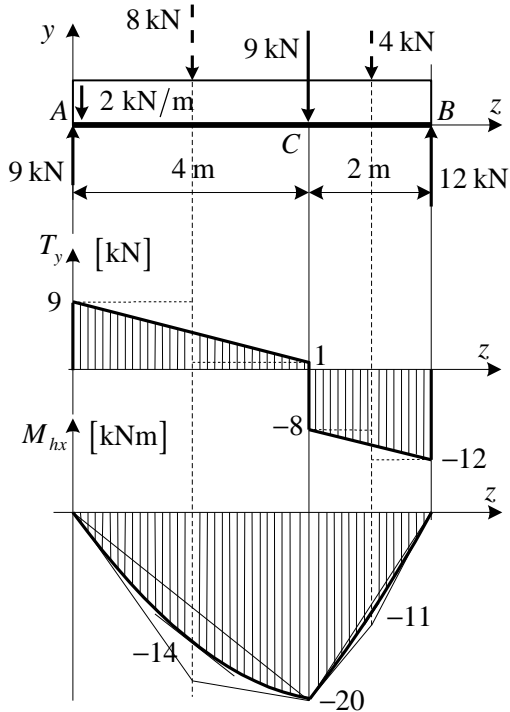
$$\sigma_F = R_{p0,2} = 330 \text{ MPa}, n_F = 2.$$

Feladat:

- A tartó igénybevételi ábráinak megrajzolása.
- A tartó méretezése teherbírásra.
- A tartó méretezése feszültségcsúcsra.

Kidolgozás:

a) A tartó igénybevételi ábráinak megrajzolása:



Támasztó erőrendszer meghatározása:

$$M_a = 8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 5 - F_{By}6 = 0,$$

$$F_{By} = 12 \text{ kN.}$$

$$M_b = F_{Ay}6 - 8 \cdot 4 - 9 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0,$$

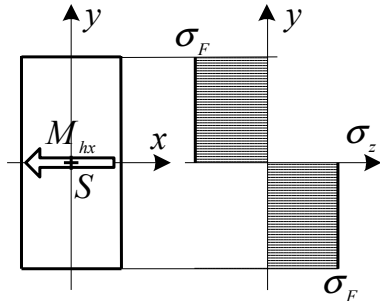
$$F_{Ay} = 9 \text{ kN.}$$

Az igénybevételi ábrák megrajzolása a szokásos módon történik.

Veszélyes keresztmetszet: C

$$|M_{hx \text{ max}}| = 20 \text{ kNm.}$$

b) A tartó méretezése teherbírásra:



Határnyomaték:

$$M_K = 2 \int_{(A/2)} \sigma_F y dA = 2 \sigma_F \underbrace{\int_{(A/2)} y dA}_{S_x} = 2 \sigma_F S_x(A/2)$$

S_x - a fél keresztmetszet x tengelyre számított statikai nyomatéka.

$$S_x(A/2) = \int_{(A/2)} y dA = a^2 \frac{a}{2} = \frac{a^3}{2}.$$

Hajlítási határnyomaték: $M_K = 2 \int_{(A/2)} \sigma_F y dA = 2 \sigma_F S_x(A/2) = \sigma_F a^3$.

A tartó megfelel, ha $M_{hx \max} \leq \frac{M_K}{n_F}$, azaz $M_{hx \max} \leq \frac{\sigma_F a^3}{n_F}$ feltétel teljesül.

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{n_F M_{hx \max}}{\sigma_F}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 20 \cdot 10^6}{330}} = 49,49 \text{ mm.}$$

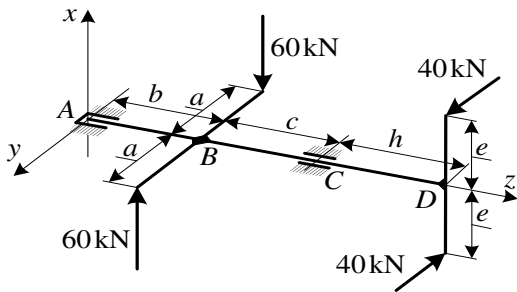
c) A tartó méretezése feszültségcsúcsra:

A tartó megfelel, ha a $\sigma_z \max \leq \frac{\sigma_F}{n_F}$ egyenlőtlenség teljesül:

$$\sigma_z \max = \frac{M_{hx \max}}{K_x}, K_x = \frac{a(2a)^2}{6} = \frac{4}{6} a^3 \Rightarrow \frac{6 M_{hx \max}}{4 a^3} \leq \frac{\sigma_F}{n_F}.$$

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{6 n_F M_{hx \max}}{4 \sigma_F}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^6}{4 \cdot 330}} = 56,65 \text{ mm.}$$

2./ Méretezés teherbírásra és feszültségcsúcsra



Adott: A kör keresztmetsztű $ABCD$ tartószerkezet, melynek jellemző méretei
 $a = h = 0,2$ m, $b = 0,4$ m, $c = 0,5$ m,
 $e = 0,3$ m és $n_F = 2$, $\tau_F = 160$ MPa.

Feladat:

- Az $ABCD$ rúdszakasz igénybevételének meghatározása.
- Az $ABCD$ rúdszakasz méretezése teherbírásra.
- Az $ABCD$ rúdszakasz méretezése feszültségcsúcsra.

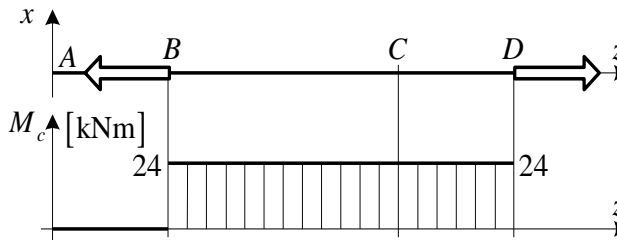
Kidolgozás:

- Az $ABCD$ rúdszakasz igénybevételének meghatározása.

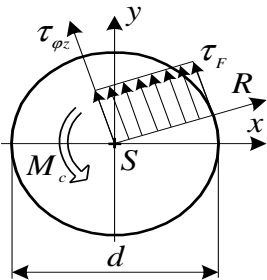
A B pontba redukált nyomaték: $\vec{M}_B = -(60 \cdot 0,4) \vec{e}_z = (-24 \vec{e}_z)$ kNm.

A D pontba redukált nyomaték: $\vec{M}_D = (40 \cdot 0,6) \vec{e}_z = (24 \vec{e}_z)$ kNm.

Az $ABCD$ rúdszakasz tisztán csavarva van!
 Veszélyes keresztmetszetek: a B - D rúdszakasz valamennyi keresztmetszete.
 $M_{c \max} = 24$ kNm.



b) Az ABCD rúdszakasz méretezése teherbírásra:



Feszültségeloszlás határállapotban.

Határnyomaték:

$$M_{cK} = \int_{(A)} R \tau_F dA = \tau_F \underbrace{\int_{(A)} R dA}_{S_P} = \tau_F S_P.$$

S_P - a keresztmetszet S pontra számított poláris statikai nyomatéka.

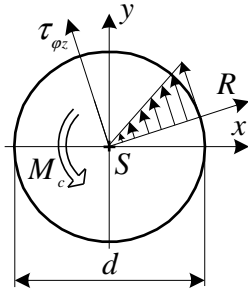
$$S_P = \int_{(A)} r dA = \int_{r=0}^{d/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r r d\varphi dr = 2\pi \int_{r=0}^{d/2} r^2 dr = 2\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{d/2} = \frac{d^3 \pi}{12}.$$

Csavarási határnyomaték: $M_{cK} = \tau_F S_P = \tau_F \frac{d^3 \pi}{12}$.

A tartó megfelel, ha az $M_{c \max} \leq \frac{M_{cK}}{n_F}$, azaz, ha az $M_{c \max} \leq \frac{\tau_F d^3 \pi}{12 n_F}$ feltétel teljesül.

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{12 n_F M_{c \max}}{\pi \tau_F}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 10^6}{\pi \cdot 160}} = 104,6 \text{ mm.}$$

c) Az $ABCD$ rúdszakasz méretezése feszültségcsúcsra:



Feszültségeloszlás rugalmas alakváltozás esetén.

A tartó megfelel, ha a $\tau_{\max} \leq \frac{\tau_F}{n_F}$ egyenlőtlenség teljesül:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{c \max}}{K_p},$$

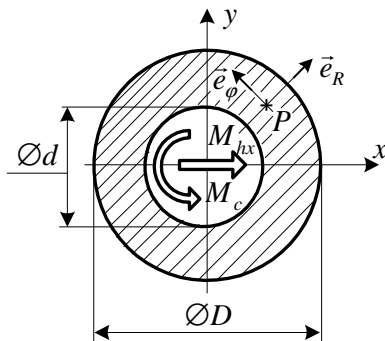
$$K_p = \frac{d^3 \pi}{16} \Rightarrow \frac{16 M_{c \max}}{\pi d^3} \leq \frac{\tau_F}{n_F}.$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 n_F M_{c \max}}{\pi \tau_F}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 10^6}{\pi \cdot 160}} = 115,2 \text{ mm}.$$

Önellenőrzés

1. Írja fel egy papírra a teherbírásra történő méretezés és ellenőrzés előfeltételeit!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
2. Írja fel egy papírra húzás-nyomás esetén a méretezés, ellenőrzés összefüggéseit!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
3. Rajzolja fel egy papírra húzás-nyomás esetén a terhelés hatására kialakuló σ_z feszültség és a $R_{p0,2}$ folyáshatárhoz tartozó határfeszültség ábráit!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
4. Írja fel egy papírra egyenes hajlítás esetén a méretezés, ellenőrzés összefüggéseit!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
5. Rajzolja fel egy papírra egyenes hajlítás esetén a terhelés hatására kialakuló σ_z feszültség eloszlás és a $R_{p0,2}$ folyáshatárhoz tartozó határfeszültség eloszlás ábráit!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
6. Írja fel egy papírra csavarás esetén (kör, körgyűrű) esetén a méretezés, ellenőrzés összefüggéseit!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
7. Soroljon fel olyan szerkezeteket, amelyeket alakváltozásra kell méretezni!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
8. Írja fel az alakváltozásra történő méretezés, ellenőrzés összefüggéseit húzás-nyomás esetén! Készítsen vázlatot az összefüggés értelmezéséhez!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

9. Csőtengely méretezése feszültségcsúcsra



Adott: egy körgyűrű keresztmetszetű tartó veszélyes keresztmetszetének igénybevétele:

$$\vec{M}_S = (600\vec{e}_x + 800\vec{e}_z) \text{ Nm}, \sigma_{\text{meg}} = 80 \text{ MPa}, D = 2d.$$

Feladat:

- Feszültségeloszlás rajzolása a keresztmetszet x és y tengelye mentén, a veszélyes pont(ok) meghatározása.
- A redukált feszültség meghatározása *Coulomb*, *Mohr* és *Huber-Mises-Hencky* szerint.
- A keresztmetszet méretezése *Mohr*-elmélet szerint.

a) Feszültségeloszlás megrajzolása a keresztmetszet x és y tengelye mentén, a veszélyes pont(ok) meghatározása.

I./ Rajzolja fel egy papírlapra a feszültségeloszlásokat!

A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

II./ Válassza ki a veszélyes pontokat! Jelölje be a 3 helyes megoldást!

hajlításból: A

hajlításból: B

hajlításból: A és B

csavarásból: A

csavarásból: B

csavarásból: A és B

csavarásból: a palást minden pontja

hajlításból és csavarásból együttesen: A

hajlításból és csavarásból együttesen: B

hajlításból és csavarásból együttesen: A és B

hajlításból és csavarásból együttesen: a palástminden pontja

b) A redukált feszültség meghatározása *Mohr* és *Huber-Mises-Hencky* szerint. Határozza meg a redukált nyomatékokat!

III./ Írja be a β értékét *Mohr*-szerint! Az eredmény egész szám!

$\beta =$

IV./ Írja be a helyes megoldást! Az eredmény egész szám! *Mohr*-szerinti redukált nyomaték:

$M_{red} =$ Nm

V./ Írja be a β értékét *Huber-Mises-Hencky* szerint! Az eredmény egész szám!

$\beta =$

VI./ Válassza ki a helyes megoldást!

Huber-Mises-Hencky szerinti redukált nyomaték:

$$M_{red} = 825,4 \text{ Nm}$$

$$M_{red} = 874,2 \text{ Nm}$$

$$M_{red} = 916,5 \text{ Nm}$$

$$M_{red} = 939,6 \text{ Nm}$$

$$M_{red} = 978,9 \text{ Nm}$$

c) A keresztmetszet méretezése Mohr-elmélet szerint:

VII./ Válassza ki a helyes megoldást!

A keresett d számított értéke:

$$d = 19,6 \text{ mm}$$

$$d = 21,4 \text{ mm}$$

$$d = 25,7 \text{ mm}$$

$$d = 29,1 \text{ mm}$$

$$d = 33,7 \text{ mm}$$

VIII./ Írja be a gyakorlatban alkalmazandó D és d értékeit!

$d =$ mm $D =$

mm

IV. MODUL

Rugalmassági egyenletek

11. LECKE

Egyensúlyi egyenletek – feszültségi állapot

4. Rugalmassági egyenletek

4.1. Egyensúlyi egyenletek – feszültségi állapot

Cél: a hallgató megismerje az egyensúlyi egyenleteket

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. fel tudja írni a rugalmas test állapotának jellemzőit (4 mező);
2. meg tudja fogalmazni az állapotjellemzők közötti összefüggést;
3. fel tudja sorolni a rugalmasságtani feladat kiindulási adatait, a keresett jellemzőket;
4. fel tudja írni a térfogaton és a felületen megoszló elemi erő matematikai alakját;
5. fel tudja írni a Gauss-Osztrogradszkij-féle integrál átalakítási tételt;
6. fel tudja írni a Hamilton-féle vagy nabla differenciál operátort (DDKR-ben és HKR-ben);
7. fel tudja írni az egyensúlyi egyenletek skaláris alakját;
8. meg tudja fogalmazni a szimmetrikus tenzor-vektor invariánsával kapcsolatos tételt;
9. fel tudja írni az egyensúlyi egyenletet;
10. meg tudja fogalmazni az egyensúlyi egyenletek funkcióját.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 35 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. rugalmasságtani egyenletek, elmozdulási vektormező, alakváltozási tenzormező, feszültségi tenzormező, fajlagos alakváltozási energiamező
2. térfogaton megoszló elemi erő, felületen megoszló elemi erő
3. Gauss - Osztrogradszkij-féle integrál átalakítási tétel, Hamilton-féle vagy nabla differenciál operátor
4. egyensúlyi egyenlet, feszültségi tenzor, invariáns

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a rugalmas test állapotának jellemzőit! Gyűjtse ki és jegyezze meg a rugalmasságtani feladat kiindulási adatait, a keresett jellemzőket!

Rugalmas test állapotának jellemzői:

1. $\vec{u} = \vec{u}(x,y,z)$ elmozdulási vektormező,
2. $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x,y,z)$ alakváltozási tenzormező,
3. $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(x,y,z)$ feszültségi tenzormező,
4. $u = u(x,y,z)$ fajlagos alakváltozási energiamező.

Kérdés: milyen általános összefüggések állnak fenn ezen állapotjellemzők között?



Rugalmasságtani egyenletek.

A rugalmasságtani feladat megfogalmazása:

- Adott: - a test alakja és méretei,
 - a test anyagi viselkedését jellemző mennyiségek,
 - terhelés és megtámasztás.

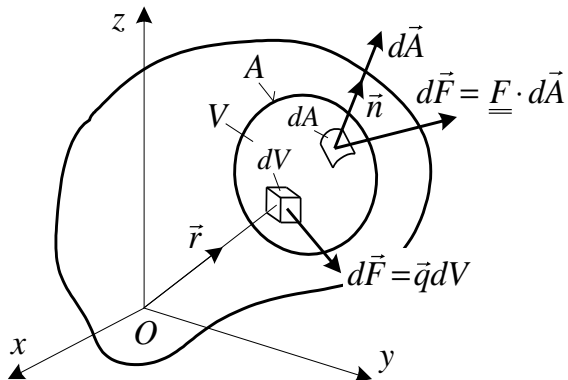
Keresett: \underline{u} , \underline{F} , \underline{A} , u .

Feladat: a rugalmasságtani egyenletek megoldása.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki, majd tanulja meg a térfogaton és a felületen megoszló elemi erő matematikai alakját!

Egyensúlyi egyenletek – feszültségi állapot



A testből kiragadunk egy olyan V térfogatot, mely teljes egészében a test belsejében van.

A V térfogat környezetének mechanikai hatásait erőkkel vesszük figyelembe:

- a térfogaton megoszló elemi erő: $d\vec{F} = \vec{q} dV$,
- a felületen megoszló elemi erő: $d\vec{F} = \vec{\rho} dA = \underline{F} \cdot \underbrace{\vec{n} dA}_{d\vec{A}}$.

A V testrészt egyensúlyban van.

Az egyensúly feltétele: a) $\vec{F} = \vec{0}$
b) $\vec{M}_0 = \vec{0}$.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel/tanulja meg a Gauss-Osztrogradszkij-féle integrál átalakítási tételt és a Hamilton-féle vagy nabla differenciál operátort! Írja fel/tanulja meg az egyensúlyi egyenletek skaláris alakját!

a) Egyensúlyi egyenletek:

Az első vektoregyenlet: $\vec{F} = \vec{0} = \int_{(V)} \vec{q} dV + \int_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA$.

Gauss¹⁰-Osztrogradszkij¹¹-féle integrál átalakítási tétel: $\int_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA = \int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV$.

A Hamilton¹²-féle (vagy nábla) differenciál operátor:

- derékszögű descartesi koordináta-rendszerben (DDKR-ben): $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$,

- henger koordináta-rendszerben (HKR-ben): $\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$.

Alkalmazva a Gauss-Osztrogradszkij tételt: $\vec{F} = \vec{0} = \int_{(V)} (\vec{q} + \underline{\underline{F}} \cdot \nabla) dV$.

Az integrálnak bármely V választás esetén el kell tűnnie \Rightarrow az integrandusz zérus.

Egyensúlyi egyenlet(ek): $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$. (1 vektor egyenlet \equiv 3 darab skalár egyenlet)

Az egyensúlyi egyenletben szereplő mennyiségek:

A feszültségi tenzor (diadikus alakja): $\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z$.

A térfogaton megoszló terhelés sűrűségvektora: $\vec{q} = q_x \vec{e}_x + q_y \vec{e}_y + q_z \vec{e}_z$.

¹⁰Carl Friedrich Gauss (1777-1855) német matematikus.

¹¹Mihail Vasziljevics Osztrogradszkij (1801-1862) orosz matematikus.

¹²William Rowan Hamilton (1805-1865) ír matematikus, fizikus és csillagász.

A skalár egyensúlyi egyenletek előállítására a DDKR-ben:

$$(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) + \vec{q} = \vec{0},$$

$$\frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\rho}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} + \vec{q} = \vec{0}.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ az egyensúlyi egyenletek skaláris alakja.}$$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Kövesse végig a feszültségi tenzor szimmetriáját bizonyító levezetést!

b) A feszültségi tenzor szimmetriája:

A második vektoregyenlet: $\vec{M}_0 = \vec{0} = \int_{(V)} \vec{r} \times \vec{q} dV + \int_{(A)} \vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA.$

Átalakítás a Gauss-Ostrogradszkij-féle integrál átalakítási tétellel:

$$\vec{0} = \int_{(V)} \left(\vec{r} \times \vec{q} + \vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \nabla \right) dV.$$

Az $\overline{\vec{r} \times \underline{\underline{F}}}$ kifejezés fölötti \downarrow nyíl arra utal, hogy a nábla operátor erre a szorzatra hat.

Az integrálnak bármely V választása esetén el kell tűnnie \Rightarrow az integrandusz zérus.

A szorzat differenciálását elvégezve:
$$\vec{0} = \vec{r} \times \underbrace{\left(\vec{q} + \underline{\underline{F}} \cdot \nabla \right)}_{=\vec{0}} + \vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \nabla.$$

A második tag részletezése:

$$\vec{r} \times \underline{\underline{F}} \cdot \nabla = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \underline{\underline{F}} \right) \cdot \vec{e}_x + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \underline{\underline{F}} \right) \cdot \vec{e}_y + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \underline{\underline{F}} \right) \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_x \times \vec{\rho}_x + \vec{e}_y \times \vec{\rho}_y + \vec{e}_z \times \vec{\rho}_z = \vec{0}.$$

A feszültségi tenzor-vektorinvariánsa:
$$\vec{F}_x = -\frac{1}{2} (\vec{\rho}_x \times \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \times \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \times \vec{e}_z).$$

Invariáns: koordináta-rendszertől független (koordináta transzformációval szemben változatlan, állandó).

Például az \vec{F}_x vektor x irányú koordinátája:

$$0 = -\vec{F}_x \cdot \vec{e}_x = \frac{1}{2} \left[\underbrace{(\vec{p}_x \times \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_x}_{=0} + (\vec{p}_y \times \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_x + (\vec{p}_z \times \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_x \right]$$

vegyes szorzat

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\rho}_y \cdot \vec{e}_z + \vec{\rho}_z \cdot \vec{e}_y \\ 0 &= -\tau_{zy} + \tau_{yz} \Rightarrow \tau_{zy} = \tau_{yz}. \end{aligned}$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel elő lehet állítani az \vec{F}_x többi koordinátáját is:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad , \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Ezzel bizonyítottuk, hogy az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor szimmetrikus.

Tétel: Minden szimmetrikus tenzor-vektorinvariánsa zérus.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel/jegyezze meg az egyensúlyi egyenletet! Jegyezze meg az egyensúlyi egyenletek funkcióját!

c) Az eredmények összefoglalása:

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0} \quad - \text{ egyensúlyi egyenlet.}$$

$$\vec{M}_0 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T \quad - \text{ a feszültségi tenzor szimmetrikus.}$$

Egyensúlyi egyenletek: kapcsolat a térfogati terhelés és a belső erőrendszer között.

Önellenőrzés

1. Egészítse ki a következő sorokat! Nevezze meg a rugalmas test állapotának jellemzőit!

1. $\vec{u} = \vec{u}(x,y,z)$ vektormező,
2. $\underline{A} = \underline{A}(x,y,z)$ tenzormező,
3. $\underline{F} = \underline{F}(x,y,z)$ tenzormező,
4. ${}_u = u(x,y,z)$ alakváltozási energiamező.

2. Csoportosítsa a rugalmas test állapotának jellemzőit (név) és matematikai alakjukat! Írja a megfelelő kisbetűt a helyes matematikai összefüggés mellé!

e: elmozdulás vektormező

f: feszültségi tenzormező

a: alakváltozási tenzormező

j: fajlagos alakváltozási energiamező

Jelölés

Matematikai összefüggés

$\vec{u}(x,y,z)$

$\underline{F}(x,y,z)$

$\underline{A}(x,y,z)$

$u(x,y,z)$

3. Sorolja fel/írja fel egy papírra a rugalmasságtani feladat kiindulási adatait és a keresett mennyiségeket!

A megoldás megtekintéséhez kattintson [ide!](#)

4. Írja fel egy lapra a térfogaton megoszló elemi erő matematikai alakját!

A megoldás megtekintéséhez kattintson [ide!](#)

5. Írja fel egy lapra a felületen megoszló elemi erő matematikai alakját!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

6. Írja fel egy lapra az egyensúlyi egyenletet vektoriális alakját!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

7. Válassza ki a helyes megoldást!

Az egyensúlyi vektoregyenlet hány skaláris egyenlettel egyenértékű?

a vektor egyenlet \equiv 1 db skaláris egyenlet

a vektor egyenlet \equiv 2 db skaláris egyenlet

a vektor egyenlet \equiv 3 db skaláris egyenlet

a vektor egyenlet \equiv 4 db skaláris egyenlet

a vektor egyenlet \equiv 5 db skaláris egyenlet

a vektor egyenlet \equiv 6 db skaláris egyenlet

8. Írja fel egy lapra az egyensúlyi egyenletek skaláris alakját!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

9. Egészítse ki a következő mondatot a szükséges kifejezéssel! Egyensúlyi egyenletek: kapcsolat a
és a között.

12. LECKE

Kinematikai (geometriai) kompatibilitási
egyenletek

Cél: a hallgató megismerje kinematikai (geometriai) kompatibilitási egyenleteket

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. fel tudja írni az elmozdulásmezőt leíró matematikai összefüggést;
2. fel tudja írni a relatív elmozdulás vektorokat;
3. fel tudja írni a derivált tenzor felbontását szimmetrikus és ferdeszimmetrikus részre;
4. meg tudja határozni a derivált tenzor két részének a nevét;
5. fel tudja írni az alakváltozási tenzort;
6. le tudja írni az alakváltozási tenzor származtatását;
7. fel tudja írni az alakváltozási tenzor mátrix alakját;
8. fel tudja írni a kinematikai/geometriai egyenletek tenzoros alakját;
9. fel tudja írni a kinematikai/geometriai egyenletek skaláris alakját;
10. fel tudja írni a forgató tenzor értelmezését;
11. fel tudja írni a forgatótenzor koordinátáit.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 35 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

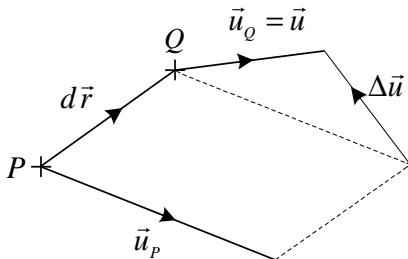
1. kinematikai (geometriai/ kompatibilitási) egyenletek
2. elmozdulásmező, derivált tenzor, relatív elmozdulás vektor
3. alakváltozási tenzor, szimmetrikus rész, skaláris alak
4. forgató tenzor, ferdeszimmetrikus rész, szögelfordulás

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Rajzolja fel az elmozdulásmezőt szemléltető ábrát! Írja fel, jegyezze meg az elmozdulásmezőt leíró matematikai összefüggést, a relatív elmozdulás vektorokat!

4.2. Kinematikai (geometriai) kompatibilitási egyenletek

4.2.1. Az elmozdulásmező derivált tenzora



A test egy tetszőleges P pontjának elemi környezetét vizsgáljuk meg.

A Q a P pont elemi környezetében helyezkedik el.

$$d\vec{r} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z.$$

Az elmozdulásmező: $\vec{u} = \vec{u}(x,y,z) = u(x,y,z) \vec{e}_x + v(x,y,z) \vec{e}_y + w(x,y,z) \vec{e}_z.$

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}_Q - \vec{u}_P = \vec{u} - \vec{u}_P.$$

Sorfejtés:

$$\vec{u} = \vec{u}_p + \overbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \Big|_P dx + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \Big|_P dy + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \Big|_P dz}^{\text{lineáris rész}} + \overbrace{((\dots))}^{\text{magasabb rendű tagok}}$$

$\underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \Big|_P}_{\vec{u}_x} \quad \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \Big|_P}_{\vec{u}_y} \quad \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \Big|_P}_{\vec{u}_z}$

Lineáris közelítés esetén: $\Delta \vec{u} \approx d\vec{u}$.

Ha $dy = dz = 0 \Rightarrow \Delta \vec{u} = \vec{u}_x dx$,

Ha $dx = dz = 0 \Rightarrow \Delta \vec{u} = \vec{u}_y dy$,

Ha $dx = dy = 0 \Rightarrow \Delta \vec{u} = \vec{u}_z dz$.

Relatív elmozdulás vektorok: $\vec{u}_x = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_y + \frac{\partial w}{\partial x} \vec{e}_z$,

$$\vec{u}_y = \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial w}{\partial y} \vec{e}_z,$$

$$\vec{u}_z = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{e}_y + \frac{\partial w}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Az elmozdulásmező hely szerinti megváltozása lineáris közelítés esetén:

$$\Delta \vec{u} \approx d\vec{u} = \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right|_P dx + \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \right|_P dy + \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right|_P dz$$

$$\underbrace{\vec{e}_x \cdot d\vec{r}}_{(\vec{u}_x \circ \vec{e}_x) \cdot d\vec{r}} \quad \underbrace{\vec{e}_y \cdot d\vec{r}}_{(\vec{u}_y \circ \vec{e}_y) \cdot d\vec{r}} \quad \underbrace{\vec{e}_z \cdot d\vec{r}}_{(\vec{u}_z \circ \vec{e}_z) \cdot d\vec{r}}$$

$$d\vec{u} = (\vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z) \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot d\vec{r} = \underline{\underline{D}} \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{u} = \underline{\underline{D}} \cdot d\vec{r}$$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel, jegyezze meg az elmozdulásmező derivált tenzorát! Jegyezze meg a elmozdulásmező derivált tenzorának két részre történő felbontását, a részek neveit!

Az elmozdulásmező derivált tenzora:

$$\underline{\underline{D}} = (\vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z), \quad \underline{\underline{D}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z.$$

$\underline{\underline{D}}$ = $\vec{u} \circ \nabla$. Nem szimmetrikus tenzor!

A derivált tenzor mátrixa az xyz koordináta-rendszerben:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{Az elmozdulásmező skaláris koordinátái:}$$

$$u = u(x, y, z),$$

$$v = v(x, y, z),$$

$$w = w(x, y, z).$$

$$\vec{u}_x \quad \vec{u}_y \quad \vec{u}_z$$

A derivált tenzor felbontása: $\underline{\underline{D}} = \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T)}_{\text{szimmetrikus rész}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T)}_{\text{ferdeszimmetrikus rész}}.$

4.2.2. Az alakváltozási tenzor

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg az alakváltozási tenzor származtatását! Írja fel, jegyezze meg az alakváltozási tenzor értelmezését és mátrix alakját Jegyezze meg az alakváltozási tenzor elemeit! Figyelje meg a szimmetriát! Jegyezze meg az egyenlet szerepét!

Az alakváltozási tenzor a derivált tenzor szimmetrikus része:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}).$$

Kis alakváltozások esetén ez a tenzoregyenlet a kinematikai/geometriai egyenlet.

Ez az egyenlet az \vec{u} elmozdulásmező és az $\underline{\underline{A}}$ alakváltozási (tenzor) mező kapcsolatát adja meg.

Az alakváltozási tenzor elemeinek jelölése:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \text{Szimmetrikus tenzor.}$$

$\vec{\alpha}_x$
 $\vec{\alpha}_y$
 $\vec{\alpha}_z$

Az alakváltozási tenzor koordinátái az értelmezés (a derivált tenzor koordinátái) felhasználásával:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel, jegyezze meg a kinematikai/geometriai egyenletek skaláris alakját! Figyelje meg a korábban bemutatott szimmetriát!

A kinematikai/geometriai egyenletek skaláris alakja:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.
 \end{aligned}$$

4.2.3. A forgató tenzor

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel, jegyezze a forgató tenzor értelmezését és mátrix alakját! Jegyezze meg, hogy mit jellemez a forgató tenzor!

A forgató tenzor az alakváltozási tenzor ferdeszimmetrikus része:

$$\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla - \nabla \circ \vec{u}).$$

A forgató tenzor koordinátái: $[\underline{\underline{\Psi}}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}.$

A forgató tenzor az elemi környezet merevtestszerű szögelfordulását jellemzi.

A forgató tenzornak a szilárdságtanban/rugalmasságtanban nincs további szerepe.

Gyakorló feladatok

Tevékenység:

Kövesse végig a megoldást! Önállóan is végezze el a számításokat!

Rugalmas test elmozdulási és alakváltozási állapota

Adott: A rugalmas test elmozdulási állapota az $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x,y,z)$ függvénnyel, továbbá a test P pontjának \vec{r}_P helyvektora.

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{r}) &= \vec{u}(x,y,z) = u(x,y,z)\vec{e}_x + v(x,y,z)\vec{e}_y + w(x,y,z)\vec{e}_z, \\ u &= -\nu xy/R, v = (\nu x^2 - \nu y^2 - z^2)/(2R), w = yz/R, \\ R &= 10 \text{ m}, \nu = 0,25, \vec{r}_P = (4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z) \text{ mm}.\end{aligned}$$

Feladat: a) A $\underline{\underline{D}}(x,y,z)$ derivált, az $\underline{\underline{A}}(x,y,z)$ alakváltozási és a $\underline{\underline{\Psi}}(x,y,z)$ forgató tenzor mátrixának meghatározása.

b) A P pontbeli alakváltozási tenzor mátrixának meghatározása és szemléltetése az elemi triéderen.

c) Az ε_n fajlagos nyúlás és a γ_{mn} fajlagos szögváltozás meghatározása, ha $\vec{e}_n = (0,5\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y)$ és $\vec{e}_m = (\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + 0,5\vec{e}_y)$.

Kidolgozás:

a) A $\underline{\underline{D}}(x,y,z)$ derivált, az $\underline{\underline{A}}(x,y,z)$ alakváltozási és a $\underline{\underline{\Psi}}(x,y,z)$ forgató tenzor mátrixának meghatározása:

Az elmozdulásmező derivált tenzora:

$$\underline{\underline{D}} = (\vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z = \vec{u} \circ \nabla.$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{R}y & -\frac{\nu}{R}x & 0 \\ \frac{\nu}{R}x & -\frac{\nu}{R}y & -\frac{1}{R}z \\ 0 & \frac{1}{R}z & \frac{1}{R}y \end{bmatrix} - \text{nem szimmetrikus tenzor.}$$

A derivált tenzor a $P(x,y,z)$ pont elemi környezetének relatív, fajlagos elmozdulási állapotát jellemzi.

Az alakváltozási tenzor:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}) \text{ (a derivált tenzor szimmetrikus része).}$$

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix},$$

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{R}y & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{R}y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R}y \end{bmatrix}.$$

Az alakváltozási tenzor a $P(x,y,z)$ pont elemi környezetének alakváltozását jellemzi.

A forgató tenzor:

$$\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla - \nabla \circ \vec{u}) \text{ (a derivált tenzor ferde szimmetrikus része).}$$

$$[\underline{\underline{\Psi}}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\nu}{R}x & 0 \\ \frac{\nu}{R}x & 0 & -\frac{1}{R}z \\ 0 & \frac{1}{R}z & 0 \end{bmatrix}$$

A forgató tenzor a $P(x,y,z)$ pont elemi környezetének merevtestszerű szögelfordulását jellemzi.

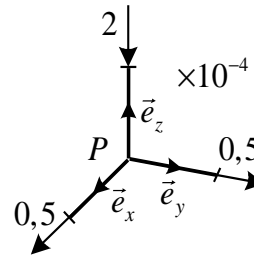
b) A P pontbeli alakváltozási tenzor mátrixának meghatározása és szemléltetése az elemi triéderen:

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{R}y = -\frac{0,25}{10}(-0,002) = 0,5 \cdot 10^{-4}, \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\tau_{yx}}{G} = 0,$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{R}y = -\frac{0,25}{10}(-0,002) = 0,5 \cdot 10^{-4}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0,$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{R}y = \frac{1}{10}(-0,002) = -2 \cdot 10^{-4}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0.$$

$$\underline{\underline{A_P}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\tau_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} 10^{-4}.$$



c) Az ε_n fajlagos nyúlás és a γ_{mn} fajlagos szögváltozás meghatározása:

$$\vec{\alpha}_n = \underline{\underline{A_P}} \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} 10^{-4} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ -\sqrt{3}/4 \\ 0 \end{bmatrix} 10^{-4}.$$

A fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon_n = \vec{\alpha}_n \cdot \vec{e}_n = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,25 \\ -\sqrt{3}/4 \\ 0 \end{bmatrix} [0,5 \quad -\sqrt{3}/2 \quad 0] = \left(0,125 + \frac{3}{8}\right) \cdot 10^{-4} = 0,5 \cdot 10^{-4}.$$

$$\text{A fajlagos szögváltozás: } \frac{1}{2}\gamma_{mn} = \vec{\alpha}_n \cdot \vec{e}_m = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,25 \\ -\sqrt{3}/4 \\ 0 \end{bmatrix} [\sqrt{3}/2 \quad 0,5 \quad 0] = 0.$$

Önellenőrzés

1. Írja fel egy lapra a *forgató* tenzor értelmezését!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
2. Írja fel egy lapra a *forgató* tenzor koordinátái!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
3. Írja fel egy lapra a *alakváltozási* tenzor értelmezését!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
4. Írja fel egy lapra a *alakváltozási* tenzor mátrix alakját!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
5. Írja fel egy lapra a kinematikai/geometriai egyenletek skaláris alakját a (hat egyenlet)!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
6. Írja fel egy lapra a relatív elmozdulás vektorokat!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
7. Írja fel egy lapra a derivált tenzort szimmetrikus és ferdeszimmetrikus részre bontott alakban!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
8. Egészítse ki a következő mondatot a hiányzó két kifejezéssel!
Az alakváltozási tenzor a _____ tenzor _____ része.
9. Egészítse ki a következő mondatot a hiányzó két kifejezéssel!
A forgató tenzor az _____ tenzor _____ része.
10. Egészítse ki a következő mondatot a hiányzó két kifejezéssel!
A forgató tenzor az elemi környezet _____ jellemzi.

13. LECKE

Anyagegyenletek – lineárisan rugalmas anyag

4.3. Anyagegyenletek – lineárisan rugalmas anyag

Cél: a hallgató megismerje az lineárisan rugalmas anyagok esetén az anyagegyenleteket.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja fogalmazni az anyagegyenlet értelmezését;
2. meg tudja határozni a lineárisan rugalmas és izotróp fogalmak jelentését;
3. fel tudja írni a Hooke-törvény két alakját;
4. fel tudja írni a Hooke-törvény két alakjának skaláris egyenleteit;
5. fel tudja írni egytengelyű feszültségi állapot esetén az alakváltozási és feszültségi tenzort;
6. fel tudja írni az egyszerű és az általános Hooke-törvény matematikai alakját;
7. fel tudja sorolni az anizotróp-, ortotróp-, kompozit anyag jellemzőit;
8. fel tudja sorolni a kompozit anyagok részeit;
9. fel tudja írni az általános Hooke-törvényt ortotróp anyagra;
10. fel tudja írni az ortotróp Hooke-törvényt;
11. meg tudja nevezni a Hooke-törvény különböző alakjaiban található jellemzőket.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 35 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. anyagegyenletek, általános Hooke-törvény, lineárisan rugalmas, skaláris egyenletek
2. anyagállandók, izotróp, anizotróp, ortotróp, kompozit
3. húzáshoz tartozó-, csúsztató rugalmassági modulus, Poisson tényező, invariáns

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg az anyagegyenlet értelmezését! Írja fel, jegyezze meg az általános Hooke-törvény két alakját és ezek skaláris egyenleteit! Jegyezze meg az invariáns jelentését!

Anyagegyenlet: összefüggés az alakváltozási és a feszültségi állapot között.

4.3.1. Általános Hooke-törvény izotróp anyagra

$$\left. \begin{array}{l} \alpha) \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu F_I}{1+\nu} \underline{\underline{E}} \right) \\ \beta) \underline{\underline{F}} = 2G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1-2\nu} \underline{\underline{E}} \right) \end{array} \right\} \text{ ahol } \begin{array}{l} G - \text{csúsztató rugalmassági modulus} \\ \nu - \text{Poisson tényező} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \alpha) \\ \beta) \end{array}} \right\} \text{ anyagjellemzők.}$$

A feszültségi/alakváltozási tenzor első skalár invariánsai:

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Invariáns egy mennyiség, ha a koordináta-transzformációval szemben változatlan, állandó.

Az α) alak skaláris egyenletei:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \frac{1}{2} \gamma_{yx} &= \frac{1}{2} \frac{\tau_{yx}}{G} & \Rightarrow & \gamma_{xy} = \frac{\tau_{yx}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \frac{1}{2} \gamma_{yz} &= \frac{1}{2} \frac{\tau_{yz}}{G} & \Rightarrow & \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \frac{1}{2} \gamma_{xz} &= \frac{1}{2} \frac{\tau_{xz}}{G} & \Rightarrow & \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}. \end{aligned}$$

A β) alak skaláris egyenletei:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xz} &= G \gamma_{xz}. \end{aligned}$$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel, jegyezze meg az egyszerű és az általános Hooke-törvényt egytengelyű feszültségi állapot esetén!

Más anyagállandók bevezetése:

a) Egyszerű Hooke-törvény – egytengelyű feszültségi állapot (húzás-nyomás/hajlítás):

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z.$$



Egyszerű Hooke-törvény: $\sigma_z = E \varepsilon_z$.

Általános Hooke-törvény:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = \\ &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (-\nu\varepsilon_z - \nu\varepsilon_z + \varepsilon_z) \right] = 2G [\varepsilon_z + \nu\varepsilon_z] = 2G [1 + \nu] \varepsilon_z.\end{aligned}$$

A két alakot összevetve: $2G = \frac{E}{1+\nu} \Rightarrow E = 2G(1 + \nu),$

ahol E a Young¹³-féle rugalmassági modulus.

b) Összefüggés az első skalár invariánsok között:

$$A_t = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{2G} \underbrace{[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z]}_{F_t} - 3 \frac{\nu}{1 + \nu} F_t],$$

$$A_I = \frac{1}{2G} \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} F_I = \frac{1}{3K} F_I .$$

K – térfogati rugalmassági modulus (nem független anyagállandó).

$$3K = 2G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} = \frac{E}{1 - 2\nu} .$$

c) Fajlagos térfogatváltozás:

$$\frac{dV}{V} = \frac{(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = A_I \quad (\approx \text{ jelentése: lineáris közelítés esetén})$$

Lineárisan rugalmas, izotróp anyag anyagállandói: E, ν, G, K – ezek közül kettő független.

Megjegyzés: $A_{dI} = 0, F_{dI} = 0$, mert a deviátor tenzorok a test tiszta torzulását jellemzik.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel az izotróp anyagra vonatkoztatott általános Hooke-törvényt mátrix alakban!

Az izotróp anyagra vonatkozó általános Hooke-törvény felírása mátrix alakban:

Kiindulva a Hooke-törvény $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left[\underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}} \right]$ alakjából és felhasználva az $\frac{1}{2G} = \frac{1+\nu}{E}$ összefüggést:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z, \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{1}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_z, \\ \varepsilon_z &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{1}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}. \end{aligned}$$

Az alakváltozási és a feszültségi tenzor független koordinátáit oszlopmátrixba rendezve kapjuk a törvény mátrixos alakját.

Az általános Hooke-törvény mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}$$

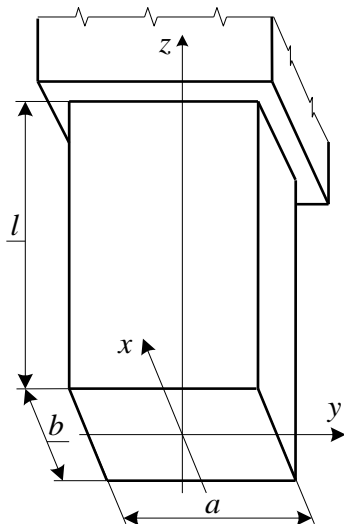
Tömören: $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}}$, ahol $\underline{\underline{C}}$ az anyagjellemzők/anyagállandók mátrixa.

Gyakorló feladatok

Tevékenység:

Kövesse végig a megoldást! Önállóan is végezze el a számításokat!

Rugalmasságtani egyenletek – húzott rúd



Adott:

Az ábrán látható hasáb alakú (mechanikai szempontból rúdnak is tekinthető) rugalmas, önsúlyával terhelt test elmozdulásmezőjének skaláris koordinátái:

$$u = -\nu \rho g x z / E, \quad v = -\nu \rho g y z / E,$$

$$w = -\frac{\rho g}{2E} [l^2 - z^2 - \nu (x^2 + y^2)].$$

E - az anyag rugalmassági modulusa, ν - Poisson tényező,

ρ - a test anyagának tömegsűrűsége, g - gravitációs gyors.,

a, b, l - a test méretei.

Ezeket az elmozdulási koordinátákat a rúdelmélet (húzott - nyomott prizmatikus rúd) felhasználásával kapjuk.

Feladat: A rugalmasságtani egyenletek teljesülésének ellenőrzése.

Kidolgozás:

a) Az alakváltozási tenzor előállítás:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \rho g z / E, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \rho g z / E, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \rho g z / E.$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \gamma_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0.$$

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu \rho g z / E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \rho g z / E & 0 \\ 0 & 0 & \rho g z / E \end{bmatrix}.$$

A geometriai egyenletek teljesülnek, mert ezek felhasználásával állítottuk elő az alakváltozási tenzort.

b) Az általános Hooke-törvény alkalmazása, a feszültségi tenzor előállítás:

$$A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (1 - 2\nu) \frac{\rho g z}{E}, E = 2G(1 + \nu).$$

$$\sigma_x = 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = 0, \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = 0,$$

$$\sigma_y = 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = 0, \tau_{yz} = G \gamma_{yz} = 0,$$

$$\sigma_z = 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = \rho g z, \tau_{xz} = G \gamma_{xz} = 0.$$

$$[\underline{F}(x,y,z)] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g z \end{bmatrix}.$$

A rúdelméletből: $\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{\rho g V}{A} = \frac{\rho g(abz)}{ab} = \rho g z. \Rightarrow$ Az anyagegyenletek teljesülnek.

c) Egyensúlyi egyenlet teljesülésének ellenőrzése: $\underline{F} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$.

$$\vec{q} = q_z \vec{e}_z = -\rho g \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + q_y = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0 + 0 + \rho g - \rho g = 0. \Rightarrow \text{Valamennyi egyensúlyi egyenlet teljesül.}$$

d) A kinematikai peremfeltételek teljesülése:

A $z=l$ egyenletű felületen: $\vec{u} = \vec{0}$.

$$u = -\nu \rho g x l/E, \quad v = -\nu \rho g y l/E, \quad w = \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2),$$

Ez a feltétel csak az $x = y = 0$ pontban teljesül.

e) Dinamikai peremfeltételek teljesülése:

A $z = 0$ felület terheletlen és $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\sigma_z = 0$ teljesül.

Az $x = \pm \frac{b}{2}$ felületek szintén terheletlenek és $\underline{F} \cdot (\pm \vec{e}_x) = \pm \vec{\rho}_x = \vec{0}$ teljesül.

Az $y = \pm \frac{a}{2}$ felületek is terheletlenek és $\underline{F} \cdot (\pm \vec{e}_y) = \pm \vec{\rho}_y = \vec{0}$ teljesül.

4.3.2. Általános Hooke-törvény ortotróp anyagra

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg anizotróp, ortotróp, kompozit fogalmak jelentését! Jegyezze meg a kompozit anyagok tulajdonságait, részeit! Rajzolja fel a kompozit anyagok modelljét!

Anizotróp anyag: az anyagi tulajdonságok (viselkedés) iránytól függő.

Ortotróp anyag: az anizotróp anyag speciális esete, az anyagi viselkedés egymásra merőleges irányokban vett anyagjellemzőkkel leírható.

Azért foglalkozunk ezzel az esettel, mert a gyakorlatban elterjedt szálerősítésű műanyag kompozitok közül sok ezzel az anyagmodellel leírható.

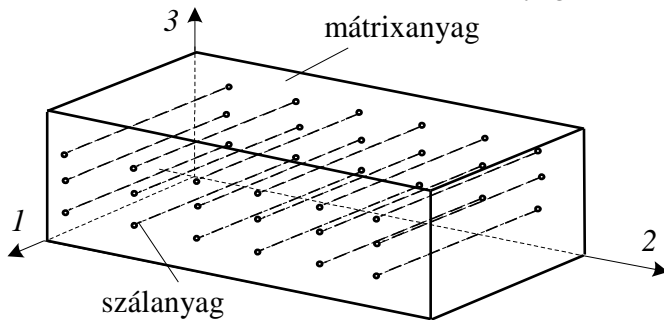
Kompozit anyag: többféle, eltérő tulajdonságú anyagból összetett anyag.

Részei: - erősítés (üvegszál, szénszál, aramid szál, stb.),
- mátrix (ágyazó anyag: epoxi, poliészter, poliamid, stb.)

Tapasztalat: a kompozit anyag sok esetben jobb mechanikai tulajdonságokkal rendelkezik, mint az alkotórészei.

Fő előnyök: nagy szilárdság, kis tömegsűrűség (önsúly), korrózió állóság, stb.

Példa: egy irányban futó, párhuzamos hosszú szálakkal erősített műanyag



1, 2, 3 a kompozit anyagi főirányai (az anyag természetes/anyagi koordináta-rendszere).

Valóság: az anyag nem homogén (a szálak és a mátrix anyaga eltérő tulajdonságú).

Mechanikai modell: Egy olyan homogén, ortotróp anyag, amely nem alkalmas a szálakban, vagy a mátrixban fellépő mechanikai jellemzők (alakváltozások, feszültségek) meghatározására, hanem csak a kompozit anyag egy olyan kisebb tartományának átlagos jellemzői határozhatók meg vele, amelyben elegendően sok szál van.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel, jegyezze meg az általános Hooke-törvényt ortotróp anyagra!

Jegyezze meg a jelölések értelmezését! Jegyezze meg a $\underline{\underline{C}}$ anyagállandó mátrix jelentését, jellemzőit!

Általános Hooke-törvény ortotróp anyagra:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & & & \\ & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ & \underline{\underline{0}} & & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix}$$

E_1, E_2, E_3 – az 1, 2, 3 irányú húzáshoz tartozó rugalmassági modulus,

G_{12}, G_{23}, G_{31} – a csúsztató rugalmassági modulusok,

$\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$ – a Poisson-tényezők.

Például: ν_{12} – az 1 irányú húzáshoz tartozó 2 irányú kontrakció: $\varepsilon_2 = -\nu_{12} \varepsilon_1$.

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}}$. Az ortotróp Hooke-törvény mátrixos felírás esetén formailag ugyanolyan alakban írható fel, mint az izotróp Hooke-törvény.

Az anyagtörvény izotróp és ortotróp esetre formailag azonos, különbség a $\underline{\underline{C}}$ anyagállandó mátrix tartalmában van.



Közös tulajdonság: $\underline{\underline{C}}$ szimmetrikus mátrix (energetikai okokból következően).

Szimmetria: $\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}$, $\frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$, $\frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}$.

A lineárisan rugalmas ortotróp anyag viselkedése 9 független anyagállandóval írható le:

$$E_1, E_2, E_3 \mid \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13} \mid G_{12}, G_{23}, G_{13}.$$

Önellenőrzés

- Egészítse ki a következő meghatározást a megfelelő szavakkal!
 Az általános *Hooke*-törvény a anyag,
 viselkedést írja le.
- Egészítse ki a következő meghatározást a megfelelő szavakkal!
 Izotróp: az anyagi viselkedés anyag.
- Írja fel egy lapra az általános *Hooke*-törvény két, egymással egyenértékű alakját!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
- Írja fel egy lapra az általános *Hooke*-törvény α) alakjának skaláris egyenleteit!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
- Írja fel egy lapra az általános *Hooke*-törvény β) alakjának skaláris egyenleteit!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
- Írja fel egy lapra az egyszerű *Hooke*-törvényt – egytengelyű feszültségi állapot (húzás-nyomás/hajlítás) esetén!



[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

- Egészítse ki a következő meghatározást a megfelelő kifejezéssel!
 Anizotróp anyag: az anyagi tulajdonságok (viselkedés)

függő.

8. Egészítse ki a következő meghatározást a megfelelő szavakkal!
Ortotróp anyag: az _____ anyag speciális esete, az anyagi viselkedés
_____ merőleges irányokban vett anyagjellemzőkkel leírható.

9. Egészítse ki a következő meghatározást a megfelelő szavakkal!
Kompozit anyag: _____ többféle, _____ tulajdonságú anyagból
_____ anyag.

10. Csoportosítsa a fogalmakat a jelentésükkel! Írja a fogalmak előtti kisbetűt a megfelelő meghatározás elé!

i: izotróp
o: ortotróp
a: anizotróp
k: kompozit

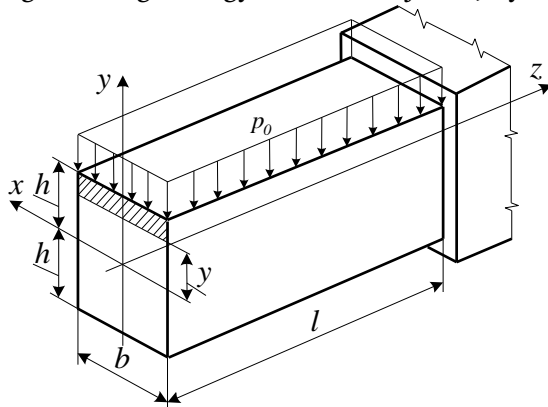
Jel

Meghatározás

az anyagi tulajdonságok (viselkedés) iránytól függőek
az anyagi viselkedés egymásra merőleges irányokban vett
anyagjellemzőkkel leírható
többféle, eltérő tulajdonságú anyagból összetett anyag
az anyagi viselkedés iránytól független

11. Írja fel egy lapra az általános Hooke-törvényt ortotróp anyagra!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

12. Rugalmasságtani egyenletek – hajlított, nyírt rúd



Adott: Az ábrán látható hasáb alakú (mechanikai szempontból rúdnak is tekinthető) rugalmas test geometriai méretei és terhelése: h, b, l, p_0 .

Feladat: Annak ellenőrzése, hogy a rúdelmélettel kapott megoldás kielégíti-e az egyensúlyi egyenletet és a peremfeltételeket.

I./ Határozza meg a feszültségi állapotot a rúdelméletből!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

II./ Ellenőrizze az egyensúlyi egyenlet teljesülését!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

III./ Végezze el a dinamikai peremfeltételek teljesülésének ellenőrzését!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

IV./ Összegezze az eredményeket (egyensúlyi egyenlet, skaláris dinamikai peremfeltételi egyenlet teljesülése)!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

V./ Válassza ki a helyes megoldást!

A rúdelmélet alapján előállított megoldás ennél a feladatnál:

rugalmasságtani szempontból nem egzakt

rugalmasságtani szempontból egzakt



VI./ Válassza ki a helyes megoldást!

A rúdelmélet alapján előállított megoldás ennél a feladatnál:

rugalmasságtani szempontból nem közelíthető

rugalmasságtani szempontból közelíthető

14. LECKE

Peremfeltételek, a rugalmasságtan
egyenletrendszere

4.4. Peremfeltételek, a rugalmasságtan egyenletrendszere

Cél: a hallgató megismerje a peremfeltételeket, a rugalmasságtan egyenletrendszerét, alkalmazási lehetőségeit

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. fel tudja írni a kinematikai és dinamikai peremfeltételeket;
2. fel tudja írni a rugalmasságtan egyenletrendszerét;
3. meg tudja adni a peremérték feladatok lehetséges megoldásait;
4. adatok alapján meg tudja határozni az alakváltozási és feszültségi állapotot;
5. le tudja vezetni a kinematikai egyenlet skaláris egyenleteit DDKR-ben és HKR-ben.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 40 percre lesz szüksége.

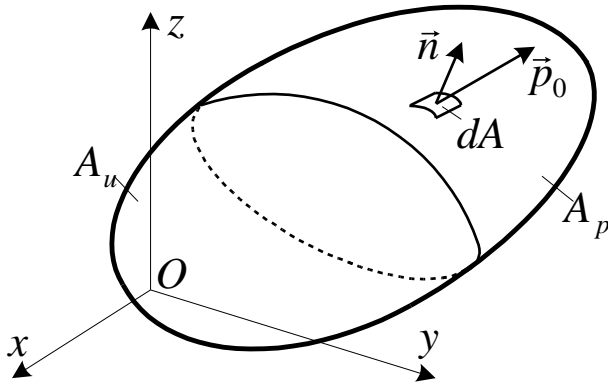
Kulcsfogalmak:

1. dinamikai peremfeltétel, kinematikai peremfeltétel
2. egyensúlyi egyenlet, kompatibilitási egyenlet, anyagegyenlet
3. egzakt megoldás, közelítő megoldás

4.4.1. Peremfeltételek

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki és tanulja meg a peremfeltétel típusok nevét és a hozzájuk tartozó matematikai összefüggést!



Dinamikai peremfeltétel: $\underline{F} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$ az A_p -n.

Kinematikai peremfeltétel: $\vec{u} = \vec{u}_0$ az A_u -n.

A \vec{p}_0 ismert felületi terhelés.

A_p - a test felületének az a része, ahol a felületi terhelés ismert.

Az \vec{u}_0 ismert elmozdulás.

A_u - a test felületének az a része, ahol az elmozdulás ismert.

4.4.2. A rugalmasságtan egyenletrendszere

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel és jegyezze meg a rugalmasságtan egyenletrendszerének egyenleteit (összefüggés, elnevezés, darabszám)! Gyűjtse ki és tanulja meg a rugalmassági peremérték feladatok megoldástípusait!

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0} \quad \text{egyensúlyi egyenlet (3db).}$$

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}) \quad \text{kompatibilitási egyenlet (6 db).}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{anyagegyenlet (6 db).}$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}|_{A_p} = \vec{p}_0 \quad \text{dinamikai} \\ \vec{u}|_{A_u} = \vec{u}_0 \quad \text{kinematikai} \end{array} \right\} \text{peremfeltételek} \quad \begin{array}{l} (3 \text{ db}) \\ (3 \text{ db}) \end{array}$$

Ismeretlenek: $\vec{u}(x,y,z)$, $\underline{\underline{A}}(x,y,z)$, $\underline{\underline{F}}(x,y,z)$.

Bebizonyítható: a rugalmasságtan egyenletrendszerének adott peremfeltételek mellett egy és csakis egy megoldása létezik (egzisztencia és unicitás).

Egzakt megoldás: A keresett \vec{u} , $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{F}}$ mezők az egyenletrendszer és a peremfeltételek minden egyenletét kielégítik.

Közelítő megoldás: A keresett \vec{u} , $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{F}}$ mezők az egyenletrendszer és a peremfeltételek nem minden egyenletét elégítik ki.

Gyakorló feladatok

Tevékenység:

Kövesse végig a megoldást/levezetést! Önállóan is végezze el a számításokat!

Rugalmasságtani egyenletek

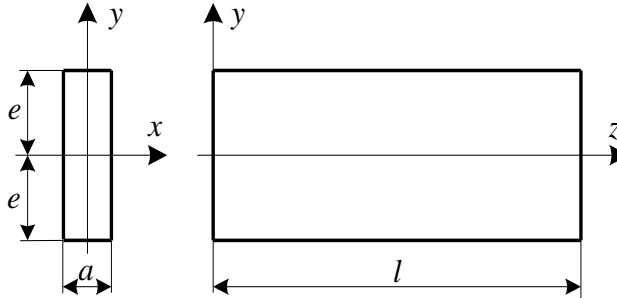
Adott: Az ábrán látható keskeny téglalap keresztmetszetű rúd feszültségmezője:

$$\sigma_y = -\frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(e^2 y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{2}{3}e^3\right),$$

$$\sigma_z = \frac{3p_0}{4e^3} \left(z^2 - \frac{1}{3}\frac{z^3}{l}\right) y,$$

$$\tau_{yz} = \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{1}{2}\frac{z^2}{l}\right) (e^2 - y^2),$$

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{zx} = 0.$$



Feladat:

- Az egyensúlyi egyenlet teljesülésének vizsgálata $\vec{q} = \vec{0}$ esetén.
- A rúd terhelésének, illetve támasztóerő rendszerének meghatározása a dinamikai peremfeltételekből.
- Annak vizsgálata, hogy a megadott feszültségmező lehet-e valamely rugalmasságtani feladat egzakt megoldása, ha $\vec{q} = \vec{0}$.

Kidolgozás:

a) Az egyensúlyi egyenlet teljesülésének vizsgálata $\vec{q} = \vec{0}$ esetén:

Ha a térfogati terhelés a rúd minden pontján zérus, akkor az $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ egyensúlyi egyenlet az $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla = \vec{0}$ alakra egyszerűsödik.

A vizsgálandó skaláregyenletek a következők:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Az első skaláregyenlet azonnal teljesül, hiszen a benne szereplő feszültségkoordináták azonosan egyenlők nullával.

A második skaláregyenlet is teljesül tetszőleges pontban:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 - \frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) (e^2 - y^2) + \frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) (e^2 - y^2) = 0.$$

Ugyanezt láthatjuk a harmadik skaláregyenlet esetén, ugyanis:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 - 2y \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{z^2}{2l}\right) + \frac{3p_0}{4e^3} y \left(2z - \frac{z^2}{l}\right) = 0.$$

Az egyensúlyi egyenlet tehát a rúd minden pontjában teljesül.

b) A rúd terhelésének, illetve támasztóerő-rendszerének meghatározása a dinamikai peremfeltételekből:

Mivel térfogati erő nem hat és a feszültségeloszlás folytonos függvényekkel leírható, a rúdra ható terhelés és a támasztóerő rendszer is felületen megoszló erőként jelentkezik. Ennek számítása a felületi feszültségállapot vizsgálatával lehetséges. Ki kell számítani a rudat határoló hat téglalap felületen a feszültségeket.

Az $\pm \vec{e}_x$ normálisú felületek terheletlenek, ugyanis $\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$, vagyis $\vec{\rho}_x = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_x = \vec{0}$.

Az \vec{e}_y normálisú felület (a rúd „felső lapja”) az $y = e$ helyettesítéssel áll elő.

$$\sigma_y = -\frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(e^3 - \frac{1}{3}e^3 + \frac{2}{3}e^3\right) = -p_0 \left(1 - \frac{z}{l}\right)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{1}{2}\frac{z^2}{l}\right) (e^2 - e^2) = 0, \tau_{xy} = 0$$

A negatív normál feszültség összenyomást jelent, a felületet tehát

$$\vec{p} = -p_0 \left(1 - \frac{z}{l}\right) \vec{e}_y$$

sűrűségű, felületen megoszló erő terheli.

A $-\vec{e}_y$ normálisú felület (a rúd „alsó lapja”) az $y = -e$ helyettesítéssel áll elő.

$$\sigma_y = -\frac{3p_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(-e^3 + \frac{1}{3}e^3 + \frac{2}{3}e^3\right) = 0$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{1}{2}\frac{z^2}{l}\right) (e^2 - e^2) = 0, \tau_{xy} = 0. \text{ Ez a felület terheletlen.}$$

Az \vec{e}_z normálisú felület a $z = l$ helyettesítéssel áll elő.

$$\sigma_z = \frac{3p_0}{4e^3} \left(l^2 - \frac{1}{3}\frac{l^3}{l}\right) y = \frac{p_0 l^2}{2e^3} y$$

$$\tau_{yz} = \frac{3p_0}{4e^3} \left(l - \frac{1}{2}\frac{l^2}{l}\right) (e^2 - y^2) = \frac{3lp_0}{8e^3} (e^2 - y^2), \tau_{xz} = 0.$$

A $-\vec{e}_z$ normálisú felület a $z = 0$ helyettesítéssel áll elő.

$\sigma_z = 0, \tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = 0$. A felület terheletlen.

c) Annak vizsgálata, hogy a megadott feszültségmező lehet-e valamely rugalmasságtani feladat egzakt megoldása, ha $\vec{q} = \vec{0}$:

Egzakt megoldás esetén a fentiekén kívül teljesülnie kell a *Beltrami–Michell*-féle kompatibilitási egyenleteknek is.

Ezek skaláris alakja $\vec{q} = \vec{0}$ esetén:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y \partial z} = 0.$$

A deriválásokat (fenti sorrendben/elrendezésben) elvégezve a következő egyenletekre jutunk:

$$\begin{aligned} 0 &= 0, & 0 &= 0, \\ \frac{6yp_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{6yp_0}{4e^3} \left(1 - \frac{z}{l}\right) &= 0, & 0 &= 0, \\ \frac{3p_0}{4e^3} \left(2 - \frac{2z}{l}\right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{3p_0}{4e^3} \left(2 - \frac{2z}{l}\right) &= 0, \\ -2 \frac{3p_0}{4e^3} \left(z - \frac{z^2}{2l}\right) - \frac{3p_0}{4e^3 l} (e^2 - y^2) + \frac{1}{1+\nu} \frac{3p_0}{4e^3} \left[\left(\frac{e^2}{l} + \frac{2}{3l} y^2\right) + \left(2z - \frac{z^2}{l}\right) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Rugalmasságtani egyenletek – az alakváltozási tenzor felírása henger koordináta-rendszerben

Adott: Az $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$ kinematikai egyenlet.

Feladat: Az $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$ kinematikai egyenlet skaláris egyenleteinek levezetése az $R\varphi z$ henger koordináta-rendszerben.

Kidolgozás:

A ∇ nabla differenciáloperátor henger-koordinátarendszerben: $\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$.

Az \vec{u} elmozdulásmozgó henger koordináta-rendszerben $\vec{u} = u \vec{e}_R + v \vec{e}_\varphi + w \vec{e}_z$.

A derivált tenzor: $\underline{\underline{D}} = \vec{u} \circ \nabla = (u \vec{e}_R + v \vec{e}_\varphi + w \vec{e}_z) \circ \left(\frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right)$.

A henger-koordinátarendszerben a bázisvektorok egy része nem független a helytől:

$$\vec{e}_R = \vec{e}_R(\varphi), \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi), \vec{e}_z = \text{állandó}.$$

Ezért henger-koordinátarendszerben a bázisvektorok helykoordináták szerinti deriváltjai – szemben a *Descartes*-féle derékszögű koordinátarendszerrel – nem mind egyenlők nullával:

$$\frac{\partial \vec{e}_R}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial R} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial z} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0}, \text{ de } \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi, \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_R.$$

A kijelölt diadikus szorzás elvégzésénél ezt figyelembe véve:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} &= (u \vec{e}_R + v \vec{e}_\varphi + w \vec{e}_z) \circ \left(\frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial R} \vec{e}_R \circ \vec{e}_R + \frac{\partial v}{\partial R} \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_R + \frac{\partial w}{\partial R} \vec{e}_z \circ \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_R \circ \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} u \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \varphi}}_{\vec{e}_\varphi} \circ \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_\varphi + \\ &\quad + \frac{1}{R} v \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}}_{-\vec{e}_R} \circ \vec{e}_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \vec{e}_z \circ \vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_R \circ \vec{e}_z + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_z + \frac{\partial w}{\partial z} \vec{e}_z \circ \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Az azonos diádotkat összevonva:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} &= \frac{\partial u}{\partial R} \vec{e}_R \circ \vec{e}_R + \frac{\partial v}{\partial R} \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_R + \frac{\partial w}{\partial R} \vec{e}_z \circ \vec{e}_R + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{R} \right) \vec{e}_R \circ \vec{e}_\varphi + \left(\frac{u}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_\varphi + \\ &\quad + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \vec{e}_z \circ \vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_R \circ \vec{e}_z + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{e}_\varphi \circ \vec{e}_z + \frac{\partial w}{\partial z} \vec{e}_z \circ \vec{e}_z \end{aligned}$$

Ebből az elmozdulásmező derivált tenzorának mátrixa:

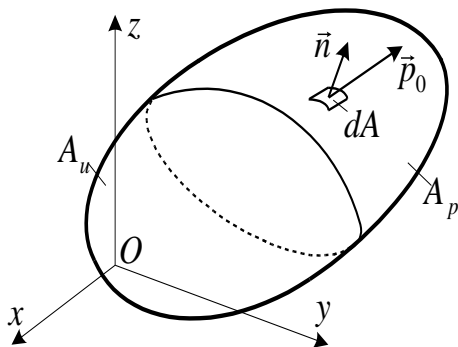
$$[\underline{\underline{D}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial R} & \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{R} \right) & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial R} & \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{R} \right) & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} - \text{nem szimmetrikus tenzor.}$$

Az alakváltozási tenzor: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T)$, vagyis a derivált tenzor szimmetrikus része:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial R} & \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v + R \frac{\partial v}{\partial R} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial R} \right) \\ \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v + R \frac{\partial v}{\partial R} \right) & \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} & \frac{1}{2R} \left(R \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial R} \right) & \frac{1}{2R} \left(R \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Önellenőrzés

1. Csoportosítsa a peremfeltételek nevét és matematikai alakjukat! Írja a megfelelő kisbetűt a helyes összefüggés mellé!



d: dinamikai peremfeltétel
 k: kinematikai peremfeltétel

Betű

Összefüggés

$$\vec{u} = \vec{u}_0$$

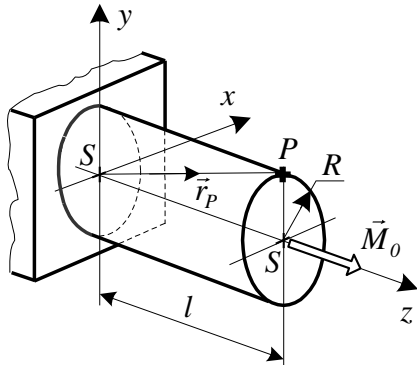
$$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$$

2. Írja fel egy papírra a dinamikai peremfeltételt!
 A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
3. Írja fel egy papírra a kinematikai peremfeltételt!
 A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

4. Írja fel egy papírra az egyensúlyi egyenletet vektoriális alakban!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
5. Írja fel egy papírra a kompatibilitási egyenletet tenzoros alakban!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
6. Írja fel egy papírra az anyagegyenletet mátrixos alakban!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
7. Egészítse ki a következő mondatot a szükséges kifejezésekkel!
A rugalmasságtan egyenletrendszerének adott peremfeltételek mellett
megoldása létezik.
8. Egészítse ki a következő mondatot a szükséges kifejezésekkel!
Egzakt megoldás: a keresett mezők az egyenletrendszer és a peremfeltételek
egyenletét

és

9. Rugalmasságtani egyenletek – elmozdulási, alakváltozási és feszültségi állapot



Adott:

Egy kör keresztmetszetű rúd geometriai méretei és csúsztató rugalmassági modulusa, a csavarásakor az elmozdulás vektormező az $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x, y, z)$ függvénnyel, továbbá a test P pontjának \vec{r}_P helyvektora.

$$\vec{u}(x, y, z) = (-\vartheta z y) \vec{e}_x + (\vartheta x z) \vec{e}_y, \quad \vartheta = 0,1 \text{ rad/m,}$$

$$R = 0,01 \text{ m, } G = 80 \text{ GPa, } l = 0,1 \text{ m, } \vec{M}_0 = M_0 \vec{e}_z,$$

$$\vec{r}_P = (0,01 \vec{e}_y + 0,1 \vec{e}_z) \text{ m.}$$

Feladat:

- Az $\underline{\underline{A}}(x, y, z)$ alakváltozási tenzor mátrixának meghatározása.
- A rúd térfogatváltozásának meghatározása.
- Az \vec{r}_P helyvektorú P pontban a főnyúlások és az $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ alakváltozási főirányok meghatározása. A P pontbeli alakváltozási állapot szemléltetése.
- A P pontbeli feszültségi állapot meghatározása.

a) Az $\underline{\underline{A}}(x, y, z)$ alakváltozási tenzor mátrixának meghatározása.

I./ Írja fel egy papírra az alakváltozási tenzort!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

15. LECKE

A kompatibilitási egyenlet más alakjai

4.5. A kompatibilitási egyenlet más alakjai

Cél: a hallgató megismerje kompatibilitási egyenlet más alakjait

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. fel tudja írni a geometriai egyenletet;
2. fel tudja írni a Saint-Venant-féle kompatibilitási egyenlet tenzoriális alakját és DDKR-ben a skaláris egyenleteket;
3. fel tudja írni a Laplace¹⁴-féle differenciál operátort;
4. fel tudja írni a Beltrami-Michell-féle kompatibilitási egyenlet tenzoriális alakját és DDKR-ben a skaláris egyenleteket.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 30 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. Saint-Venant-féle kompatibilitási egyenlet, tenzoriális alak, Beltrami-Michell-féle kompatibilitási egyenlet
2. Laplace-féle differenciál operátor, DDKR

¹⁴ Pierre-Simon de Laplace (1749-1829) francia matematikus, csillagász és fizikus.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel és tanulja meg a Saint-Venant-féle kompatibilitási egyenlet tenzoriális alakját és DDKR-ben a skaláris egyenleteket! Írja fel, kövesse a levezetést!

Az $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$ geometriai egyenletből indulunk ki.

Átalakítás: szorzás jobbról és balról vektoriálisan ∇ -val \Rightarrow Saint-Venant-féle kompatibilitási egyenlet.

4.5.1. A Saint-Venant-féle kompatibilitási egyenlet

$$\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla = \underline{\underline{0}} \text{ (tenzor egyenlet).}$$

A skalár egyenletek levezetése DDKR-ben:

a) Az $\underline{\underline{A}} \times \nabla$ kifejezés előállítás:

$$\underline{\underline{A}} = \vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z, \text{ és } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z.$$

A levezetésnél felhasználjuk az $(\vec{a} \circ \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$ azonosságot.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \times \nabla &= (\vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z) \times \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \\ &= \left[\frac{\partial \vec{\alpha}_x}{\partial y} \circ \vec{e}_z + \frac{\partial \vec{\alpha}_x}{\partial z} \circ (-\vec{e}_y) \right] + \left[\frac{\partial \vec{\alpha}_y}{\partial x} \circ (-\vec{e}_z) + \frac{\partial \vec{\alpha}_y}{\partial z} \circ \vec{e}_x \right] + \left[\frac{\partial \vec{\alpha}_z}{\partial x} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{\alpha}_z}{\partial y} \circ (-\vec{e}_x) \right]. \end{aligned}$$

A kifejezést átrendezve:

$$\underline{\underline{A}} \times \nabla = \left(\frac{\partial \vec{\alpha}_y}{\partial z} - \frac{\partial \vec{\alpha}_z}{\partial y} \right) \circ \vec{e}_x + \left(\frac{\partial \vec{\alpha}_z}{\partial x} - \frac{\partial \vec{\alpha}_x}{\partial z} \right) \circ \vec{e}_y + \left(\frac{\partial \vec{\alpha}_x}{\partial y} - \frac{\partial \vec{\alpha}_y}{\partial x} \right) \circ \vec{e}_z.$$

b) Szorzás vektoriálisan balról ∇ -val.

A *Saint-Venant* tenzor-egyenlet bal oldalán álló kifejezés mínusz egyszeresét jelöljük $\underline{\underline{\eta}}$ -val.

Az $\underline{\underline{\eta}} = -\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla$ tenzor mátrixának első oszlopába az $\underline{\underline{\eta}} \cdot \vec{e}_x = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{\alpha}_y}{\partial z} - \frac{\partial \vec{\alpha}_z}{\partial y} \right)$ vektor koordinátái kerülnek.

Az oszlopmátrix előállítás:

$$\begin{aligned} -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{\alpha}_y}{\partial z} - \frac{\partial \vec{\alpha}_z}{\partial y} \right) &= \left(\frac{\partial^2 \vec{\alpha}_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \vec{\alpha}_z}{\partial y \partial x} \right) \times \vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 \vec{\alpha}_y}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \vec{\alpha}_z}{\partial y^2} \right) \times \vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 \vec{\alpha}_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \vec{\alpha}_z}{\partial y \partial z} \right) \times \vec{e}_z = \\ &= \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} \right) \underbrace{(\vec{e}_y \times \vec{e}_x)}_{-\vec{e}_z} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} \right) \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_x)}_{\vec{e}_y} + \\ &+ \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} \right) \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_y)}_{\vec{e}_z} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \right) \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_y)}_{-\vec{e}_x} + \\ &+ \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} \right) \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_z)}_{-\vec{e}_y} + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \right) \underbrace{(\vec{e}_y \times \vec{e}_z)}_{\vec{e}_x}. \end{aligned}$$

Az átalakítások során felhasználtuk az $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ azonosságot.

A kifejezés tagjainak átcsoportosítása után:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\eta}} \cdot \vec{e}_x &= \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} \right) \vec{e}_y + \\ &+ \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} \right) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Hasonló számítások eredményeképpen kapjuk az $\underline{\underline{\eta}} = -\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla$ tenzor második és harmadik oszlopát:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\eta}} \cdot \vec{e}_y &= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial y} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} \right) \vec{e}_y + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial x \partial z} \right) \vec{e}_z, \\ \underline{\underline{\eta}} \cdot \vec{e}_z &= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial y \partial x} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial x} \right) \vec{e}_y + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \right) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

A *Saint-Venant*-féle kompatibilitási tenzor egyenlet szerint a fenti oszlopok minden koordinátája nullával egyenlő. Ez a kilenc egyenlet a *Saint-Venant*-féle kompatibilitási tenzor egyenlet skaláris alakja DDKR-ben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial x \partial z} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial y \partial x} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned}$$

Az alakváltozási tenzor szimmetriáját figyelembe véve, hat egymástól különböző skaláris egyenlet marad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Megjegyzés:

Ez hat egyenlet megszorításokat jelent az alakváltozási tenzor koordinátáira nézve. Azt jelenti, hogy az alakváltozási tenzor koordinátái nem függetlenek egymástól.

Ha figyelembe vesszük az $\underline{A} = \frac{1}{2} (\nabla \circ \vec{u} + \vec{u} \circ \nabla)$ összefüggést, akkor az egyenletek azonossággá alakulnak. Tehát a *Saint-Venant*-féle kompatibilitási egyenlet fizikai tartalma megegyezik a 4.2.2 pontban felírt geometriai/kinematikai egyenletek tartalmával.

Átalakítás: a *Saint-Venant* egyenlet + izotróp *Hooke*-törvény \Rightarrow *Beltrami*¹⁵- *Michell*¹⁶-féle kompatibilitási egyenlet.

¹⁵Eugenio Beltrami (1835-1900) olasz matematikus.

¹⁶John Henry Michell (1863-1940) ausztrál matematikus.

4.5.2. A Beltrami-Michell-féle kompatibilitási egyenlet

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel és tanulja meg a Laplace-féle differenciál operátort, a Beltrami-Michell-féle kompatibilitási egyenlet tenzoriális alakját és a skaláregyenleteket DDKR-ben!

Írja fel és kövesse a levezetéseket!

$$\Delta \underline{\underline{F}} + \frac{1}{1+\nu} F_I \nabla \circ \nabla + \nabla \circ \vec{q} + \vec{q} \circ \nabla + \frac{\nu}{1-\nu} (\vec{q} \cdot \nabla) \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}} \text{ (tenzor egyenlet).}$$

Laplace¹⁷-féle differenciál operátor: $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

A skalár egyenletek levezetése DDKR-ben:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\underline{F}} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \underline{\underline{F}} \cdot \vec{q} \cdot \nabla = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}, \\ \nabla \circ \nabla &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix}, \\ \nabla \circ \vec{q} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x & q_y & q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_x}{\partial x} & \frac{\partial q_y}{\partial x} & \frac{\partial q_z}{\partial x} \\ \frac{\partial q_x}{\partial y} & \frac{\partial q_y}{\partial y} & \frac{\partial q_z}{\partial y} \\ \frac{\partial q_x}{\partial z} & \frac{\partial q_y}{\partial z} & \frac{\partial q_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (\nabla \circ \vec{q}) = (\vec{q} \circ \nabla)^T, \\ \vec{q} \circ \nabla &= \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_x}{\partial x} & \frac{\partial q_x}{\partial y} & \frac{\partial q_x}{\partial z} \\ \frac{\partial q_y}{\partial x} & \frac{\partial q_y}{\partial y} & \frac{\partial q_y}{\partial z} \\ \frac{\partial q_z}{\partial x} & \frac{\partial q_z}{\partial y} & \frac{\partial q_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

¹⁷ Pierre-Simon de Laplace (1749-1829) francia matematikus, csillagász és fizikus.

A skaláregyenleteket a kijelölt differenciálások elvégzésével kapjuk.

A feszültségi tenzor diagonális elemeihez kapcsolódó három skaláregyenlet:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial q_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) = 0.$$

A feszültségi tenzor főátlón kívüli elemeihez kapcsolódó hat skaláregyenlet valójában csak három különböző egyenlet a feszültségi tenzor szimmetriája miatt:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y \partial z} + \frac{\partial q_y}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial y} = 0.$$

Önellenőrzés

1. Írja fel egy papírra a Saint-Venant-féle kompatibilitási egyenlet tenzoriális változatát!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
2. Írja fel egy papírra a Beltrami-Michell-féle kompatibilitási egyenlet tenzoriális változatát!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
3. Írja fel egy papírra a Laplace-féle differenciál operátort!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

4. Csoportosítsa a kompatibilitási egyenletek elnevezését, különféle alakjait, egyenleteit! Írja a megfelelő kisbetűt a helyes alak, összefüggés mellé!

s: *Saint-Venant*-féle kompatibilitási egyenlet tenzoriális alakja

v: *Saint-Venant*-féle kompatibilitási egyenlet skaláris változata DDKR-ben

b: *Beltrami-Michell*-féle kompatibilitási egyenlet tenzoriális alakja

l: *Laplace*-féle differenciál operátor DDKR-ben

m: *Beltrami-Michell*-féle kompatibilitási egyenlet 3 skaláregyenlete DDKR-ben

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y \partial z} + \frac{\partial q_y}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

$$\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla = \underline{\underline{0}}$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

$$\Delta \underline{\underline{F}} + \frac{1}{1+\nu} F_I \nabla \circ \nabla + \nabla \circ \vec{q} + \vec{q} \circ \nabla + \frac{\nu}{1-\nu} (\vec{q} \cdot \nabla) \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$$

V. MODUL

Rúdfeladatok

16. LECKE

Síkgörbe rudak hajlítása

5. Rúdfeladatok

5.1. Síkgörbe rudak hajlítása

Cél: a hallgató megismerje a síkgörbe rudak egyensúlyi egyenleteit, feszültségeloszlását, terhelhetőségét a Grashof¹⁸-féle elmélet alapján

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. fel tudja rajzolni a síkgörbe rúd modelljét a szükséges jelölésekkel;
2. meg tudja adni a síkgörbe rúd görbületi sugarának az előjelét;
3. fel tudja írni síkgörbe rudakra az egyensúlyi egyenleteket;
4. fel tudja sorolni a Grashof elmélet kiinduló feltételezéseit;
5. fel tudja sorolni az alakváltozási feltételezéseket;
6. fel tudja rajzolni a rúd keresztmetszetét a szükséges jelölésekkel;
7. fel tudja rajzolni a síkgörbe rúd keresztmetszetének feszültségeloszlását a szükséges jelölésekkel;
8. fel tudja írni az eredő erőt és az eredő nyomatékot meghatározó összefüggést;
9. meg tudja adni a σ_{\max} helyét a keresztmetszetben;
10. fel tudja írni a Grashof formulát;
11. fel tudja írni a redukált másodrendű nyomaték értelmezését;
12. meg tudja határozni, hogy mikor tekintjük a rudat nagyon, illetve kevésbé görbültnek;
13. el tudja dönteni, hogy a $\frac{p_0}{\epsilon_{\max}}$ hányados függvényében hogyan alkalmazható a Grashof elmélet;

¹⁸ Franz Grashof (1826-1893) német mérnök.

14. fel tudja írni a középvonal görbületének és a szélső keresztmetszetek egymással bezárt szögének változását leíró összefüggéseket;
15. fel tudja írni az alakváltozási energiát meghatározó összefüggést;
16. adatok alapján meg tudja határozni a síkgörbe rudak igénybevételeit;
17. adatok alapján meg tudja határozni a redukált másodrendű nyomatékot;
18. adatok alapján fel tudja rajzolni a síkgörbe rudak igénybevételi ábráit;
19. adatok alapján fel tudja rajzolni síkgörbe rudak keresztmetszetén a feszültségeloszlást;
20. adatok alapján el tudja végezni a síkgörbe rúd méretezését és ellenőrzését.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 75 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

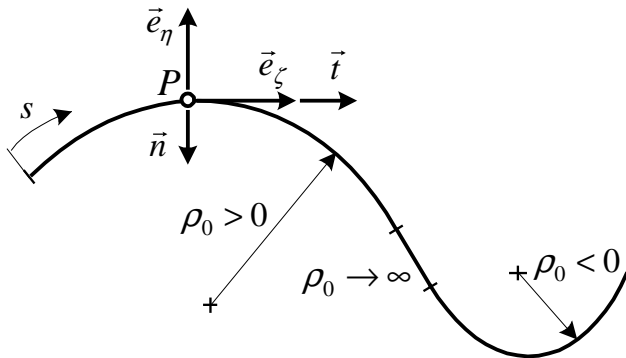
1. síkgörbe rúd, egyensúlyi egyenlet, görbületi sugár
2. terhelés, alakváltozás, feszültség, igénybevétel
3. *Grashof* formula
4. redukált másodrendű nyomaték
5. alakváltozási energia

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Rajzolja fel a szükséges jelölésekkel a síkgörbe rúd modelljét! Jegyezze meg a főbb jellemzők nevét! Jegyezze meg mikor tekintjük a görbületi sugarat negatívnak és pozitívnak!

5.2. Síkgörbe rudak Grashof-féle elmélete

Síkgörbe rúd: a rúd középvonala (S ponti szála) síkgörbe.



Jelölések:

A középvonal egy pontját az s ívhosszal azonosítjuk.

A P pontban (P ponthoz tartozó keresztmetszetben) helyi koordináta-rendszert veszünk fel:

$\vec{e}_x = \vec{e}_\xi, \vec{e}_y = \vec{e}_\eta, \vec{e}_z = \vec{e}_\zeta$.

ρ_0 - középvonal görbületi sugara alakváltozás előtt,

ρ - középvonal görbületi sugara alakváltozás után.

Előjel: - ha az ívhossz irányában haladva a görbületi középpont jobbkézre esik, akkor $\rho_0 > 0$,
 - ha az ívhossz irányában haladva a görbületi középpont balkézre esik, akkor $\rho_0 < 0$.

A rúd terhelése: $\vec{f} = f_t \vec{t} + f_n \vec{n}$ vonalmentén (a középvonal mentén) megoszló terhelés.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel és jegyezze meg az egyensúlyi egyenleteket!

Egyensúlyi egyenletek síkgörbe rudakra:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{ds} - \frac{T_n}{\rho_0} + f_t &= 0, \\ \frac{N}{\rho_0} + \frac{dT_n}{ds} - f_n &= 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Az } N(s) \text{ rúderő és a } T_n(s) \text{ nyíróerő nem független egymástól.}$$

$\frac{dM_{hx}}{ds} + T_\eta = 0$. Az M_{hx} hajlítónyomaték és a T_η nyíróerő között ugyanolyan összefüggés van, mint az egyenes rudaknál.

Igénybevételek: a terhelés ismeretében az igénybevételek az értelmezés alapján meghatározhatók.

- Megoldandó feladat:
- az alakváltozási jellemző(k) meghatározása,
 - a rúd keresztmetszetein ébredő feszültség (eloszlás) meghatározása.

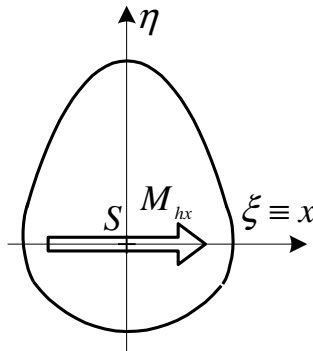
Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a kiinduló és az alakváltozási feltételezéseket!

5.2.1. Az alakváltozási jellemzők előállítás

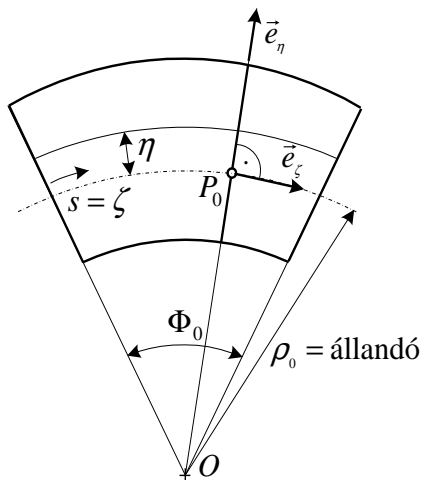
- Kiinduló feltételezések:
- a rúd középvonala terhelés előtt ρ_0 sugarú körív,
 - a rúd prizmatikus, továbbá keresztmetszetei az η tengelyre szimmetrikusak
 - a rúd igénybevétele tiszta hajlítás,
 - a rúdban egytengelyű feszültségi állapot lép fel.

A rúd keresztmetszete:

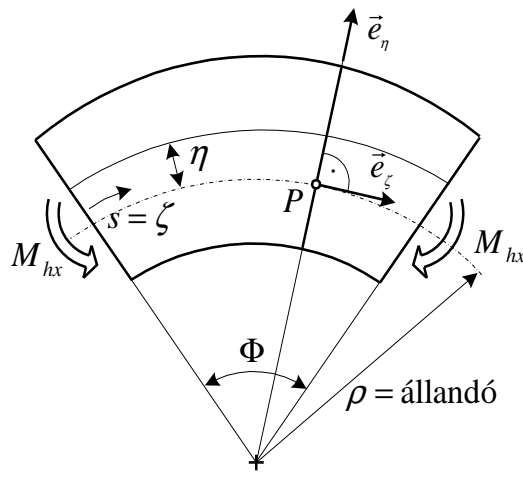


Alakváltozási feltételezések:

- alakváltozás után a keresztmetszetek síkok maradnak és merőlegesek maradnak a deformálódott középvonalra,
- az alakváltozás során a ρ_0 sugarú, körív alakú középvonal ρ sugarú körívvé görbül az M_{hx} nyomaték hatására.



Terhelés előtt



Terhelés után

A középvonaltól η távolságra lévő koncentrikus körív hosszának fajlagos megváltozása:

$$\varepsilon_\zeta = \frac{(\rho + \eta) \Phi - (\rho_0 + \eta) \Phi_0}{(\rho_0 + \eta) \Phi_0}.$$

A feszültségi állapot egytengelyű: $\sigma_\zeta = E \varepsilon_\zeta = E \left(\frac{(\rho+\eta)}{(\rho_0+\eta)} \frac{\Phi}{\Phi_0} - 1 \right)$.

$\sigma_\zeta = \sigma_\zeta(\eta)$ – hiperbola.

Ha $M_{hx} > 0$, akkor $\rho < \rho_0$ és $\Phi > \Phi_0$.

A hiperbola
aszimptotái:

Ha $\eta \rightarrow -\rho_0$, akkor $\sigma_\zeta \rightarrow -\infty$,

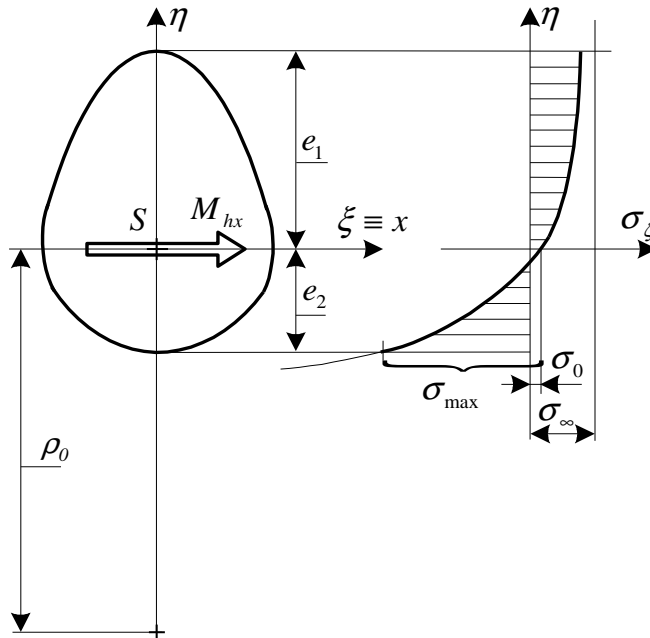
Ha $\eta \rightarrow \infty$, akkor $\sigma_\zeta \rightarrow \sigma_\infty = E \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - 1 \right)$,

Ha $\eta = 0$, akkor $\sigma_\zeta = E \left(\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\Phi}{\Phi_0} - 1 \right) = \sigma_0$.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Rajzolja fel és jegyezze meg a feszültségeloszlás jellemzőit!

A feszültségeloszlás szemléltetése:



Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel és jegyezze meg az eredő erőt és az eredő nyomatékot meghatározó összefüggést! Írja fel és jegyezze meg a Grashof-féle formulát, a redukált nyomatékot meghatározó összefüggést és az előjel értelmezését!

5.2.2. A feszültség és az igénybevétel kapcsolata

Feszültségi eredők \equiv igénybevételek:

a) Az eredő erő: $\vec{F}_S = \int_{(A)} \vec{\rho}_\zeta dA = \vec{e}_\zeta \int_{(A)} \sigma_\zeta dA = \vec{0}$.

* $\int_{(A)} \sigma_\zeta dA = \vec{0} \Rightarrow \sigma_{\max}$ általában a görbületi középpont felé eső szélső szálban van.

b) Az eredő nyomaték: $\vec{M}_S = \int_{(A)} \vec{R} \times \vec{\rho}_\zeta dA = \int_{(A)} (\xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta) \times \sigma_\zeta \vec{e}_\zeta dA = M_{hx} \vec{e}_\xi$.

Skalár egyenletek:

$\int_{(A)} \xi \sigma_\zeta dA = 0$ ez az egyenlet identikusan teljesül, ha az η a keresztmetszet szimmetriatengelye,

* $\int_{(A)} \eta \sigma_\zeta dA = M_{hx}$.

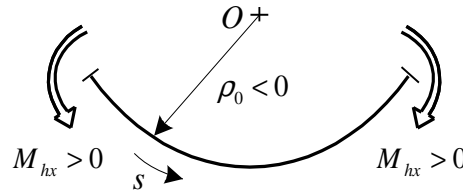
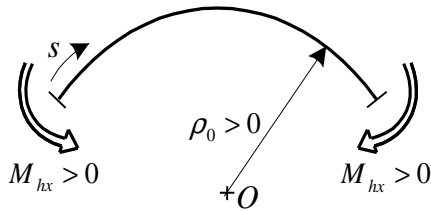
A * -gal jelölt egyenletekből ρ és Φ kifejezhető az M_{hx} -szel:

Grashof formula: $\sigma_\zeta = \frac{M_{hx}}{\rho_0 A} + \frac{M_{hx}}{I_r} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta$.

Jelölés: $\sigma_0 = \frac{M_{hx}}{\rho_0 A}$,

$I_r = \int_{(A)} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 dA$ - a keresztmetszet ξ tengelyére számított redukált másodrendű nyomaték (általában $I_r > I_\xi$).

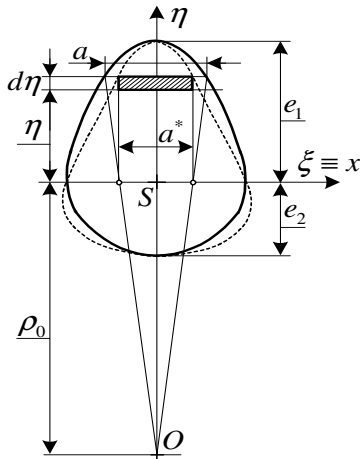
Előjel:



Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel és jegyezze meg a redukált másodrendű nyomaték értelmezését! Jegyezze meg a görbültséget jellemző összefüggést! Jegyezze meg, mikor tekintjük a rudat kicsit, illetve nagyon görbültnek!

5.2.3. Redukált másodrendű nyomaték



$$\text{Értelmezés: } I_r = \int_{(A)} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 dA.$$

A hasonló háromszögekből:

$$\frac{a}{\rho_0 + \eta} = \frac{a^*}{\rho_0} \Rightarrow a^* = \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} a.$$

$$I_r = \int_{(A)} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 \underbrace{a d\eta}_{dA} = \int_{(A)} \eta^2 \underbrace{a^* d\eta}_{dA^*} = I_\xi^*.$$

Egy módosított (szaggatott vonallal megrajzolt) keresztmetszet $x = \xi$ tengelyre számított I_ξ másodrendű nyomatékát kell meghatározni.

A rúd „görbültségének” jellemzése:

$e_{\max} = \max(e_1, e_2)$, $\frac{\rho_0}{e_{\max}}$ – hányados a rúd görbültségére jellemző mennyiség.

Ha a $\frac{\rho_0}{e_{\max}}$ hányados kicsi, akkor a rúd nagyon görbült.

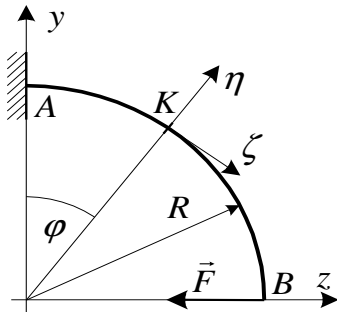
Ha a $\frac{\rho_0}{e_{\max}}$ nagy, akkor a rúd enyhén görbült.

Gyakorló feladatok

Tevékenység:

Kövesse végig a megoldást! Önállóan is végezze el a szerkesztést és a számításokat!

Síkgörbe rúd igénybevételei, feszültségeloszlása



Adott: Az A keresztmetszetében befalazott, negyed körív középvonalú, kör keresztmetszetű síkgörbe rúd geometriája és terhelése: R, F, d .

Feladat:

a) Az $N = N(\varphi)$ rúderő-, a $T_\eta = T_\eta(\varphi)$ nyíróerő- és az $M_{hx} = M_{hx}(\varphi)$ hajlító nyomatéki függvények meghatározása, az igénybevételi ábrák megrajzolása a jellemző értékek megadásával.

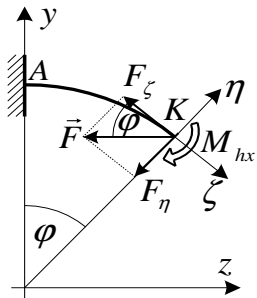
b) Az A keresztmetszeten a feszültségeloszlás meghatározása.

Kidolgozás:

a) Az $N = N(\varphi)$ rúderő-, a $T_\eta = T_\eta(\varphi)$ nyíróerő- és az $M_h = M_h(\varphi)$ hajlítónyomatéki függvények meghatározása, az igénybevételi ábrák megrajzolása a jellemző értékek megadásával:

A tartót terhelő \vec{F} erőt a tartó tetszőleges K keresztmetszetének súlypontjába redukáljuk. Az így kapott vektorkettős skaláris koordinátái a keresett igénybevételek.

Az előjelek az igénybevételek előjel szabályának megfelelően adódnak.



$$N = N(\varphi) = -F \cos \varphi,$$

$$T_\eta = T_\eta(\varphi) = F \sin \varphi,$$

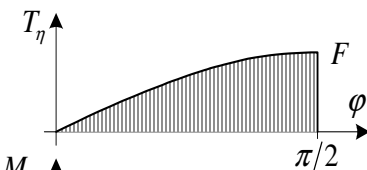
$$M_{hx} \equiv M_{h\xi} = M_{hx}(\varphi) = RF \cos \varphi.$$

Ezeknek a függvényeknek az ábrázolásával kapjuk az igénybevételi ábrákat:

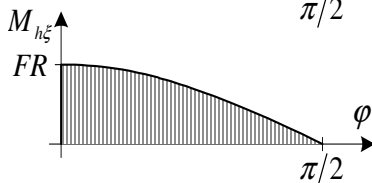
Rúderő ábra:



Nyíróerő ábra:



Nyomatéki ábra:



b) Az A keresztmetszeten a feszültségeloszlás meghatározása:

Az A keresztmetszet igénybevétele: húzás-nyomás és hajlítás.

$$\sigma_{\zeta}(\eta) = \sigma'_{\zeta} + \sigma''_{\zeta} = \frac{N}{A} + \frac{M_{h\zeta}}{\rho_0 A} + \frac{M_{h\zeta}}{I_{red}} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta, \text{ ahol}$$

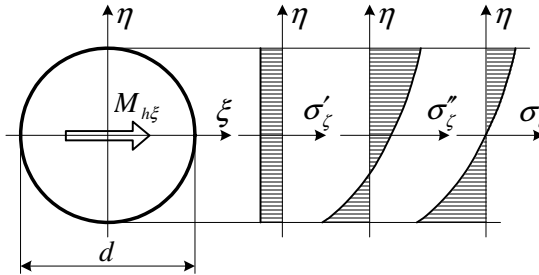
$$\sigma''_{\zeta} = \frac{N}{A} = -\frac{F}{A} \text{ a húzás-nyomásból származó normál feszültség,}$$

$$\sigma'_{\zeta}(\eta) = \frac{M_{h\zeta}}{\rho_0 A} + \frac{M_{h\zeta}}{I_{red}} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta = \frac{FR}{RA} + \frac{FR}{I_{red}} \frac{R}{R + \eta} \eta \text{ a hajlításból származó normál feszültség.}$$

Az A keresztmetszetben $M_{h\zeta} \equiv M_{h\xi} = FR > 0$, $\rho_0 = R > 0$, $-\frac{d}{2} \leq \eta \leq \frac{d}{2}$.

A redukált másodrendű nyomaték: $I_{red} = \int_{(A)} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 dA$.

A feszültségeloszlás:



Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a Grashof elmélet alkalmazhatóságának feltételeit!

5.2.4. A Grashof elmélet alkalmazhatósága

Ha $\frac{\rho_0}{\epsilon_{max}} < 3 - 4$, akkor a Grashof formulát és az I_r -t használjuk.

Ha $3 - 4 < \frac{\rho_0}{\epsilon_{max}} < 8 - 10$, akkor a Grashof formulát és az $I_r \approx I_{\xi}$ -t használjuk.

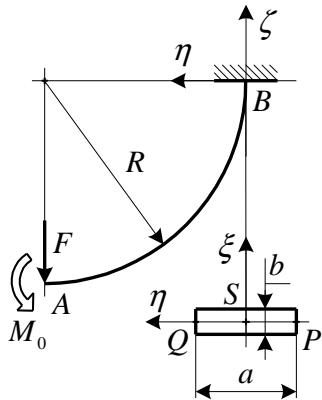
Ha $\frac{\rho_0}{\epsilon_{max}} > 8 - 10$, akkor a görbe rúd egyenes rúdként kezelhető: $\sigma_{\zeta} = \frac{M_{h\xi}}{I_{\xi}} \eta$.

Gyakorló feladatok

Tevékenység:

Kövesse végig a megoldást! Önállóan is végezze el a szerkesztést és a számításokat!

Síkgörbe rúd igénybevételei, feszültségeloszlása, redukált másodrendű nyomaték



Adott: Az R sugarú, negyed körív középvonalú, téglalap keresztmetszetű prizmatikus rúd, melyet az A keresztmetszetben F erővel és M_0 nyomatékú erőpárral terhelünk. A B keresztmetszet mereven befogott.

$R = 32$ mm, $a = 24$ mm, $b = 6$ mm, $F = 3$ kN.

Feladat: a) A B keresztmetszet ξ tengelyre számított I_{red} másodrendű nyomatékának meghatározása.

b) A B keresztmetszet S , P és Q pontjaiban ébredő normál feszültség meghatározása, ha $M_0 = 0$.

c) M_0 értékének meghatározása úgy, hogy a B keresztmetszet P és Q pontjában a redukált feszültségek megegyezzenek.

Kidolgozás:

a) A B keresztmetszet ξ tengelyre számított I_{red} másodrendű nyomatékának meghatározása:

$$I_{red} = \int_{(A)} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 dA = b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 d\eta = ab\rho_0^2 \left(\frac{\rho_0}{a} \ln \frac{\rho_0 + a/2}{\rho_0 - a/2} - 1 \right),$$

Az adatokat behelyettesítve: $I_{red} = 24 \cdot 6 \cdot 32^2 \left(\frac{32}{24} \ln \frac{32+12}{32-12} - 1 \right) = 7561 \text{ mm}^2$.

A fentihez hasonló integrandusz primitív függvényét nem mindig kapjuk meg zárt alakban.

Ez esetben az integranduszt sorba kell fejteni és ezután hatványfüggvények összegeként kell integrálni:

$$f(\eta) \eta^2 = \left[f(\eta=0) + \eta f'(\eta=0) + \frac{\eta^2}{2!} f''(\eta=0) + \frac{\eta^3}{3!} f'''(\eta=0) + \dots \right] \eta^2.$$

Az $f(\eta) = \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta}$ függvény n -ik deriváltja az $\eta = 0$ helyen: $f^{(n)}(\eta=0) = n! (-\rho_0)^{-n}$.

A nyegyedrendű közelítés esetén:

$$\begin{aligned} I_{red} &= b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 d\eta \approx b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{\eta}{\rho_0} + \frac{\eta^2}{\rho_0^2} - \frac{\eta^3}{\rho_0^3} + \frac{\eta^4}{\rho_0^4} \right) \eta^2 d\eta = \\ &= b \left[\frac{\eta^3}{3} - \frac{\eta^4}{4\rho_0} + \frac{\eta^5}{5\rho_0^2} - \frac{\eta^6}{6\rho_0^3} + \frac{\eta^7}{7\rho_0^4} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = 2b \left[\frac{1}{3} \left(\frac{a}{2} \right)^3 + \frac{1}{5\rho_0^2} \left(\frac{a}{2} \right)^5 + \frac{1}{7\rho_0^4} \left(\frac{a}{2} \right)^7 \right] = \\ &= 12 \left[\frac{1}{3} 12^3 + \frac{1}{5 \cdot 32^2} 12^5 + \frac{1}{7 \cdot 32^4} 12^7 \right] = 7553,78 \text{ mm}^4. \end{aligned}$$

b) AB keresztmetszet S , P és Q pontjaiban ébredő normál feszültség meghatározása, ha $F = 3 \text{ kN}$ és $M_0 = 0$:

Szabály síkgörbe rudak számításánál:

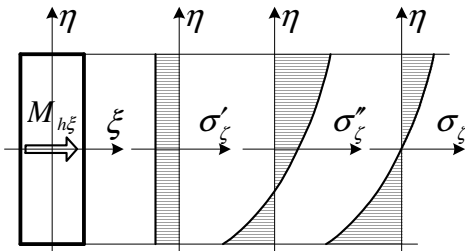
$$\begin{aligned} \rho_0/e_{\max} < 3 \sim 4 &\Rightarrow \text{Grashof-formula és } I_r \text{ alkalmazása.} \\ 3 \sim 4 < \rho_0/e_{\max} < 8 \sim 10, &\Rightarrow \text{Grashof-formula és } I_\xi \text{ alkalmazása.} \\ 8 \sim 10 < \rho_0/e_{\max} &\Rightarrow \text{az egyenes rúdra vonatkozó összefüggések.} \end{aligned}$$

Ebben az esetben: $\frac{\rho_0}{e_{\max}} = \frac{R}{e_{\max}} = \frac{300}{40,4} = 7,43 \Rightarrow \text{Grashof-formula, } I_{red} \text{ használatával.}$

Az előjel-konvenció szerint a rúderő pozitív, a nyomaték pozitív, a görbületi sugár negatív: $N = F = 3 \cdot 10^3 \text{ N}$, $M_{h\xi} = FR = 96 \text{ Nm}$, $\rho_0 = -32 \text{ mm}$.

A Grashof-formulából:

$$\sigma_{\zeta}(\eta) = \left(\frac{N}{A}\right) + \left(\frac{M_{h\xi}}{AR} + \frac{M_{h\xi}}{I_{red}} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta\right) = \frac{FR}{I_{red}} \frac{-R}{(-R + \eta)} \eta = \frac{0,4063 \cdot 10^9}{0,032 - \eta} \eta.$$



Feszültségek az

S pontban: $\sigma_{\zeta}(S) = 0$,

P pontban: $\sigma_{\zeta}(\eta = -0,012) = 243,78 \text{ MPa}$,

Q pontban: $\sigma_{\zeta}(\eta = 0,012) = -110,81 \text{ MPa}$.

c) M_0 értékének meghatározása úgy, hogy a B keresztmetszet P és Q pontjában a redukált feszültségek megegyezzenek:

Az előjel-konvenció szerint a rúderő pozitív, a nyomatéki igénybevétel pozitív, a görbületi sugár negatív: $N = F = 3 \cdot 10^3 \text{ N}$, $M_{h\xi} = FR + M_0$, $\rho_0 = -32 \text{ mm}$.

A Grashof-formula: $\sigma_{\zeta}(\eta) = \left(\frac{N}{A}\right) + \left(\frac{M_{h\xi}}{AR} + \frac{M_{h\xi}}{I_{red}} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta\right) = -\frac{M_0}{AR} + \frac{FR + M_0}{I_{red}} \frac{-R}{(-R + \eta)} \eta$.

A normál feszültségnek meg kell egyeznie a keresztmetszet P és Q pontjaiban, vagyis a

$$\sigma_{\zeta}(\eta = 0,012) = \sigma_{\zeta}(\eta = -0,012)$$

egyenlet megoldását keressük:

$$-\frac{M_0}{AR} + \frac{FR + M_0}{I_{red}} \frac{-R}{(-R + \eta_Q)} \eta_Q = -\frac{M_0}{AR} + \frac{FR + M_0}{I_{red}} \frac{-R}{(-R + \eta_P)} \eta_P$$

$$(FR + M_0) \left(\frac{\eta_Q}{R + \eta_Q}\right) = (FR + M_0) \left(\frac{\eta_P}{R + \eta_P}\right),$$

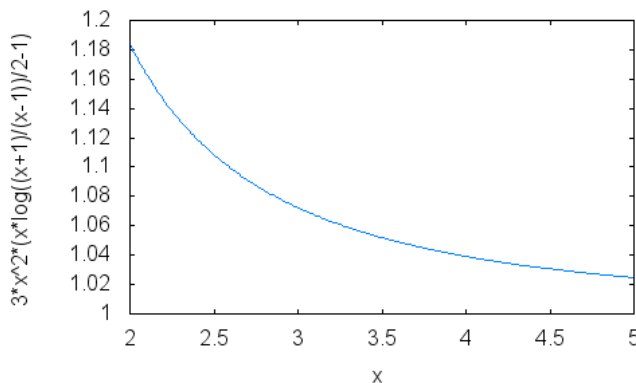
A fenti egyenlőség csak akkor teljesül, ha $(F R + M_0) = 0$.

$$(F R + M_0) = 0 \Rightarrow M_0 = -F R = -96 \text{ Nm}.$$

Ebben az esetben a keresztmetszet igénybevétele húzás-nyomás, ami homogén feszültségeloszlást hoz létre.

Megjegyzés:

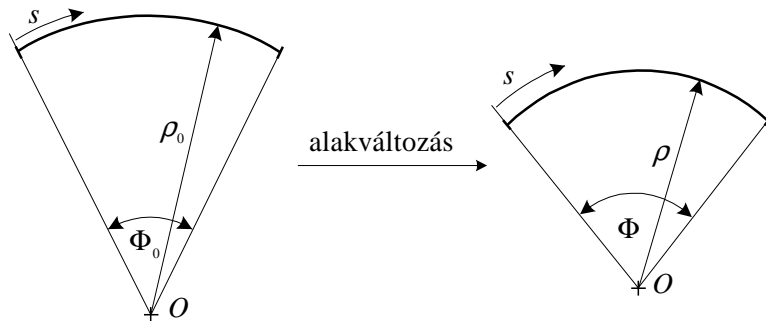
Bevezetve az $x = \frac{\rho_0}{a/2}$ változót, az I_{red} redukált másodrendű nyomaték és az I_ξ másodrendű nyomaték $\frac{I_{red}}{I_\xi}$ hányadosát a fenti $I_{red} = ab\rho_0^2 \left(\frac{\rho_0}{a} \ln \frac{\rho_0 + a/2}{\rho_0 - a/2} - 1 \right)$ összefüggés felhasználásával ábrázolhatjuk:



Ez a függvény a síkgörbe rudak számítására használt szabályt magyarázata:

Például, ha $\frac{\rho_0}{e_{\max}} = 4$, akkor az $\frac{I_{red}}{I_\xi} = 1,04$, ami azt jelenti, hogy az I_{red} csak 4%-kal különbözik az I_ξ -től. Tehát ebben az esetben az I_{red} redukált nyomaték helyett jó közelítéssel az egyenes rudaknál értelmezett I_ξ másodrendű nyomatékot használjuk. Kevésbé görbült rudak esetén ($3 \sim 4 < \rho_0/e_{\max}$) tehát nem szükséges a redukált nyomaték kiszámítása.

5.2.5. A középvonal alakváltozási jellemzői



A középvonal görbületének megváltozása: $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M_{hx}}{I_r E}$.

A szélső keresztmetszetek egymással bezárt szögének megváltozása:

$$\psi = \Phi - \Phi_0 = \frac{M_{hx}}{I_r E} \rho_0 \Phi_0 = \frac{M_{hx}}{I_r E} l, \text{ ahol } l \text{ a rúd középvonalának hossza.}$$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg, hogy mikor alkalmazható közelítő megoldásként a Grashof-féle elmélet! Írja fel és jegyezze meg a közelítő megoldásokhoz tartozó összefüggéseket!

5.2.6. Az eredmények általánosítása

Tapasztalatok szerint a *Grashof*-féle elmélet akkor is jó közelítésként használható, ha

- a síkgörbe rúd igénybevétele tetszőleges síkbeli igénybevétel: N, T_η, M_{hx} ,
- a középvonal nem körív, de feltételezzük hogy a görbületi sugár csak kismértékben és lassan változik a rúd középvonala mentén,
- a rúd nem prizmatikus, de feltételezzük hogy a keresztmetszet alakja, vagy geometriai elhelyezkedése csak kismértékben és lassan változik a rúd középvonala mentén.

Közelítő megoldás (szuperpozíció):

$$\text{Hajlítás: } \sigma'_{\zeta} = \frac{M_{hx}}{A \rho_0} + \frac{M_{hx}}{I_r} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta,$$

$$\text{Húzás/nyomás : } \sigma''_{\zeta} = \frac{N}{A}$$

$$\text{Nyírás : } \tau_{\eta\zeta} = -\frac{T_{\eta}}{I_{\zeta}} \frac{S_{\xi}(\eta)}{a(\eta)}$$

} egyenes rudakra vonatkozó összefüggés.

Erősen görbült rudaknál a húzás/nyomásból és a nyírásból származó feszültségek nem számíthatók az egyenes rudakra érvényes összefüggésekből.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg, a hajlítási energiát meghatározó összefüggést! Ismételje és írja fel a szilárdságtan munkatételeit!

Alakváltozási energia:

Rúdszerkezeteknél általában a hajlítási energia domináns: $U \approx U_{hajl}$. $U \approx \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{M_{hx}}{I_r E} ds$.

A szilárdságtan munkatételei (Betti¹⁹, Castigliano²⁰,) ugyanúgy érvényesek, mint egyenes és törtvonalú tartószerkezeteknél.

¹⁹ Enrico Betti (1823-1892) olasz matematikus és mérnök.

²⁰ Carlo Alberto Castigliano (1847-1884) olasz matematikus és fizikus.

Önellenőrzés

1. Rajzolja fel egy papírra a síkgörbe rúd modelljét a szükséges jelölésekkel!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
2. Válassza ki a síkgörbe rúd görbületi sugarának az előjelét helyesen megadó két meghatározást!
ha az ívhossz irányában haladva a görbületi középpont balkézre esik, akkor $\rho_0 < 0$.
ha az ívhossz irányában haladva a görbületi középpont balkézre esik, akkor $\rho_0 > 0$,
ha az ívhossz irányában haladva a görbületi középpont balkézre esik, akkor $\rho_0 = 0$,
ha az ívhossz irányában haladva a görbületi középpont jobbkézre esik, akkor $\rho_0 = 0$.
ha az ívhossz irányában haladva a görbületi középpont jobbkézre esik, akkor $\rho_0 > 0$,
ha az ívhossz irányában haladva a görbületi középpont jobbkézre esik, akkor $\rho_0 < 0$.
3. Írja fel egy papírra síkgörbe rudakra az egyensúlyi egyenleteket!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
4. Döntse el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis!
Síkgörbe rudak esetén az $N(s)$ rúderő és a $T_\eta(s)$ nyíróerő független egymástól.
5. Sorolja fel/írja le egy papírra síkgörbe rudaknál az alakváltozási jellemzők előállításához szükséges **kiinduló feltételezéseket** (4 db)!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
6. Sorolja fel/írja le egy papírra síkgörbe rudaknál az **alakváltozási feltételezéseket** (2 db)!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
7. Rajzolja fel egy papírra a síkgörbe rudak esetén a feszültségeloszlást!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

8. Írja fel egy papírra síkgörbe rudakra az eredő erőt meghatározó összefüggést!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
9. Írja fel egy papírra síkgörbe rudakra az eredő nyomatékot meghatározó összefüggést!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
10. Válassza ki a helyes megoldást!
Síkgörbe rudaknál a σ_{\max} általában:
 - a görbületi középpont felé eső szélső szálban van
 - a görbületi középponttal ellentétes irányba eső szélső szálban van
 - a görbületi középpontban van
11. Írja fel egy papírra a Grashof formulát!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
12. Írja fel egy papírra síkgörbe rudakra a redukált másodrendű nyomaték értelmezését!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
13. Válassza ki a helyes 2 megoldást!
Mikor tekintjük a rudat nagyon, illetve kicsit görbültnek!
 - Ha a $\frac{\rho_0}{e_{\max}}$ hányados kicsi, akkor a rúd nagyon görbült.
 - Ha a $\frac{\rho_0}{e_{\max}}$ nagy, akkor a rúd nagyon görbült.
 - Ha a $\frac{\rho_0}{e_{\max}}$ hányados kicsi, akkor a rúd enyhén görbült.
 - Ha a $\frac{\rho_0}{e_{\max}}$ nagy, akkor a rúd enyhén görbült.

14. Párosítsa a $\frac{\rho_0}{\epsilon_{\max}}$ hányados alapján a számítási szabályokat! Írja a megfelelő kisbetűt a neki megfelelő szabály elé!

a	$\frac{\rho_0}{\epsilon_{\max}} < 3 - 4$
b	$3 - 4 < \frac{\rho_0}{\epsilon_{\max}} < 8 - 10$
c	$\frac{\rho_0}{\epsilon_{\max}} > 8 - 10$

Jel

Szabály, ha:

akkor $\sigma_{\zeta} = \frac{M_{hs}}{I_{\xi}} \eta$ használjuk

akkor a Grashof formulát és az $I_r \approx I_{\xi}$ -t használjuk

akkor a Grashof formulát és az I_r -t használjuk

15. Írja fel egy papírra síkgörbe rudakra a középvonal görbületének és a szélső keresztmetszetek egymással bezárt szögének változását leíró összefüggést!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

16. Sorolja fel/írja le egy papírra síkgörbe rudaknál, hogy a Grashof elmélet mikor alkalmazható közelítő megoldásként (3 db)!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

17. Írja fel egy papírra síkgörbe rudakra a közelítő megoldásokhoz alkalmazható összefüggéseket (3db)!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

18. Írja fel egy papírra síkgörbe rudakra az alakváltozási energiát meghatározó összefüggést!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

17. LECKE

Prizmatikus rudak szabad csavarása

5.3. Prizmatikus rudak szabad csavarása

Cél: a hallgató megismerje a prizmatikus rudak szabad csavarásának mechanikai kezelését.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja fogalmazni a szabad- és a gátolt csavarás definícióját;
2. fel tudja rajzolni a szabad csavarás szemléltető ábráját;
3. fel tudja sorolni az egzakt megoldás feltételezéseit;
4. fel tudja sorolni a dinamikai peremfeltételeket;
5. fel tudja írni a feszültségi állapotot leíró tenzort;
6. fel tudja írni az egyensúlyi egyenleteket;
7. fel tudja írni a csúsztató feszültséget, a fajlagos szögelfordulást és a szögelfordulást meghatározó összefüggéseket;
8. le tudja írni a *Prandtl*-féle membrán analógia alapjait meghatározó jellemzőket;
9. fel tudja rajzolni a *Prandtl*-féle membrán analógia mechanikai modelljét a szükséges jelölésekkel;
10. fel tudja írni a membrán alakjának differenciálegyenletét, a peremfeltételt;
11. meg tudja határozni a többszörösen összefüggő tartomány esetén a feszültségfüggvény jellemzőit;
12. meg tudja fogalmazni, hogy mikor tekintünk egy rúdkeresztmetszetet vékonyszelvényűnek;
13. fel tudja írni vékonyfalú téglalap szelvény esetén: a közelítő feszültségfüggvényt, a Poisson egyenletet, a peremfeltételeket;
14. fel tudja írni vékonyfalú téglalap szelvény esetén: a feszültségeket, a csavaró nyomatékokat és a másodrendű nyomatékokat meghatározó összefüggést;

15. fel tudja írni összetett nyitott vékonyfalú szelvény esetén: a feszültségeket, a csavaró nyomatékot és a másodrendű nyomatékot meghatározó összefüggést;
16. fel tudja írni görbe középvonalú nyitott vékonyfalú szelvény esetén a másodrendű nyomatékot meghatározó összefüggést;
17. fel tudja írni zárt vékonyszelvényű rudak esetén: a feszültségeket, a csavaró nyomatékot és a másodrendű nyomatékot meghatározó összefüggést;
18. prizmatikus rudak szabad csavarása esetén meg tudja határozni a feszültségeloszlást és a feszültségi állapotot;
19. prizmatikus rudak szabad csavarása esetén adatok alapján meg tudja határozni az I_c csavarási másodrendű nyomatékot és az elmozdulási állapotot;
20. prizmatikus rudak szabad csavarása esetén meg tudja határozni a keresztmetszet veszélyes pontjait;
21. prizmatikus rudak szabad csavarása esetén adatok alapján meg tudja határozni a maximális M_c csavaró nyomatékot;
22. prizmatikus rudak szabad csavarása esetén adatok alapján meg tudja határozni a rúd ϑ fajlagos szögelfordulását és a rúdvégek közötti ψ szögelfordulást.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 85 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. prizmatikus rúd, szabad- és gátolt csavarás
2. egzakt megoldás
3. dinamikai peremfeltételek, feszültségi állapot
4. Prandtl -féle feszültségfüggvény



5. geometriai tartalmú feszültségfüggvény
6. Prandtl-féle membrán analógia
7. vékonyszelvényű rúd, nyitott- és zárt szelvény, görbe középvonalú szelvény
8. összetett szelvény
9. másodrendű nyomaték, feszültség, csavarónyomaték

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a szabad és a gátolt csavarás definícióját!

Szabad csavarás: a rúd (a keresztmetszet) pontjainak z tengely irányú elmozdulását semmi sem akadályozza.

Gátolt csavarás: a rúd pontjai nem mozdulhatnak el szabadon a z tengely irányában.

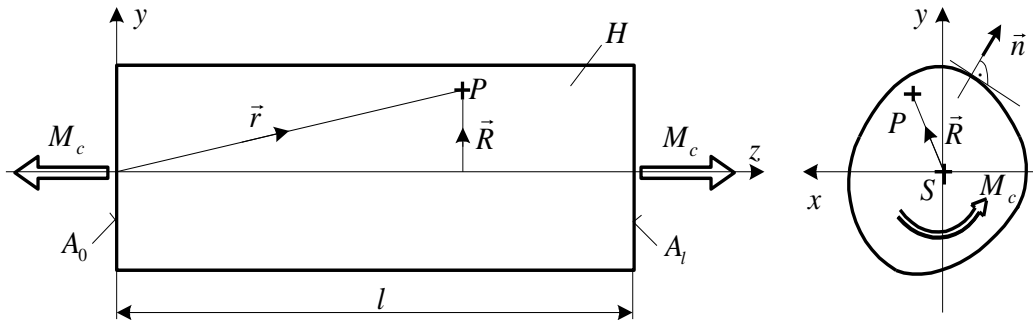
A gátolt csavarásnak a vékonyszelvényű rudaknál van jelentősége.

Itt csak a szabad csavarással foglalkozunk.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel és jegyezze meg az egzakt megoldáshoz tartozó: kiinduló feltételezéseket, a dinamikai peremfeltételeket; a feszültségi állapotot leíró tenzort és az egyensúlyi egyenleteket!

5.3.1. Egzakt megoldás - a rúd keresztmetszetének alakja tetszőleges



- Feltételezések:
- $\vec{q} = \vec{0}$,
 - a H palást terheetlen: $(\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{0})$,
 - $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$,
 - $\int_{(A)} \vec{\rho}_z dA = \vec{0}$, $\int_{(A)} \vec{R} \times \vec{\rho}_z dA = M_c \vec{e}_z$.

- Dinamikai peremfeltételek: - a (H) palást terheletlen $\Rightarrow \vec{\rho}_n = \vec{0}$.
 - az (A_l)-en a rúd igénybevétele csavarás:

$$\int_{(A)} \vec{\rho}_z dA = \vec{0}, \int_{(A)} \vec{R} \times \vec{\rho}_z dA = M_c \vec{e}_z.$$

-az (A_0)-en az igénybevétel csavarás \Rightarrow ugyanaz, mint az (A_l)-en.

Feszültségi állapot:
$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}, \text{ ahol } \begin{cases} \tau_{xz} = \tau_{xz}(x,y), \\ \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,y). \end{cases}$$

Egyensúlyi egyenletek:
$$\left. \begin{aligned} 0 + 0 + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ 0 + 0 + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + 0 &= 0. \end{aligned} \right\} \text{teljesülnek!}$$

A 3. egyensúlyi egyenlet teljesülését egy $U(x,y)$ feszültségfüggvény bevezetésével érjük el.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Kövesse végig a következő levezetéseket!

A Prandtl²¹-féle feszültségfüggvény:

$U(x,y)$ - az x,y helykoordinátának legalább kétszeresen differenciálható függvénye.

A feszültségek származtatása: $\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$

Behelyettesítve a 3. egyensúlyi egyenletbe: $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$, az egyenlet identikusan teljesül.

²¹ Ludwig Prandtl (1875-1953) német fizikus és mérnök.

A feszültségvektor: $\vec{\rho}_z = \tau_{xz}\vec{e}_x + \tau_{yz}\vec{e}_z = \vec{\tau}_z$.

$$\vec{\rho}_z = \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_x - \frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_y = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y\right)}_{(\nabla U)} \times \vec{e}_z = (\nabla U) \times \vec{e}_z.$$

Az $U(x,y)$ -nak még ki kell elégítenie:

- a peremfeltételeket,
 - a Hooke-törvényt,
 - a kompatibilitási egyenletet
- } Beltrami-Michell kompatibilitási egyenletek.

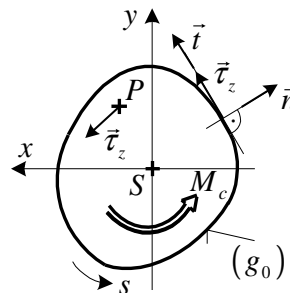
A peremfeltételek kielégítése:

- A palást terheetlen: $\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{0}$, $\vec{\rho}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

$$\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y = 0,$$

$$\vec{\tau}_z \cdot \vec{n} = 0.$$

A paláston a $\vec{\tau}_z$ érintő irányú.



Átalakítás: $\vec{\tau}_z \cdot \vec{n} = (\nabla U) \times \vec{e}_z \cdot \vec{n} = (\nabla U) \cdot \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{n})}_{\vec{t}} = \underbrace{(\nabla U) \cdot \vec{t}}_{\substack{\text{iránymenti} \\ \text{derivált}}} = \frac{\partial U}{\partial s} = 0.$

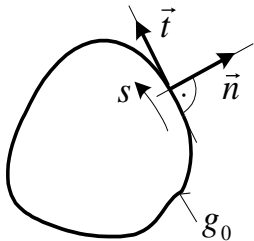
(g_0) $U = \text{állandó} = 0$. Önkényes (célszerű) választás.

- Az (A_0) és az (A_l) rúdvégeken:

Az eredő erő: $\vec{F} = \int_{(A_l)} \vec{\rho}_z dA = \vec{0}$. Bizonyítjuk, hogy az eredő erő nulla.

A feszültségvektorra kapott összefüggést behelyettesítve: $\int_{(A_l)} \vec{\rho}_z dA = \int_{(A_l)} (\nabla U) \times \vec{e}_z dA.$

Átalakítás a Gauss-Osztrogradszkij²²-féle integrál átalakítási tétellel:



$$\int_{(A)} \nabla \otimes \underline{C} dA = \oint_{(g_0)} \underline{C} \otimes \vec{n} ds.$$

$A \otimes$ szorzás a $\left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \times \\ \circ \end{array} \right\}$ szorzások közül bármelyik lehet.

$$\int_{A_t} \nabla U \times \vec{e}_z dA = \oint_{g_0} \vec{e}_z \times U \vec{n} ds = \oint_{g_0} U \vec{t} ds = U \oint_{g_0} \vec{t} ds = \vec{0}.$$

$\begin{array}{c} \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ \vec{e}_z \times \vec{n} = \vec{t} \end{array}$

mert $U|_{g_0} = \text{állandó}$ és $\oint_{(g_0)} \vec{t} ds = \vec{0}$ mindig fennáll.

Az $\vec{F} = \vec{0}$ feltétel tehát teljesül, ha keresztmetszet peremgörbójén az $U = \text{állandó}$ (előző peremfeltétel).

A keresztmetszet S pontjára számított nyomaték: $\vec{M}_S = \int_{(A_l)} \vec{R} \times \vec{\rho}_z dA = M_c \vec{e}_z.$

²² Mihail Vasziljevics Osztrogradszkij (1801-1962) orosz matematikus.

Átalakítás:

$$\begin{aligned}
 M_c \vec{e}_z &= \int_{(A_I)} \vec{R} \times (\nabla U \times \vec{e}_z) dA = \int_{(A_I)} [(\nabla U) \underbrace{(\vec{R} \cdot \vec{e}_z)}_{=0} - \vec{e}_z (\vec{R} \cdot \nabla U)] dA = \\
 &= -\vec{e}_z \int_{(A_I)} (\vec{R} \cdot \nabla U) dA = -\vec{e}_z \int_{(A_I)} [(\nabla \cdot \vec{R}U) - (\nabla \cdot \vec{R})U] dA = \\
 &= -\vec{e}_z \underbrace{\int_{(A_I)} (\nabla \cdot \vec{R}U) dA}_{=0} + \vec{e}_z \int_{(A_I)} \underbrace{(\nabla \cdot \vec{R})}_{=2} U dA,
 \end{aligned}$$

↓ Gauss-Osztrogradszkij-tétel

$$\int_{(g_0)} (\vec{n} \cdot \vec{R}U) ds = 0, \text{ mert } U|_{g_0} = 0.$$

$$M_c = \int_{(A_I)} (\nabla \cdot \vec{R}) U dA = \int_{(A_I)} 2U dA.$$

Ugyanis: $\nabla \cdot \vec{R} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y \right) \cdot (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) = 1 + 1 = 2.$

$M_c = 2 \int_{(A)} U dA.$ A csavaró nyomaték is kiszámítható az U feszültségfüggvényből.

A Beltrami-Michell –féle kompatibilitási egyenletek kielégítése:

$$\Delta \tau_{xz} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial z} = 0, \quad \Delta \tau_{yz} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 F_I}{\partial y \partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 F_I}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_I}{\partial y \partial z} = 0, \quad \text{mert } F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0.$$

A csúsztató feszültségeket behelyettesítve:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\tau_{xz} &= \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\Delta U) = 0 \\ \Delta\tau_{yz} &= -\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}(\Delta U) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta U = \text{állandó.}$$

A Hooke-törvény és a kinematikai egyenletek felhasználásával:

$$\Delta U = -2G\vartheta \quad - \text{Poisson-féle differenciál egyenlet.}$$

ahol: G - a csúsztató rugalmassági modulus, ϑ - a fajlagos szögelfordulás.

Az elmozdulásmező előállítása:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 &\Rightarrow u = u(y, z), \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 &\Rightarrow v = v(x, z), \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 &\Rightarrow w = w(x, y). \end{aligned}$$

Ha $\left. \begin{aligned} u &= -y f(z) \\ v &= x f(z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -f + f = 0.$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -y \frac{df}{dz} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz}(x, y) = \frac{\tau_{xz}(x, y)}{G},$$

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} = 0 = -y \frac{d^2 f}{dz^2} + 0 \Rightarrow f(z) = \vartheta z, \text{ ahol } \vartheta = \text{állandó (fajlagos szögelfordulás).}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{az előzővel megegyező gondolatmenetből}} \quad f(z) = \vartheta z.$$

Elmozdulásmező koordináták:

$$\left. \begin{aligned} u(y, z) &= -\vartheta y z \\ v(x, z) &= \vartheta x z \\ w(x, y) &= w(x, y) \end{aligned} \right\} \text{ kielégítik az összes kinematikai feltételt.}$$

Az elmozdulásvektor: $\vec{u}(x,y,z) = \underbrace{\vartheta z \vec{e}_z \times \vec{R}}_{\substack{\text{a keresztmetszet} \\ \psi_z = \vartheta z \text{ szöggel elfordul}}} + \underbrace{w(x,y) \vec{e}_z}_{\substack{\text{a keresztmetszet pontjai tengely} \\ \text{irányban is elmozdulnak}}}$

$\psi_z = \vartheta z$ - a tetszőleges z helyen levő keresztmetszet szögelfordulása a $z=0$ keresztmetszethez képest.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg az eredményeket!

Az eredmények összefoglalása:

Prizmatikus rudak szabad csavarási feladata visszavezethető egy $U(x,y)$ feszültségfüggvény meghatározására.

$U(x,y)$ - a Prandtl-féle feszültségfüggvény nem tetszőleges.

1) Ki kell elégítenie:

a $\Delta U = -2G\vartheta$ Poisson-féle differenciál egyenletet és
az $U|_{g_0} = 0$ peremfeltételt.

2) Az igénybevétel és a feszültség származtatása a feszültségfüggvényből:

$$M_C = 2 \int_{(A)} U(x,y) dA, \quad \tau_z = (\nabla U) \times \vec{e}_z.$$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel és jegyezze meg a tisztán geometriai tartalmú feszültségfüggvényt, a másodrendű nyomatékot, a csúszató feszültséget és a szögelfordulásokat meghatározó összefüggéseket!

Tisztán geometriai tartalmú feszültségfüggvény bevezetése:

$U(x,y) = G\vartheta U_0(x,y)$. $U_0(x,y)$ csak a keresztmetszet geometriájától függ.

Az $U_0(x,y)$ -ra vonatkozó egyenletek:

$$1) \Delta U_0 = -2, U_0|_{g_0} = 0.$$

$$2) M_c = 2G\vartheta \int_{(A)} U_0(x,y) dA = G\vartheta I_c,$$

ahol $I_c = 2 \int_{(A)} U_0(x,y) dA$ a keresztmetszet csavarási másodrendű nyomatéka.

Az I_c tisztán geometriai jellemző, csak a keresztmetszet geometriájától függ.

Az csúsztató feszültség: $\vec{\tau}_z = G\vartheta (\nabla U_0) \times \vec{e}_z$.

A fajlagos szögelfordulás: $\vartheta = \frac{M_c}{GI_c}$. A szögelfordulás: $\psi_z = \frac{M_c}{GI_c} z$.

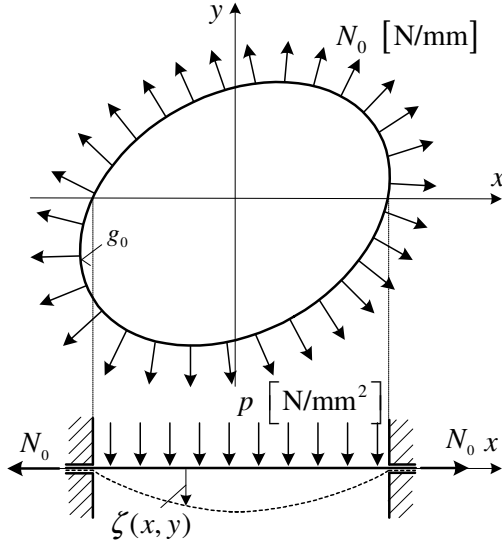
Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a Prandtl-féle membrán analógia alapgondolatát! Rajzolja fel a membrán modelljét! Jegyezze meg a feszültségfüggvény jellemzőit!

A Prandtl-féle membrán analógia:

Az analógia a feszültségfüggvény és a megfeszített és felfújtt membrán alakja között áll fenn.

Az analógia alapja: $\left. \begin{array}{l} - \text{ a differenciál egyenlet} \\ - \text{ a peremfeltétel} \end{array} \right\} \text{ azonossága.}$



A membránt a keresztmetszet alakjának megfelelő furatra (lyukra) feszítjük rá.

A keresztmetszet alakja tetszőleges.

N_0 - a membrán síkjába eső
feszítőerő-sűrűség,

p - a membrán síkjára merőleges nyomás.

A membrán alakjának differenciálegyenlete: $\Delta\zeta = -\frac{p(x,y)}{N_0}$.

Peremfeltétel: $\zeta|_{g_0} = 0$.

A differenciálegyenlet és a peremfeltétel is olyan, mint szabad csavarásnál.

Feszültségfüggvény többszörösen összefüggő tartomány esetén:

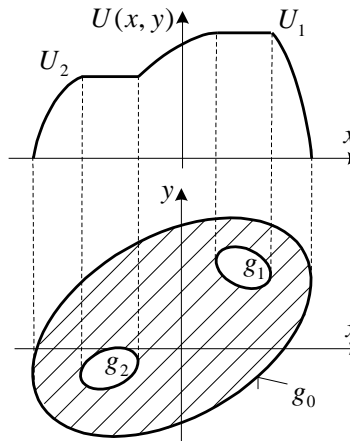
Peremfeltételek a feszültségfüggvényre:

$$U|_{g_0} = 0,$$

$$U|_{g_1} = U_1 = \text{állandó},$$

$$U|_{g_2} = U_2 = \text{állandó}.$$

Az ábrán látható, hogy a feszültségfüggvény a keresztmetszet g_0 külső peremén zérus, g_1 és g_2 belső peremeken pedig állandó.



Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg, mikor alkalmazunk közelítő megoldást, mikor tekintünk egy keresztmetszetet vékony szelvénynek!

5.3.2. Közelítő megoldás

Vékonyszelvényű rudak szabad csavarására közelítő megoldást állítunk elő.

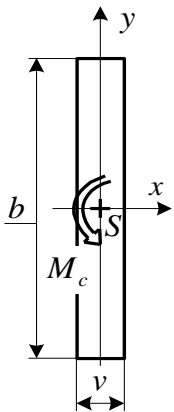
Vékonyszelvényűnek tekintünk egy rúdkeresztmetszetet akkor, ha a szelvény vastagsági méretei lényegesen kisebbek, mint a keresztmetszet jellemző méretei.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel, jegyezze meg vékonyfalú téglalap szelvény esetén a közelítő függvényt, a peremfeltételeket! Jegyezze meg a feszültségeket, a csavaró nyomatékot és a keresztmetszet csavarási másodrendű nyomatékát meghatározó összefüggéseket!

a) Nyitott vékony szelvényű rudak

- Vékonyfalú téglalap szelvény



Közelítő feszültségfüggvény: $U = G \vartheta \left(\frac{v^2}{4} - x^2 \right)$.

Poisson egyenlet: $\frac{\partial U}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial y^2} = -2 G \vartheta$,

$-2 G \vartheta + 0 = -2 G \vartheta$ teljesül.

Peremfeltételek: $x = \pm \frac{v}{2}$ $U = 0$ teljesül,

$y = \pm \frac{b}{2}$ $U \neq 0$ nem teljesül.

A peremfeltétel a perem kis szakaszán nem teljesül – közelítés!

Feszültségek: $\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$, $\tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = 2 G \vartheta x$ (lineáris eloszlás).

Csavarónyomaték: $M_c = 2 \int_{(A)} U dA \cong 2 G \vartheta b \int_{x=-\frac{v}{2}}^{\frac{v}{2}} \left(\frac{v^2}{4} - x^2 \right) dx = G \vartheta \underbrace{\frac{bv^3}{3}}_{I_c}$,

$$M_c = G \vartheta I_c.$$

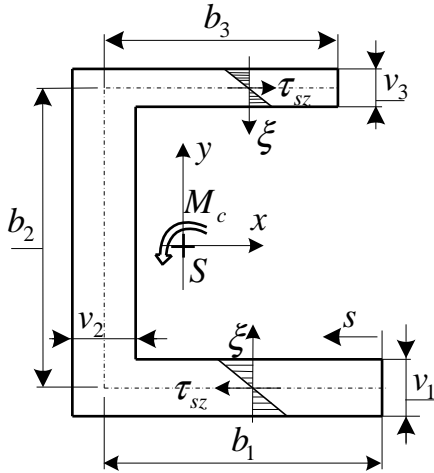
A keresztmetszet csavarási másodrendű nyomatéka: $I_c = \frac{bv^3}{3}$.

Feszültségek a $G\vartheta = \frac{M_c}{I_c}$ helyettesítés után: $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = \frac{M_c}{I_c} 2x \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_c}{I_c} \nu$.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel, jegyezze meg összetett nyitott vékonyfalú szelvény esetén a feszültségeket, a csavaró nyomatékot és a keresztmetszet csavarási másodrendű nyomatékát meghatározó összefüggéseket!

- Összetett nyitott vékonyfalú szelvény (a vékony téglalap eredményeinek általánosítása)



$$I_c = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i \nu_i^3}{3},$$

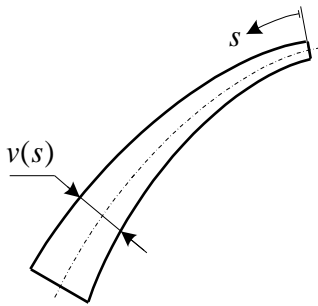
$$\tau_{sz} = \frac{M_c}{I_c} 2\xi,$$

$$M_c = G\vartheta I_c.$$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel, jegyezze meg görbe középvonalú nyitott vékonyfalú szelvény esetén a keresztmetszet csavarási másodrendű nyomatékát meghatározó összefüggést!

- Görbe középvonalú nyitott vékonyfalú szelvény



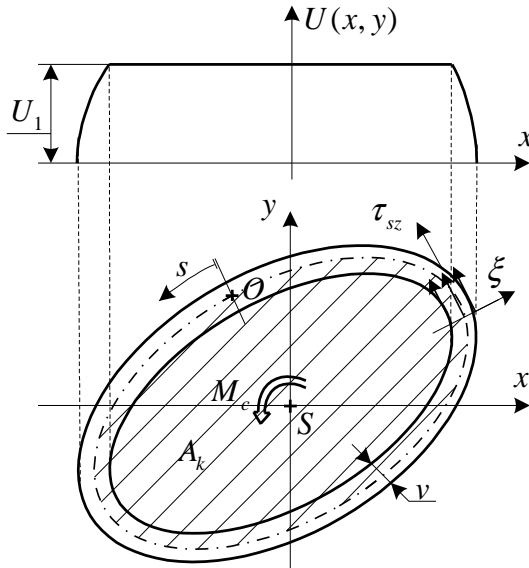
$$I_c = \frac{1}{3} \int_{(b)} v^3 ds.$$

A többi összefüggés változatlan alakú.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel, jegyezze meg zárt vékonyszelvényű rudak esetén a feszültségeket, a csavaró nyomatékokat és a keresztmetszet csavarási másodrendű nyomatékát meghatározó összefüggéseket! Jegyezze meg a Bredt- féle formulát!

b) Zárt vékonyszelvényű szelvényű rudak



Közelítő feszültségfüggvény:

$$U(\xi, \eta) = -\frac{U_1}{v}\xi + h.$$

Feltételezzük, hogy az $U(\xi, \eta)$ a szelvény vastagsága mentén lineárisan változik.

Csúszató feszültség:

$$\tau_{sz} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{U_1}{v} = \text{állandó.}$$

A feszültségeloszlás a szelvény vastagsága mentén állandó.

A lineáris U függvény "lépcsős" közelítése:

$$M_c = 2 \int_{(A)} U \, dA \cong 2 A_k U_1 \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{M_c}{2 A_k}.$$

$$\tau_{sz} = \frac{U_1}{v} = \frac{M_c}{2 A_k v} \text{ Bredt}^{23}\text{- formula.}$$

A keresztmetszet csavarási másodrendű nyomatéka: $I_c = \frac{4 A_k^2}{\oint \frac{1}{v} ds}$.

A_k - a zárt szelvény középvonala által körbezárt felület területe.

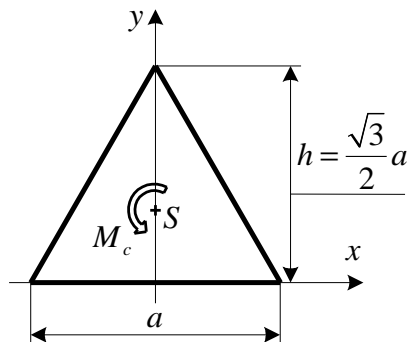
²³ Rudolf Bredt (1842-1900) német gépészmérnök és matematikus.

Gyakorló feladatok

Tevékenység:

Kövesse végig a megoldást! Önállóan is végezze el a szerkesztést és a számításokat!

1./ Háromszög keresztmetszetű prizmatikus rúd szabad csavarása



Adott:

Az ábrán látható egyenlő oldalú háromszög keresztmetszet, melynek igénybevétele szabad csavarás.

A keresztmetszet $U = U(x, y)$ feszültség függvényét a következő alakban keressük:

$$U = \frac{\gamma}{2h} \left[(y - h)^2 - 3x^2 \right] G\vartheta.$$

Feladat:

- Annak vizsgálata, hogy a megadott feszültségfüggvény teljesíti-e az előírt peremfeltételeket és a Poisson-egyenletet.
- A feszültségeloszlás és a feszültségi állapot meghatározása.
- Az egyensúlyi egyenlet teljesülésének ellenőrzése.
- A keresztmetszet csavarási másodrendű nyomatékának kiszámítása.

Kidolgozás:

a) Annak vizsgálata, hogy a megadott feszültségfüggvény teljesíti-e az előírt peremfeltételeket és a Poisson-egyenletet:

A feszültségfüggvénytől megköveteljük, hogy legalább kétszer folytonosan differenciálható legyen, továbbá a keresztmetszet kontúrgörbéjén azonosan zérus legyen.

A hatványfüggvények akárhányszor folytonosan differenciálhatóak.

Peremfeltételek:

- Az $y = 0$ egyenletű oldalélen (a háromszög alapja):

$$y = 0 \Rightarrow U = \frac{y}{2h} \left[(y - h)^2 - 3x^2 \right] G\vartheta = 0$$

- Az $y = -\sqrt{3}x + h$ egyenletű oldalélen (a háromszög jobboldali oldala):

$$y = -\sqrt{3}x + h \Rightarrow U = \frac{-\sqrt{3}x + h}{2h} \left[\left(-\sqrt{3}x + h - h \right)^2 - 3x^2 \right] G\vartheta = 0$$

- Az $y = \sqrt{3}x + h$ egyenletű oldalélen (a háromszög baloldali oldala):

$$y = \sqrt{3}x + h \Rightarrow U = \frac{\sqrt{3}x + h}{2h} \left[\left(\sqrt{3}x + h - h \right)^2 - 3x^2 \right] G\vartheta = 0$$

A Poisson-egyenlet: $\Delta U = -2G\vartheta$.

A másodrendű parciális deriváltak kiszámítása:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = G\vartheta \frac{-6xy}{2h} = \frac{-3G\vartheta}{h}xy, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{-3G\vartheta}{h}y,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{G\vartheta}{2h} (y^3 - 2hy^2 + h^2y - 3x^2y) \right] = \frac{G\vartheta}{2h} (3y^2 - 4hy + h^2 - 3x^2),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{G\vartheta}{2h} (3y^2 - 4hy + h^2 - 3x^2) \right] = \frac{G\vartheta}{h} (3y - 2h).$$

A Poisson-egyenlet: $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{-3G\vartheta}{h}y + \frac{G\vartheta}{h} (3y - 2h) = -2G\vartheta.$

b) A feszültségeloszlás és a feszültségi állapot meghatározása:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{G\vartheta}{2h} (3y^2 - 4hy + h^2 - 3x^2), \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{3G\vartheta}{h}xy.$$

Feszültségeloszlás az x tengely mentén ($y = 0$): $\tau_{xz} = \frac{G\vartheta}{2h} (h^2 - 3x^2), \tau_{yz} = 0.$

Feszültségeloszlás az y tengely mentén ($x = 0$): $\tau_{xz} = \frac{G\vartheta}{2h} (3y^2 - 4hy + h^2), \tau_{yz} = 0.$

Feszültségeloszlás a baloldali oldalél mentén ($y = \sqrt{3}x + h$):

$$\tau_{xz} = \frac{G\vartheta}{h} \sqrt{3}x (\sqrt{3}x + h), \tau_{yz} = \frac{3G\vartheta}{h} x (\sqrt{3}x + h).$$

A csúszató feszültség vektor:

$$\vec{\tau}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y = \frac{G\vartheta}{h} \sqrt{3}x (\sqrt{3}x + h) \vec{e}_x + \frac{3G\vartheta}{h} x (\sqrt{3}x + h) \vec{e}_y.$$

Az oldalél normálvektorával való skaláris szorzás útján igazolható, hogy a csúsztató feszültség párhuzamos az oldalélel, vagyis az oldaléltre merőleges összetevője nulla:

$$\vec{n} \cdot \vec{\tau}_z = \left(-\sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_y \right) \cdot \left[\frac{G\vartheta}{h} \sqrt{3}x \left(\sqrt{3}x + h \right) \vec{e}_x + \frac{3G\vartheta}{h} x \left(\sqrt{3}x + h \right) \vec{e}_y \right] = 0 \Rightarrow \tau_{\eta z} = 0.$$

$$\tau_{\xi z} = |\vec{\tau}_z| = \sqrt{(\tau_{xz})^2 + (\tau_{yz})^2} = -\frac{G\vartheta}{h} 2\sqrt{3}x \left(\sqrt{3}x + h \right).$$

A negatív előjelre azért van szükség, mert a $\tau_{\xi z}$ iránya ellentétes a ξ tengely irányával.

Bevezetve a $\xi = 2x + \frac{h}{\sqrt{3}}$ új változót:

$$|\vec{\tau}| = -\frac{G\vartheta}{h} 2\sqrt{3} \left(\frac{\xi}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}} \right) \left[\sqrt{3} \left(\frac{\xi}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}} \right) + h \right] = \frac{G\vartheta}{2h} (h^2 - 3\xi^2).$$

Ez ugyanaz a függvény, mint amit az x tengely menti feszültségeloszlásra kaptunk.

A csúsztató feszültség az oldaléleken párhuzamos a szóban forgó oldalélel, amiből következik az, hogy a rúdnak, melynek keresztmetszetét eddig vizsgáltuk, mindhárom oldallapja terheletlen.

Egy \vec{n} normálisú felület ugyanis akkor terheletlen, ha $\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{0}$.

Prizmatikus rudak csavarása esetén: $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}, \vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix}.$

A szorzást elvégezve a feszültségvektor első két koordinátájára nullát kapunk, a harmadik koordináta pedig:

$$\rho_z = \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y.$$

Behelyettesítve a harmadik egyenletbe: $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$, ami mindig teljesül, ha a feszültségfüggvény legalább kétszer folytonosan differenciálható

d) A keresztmetszet csavarási másodrendű nyomatékának kiszámítása:

$$M_c = 2 \int_{(A)} U \, dA = 4 \int_{x=0}^{\frac{a}{2}} \int_{y=0}^{-\sqrt{3}x+h} \frac{y}{2h} \left[(y-h)^2 - 3x^2 \right] G \vartheta \, dy \, dx$$

Felhasználjuk a feszültségfüggvény szimmetriáját az y tengelyre: $U(-x) = U(x)$.

Így az integrált csak a keresztmetszet jobb felére számítjuk ki és megszorozzuk kettővel:

$$M_c = 4 \int_{x=0}^{\frac{a}{2}} \int_{y=0}^{-\sqrt{3}x+h} \frac{y}{2h} \left[(y-h)^2 - 3x^2 \right] G \vartheta \, dy \, dx.$$

Először az y szerinti integrálást végezzük el, mert ennek a határozott integrálnak az integrálási tartománya függ az x -től.

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{-\sqrt{3}x+h} y \left[(y-h)^2 - 3x^2 \right] \, dy &= \left[\frac{y^4}{4} - 2h \frac{y^3}{3} + h^2 \frac{y^2}{2} - 3 \frac{y^2}{2} x^2 \right]_{y=0}^{-\sqrt{3}x+h} = \\ &= -\frac{3}{4}x^4 + \sqrt{3}hx^3 - h^2x^2 + \frac{1}{12}h^4. \end{aligned}$$

Ezt a kifejezést még integrálni kell x szerint 0-tól $\frac{a}{2}$ -ig és megszorozni az integranduszból kiemelt $\frac{2G\vartheta}{h}$ -val:

$$M_c = \frac{2G\vartheta}{h} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(-\frac{3}{4}x^4 + \sqrt{3}hx^3 - h^2x^2 + \frac{1}{12}h^4 \right) \, dx = G\vartheta \frac{7}{160\sqrt{3}} a^4$$

Figyelembe véve az $M_c = I_c G \vartheta$ összefüggést, a csavarási másodrendű nyomaték:

$$I_c = \frac{7}{160\sqrt{3}} a^4.$$

Megjegyzések:

a) Feszültségfüggvénnyel megoldott csavarási feladatnál az egyensúlyi egyenlet azonnal teljesül, hiszen az csak a vegyes parciális deriváltak egyenlőségét követeli meg, ami legalább kétszer folytonosan differenciálható függvényeknél mindig teljesül.

b) Felmerül a kérdés, hogy a kapott csavarási másodrendű nyomaték mekkora átmérőjű kör keresztmetszetű rúd nyomatékával egyezik meg.

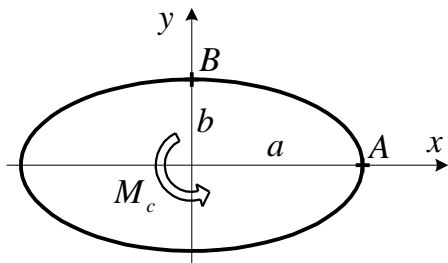
$$I_c = \frac{7}{160\sqrt{3}}a^4 = \frac{\pi}{32}D^4 \Rightarrow D = a \sqrt[4]{\frac{7}{5\sqrt{3}\pi}} = 1,094 a$$

A belül írható kör átmérője: $D_B = a \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,5774 a$.

A körülírható kör átmérője: $D_K = 2a \frac{\sqrt{3}}{3} = 1,1548 a$.

A kapott eredmény a körülírható kör átmérőjéhez van közelebb.

2. Ellipszis keresztmetszetű prizmatikus rúd szabad csavarása



Adott:

Az ábrán látható ellipszis keresztmetszet igénybevétele szabad csavarás.

A keresztmetszet Prandtl-féle feszültség függvényét a következő alakban keressük: $U = C \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right]$.

Feladat:

- A feszültségfüggvényben szereplő C együttható meghatározása.
- Az I_c csavarási másodrendű nyomaték meghatározása.
- A feszültség állapot és az elmozdulás állapot meghatározása.

Kidolgozás:

- A feszültségfüggvényben szereplő C együttható meghatározása:

A feszültségfüggvénnyel szemben három követelményt támasztunk:

- legyen legalább kétszer folytonosan differenciálható,
- a keresztmetszet kontúrjain értéke legyen zérus (többszörösen összefüggő tartomány esetén a belső kontúrokon legyen konstans),
- teljesüljön rá a $\Delta U = -2G\vartheta$ Poisson-egyenlet.

Az első két követelmény teljesül, mert a feszültségfüggvény akárhányszor folytonosan differenciálható és a kontúron (az ellipszis pontjain) a feszültség függvény értéke nulla.

A $\Delta U = -2G\vartheta$ Poisson-egyenlet pedig alkalmas arra, hogy a C együtthatót meghatározzuk:

A másodrendű parciális deriváltak kiszámítása:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = C \frac{-2x}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = C \frac{-2}{a^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = C \frac{-2y}{b^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = C \frac{-2}{b^2}.$$

Poisson-egyenlet: $\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial y^2} = -2C \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = -2G\vartheta \Rightarrow C = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} G\vartheta.$

b) Az I_c csavarási másodrendű nyomaték meghatározása:

$$M_c = 2 \int_{(A)} U \, dA = 2 \int_{(A)} C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dA.$$

Az integrál kiszámításához változó-transzformációra van szükség:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cos \varphi; \quad \frac{y}{b} = \lambda \sin \varphi \Rightarrow U = C (1 - \lambda^2 \cos^2 \varphi - \lambda^2 \sin^2 \varphi) = C (1 - \lambda^2)$$

A transzformáció Jacobi-determinánsa:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -a\lambda \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b\lambda \cos \varphi \end{vmatrix} = ab \lambda \cos^2 \varphi + ab \lambda \sin^2 \varphi = ab \lambda.$$

Az integrál kiszámítása:

$$M_c = 2 \int_{(A)} U \, dA = 2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\lambda=0}^1 C (1 - \lambda^2) ab \lambda \, d\lambda \, d\varphi = 2abC 2\pi \left[\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{4} \right]_0^1 = ab\pi C,$$

$$M_c = \pi \left(\frac{a^3b^3}{a^2 + b^2} \right) G\vartheta.$$

A csavarási másodrendű nyomaték $I_c = \pi \left(\frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \right)$.

c) A feszültség állapot és az elmozdulás állapot meghatározása:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2C}{b^2} y = -\left(\frac{2a^2}{a^2+b^2} G \vartheta \right) y \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2C}{a^2} x = \left(\frac{2b^2}{a^2+b^2} G \vartheta \right) x \end{aligned} \right\} \text{A feszültségek eloszlása lineáris.}$$

A keresztmetszet veszélyes pontjának meghatározása:

Mivel normálfeszültség nincs, ezért a veszélyes pontot a csúsztató feszültség abszolút értékének maximumhelye

$$\text{adja: } |\vec{\tau}_z|^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \left(\frac{2G\vartheta}{a^2+b^2} \right)^2 (b^4 x^2 + a^4 y^2).$$

Ez a kifejezés az $x = 0$, illetve az $y = 0$ pontokban vesz fel lokális szélsőértéket (ekkor válik nullává a csúsztató feszültség abszolút értékének parciális deriváltja).

$$\text{Az A pontban: } \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2C}{a^2} x = \left(\frac{2b^2}{a^2+b^2} G \vartheta \right) x = b \frac{2abG\vartheta}{a^2+b^2}.$$

$$\text{A B pontban: } \tau_{yz} = 0; \tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2C}{b^2} y = -\left(\frac{2a^2}{a^2+b^2} G \vartheta \right) y = -a \frac{2abG\vartheta}{a^2+b^2}.$$

Mivel $a > b$, ezért a B pontban fellépő csúsztatófeszültség abszolút értéke nagyobb az A pontban fellépőnél.

A keresztmetszet veszélyes pontja: B pont.

A csúsztatófeszültség iránytangense: $\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$. A keresztmetszet kontúrjához (az ellipsziszhez) húzott érintő

$$\text{meredeksége: } \frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2}}{dx} = \frac{1}{2} \frac{-\frac{b^2}{a^2} \cdot 2x}{\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2}} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

A csúsztatófeszültség a keresztmetszet kontúrján érintőirányú. Ez azt jelenti (bizonyítás az előző feladatban), hogy a rúd, melynek keresztmetszetét vizsgáljuk, terheletlen paláستal rendelkezik.

$$\text{A feszültségi tenzor: } \underline{[F]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \frac{2G\vartheta}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a^2 y \\ 0 & 0 & b^2 x \\ -a^2 y & b^2 x & 0 \end{bmatrix}.$$

A Hooke-törvény segítségével meghatározhatjuk az alakváltozási tenzort:

$$[\underline{A}] = \frac{\vartheta}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a^2 y \\ 0 & 0 & b^2 x \\ -a^2 y & b^2 x & 0 \end{bmatrix}.$$

Az alakváltozási tenzorból meghatározható az elmozdulásmező:

A főatlóban lévő zérusok miatt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y, z), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = v(x, z), \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w = w(x, y).$$

Feltételezve azt, hogy a csavarás során a keresztmetszetek elfordulnak egymáshoz képest, de a keresztmetszetek alakja (első rendben) nem változik és a súlypontjaik továbbra is a súlyponti egyenesre esnek:

$$\vec{u}(x, y, z) = \vartheta z \vec{e}_z \times \vec{R} + w(x, y) \vec{e}_z, \text{ ahol } \vec{R} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y.$$

$$\vec{u}(x, y, z) = \underbrace{-\vartheta z y}_{u} \vec{e}_x + \underbrace{\vartheta z x}_{v} \vec{e}_y + w(x, y) \vec{e}_z.$$

A geometriai egyenletek: $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-2a^2 \vartheta y}{a^2 + b^2}$, $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2b^2 \vartheta x}{a^2 + b^2}$.

Mivel $\frac{\partial u}{\partial z} = -\vartheta y$ és $\frac{\partial v}{\partial z} = \vartheta x$, így

$$-\vartheta y + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{2a^2 \vartheta y}{a^2 + b^2} \Rightarrow w = \vartheta y x \left(1 - \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \right) + K(y) = \vartheta y x \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} + K(y),$$

ahol $K(y)$ az y -nak tetszőleges függvénye.

Hasonlóképpen:

$$\vartheta x + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2b^2 \vartheta x}{a^2 + b^2} \rightarrow w = -\vartheta y x \left(1 - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \right) + L(x) = \vartheta y x \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} + L(x),$$

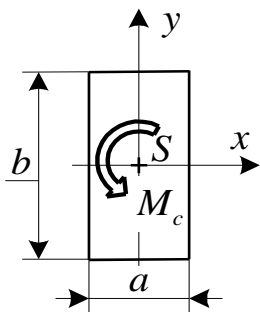
ahol $L(x)$ az x -nek tetszőleges függvénye.

Az eredményeket összevetve: $L(x) = K(y) = \text{állandó}$.

Ez az állandó a keresztmetszet pontjainak egyszerű z irányú eltolása, amivel nem foglalkozunk.

Így az elmozdulásmező: $\vec{u}(x,y,z) = \underbrace{-\vartheta z y}_{u} \vec{e}_x + \underbrace{\vartheta z x}_{v} \vec{e}_y + \underbrace{\vartheta y x \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}}_w \vec{e}_z$.

3. Téglalap keresztmetszetű prizmatikus rúd szabad csavarása



Adott:

Az ábrán látható téglalap keresztmetszetű prizmatikus rúd, melynek igénybevétele szabad csavarás.

Feladat:

- A Prandtl-féle feszültségfüggvény közelítő és egzakt előállítás.
- Az előállított feszültségfüggvények szemléltetése.
- A keresztmetszet feszültségeloszlásának és veszélyes pontjainak meghatározása.
- A feszültségeloszlások szemléltetése.

Kidolgozás:

a) A *Prandtl*-féle feszültségfüggvény közelítő és egzakt előállítás:

A feszültségfüggvénnyel szemben négy követelményt támasztunk:

1. legyen legalább kétszer folytonosan differenciálható, így a vegyes parciális deriváltjai egyenlők, vagyis teljesítik a $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$ egyensúlyi egyenletet,
2. a keresztmetszet kontúrjain értéke legyen zérus (többszörösen összefüggő tartomány esetén a kontúrokon legyen konstans), így a kontúr terheletlen,
3. a belőle származtatott feszültség nyomatékának felületi integrálja egyezzen meg a csavaró nyomatékkal,
4. teljesítse a $\Delta U = -2G\vartheta$ *Poisson*-egyenletet (ez a kompatibilitás feltétele).

A közelítő megoldás előállítása:

A négy oldalél egyenletét nullára redukálva és összeszorozva kapjuk a közelítő feszültségfüggvényt:

$$U(x, y) = C \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right).$$

Ez a kifejezés akárhányszor folytonosan differenciálható, így a vegyes parciális deriváltjai egyenlők, vagyis teljesíti az egyensúlyi egyenletet.

A függvény zérus értéket vesz fel a keresztmetszetet határoló téglalap minden egyes pontján, így a csúsztató feszültség a kontúrral párhuzamos lesz.

A C együttható meghatározása:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = C \cdot 2y \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right), \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -C \cdot 2x \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right),$$

$$M_c = \int_A (-\tau_{xz}y + \tau_{yz}x) \, dA = C \int_A \left(-\frac{\partial U}{\partial y}y - \frac{\partial U}{\partial x}x \right) \, dA,$$

$$M_c = -2C \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[y^2 \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) + x^2 \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \right] \, dx dy = \frac{C}{18} a^3 b^3.$$

Átrendezve: $C = \frac{18}{a^3 b^3} M_c$.

A feszültségfüggvény: $U(x,y) = \frac{18}{a^3 b^3} M_c \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right)$.

Ez a feszültségfüggvény azonban nem teljesíti a Poisson-egyenletet:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = C \cdot 2x \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2C \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = C \cdot 2y \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2C \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right),$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2C \left(y^2 + x^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right) \neq \text{áll.}$$

Az így kiszámított feszültségállapot és elmozdulás állapot nem az egzakt megoldás.

Az egzakt megoldás előállítására:

A $\Delta U = -2G\vartheta$ Poisson-egyenletet homogenizálva a $\Delta U = 0$ Laplace-egyenlethez jutunk, melynek megoldásai például az $U_1 = \sinh(x) \sin(y)$, $U_2 = \sinh(x) \cos(y)$, $U_3 = \cosh(x) \sin(y)$ és $U_4 = \cosh(y) \cos(x)$ függvények.

Tekintsük az $f(x, y) = \cosh(c_1 y) \cos(c_2 x)$ függvényt.

Ez teljesíti a Laplace-egyenletet, ha $c_1 = \pm c_2$, ugyanis:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cosh(c_1 y) \cos(c_2 x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cosh(c_1 y) \cos(c_2 x) = (c_1^2 - c_2^2) f(x, y).$$

Az $f(x, y) = 0$ feltétel az $x = \pm \frac{a}{2}$ egyenletű oldalakon akkor teljesül, ha $c_2 = \frac{\pi}{a} k$, ahol k páratlan szám.

A $g(x, y) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} C_k \cosh\left(\frac{k\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{k\pi}{a} x\right)$ függvény tehát a Laplace-egyenlet megoldása és a téglalap függőleges oldalai mentén teljesíti a peremfeltételt is. (Ez nem a Laplace-egyenlet általános megoldása, de bizonyítható, hogy arra nincs is szükség!)

A Poisson-egyenlet egy parciális megoldását már ismerjük a feladat közelítő megoldásából:

$$g'(x, y) = -G\vartheta \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right).$$

Az egzakt megoldás esetén a Prandtl-féle feszültség függvényt az alábbi alakban keressük:

$$U(x, y) = G\vartheta \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) + \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} C_k \cosh\left(\frac{k\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{k\pi}{a} x\right).$$

Ha a C_k együtthatókat úgy választjuk, hogy a feszültségfüggvény a téglalap vízszintes oldalai mentén is eltűnjön, akkor mind a négy követelményt sikerül kielégíteni, vagyis az egzakt megoldáshoz jutunk.

A C_k együtthatók meghatározása:

$$y = \pm \frac{b}{2} \text{ esetén } U(x, y) = G\vartheta \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) + \underbrace{\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} C_k \cosh\left(\frac{k\pi b}{2a}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{a} x\right)}_{D_k} = 0.$$

$$G\vartheta \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} D_k \cos\left(\frac{k\pi}{a} x\right).$$

A D_k együtthatók meghatározása:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} G\vartheta \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \cos \left(\frac{k\pi}{a} x \right) dx = D_k \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos^2 \left(\frac{k\pi}{a} x \right) dx.$$

A határozott integrálásokat elvégezve: $D_k = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{8a^2}{\pi^3 k^3} G\vartheta$

Az egzakt Prandtl-féle feszültség függvény:

$$U(x, y) = G\vartheta \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) + \sum_{k=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{8a^2}{\pi^3 k^3} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi k b / 2a)} \cosh \left(\frac{k\pi}{a} y \right) \cos \left(\frac{k\pi}{a} x \right).$$

Az együtthatók nevezőjében szereplő k^3 miatt a sor gyorsan konvergál.

A nulladik közelítés visszaadja a peremfeltételt nem teljesítő $U^0(x, y) = G\vartheta \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right)$ közelítő megoldást.

Az első közelítés: $U^1(x, y) = G\vartheta \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) - \frac{8a^2}{\pi^3} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi b / 2a)} \cosh \left(\frac{\pi}{a} y \right) \cos \left(\frac{\pi}{a} x \right).$

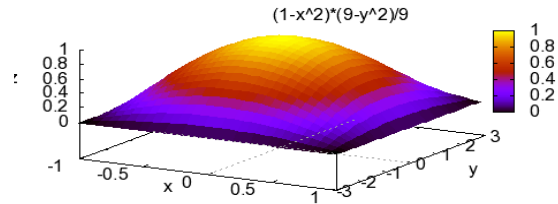
b) Az előállított feszültségfüggvények szemléltetése:

Az ábrákon $G\vartheta = 1$, $a = 2$, $b = 6$, $C = 1$.

$$U(x, y) = C \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right).$$

Nem elégíti ki a *Poisson*-egyenletet.

A peremfeltétel mind négy peremen teljesül.

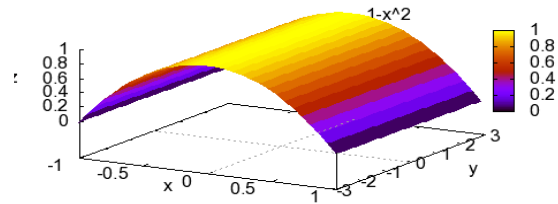


$$U^0(x, y) = G\vartheta \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right).$$

A *Poisson*-egyenletet kielégíti.

Az y tengellyel párhuzamos peremeken a peremfeltétel teljesül.

Nem teljesíti a peremfeltételt az x tengellyel párhuzamos peremeken.

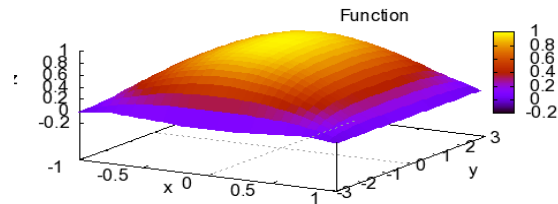


$$U^1(x, y) = G\vartheta \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) - \frac{8a^2}{\pi^3} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi b/2a)} \cosh\left(\frac{\pi}{a}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right).$$

A *Poisson*-egyenletet kielégíti.

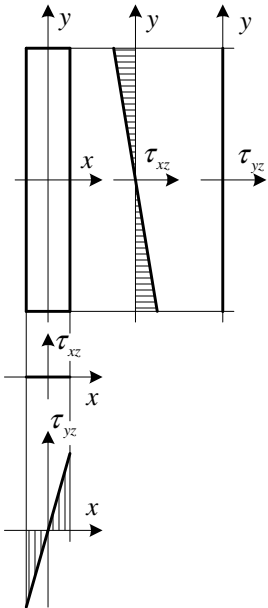
Az y tengellyel párhuzamos peremeken a peremfeltétel teljesül.

Közelítőleg teljesíti a peremfeltételt az x tengellyel párhuzamos peremeken („hullámos” a peremen).



c) A keresztmetszet feszültségeloszlásának és veszélyes pontjainak meghatározása:

Közelítő megoldás:



$$U(x, y) = C \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right),$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{36}{a^3 b^3} M_c y \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right).$$

Ez zérus az x tengelyen és lineáris feszültségeloszlás az y tengely mentén: $\tau_{xz}(x=0) = -\frac{9}{ab^3} M_c y$.

Az y tengellyel párhuzamos egyenesek mentén is lineáris az eloszlás, de az y tengelytől távolodva egyre kisebb a maximális feszültség, míg - parabolikus csökkenést követve - a téglalapot határoló oldalak mentén teljesen eltűnik.

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{36}{a^3 b^3} M_c x \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right).$$

Ez zérus az y tengelyen és lineáris feszültségeloszlás az x tengely mentén: $\tau_{yz}(y=0) = \frac{9}{a^3 b} M_c x$

Az x tengellyel párhuzamos egyenesek mentén is lineáris az eloszlás, de az x tengelytől távolodva egyre kisebb a maximális feszültség, míg - parabolikus csökkenést követve - a téglalapot határoló oldalak mentén teljesen eltűnik.

A veszélyes pontok a $(\pm a/2; 0)$ pontok (az x tengely és a téglalap kontúrjának metszetei), ahol a feszültség:

$$\tau_{yz \max} = \pm \frac{9}{2a^2 b} M_c.$$

Az egzakt megoldás:

$$U(x, y) = G\vartheta \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) + \sum_{k=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{8a^2}{\pi^3 k^3} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi kb/2a)} \cosh\left(\frac{k\pi}{a}y\right) \cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right),$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{k=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{8a}{\pi^2 k^2} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi kb/2a)} \sinh\left(\frac{k\pi}{a}y\right) \cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right),$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = 2G\vartheta x + \sum_{k=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{8a}{\pi^2 k^2} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi kb/2a)} \cosh\left(\frac{k\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right).$$

A nulladik közelítés visszaadja a peremfeltételt nem teljesítő megoldást.

Az első közelítés: $\tau_{xz}^1 = \frac{8a}{\pi^2} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi b/2a)} \sinh\left(\frac{\pi}{a}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$.

$$\tau_{yz}^1 = -\frac{\partial U}{\partial x} = 2G\vartheta x + \frac{8a}{\pi^2} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi b/2a)} \cosh\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right).$$

A csavaró nyomaték kiszámítása: $M_c = \int_A \vec{r} \times \vec{\tau} \, dA = \int_A x\tau_{yz} \, dA - \int_A y\tau_{xz} \, dA$

$$\begin{aligned} \int_A x\tau_{yz} \, dA &= \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} 2G\vartheta x^2 + \frac{8a}{\pi^2} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi b/2a)} x \cosh\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \, dydx = \\ &= G\vartheta \frac{a^3 b}{6} + G\vartheta \frac{16a^3}{\pi^5 \cosh(\pi b/2a)} 2a \sinh(\pi b/2a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_A y\tau_{xz} \, dA &= \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{8a}{\pi^2} \frac{G\vartheta}{\cosh(\pi b/2a)} y \sinh\left(\frac{\pi}{a}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \, dydx = \\ &= G\vartheta \frac{16a^3}{\pi^5 \cosh(\pi b/2a)} \left(b\pi \cosh\frac{\pi b}{2a} - 2a \sinh\frac{\pi b}{2a} \right). \end{aligned}$$

$$M_c = G\vartheta \left(\frac{a^3b}{6} + \frac{16a^3b}{\pi^4} \right).$$

$$M_c = G\vartheta I_c \Rightarrow I_c = a^3b \left(\frac{1}{6} + \frac{16}{\pi^4} \right) \approx 0,331 a^3b; \vartheta = \frac{M_c}{Ga^3b \left(\frac{1}{6} + \frac{16}{\pi^4} \right)}.$$

$$\tau_{xz}^1 = M_c \frac{8}{\pi^2 a^2 b \left(\frac{1}{6} + \frac{16}{\pi^4} \right) \cosh(\pi b/2a)} \sinh\left(\frac{\pi}{a}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right);$$

$$\tau_{yz}^1 = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{M_c}{a^3b \left(\frac{1}{6} + \frac{16}{\pi^4} \right)} \left[2x + \frac{8a}{\pi^2 \cosh(\pi b/2a)} \cosh\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right]$$

A veszélyes pontok a keresztmetszet négy csúcsa, ahol

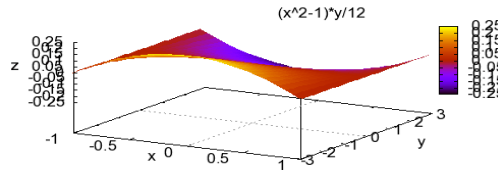
$$\tau_{yz}^1 \max = \pm \frac{M_c}{a^2b \left(\frac{1}{6} + \frac{16}{\pi^4} \right)} \left[1 + \frac{8}{\pi^2} \right] \approx 5,47 \frac{M_c}{a^2b}.$$

d) A feszültségeloszlások szemléltetése:

Az ábrákon $M_c = 4$, $a = 2$, $b = 6$.

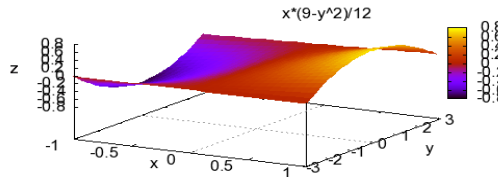
Közelítő megoldás:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{36}{a^3 b^3} M_c y \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right)$$



$$\tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{36}{a^3 b^3} M_c x \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right).$$

Nem teljesíti a Poisson-egyenletet.



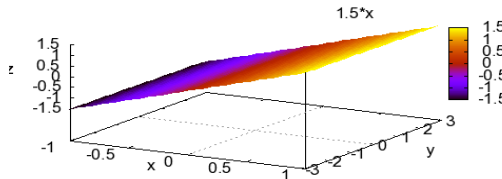
Egzakt megoldás nulladik közelítése:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^0 &= 0, \\ \tau_{yz}^0 &= \frac{12 M_c}{a^3 b} x. \end{aligned}$$

Nem teljesíti a peremfeltételt.

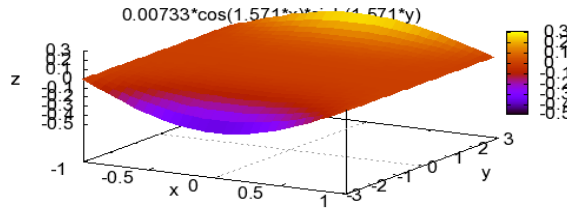
Az egzakt megoldás első közelítése.

A Poisson-egyenletet teljesíti, a peremfeltételt közelíti.



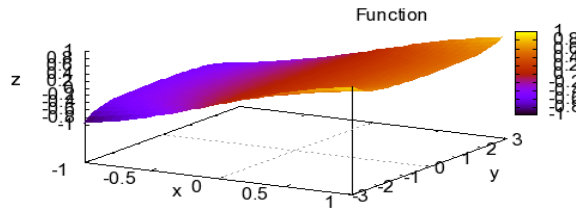
$$\tau_{xz}^1 = M_c \frac{8}{\pi^2 a^2 b \left(\frac{1}{6} + \frac{16}{\pi^4} \right) \cosh(\pi b / 2a)} \sinh\left(\frac{\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right).$$

$$\tau_{xz}^1(x, y)$$

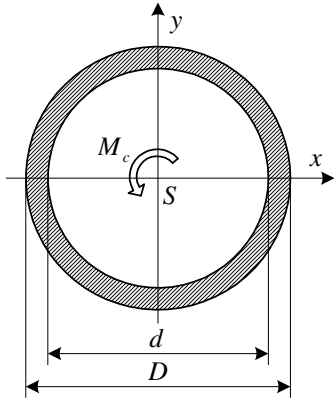


$$\tau_{yz}^1 = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{M_c}{a^3 b \left(\frac{1}{6} + \frac{16}{\pi^4} \right)} \left[2x + \frac{8a}{\pi^2 \cosh(\pi b/2a)} \cosh\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right]$$

$$\tau_{yz}^1(x, y)$$



4. Vékonyfalú cső csavarása

Adott:

A D külső és d belső átmérőjű, l hosszúságú acélcső, melynek igénybevétele csavarás. $D = 40$ mm, $d = 30$ mm, $l = 1000$ mm, $M_c = 100$ Nm, $G = 80$ GPa.

Feladat:

- A τ_{sz} nyírófeszültségnek, az I_c csavarási másodrendű nyomatéknak és a csővégek ψ szögelfordulásának meghatározása a *Bredt*-formula felhasználásával (közelítő megoldás).
- Az eredmény összehasonlítása az egzakt megoldással.

Kidolgozás:

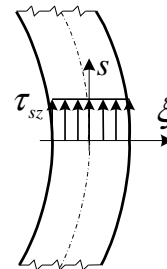
- A τ_{sz} nyírófeszültségnek, az I_c csavarási másodrendű nyomatéknak és a csővégek ψ szögelfordulásának meghatározása a *Bredt*-képlet felhasználásával:

$$d_k = \frac{D + d}{2} = 35 \text{ mm}, \quad v = \frac{D - d}{2} = 5 \text{ mm}, \quad A_k = \frac{d_k^2 \pi}{4} = 9,62 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$\tau_{sz} = \frac{M_c}{2 A_k v} = 10,4 \text{ MPa}, \quad \oint \frac{1}{v} ds = \frac{d_k \pi}{v} = \frac{0,035 \cdot 3,141}{0,005} = 21,99,$$

$$I_c = \frac{4 A_k^2}{\oint \frac{1}{v} ds} = \frac{4 \cdot 9,62^2 \cdot 10^{-8}}{21,99} = 16,83 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4,$$

$$\psi = \frac{M_c l}{I_c G} = \frac{100 \cdot 1}{16,83 \cdot 10^{-8} \cdot 80 \cdot 10^9} = 7,42 \cdot 10^{-3} \text{ rad}.$$



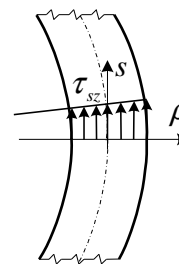
b) Az eredmény összehasonlítása az egzakt megoldással.

Körgyűrű keresztmetszet poláris másodrendű nyomatéka:

$$I_p = \frac{D^4 - d^4}{32} \pi = 1,72 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4, \quad \tau_{\varphi z}(\rho) = \frac{M_c}{I_p} \rho,$$

$$\tau_{\varphi z \text{ max}} = \frac{M_c}{I_p} \frac{D}{2} = \frac{100 \cdot 0,02}{1,72 \cdot 10^{-7}} = 11,63 \text{ MPa},$$

$$\psi = \frac{M_c l}{I_p G} = \frac{100 \cdot 1}{1,72 \cdot 10^{-7} \cdot 80 \cdot 10^9} = 7,28 \cdot 10^{-3} \text{ rad}.$$



A másodrendű nyomatékban fellépő relatív hiba kiszámítása:

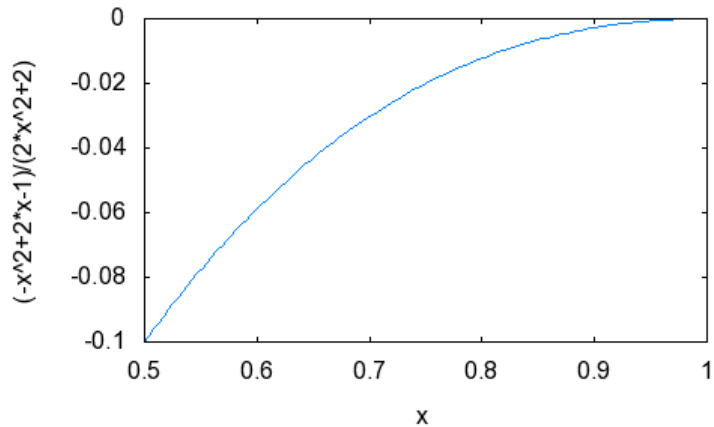
$$I_c = \frac{4 A_k^2}{\oint \frac{1}{v} ds} = \frac{4 \left[\left(\frac{D+d}{2} \right)^2 \frac{\pi}{4} \right]^2}{\frac{D+d}{2} \pi / \frac{D-d}{2}} = \frac{(D+d)^3 (D-d)}{64} \pi,$$

$$\frac{I_c - I_p}{I_p} = \frac{\frac{(D-d)(D+d)^3}{64} \pi - \frac{D^4 - d^4}{32} \pi}{\frac{D^4 - d^4}{32} \pi} = \frac{(D+d)^2}{2(D^2 + d^2)} - 1.$$

Bevezetve a cső relatív falvastagságát jellemző $k = \frac{d}{D}$ viszonyszámot,

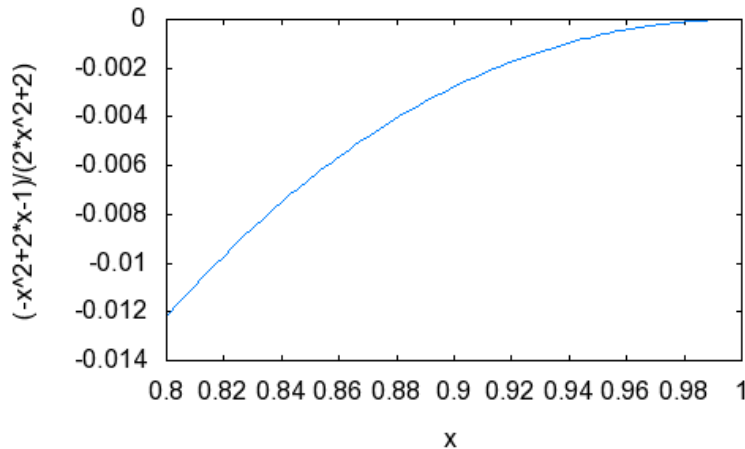
$$\frac{I_c - I_p}{I_p} = \frac{1 + 2k + k^2}{2 + 2k^2} - 1 = \frac{2k - 1 - k^2}{2 + 2k^2}.$$

Ezt a hányadost ábrázolva:



Ha a cső nem vékonyfalú, a közelítő *Bredt*-formula pontatlan: ha a belső átmérő csak a fele a külső átmérőnek ($k = 0,5$), akkor a megoldás relatív hibája: 10%.

A diagram kinagyítva:

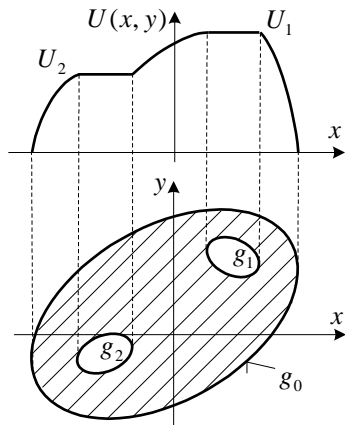


Körülbelül 1 %-ra csökken a relatív hiba, ha a belső átmérő a külső átmérőnek 82%-a. A *Bredt*-képlet tehát jó közelítés a műszaki gyakorlatban előforduló vékonyfalú csövek esetén.

Önellenőrzés

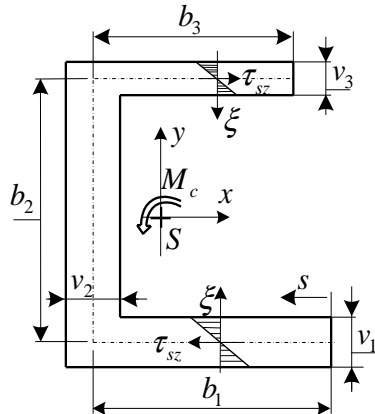
1. Egészítse ki a következő mondatot a megfelelő kifejezésekkel!
csavarás: a rúd (a keresztmetszet) pontjainak z tengely irányú elmozdulását semmi sem akadályozza.
2. Rajzolja fel egy papírra a szabad csavarás szemléltető ábráját!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
3. Írja fel egy papírra a prizmatikus rudak szabad csavarásának kiinduló feltételezéseit!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
4. Írja fel egy papírra a prizmatikus rudak szabad csavarásához tartozó dinamikai peremfeltételek!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
5. Írja fel egy papírra a prizmatikus rudak szabad csavarásánál a feszültségi állapotot megadó tenzort!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
6. Írja fel egy papírra a prizmatikus rudak szabad csavarásánál az egyensúlyi egyenleteket!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
7. Írja fel egy papírra a prizmatikus rudak szabad csavarási feladatának összefoglaló eredményeit!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
8. Írja fel egy papírra a *Prandtl-féle* membrán analógia alapjait!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
9. Rajzolja fel egy papírra a *Prandtl-féle* membrán analógia mechanikai modelljét a szükséges jelölésekkel!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
10. Írja fel egy papírra a *Prandtl-féle* membrán analógia esetén a membrán alakjának differenciálegyenletét!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

11. Határozza meg a *Prandtl-féle* membrán analógia feszültségfüggvényének jellegét az ábrán látható többszörösen összefüggő tartomány esetén!
Válassza ki a három helyes megoldást!



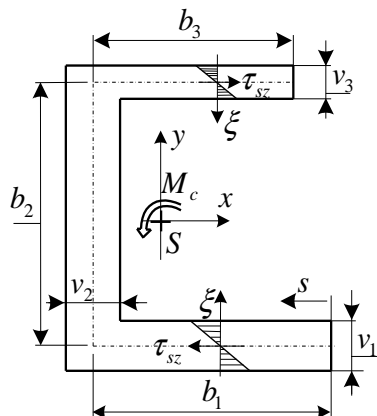
- a feszültségfüggvény a keresztmetszet g_0 külső peremén zérus
- a feszültségfüggvény a keresztmetszet g_0 külső peremén maximális
- a feszültségfüggvény g_1 belső peremen állandó
- a feszültségfüggvény g_1 belső peremen zérus
- a feszültségfüggvény g_1 belső peremen maximális
- a feszültségfüggvény g_2 belső peremen állandó
- a feszültségfüggvény g_2 belső peremen zérus
- a feszültségfüggvény g_2 belső peremen maximális

12. Írja fel egy papírra a vékonyfalú téglalap szelvény esetén a közelítő feszültségfüggvényt!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
13. Írja fel egy papírra a vékonyfalú téglalap szelvény esetén a peremfeltételeket!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
14. Írja fel egy papírra a vékonyfalú téglalap szelvény esetén a csavarónyomatékok meghatározó összefüggést!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
15. Írja fel egy papírra a vékonyfalú téglalap szelvény esetén a feszültségeket meghatározó összefüggéseket!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
16. Írja fel egy papírra a vékonyfalú téglalap szelvény esetén a csavarási másodrendű nyomatékok meghatározó összefüggést!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
17. Írja fel egy papírra az összetett nyitott vékonyfalú szelvény esetén a feszültségeket meghatározó összefüggést!



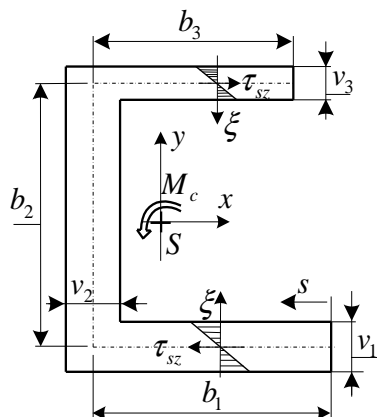
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

18. Írja fel egy papírra az összetett nyitott vékonyfalú szelvény esetén a csavaró nyomatékot meghatározó összefüggést!



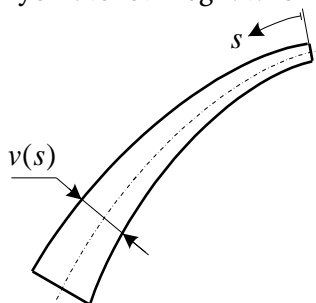
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

19. Írja fel egy papírra az összetett nyitott vékonyfalú szelvény esetén a csavarási másodrendű nyomatékot meghatározó összefüggést!



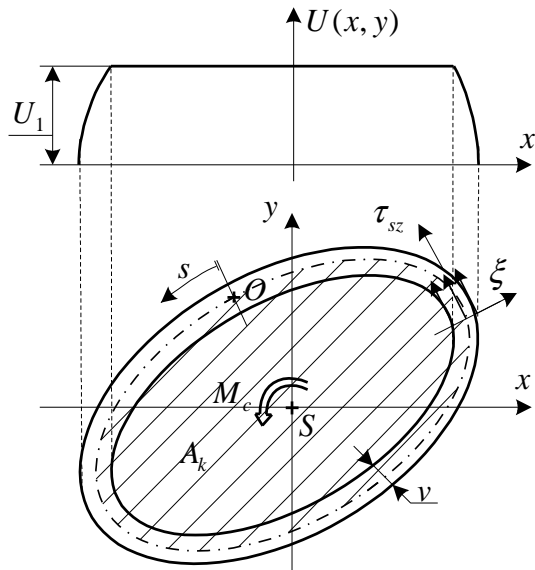
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

20. Írja fel egy papírra görbe középvonalú nyitott vékonyfalú szelvény esetén a csavarási másodrendű nyomatékot meghatározó összefüggést!



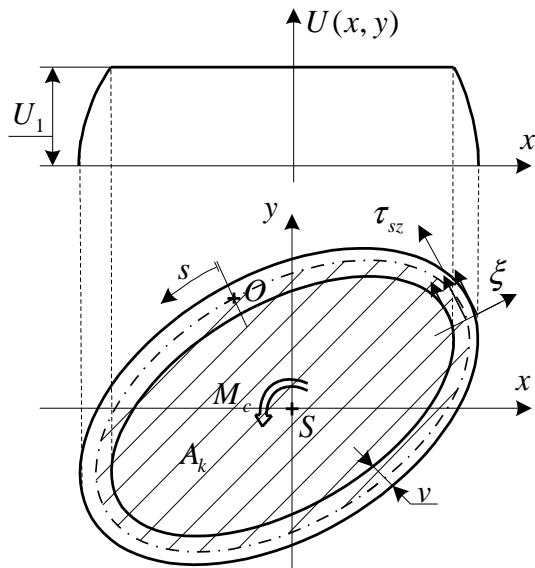
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

21. Írja fel egy papírra zárt vékonyshelvényű rudak esetén a feszültséget meghatározó összefüggést!



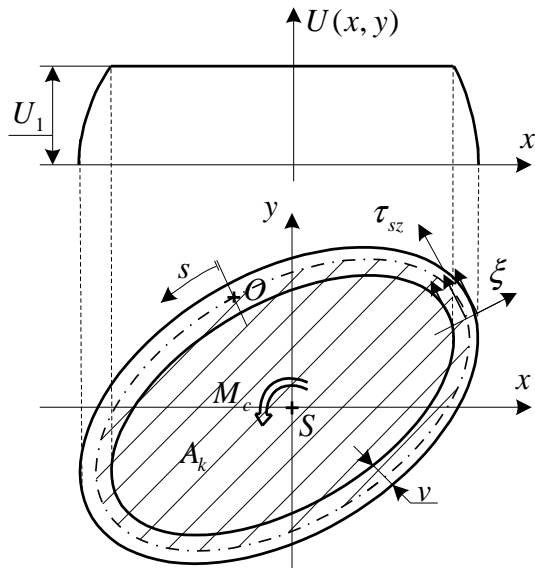
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

22. Írja fel egy papírra zárt vékonyshelvényű rudak esetén a csavaró nyomatékot meghatározó összefüggést!



A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

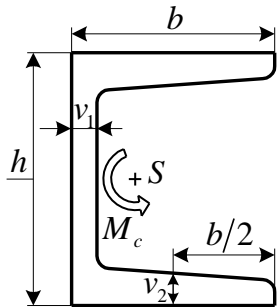
23. Írja fel egy papírra zárt vékonyshelvényű rudak esetén a másodrendű nyomatékot



A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

24. Nyitott vékony szelvényű prizmatikus rúd szabad csavarása

Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



Adott:

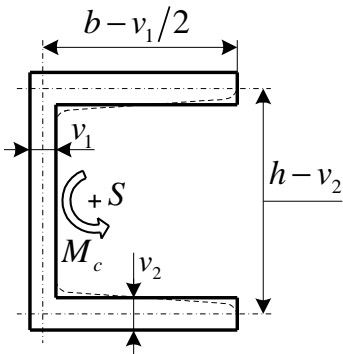
Az ábrán vázolt U50 szelvényű (MSz 326) prizmatikus rúd geometriája és anyaga. A rúd igénybevétele szabad csavarás.

$h = 50 \text{ mm}$, $b = 38 \text{ mm}$, $v_1 = 5 \text{ mm}$, $v_2 = 7 \text{ mm}$, $\sigma_{meg} = 150 \text{ MPa}$.

Feladat:

- A szelvény I_c csavarási másodrendű nyomatékának meghatározása.
- A maximális M_c csavaró nyomaték meghatározása.

Kidolgozás:



A valóságos szelvényt állandó falvastagságú nyitott szelvénnel modellezzük.

A feladatot erre a modellre oldjuk meg.

a) A szelvény I_c csavarási másodrendű nyomatékának meghatározása.

I./ Határozza meg, majd válassza ki a megfelelő I_c csavarási másodrendű nyomaték értékét!

$$I_c = 8777,1 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 8999,2 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 9236,2 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 9909,3 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 10002,2 \text{ mm}^4$$

b) A maximális M_c csavaró nyomaték meghatározása.

II./ Határozza meg a veszélyes pontokat, majd válassza ki a helyes megoldást!

A veszélyes pontok:

az U szelvény középső szárának külső felületén találhatók.

az U szelvény felső szárának külső felületén találhatók.

az U szelvény alsó szárának külső felületén találhatók.

az U szelvény felső szárának belső felületén találhatók.

az U szelvény alsó szárának belső felületén találhatók.

az U szelvény két szárának belső- és külső felületén találhatók.

III./ Határozza meg a maximális M_{cmax} csavaró nyomatékot, majd válassza ki a helyes megoldást!

$$M_{cmax} = 123,211 \text{ Nm}$$

$$M_{cmax} = 153,452 \text{ Nm}$$

$$M_{cmax} = 189,253 \text{ Nm}$$

$$M_{cmax} = 212,342 \text{ Nm}$$

$$M_{cmax} = 254,789 \text{ Nm}$$

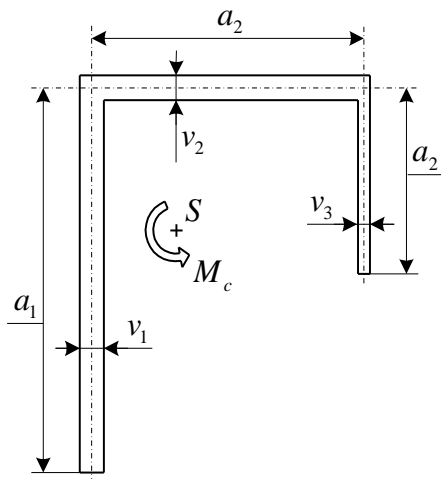
25. Nyitott vékony szelvényű prizmatikus rúd szabad csavarása

Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!

Adott:

Az ábrán vázolt nyitott szelvényű prizmatikus rúd geometriája és anyaga. A rúd igénybevétele szabad csavarás.

$$a_1 = 200 \text{ mm}, a_2 = 150 \text{ mm}, a_3 = 100 \text{ mm}, v_1 = 10 \text{ mm}, v_2 = 10 \text{ mm}, v_3 = 5 \text{ mm}.$$



Feladat:

a) A szelvény I_c csavarási másodrendű nyomatékának meghatározása.

b) A τ_{\max} maximális csúsztató feszültség meghatározása, ha $M_c = 120 \text{ Nm}$.

c) A rúd ϑ fajlagos szögelfordulásának meghatározása, ha $M_c = 120 \text{ Nm}$ és $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

a) A szelvény I_c csavarási másodrendű nyomatékának meghatározása.

I./ Határozza meg, majd válassza ki a megfelelő I_c csavarási másodrendű nyomaték értékét!

$$I_c = 1,001 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 1,208 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 1,257 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 1,384 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 1,857 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

b) A τ_{\max} maximális csúsztató feszültség meghatározása, ha $M_c = 120 \text{ Nm}$!

II./ Határozza meg, majd válassza ki a megfelelő $\tau_{sz\max}$ maximális csúsztató feszültséget!

$$\tau_{sz\max} = 4,56 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz\max} = 6,45 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz\max} = 9,93 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz\max} = 10,25 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz\max} = 12,65 \text{ MPa}$$

c) A rúd ϑ fajlagos szögelfordulásának meghatározása, ha $M_c = 120 \text{ Nm}$ és $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$:

III./ Határozza meg, majd válassza ki a rúd ϑ fajlagos szögelfordulását!

$$\vartheta = 1,01 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m}$$

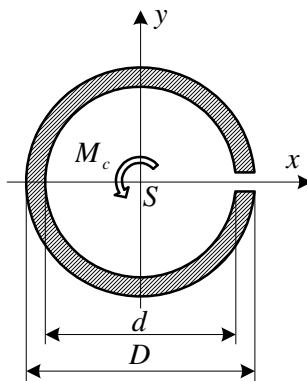
$$\vartheta = 1,24 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m}$$

$$\vartheta = 1,39 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m}$$

$$\vartheta = 1,62 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m}$$

$$\vartheta = 1,87 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m}$$

26. Felvágott vékonyfalú cső csavarása Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



Adott:

Az ábrán látható felvágott vékonyfalú cső geometriája és terhelése:

$M_c = 8 \text{ Nm}$, $D = 40 \text{ mm}$, $d = 36 \text{ mm}$, $l = 1 \text{ m}$.

Feladat:

a) Annak meghatározása, hogy milyen folyáshatárú anyag felel meg $n = 1,5$ -es biztonsággal.

b) A rúdvégek közötti ψ szögelfordulás meghatározása, ha $G = 80 \cdot 10^9 \text{ Pa}$.

a) Annak meghatározása, hogy milyen folyáshatárú anyag felel meg $n = 1,5$ -es biztonsággal.

I./ Határozza meg, majd válassza ki a megfelelő I_c csavarási másodrendű nyomaték értékét!

$$I_c = 231,3 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 318,3 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 412,3 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 487,3 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 543,3 \text{ mm}^4$$

II./ Határozza meg a veszélyes pontokat, majd válassza ki a helyes megoldást!

A veszélyes pontok:

- a külső kör valamennyi pontja
- a belső kör valamennyi pontja
- a felvágás felületének pontjai
- a külső- és belső kör valamennyi pontja
- a cső anyagának középső ívének pontjai

III./ Határozza meg, majd válassza ki a megfelelő $\tau_{sz \max}$ maximális csúsztató feszültséget!

$$\tau_{sz \max} = 43,1 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz \max} = 46,9 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz \max} = 50,3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz \max} = 57,9 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz \max} = 62,2 \text{ MPa}$$

IV./ Határozza meg, majd válassza ki a megfelelő $\sigma_{red \max}$ értékét Mohr és HMMH alapján!

Mohr alapján:

$$\sigma_{red \max} = 91,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red \max} = 95,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red \max} = 98,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red \max} = 100,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red \max} = 105,9 \text{ MPa}$$

HMH alapján:

$$\sigma_{red\ max} = 59,7\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{red\ max} = 62,5\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{red\ max} = 71,6\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{red\ max} = 81,6\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{red\ max} = 87,1\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{red\ max} = 91,7\ \text{MPa}$$

V./ Határozza meg, majd válassza ki a megfelelő R_m értékét $n = 1,5$ -es biztonsággal Mohr és HMH alapján!

Mohr alapján:

$$R_m = 111,2\ \text{MPa}$$

$$R_m = 150,9\ \text{MPa}$$

$$R_m = 160,9\ \text{MPa}$$

$$R_m = 172,8\ \text{MPa}$$

$$R_m = 180,3\ \text{MPa}$$

HMH alapján:

$$R_m = 130,7\ \text{MPa}$$

$$R_m = 142,6\ \text{MPa}$$

$$R_m = 159,2\ \text{MPa}$$

$$R_m = 163,7\ \text{MPa}$$

$$R_m = 174,9\ \text{MPa}$$



b) A rúdvégek közötti ψ szögelfordulás meghatározása, ha $G = 80 \cdot 10^9$ Pa

VI./ Határozza meg, majd válassza ki a cső ψ fajlagos szögelfordulását!

? = 0,123 rad/m

? = 0,159 rad/m

? = 0,191 rad/m

? = 0,291 rad/m

? = 0,314 rad/m

VII./ Határozza meg, majd válassza ki a cső ψ szögelfordulását!

$\psi = 10$ fok

$\psi = 12$ fok

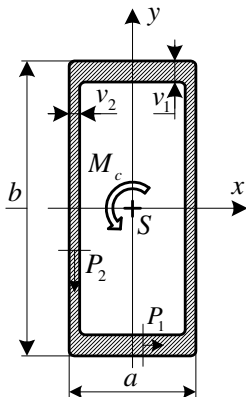
$\psi = 16$ fok

$\psi = 18$ fok

$\psi = 20$ fok

27. Téglalap keresztmetszetű zárt szelvény csavarása

Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



Adott:

Az ábrán látható téglalap keresztmetszetű zárt szelvény geometriai méretei és terhelése: $M_c = 200 \text{ Nm}$, $a = 100 \text{ mm}$, $b = 200 \text{ mm}$, $v_1 = 10 \text{ mm}$, $v_2 = 5 \text{ mm}$.

Feladat:

- A P_1 és P_2 metszetben ébredő csúsztató feszültségek kiszámítása.
- A rúdvégek közötti ψ szögelfordulás meghatározása, ha $l = 2 \text{ m}$, $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$.

a) A P_1 és P_2 metszetben ébredő csúsztató feszültségek kiszámítása:

I./ Határozza meg, majd válassza ki a megfelelő csúsztató feszültségeket!

P_1 metszetben ébredő csúsztató feszültség:

$$\tau_{sz}(P_1) = 0,43 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz}(P_1) = 0,49 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz}(P_1) = 0,55 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz}(P_1) = 0,61 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz}(P_1) = 0,67 \text{ MPa}$$

P_2 metszetben ébredő csúsztató feszültség:

$$\tau_{sz}(P_2) = 0,9 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz}(P_2) = 1,1 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz}(P_2) = 1,5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz}(P_2) = 1,8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sz}(P_2) = 2,2 \text{ MPa}$$

b) A rúdvégek közötti ψ szögelfordulás meghatározása, ha $l = 2 \text{ m}$, $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$:

II./ Határozza meg, majd válassza ki a megfelelő I_c csavarási másodrendű nyomaték értékét!

$$I_c = 10,58 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_c = 11,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_c = 12,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_c = 13,72 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_c = 14,98 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

III./ Határozza meg, majd válassza ki a rúdvégek közötti ψ szögelfordulást!

$$\psi = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\psi = 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\psi = 5,1 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\psi = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\psi = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

VI. MODUL

A rugalmasságtan 2D feladatai

18. LECKE

2D feladatok egyenletei és definíciója

6. A rugalmasságtan 2D feladatai

6.1. 2D feladatok egyenletei és definíciója

Cél: A tananyag felhasználója megismerje a rugalmasságtan 2D feladatainak elméleti alapjait.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. fel tudja sorolni a rugalmasságtani 2D feladatok közös jellemzőit;

Sík alakváltozás (SA)

1. meg tudja határozni a sík alakváltozásának a definícióját;
2. fel tudja sorolni a sík-alakváltozás kialakulásának feltételeit;
3. fel tudja írni az alakváltozási és a feszültségi tenzort sík-alakváltozás esetén;
4. fel tudja írni az egyensúlyi egyenleteket sík-alakváltozásra DDKR-ben és HKR-ben;

Általánosított sík feszültségi feladat (ÁSF) – tárcsa feladat

1. meg tudja határozni az általánosított sík feszültségi feladat definícióját;
2. meg tudja határozni a tárcsa, mint test jellemzőit;
3. fel tudja írni a feszültségre vonatkozó feltételezéseket ÁSF esetén;
4. fel tudja írni az átlagos feszültségeket meghatározó összefüggéseket;
5. fel tudja írni az átlagfeszültség és a felületi feszültség tenzor mátrix alakját ÁSF esetén;

6. ábra segítségével szemléltetni tudja a feszültségi állapotot ÁSF esetén;
7. fel tudja írni az átlagos alakváltozási tenzor mátrix alakját ÁSF esetén;
8. fel tudja írni az átlagos elmozdulásokat meghatározó összefüggéseket;
9. fel tudja írni az egyensúlyi és a geometriai egyenleteket;

Forgásszimmetrikus feladatok (FSZ)

1. meg tudja határozni a forgásszimmetrikus feladat definícióját;
2. meg tudja határozni a tengelyszimmetria következményét;
3. fel tudja írni az elmozdulásmezőt megadó matematikai összefüggést FSZ esetén;
4. fel tudja írni az alakváltozási állapot matematikai összefüggéseit FSZ esetén;
5. fel tudja írni az alakváltozási tenzor mátrix alakját FSZ esetén;
6. fel tudja írni a feszültségi állapotot meghatározó matematikai összefüggéseket FSZ esetén;
7. fel tudja írni a feszültségi tenzor mátrix alakját FSZ esetén;

Síkfeladatok megoldása feszültségfüggvénnyel

1. fel tudja sorolni az SA és ÁSF feladatok hasonlóságait és különbségeit;
2. fel tudja írni az Airy-féle feszültségfüggvényt értelmezését;
3. fel tudja sorolni a megoldás gondolatmenetének lépéseit;
4. fel tudja írni DDKR-ben a biharmonikus differenciálegyenletet;

Síkbeli forgásszimmetrikus feladatok

1. meg tudja határozni a síkbeli forgásszimmetrikus feladatok értelmezését;
2. fel tudja írni az alakváltozásitenzor mátrix alakját forgásszimmetrikus SA és ÁSF esetében;
3. fel tudja írni a Hooke-törvényt forgásszimmetrikus SA és ÁSF esetében;
4. fel tudja írni az *Euler* típusú differenciálegyenlet megoldását forgásszimmetrikus esetben;
5. fel tudja írni a feszültségeket meghatározó összefüggéseket forgásszimmetrikus esetben.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 75 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. két dimenziós, 2D, elmozdulásmező, elmozduláskoordináta
2. sík alakváltozás, SA, kitüntetett sík
3. általánosított sík feszültségi feladat, ÁSF, tárcsa feladat, dinamikai peremfeltétel, átlagos feszültségek, átlagos alakváltozások, átlagos feszültségi tenzor, átlagos alakváltozási tenzor, átlagos elmozdulások
4. forgásszimmetrikus feladat, FSZ, henger koordináta-rendszer
5. független alakváltozási-, elmozdulás- és feszültségi mező, anyagegyenletek, feszültség függvény
6. síkbeli forgásszimmetrikus feladat, forgásszimmetrikus eset, tengelyszimmetrikus eset, *Euler* típusú differenciálegyenlet

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki, majd tanulja meg a 2D feladatok közös jellemzőit, a sík alakváltozás definícióját, az elmozdulásvektort leíró összefüggést, az elmozdulásmező skaláris koordinátáit! Tanulja meg az SA alakváltozás feltételeit!

A 2D feladatok közös jellemzői:

- két skalár elmozdulásmező különbözik nullától,
- minden mechanikai mennyiség két helykoordinátától függ.

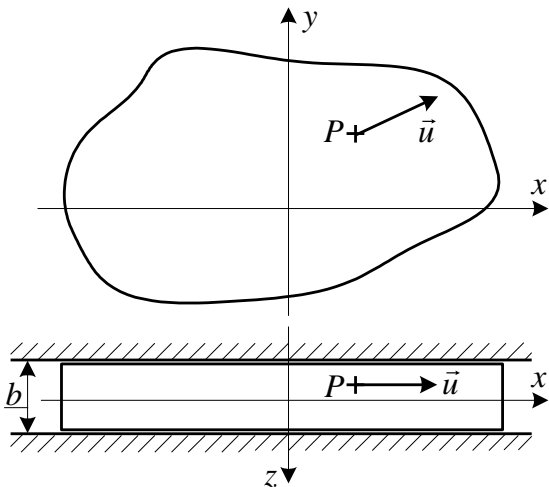
A 2D feladatok típusai:

- sík alakváltozási feladatok (SA),
 - általánosított síkfeszültségi feladatok (ÁSF),
- } síkfeladatok,
- forgásszimmetrikus/tengelyszimmetrikus feladatok (FSZ).

6.1.1. Sík alakváltozási feladat (SA)

Definíció:

Sík alakváltozásról beszélünk, ha a vizsgált testnek van egy kitüntetett síkja, amellyel párhuzamos valamennyi sík alakváltozása azonos és a síkok távolsága sem változik.



Az elmozdulásmező:

$$\vec{u}(x,y) = u(x,y)\vec{e}_x + v(x,y)\vec{e}_y.$$

Az elmozdulásmező skaláris koordinátái:

$$u = u(x,y),$$

$$v = v(x,y),$$

$$w \equiv 0.$$

Ilyen alakváltozás akkor alakul ki, ha teljesülnek az alábbi feltételek.

Feltételek:

- A kitüntetett síkra merőleges b méret lényegesen nagyobb, mint a másik kettő.

Például: vastagfalú cső, alagút, a folyó gátja, stb.

- A terhelés párhuzamos a kitüntetett síkkal és a legnagyobb kiterjedés (a z tengely) irányában nem változik.

- A síkok távolságának változatlanóságát külső kényszer biztosítja (ezt az ábrán sraffozott a vonal jelöli).

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg az alakváltozási és a feszültségi tenzor mátrix alakját, a feszültségi állapotot leíró összefüggéseket! Írja fel/tanulja meg az egyensúlyi egyenleteket sík-alakváltozásra DDKR-ben és HKR-ben!

Alakváltozási állapot:
$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x,y).$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x(x,y), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y(x,y), \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy}(x,y)$$

Feszültségi állapot (az általános Hooke-törvényből):

$$\sigma_x(x,y) = 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1 - 2\nu} \right] \nu, \quad \sigma_y(x,y) = 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1 - 2\nu} \right] \nu,$$

$$\tau_{xy}(x,y) = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + 2\nu)} \gamma_{xy}, \quad \varepsilon_z = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

A Hooke-törvény másik alakja:

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{1}{2G} [\sigma_x + \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \varepsilon_y(x,y) = \frac{1}{2G} [\sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{xy}(x,y) = \frac{\tau_{xy}}{G}.$$

Egyensúlyi egyenletek:

DDKR

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + q_y &= 0,\end{aligned}$$

HKR

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{\sigma_R - \sigma_\varphi}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} + q_R &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\varphi R}}{\partial R} + 2 \frac{\tau_{\varphi R}}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + q_\varphi &= 0.\end{aligned}$$

A 3. egyensúlyi egyenletből következik, hogy $q_z \equiv 0$.

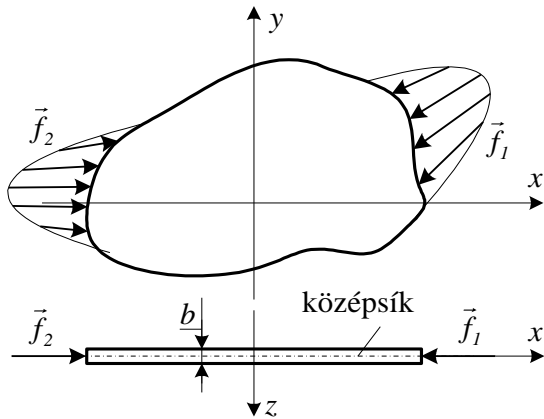
Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Tanulja meg az általánosított sík feszültségi feladat és a tárcsa definícióját! Jegyezze meg a feszültségekre vonatkozó feltételezéseket! Írja fel/tanulja meg az átlagos feszültségeket meghatározó matematikai összefüggéseket! Jegyezze meg az átlagos feszültségi és a felületi feszültségi tenzor mátrix alakját!

6.1.2. Általánosított sík feszültségi feladat (ÁSF)

Elnevezés: Általános sík feszültségi feladat \equiv tárcsa feladat \equiv a saját síkjában terhelt lemez feladata.

Tárcsa: Olyan test, melynek egyik mérete lényegesen kisebb mint a másik kettő, értelmezhető középsík és a terhelés vastagság mentén vett eredője a középsíkba esik.

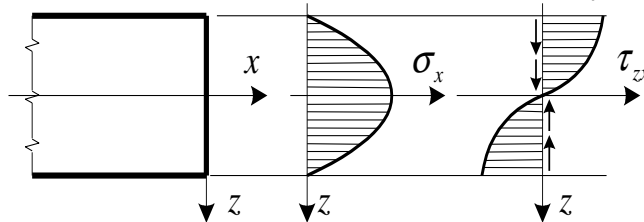


Feltételezések:

- $b \ll$ a test más jellemző méreteinél,
- a $z = 0$ középfelület sík,
- a terhelésben nincsenek z irányú erők,
- az xy síkkal párhuzamos erők vastagságmenti eredője az xy síkba esik,
- a $z = \pm b/2$ felületek terheletlenek.

A feszültségekre vonatkozó feltételezések:

- a $z = \pm b/2$ felületek terheletlenek $\Rightarrow \sigma_z|_{z=\pm b/2} = 0$,
- ha a b méret kicsi, akkor $\sigma_z \approx 0$ nemcsak a felületeken, hanem a többi helyen is fennáll.



- a $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ a z helykoordináta páros függvényei,
- a τ_{zx}, τ_{zy} a z helykoordináta páratlan függvényei.

Átlagos feszültségek bevezetése:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_x dz \quad , \quad \bar{\sigma}_y = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_y dz \quad , \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{xy} dz \quad ,$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_z dz = 0 \quad , \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{xz} dz = 0 \quad , \quad \bar{\tau}_{yz} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{yz} dz = 0 \quad .$$

Az átlagfeszültségi tenzor: $[\underline{\bar{F}}] = [\underline{\bar{F}}(x,y)] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{xy} & 0 \\ \bar{\tau}_{yx} & \bar{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$

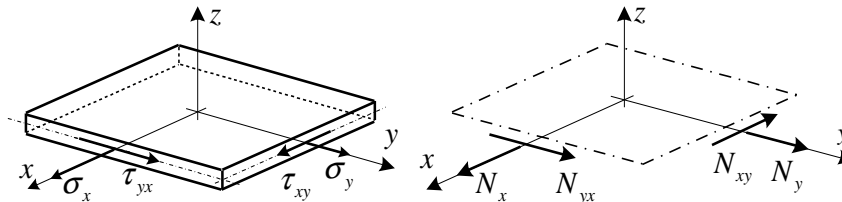
Felületi feszültségek/élerők bevezetése: $N_x = b \bar{\sigma}_x$, $N_y = b \bar{\sigma}_y$, $N_{xy} = b \bar{\tau}_{xy}$.

A felületi feszültségi tenzor: $[\underline{N}] = [\underline{N}(x,y)] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} & 0 \\ N_{yx} & N_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Rajzolja le a feszültségi állapotot szemléltető ábrákat! Írja fel/tanulja meg az átlagos alakváltozásokat meghatározó matematikai összefüggéseket! Jegyezze meg az átlagos alakváltozási tenzor mátrix alakját, az egyensúlyi és a geometriai egyenleteket!

A feszültségi állapot szemléltetése:



Az általános Hooke-törvény:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_x + \nu \bar{\varepsilon}_y), \quad \bar{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_y + \nu \bar{\varepsilon}_x), \quad \bar{\tau}_{xy} = G \bar{\gamma}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \bar{\gamma}_{xy}.$$

$$\bar{\sigma}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\varepsilon}_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y), \quad \bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{yz} = 0.$$

Átlagos alakváltozások:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{b} \int_{(b)} \varepsilon_x dz, \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{b} \int_{(b)} \varepsilon_y dz, \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \gamma_{xy} dz, \quad \bar{\varepsilon}_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y).$$

Az átlagos alakváltozási tenzor: $[\underline{\underline{A}}] = [\underline{\underline{A}}(x,y)] = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x & \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{yx} & \bar{\varepsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_z \end{bmatrix}.$

Átlagos elmozdulások: $\bar{u}(x,y) = \frac{1}{b} \int_{(b)} u dz, \quad \bar{v}(x,y) = \frac{1}{b} \int_{(b)} v dz, \quad \bar{w} = 0.$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \bar{q}_x = 0, \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \bar{q}_y = 0.$$

Geometriai egyenletek:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}.$$

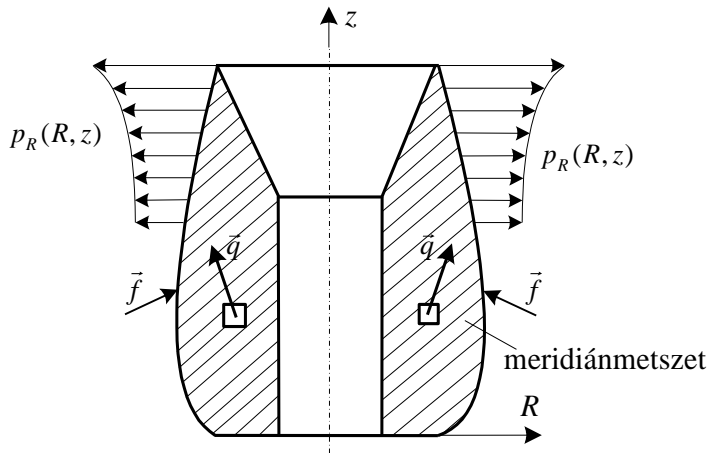
Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Tanulja meg a forgásszimmetrikus feladat definícióját! Jegyezze meg a tengelyszimmetria következményét! Írja fel/tanulja meg az elmozdulásmezőt, az alakváltozási állapotot, a feszültségi állapotot meghatározó matematikai összefüggéseket! Jegyezze meg az alakváltozási és a feszültségi tenzor mátrix alakját!

6.1.3. Forgásszimmetrikus/tengelyszimmetrikus feladatok (FSZ)

Definíció: a vizsgált test geometriája és terhelése is tengelyszimmetrikus.

Következmény: a test pontjai a test meridián síkjában (Rz metszet) mozdulnak el.



Az R, z, φ henger koordináta-rendszerben dolgozunk.

Tengelyszimmetria

↓

A mechanikai mennyiségek nem függenek a φ hely- koordinátától.

Az elmozdulásmező: $\vec{u} = u\vec{e}_R + v\vec{e}_z + w\vec{e}_\varphi$, $u = u(R, z)$, $v = v(R, z)$, $w \equiv 0$.

A test minden pontja a saját meridián síkjában mozdul el.

Az alakváltozási állapot:

$$\varepsilon_R(R, z) = \frac{\partial u}{\partial R}, \quad \varepsilon_z(R, z) = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \varepsilon_\varphi(R, z) = \frac{u}{R},$$

$$\gamma_{Rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial R}, \quad \gamma_{\varphi z} = \gamma_{R\varphi} = 0.$$

Az alakváltozási tenzor: $\underline{\underline{A}}_{Rz\varphi} = \underline{\underline{A}}_{Rz\varphi}(R, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{Rz} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{Rz} & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{bmatrix}.$

Feszültségi állapot az általános Hooke-törvényből:

$$\sigma_R(R,z) = 2G \left[\varepsilon_R + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right], \quad \sigma_z(R,z) = 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right],$$

$$\sigma_\varphi(R,z) = 2G \left[\varepsilon_\varphi + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right], \quad \tau_{Rz} = G \gamma_{Rz}, \quad \tau_{\varphi z} = \tau_{R\varphi} = 0,$$

$$\text{ahol } A_I = \varepsilon_R + \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi.$$

A feszültségi tenzor: $\underline{\underline{F}}_{Rz\varphi} = \underline{\underline{F}}_{Rz\varphi}(R,z) = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{Rz} & 0 \\ \tau_{zR} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{bmatrix}.$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg az SA és ÁSF azonosságait és különbségeit! Írja fel/tanulja meg az Airy-féle feszültségfüggvényt és az egyensúlyi egyenleteket! Jegyezze meg a feladat megoldás gondolatmenetének lépéseit! Írja fel/tanulja meg DDKR-ben a biharmonikus differenciálegyenletet!

6.1.4. Síkfeladatok (SA, ÁSF feladat) megoldása feszültségfüggvény bevezetésével

Hasonlóság az SA és az ÁSF feladatok között:

- a két skaláris elmozdulásmező jellemzi a feladatot: $u(x,y), v(x,y) / u(R,\varphi), v(R,\varphi)$,
- a három független alakváltozási jellemző különbözik nullától:

$$\varepsilon_x(x,y), \varepsilon_y(x,y), \gamma_{xy}(x,y) / \varepsilon_R(R,\varphi), \varepsilon_\varphi(R,\varphi), \gamma_{R,\varphi}(R,\varphi),$$

- a három független feszültségi jellemző különbözik nullától:

$$\sigma_x(x,y), \sigma_y(x,y), \tau_{xy}(x,y) / \sigma_R(R,\varphi), \sigma_\varphi(R,\varphi), \tau_{R,\varphi}(R,\varphi),$$

- minden mennyiség csak az $x, y / R, \varphi$ helykoordináták függvénye,
- a geometriai és egyensúlyi egyenletek alakja.

Különbözőség az SA és az ÁSF feladatok között:

- az SA-nál a pontbeli, az ÁSF-nél a vastagság menti (átlagos) jellemzők szerepelnek,

$$\left. \begin{array}{l} \text{SA} : \sigma_z \neq 0 \\ \text{SF} : \varepsilon_z \neq 0 \end{array} \right\} \text{ nem független jellemzők,}$$

- az anyagegyenletek alakja.

A megoldás kiinduló feltételezései: $q_x = q_y = 0$ (SA) $\bar{q}_x = \bar{q}_y = 0$ (SF).

Jelölés: a továbbiakban a felülvonás jelölést elhagyjuk.

Feszültségfüggvény bevezetése:

Airy²⁴-féle feszültségfüggvény: $U = U(x, y) / U = U(R, \varphi)$.

A feszültségfüggvényt úgy vesszük fel, hogy a belőle számított feszültségek kielégítsék az egyensúlyi egyenleteket.

DDKR

HKR

A feszültségek származtatása:

$$\begin{array}{ll} \sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, & \sigma_R = \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}, \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 U}{\partial R^2}, \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, & \tau_{R\varphi} = -\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right). \end{array}$$

Ezek az összefüggések az SA-ra és az ÁSF-re is érvényesek.

²⁴ George Bidell Airy (1801-1892) angol matematikus és fizikus

A megoldás gondolatmenete:

Feszültségek \Rightarrow Anyagegyenletek \Rightarrow Alakváltozások \Rightarrow Kompatibilitási egyenlet.

A kompatibilitási egyenletből a feszültségfüggvényre nézve a biharmonikus differenciálegyenletet kapjuk:

$$\Delta \Delta U = 0.$$

$U(x,y) / U(R,\varphi)$ – biharmonikus függvény.

A biharmonikus függvénynek ki kell elégítenie a biharmonikus differenciálegyenletet.

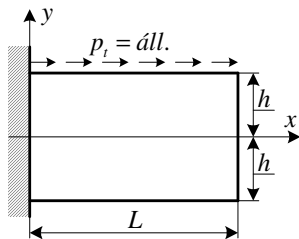
A Laplace-féle differenciál operátor kétváltozós (síkbeli) esetben: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

A biharmonikus differenciál egyenlet alakja a DDKR-ben: $\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0$.

Gyakorló feladatok

Kövesse végig a levezetéseket! Végezze el önállóan is a feladatokat!

1. Általánosított síkfeszültségi állapot



Adott:

Az ábrán látható, síkfeszültségi állapotban lévő téglalap tartomány, p_t terhelése és az Airy-féle feszültség-függvény a következő alakban:

$$U(x,y) = \frac{p_t}{4} \left(x y - \frac{x y^2}{h} - \frac{x y^3}{h^2} + \frac{L y^2}{h} + \frac{L y^3}{h^2} \right).$$

Feladat:

Annak eldöntése, hogy az így előállított Airy-féle feszültségfüggvény az egzakt megoldást szolgáltatja-e.

Kidolgozás:

Az Airy-féle feszültségfüggvénynek ki kell elégítenie:

- az $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ egyensúlyi egyenletet,
- a $\Delta\Delta U(x,y) = 0$ kinematikai egyenletet és
- a dinamikai peremfeltételeket.

a) Az egyensúlyi egyenlet teljesülésének ellenőrzése:

Az $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ egyensúlyi egyenlet skaláris egyenletei sík feszültségi állapot esetén *Descartes*-féle derékszögű koordináta-rendszerben:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + q_x = 0, \quad \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + q_y = 0, \quad q_z = 0.$$

A feszültségi tenzor koordinátái:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{p_t}{2} \left[\frac{L-x}{h} + \frac{3(L-x)y}{h^2} \right], \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = -\frac{p_t}{4} \left[1 - \frac{2y}{h} - \frac{3y^2}{h^2} \right].$$

Az egyensúlyi egyenletek teljesülnek:

$$\underbrace{\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}}_{\frac{p_t}{2} \left(-\frac{1}{h} - \frac{3y}{h^2} \right)} + \underbrace{\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}}_{-\frac{p_t}{4} \left(-\frac{2}{h} - \frac{6y}{h^2} \right)} + \underbrace{q_x}_0 = 0, \quad \underbrace{\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{q_y}_{=0} = 0.$$

b) A $\Delta\Delta U(x,y) = 0$ kinematikai egyenlet teljesülésének ellenőrzése:

$$\Delta\Delta U(x,y) = \underbrace{\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}}_{=0} + 2 \underbrace{\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}}_{=0} = 0.$$

A kinematikai egyenlet teljesül.

c) A dinamikai peremfeltételek teljesülésének ellenőrzése:

Az $x = L$ vonalon

$$\vec{p}_x = \underline{\underline{F}}(x=L) \cdot \vec{e}_x = \sigma_x(x=L) \vec{e}_x + \tau_{xy}(x=L) \vec{e}_y = -\frac{pt}{4} \left[1 - \frac{2y}{h} - \frac{3y^2}{h^2} \right] \vec{e}_y = 0.$$

A dinamikai peremfeltétel csak $y = -h$ és $y = h/3$ esetén, vagyis az $(L, -h)$ és $(L, h/3)$ pontokban teljesül.

Az $y = h$ vonalon:

$$\vec{p}_{(+y)} = \underline{\underline{F}}_{(y=+h)} \cdot \vec{e}_y = \tau_{xy}(y=+h) \vec{e}_x + \underbrace{\sigma_y}_{=0}(y=+h) \vec{e}_y = -\frac{pt}{4} \left[1 - \frac{2y}{h} - \frac{3y^2}{h^2} \right]_{y=h} \vec{e}_x = pt \vec{e}_x.$$

A dinamikai peremfeltétel teljesül.

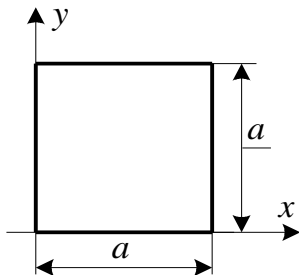
Az $y = -h$ vonalon:

$$\vec{p}_{(-y)} = \underline{\underline{F}}_{(y=-h)} (-\vec{e}_y) = -\underbrace{\tau_{xy}(y=-h)}_{=0} \vec{e}_x - \underbrace{\sigma_y}_{=0}(y=-h) \vec{e}_y = \vec{0}.$$

A dinamikai peremfeltétel teljesül.

A megadott feszültségfüggvény nem szolgáltat egzakt megoldást, mert a dinamikai peremfeltételek nem elégülnek ki a teljes peremen.

2. Általánosított síkfeszültségi állapot



Adott:

Az ábrán látható négyzet alakú tárcsa és a tárcsa $U(x,y)$ Airy-féle feszültségfüggvénye: $U(x,y) = \frac{p}{a^2} \left(\frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{6} \right)$.

Feladat:

- A feszültségi állapot meghatározása.
- A tárcsa peremét terhelő erőrendszer meghatározása és szemléltetése.

Kidolgozás:

- A feszültségi állapot meghatározása:

Az átlagos feszültségi tenzor: $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A feszültségkoordináták kiszámítása a feszültségfüggvényből:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{p}{a^2} (x^2 - 2y^2), \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{p}{a^2} y^2, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = -\frac{p}{a^2} 2xy,$$

- A tárcsa peremét terhelő erőrendszer meghatározása és szemléltetése:

Az erőrendszer dinamikai peremfeltételekből határozható meg.

Az $x = 0$ egyenletű oldalélen:

$$\vec{p}_{(x=0)} = \underline{\underline{F}}|_{(x=0)} \cdot (-\vec{e}_x) = -\sigma_x|_{(x=0)} \vec{e}_x - \underbrace{\tau_{xy}|_{(x=0)}}_{=0} \vec{e}_y = \left(\frac{p}{a^2} 2y^2 \right) \vec{e}_x.$$

Az $x = a$ egyenletű oldalélen:

$$\vec{p}_{(x=a)} = \underline{F}|_{(x=a)} \cdot \vec{e}_x = \sigma_x|_{(x=a)} \vec{e}_x + \underbrace{\tau_{xy}|_{(x=a)}}_{=0} \vec{e}_y = \frac{p}{a^2} (a^2 - 2y^2) \vec{e}_x - \left(\frac{p}{a} 2y\right) \vec{e}_y.$$

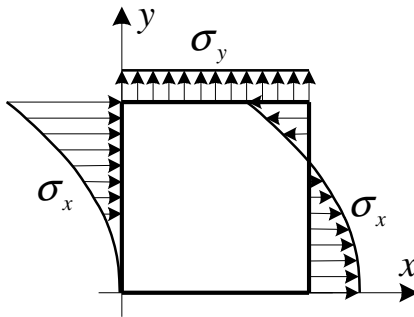
Az $y = 0$ egyenletű oldalélen:

$$\vec{p}_{(y=0)} = \underline{F}|_{(y=0)} \cdot (-\vec{e}_y) = -\underbrace{\sigma_y|_{(y=0)}}_{=0} \vec{e}_y - \underbrace{\tau_{yx}|_{(y=0)}}_{=0} \vec{e}_x = \vec{0}.$$

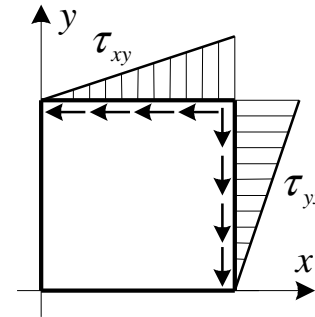
Az $y = a$ egyenletű oldalélen:

$$\vec{p}_{(y=a)} = \underline{F}|_{(y=a)} \cdot (\vec{e}_y) = \sigma_y|_{(y=a)} \vec{e}_y + \tau_{yx}|_{(y=a)} \vec{e}_x = -\left(\frac{p}{a} 2x\right) \vec{e}_x + (p) \vec{e}_y.$$

A vonal mentén megoszló erőrendszer szemléltetése:

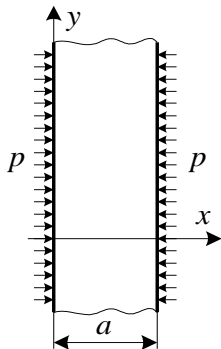


Normális irányú terhelés



Érintő irányú terhelés

3. Általánosított síkfeszültségi állapot



Adott:

Az ábrán látható, y irányban végtelen hosszúságú lemezsáv és terhelése. A terhelés a lemez középsíkjába esik, ezért ez a feladat mechanikai szempontból tárcsafeladatnak tekinthető.

Feladat:

- Az Airy-féle feszültségfüggvény felírása.
- A tárcsa feszültségi állapotának meghatározása.
- Az alakváltozási állapot meghatározása.

Kidolgozás:

- Az Airy-féle feszültségfüggvény felírása:

A feszültségfüggvénynek három követelményt kell kielégítenie:

- Teljesítse a $\Delta\Delta U = 0$ biharmonikus differenciálegyenletet (ez a kompatibilitási egyenlet következménye).
- A belőle származtatott feszültségkoordináták teljesítsék az egyensúlyi egyenletet.
- A belőle származtatott feszültségkoordináták feleljenek meg a peremfeltételeknek.

Az első követelmény biztosan teljesül, amennyiben legfeljebb harmadfokú polinomokat használunk.

A második követelmény automatikusan teljesül, ha a feszültségkoordinátákat a

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

összefüggésekkel definiáljuk.

A harmadik követelmény teljesítése:

A peremfeltételek: $\sigma_x(x=0) = \sigma_x(x=a) = -p$ és $\tau_{xy}(x=0) = \tau_{xy}(x=a) = 0$.

Mivel σ_x a feszültségfüggvény y szerinti második deriváltja, a peremfeltételt kielégítő legegyszerűbb függvény az $U(x,y) = -py^2$.

Az ebből képzett $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \equiv 0$ megfelel a peremfeltételek szerinti $\tau_{xy}(x=0) = \tau_{xy}(x=a) = 0$ követelménynek.

Az Airy-féle feszültségfüggvény: $U(x,y) = -py^2$.

b) A tárcsa feszültségi állapotának meghatározása:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -p, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0 \Rightarrow \underline{[F]} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Az alakváltozási állapot meghatározása:

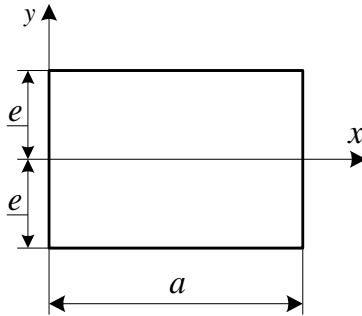
Egytengelyű feszültségállapot esetén használhatjuk az egyszerű Hooke-törvényt.

$$\underline{[A]} = \begin{bmatrix} -p/E & 0 & 0 \\ 0 & \nu p/E & 0 \\ 0 & 0 & \nu p/E \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés:

A feszültségfüggvényből számított feszültségkoordinátáknak a perem többi részén is ki kell elégíteniük a peremfeltételeket. A feladatban szereplő lemezszáv (tárcsa) x tengellyel párhuzamos oldalai mentén a peremfeltételt nem vizsgáltuk. Ezt a közelítést az indokolja, hogy a lemez alakja miatt a vizsgálatból kivont szakasz elhanyagolható hosszúságú. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a lemez y irányban „végtelen kiterjedésű”.

4. Sík alakváltozási állapot

Adott:

Az ábrán látható téglalap tartomány sík alakváltozási állapotban van.

Ismert az $U(x,y) = Ax^5 + Bx^3y^2$ függvény.

Feladat:

- Az A és B állandók közötti kapcsolat meghatározása, ha az U függvény biharmonikus.
- A $\sigma_x(x,y)$; $\sigma_y(x,y)$; $\sigma_z(x,y)$ és $\tau_{yx}(x,y)$ függvények meghatározása, ha a megadott függvény a test rugalmas sík-alakváltozására vonatkozó Airy-féle feszültség-függvénye.
- A $z = 0$, $y = -e$, illetve a $z = 0$, $x = a$ élek mentén a σ_y és τ_{xy} , illetve σ_x és τ_{yx} feszültségeloszlások szemléltetése, ha $A > 0$.
- A felületi terhelés sűrűségének meghatározása a $Q_1(\frac{a}{2}, -e, 0)$ és $Q_2(a, \frac{e}{2}, 0)$ pontokban.

Kidolgozás:

- Az A és B állandók közötti kapcsolat meghatározása, ha az U függvény biharmonikus:

Biharmonikus függvény: eleget tesz a biharmonikus differenciál egyenletnek.

$$\Delta\Delta U = 0.$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) U = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) U = 0.$$

A kijelölt deriválások elvégzése:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= 5Ax^4 + 3By^2x^2, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 20Ax^3 + 6By^2x, \\ \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} &= 60Ax^2 + 6By^2, \\ \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} &= 120Ax,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial y} &= 2Bx^3y, \\ \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} &= 0, \\ \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} &= 12Byx, \\ \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} &= 12Bx.\end{aligned}$$

Behelyettesítve: $120Ax + 2 \cdot 12Bx + 0 = 0 \Rightarrow B = -5A$.

b) A $\sigma_x(x,y)$; $\sigma_y(x,y)$; $\sigma_z(x,y)$ s $\tau_{yx}(x,y)$ függvények meghatározása, ha a megadott függvény a test rugalmas sík-alakváltozására vonatkozó Airy-féle feszültség-függvénye:

Feltételezés: $U(x,y)$ - Airy-féle feszültségfüggvény.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2Bx^3, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 20Ax^3 + 6By^2x,$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \nu[(20A + 2B)x^3 + 6By^2x], \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -6Bx^2y.$$

c) A $z = 0$, $y = -e$, illetve a $z = 0$, $x = a$ élek mentén a σ_y és τ_{xy} , illetve σ_x és τ_{yx} feszültségeloszlások szemléltetése, ha $A > 0$:

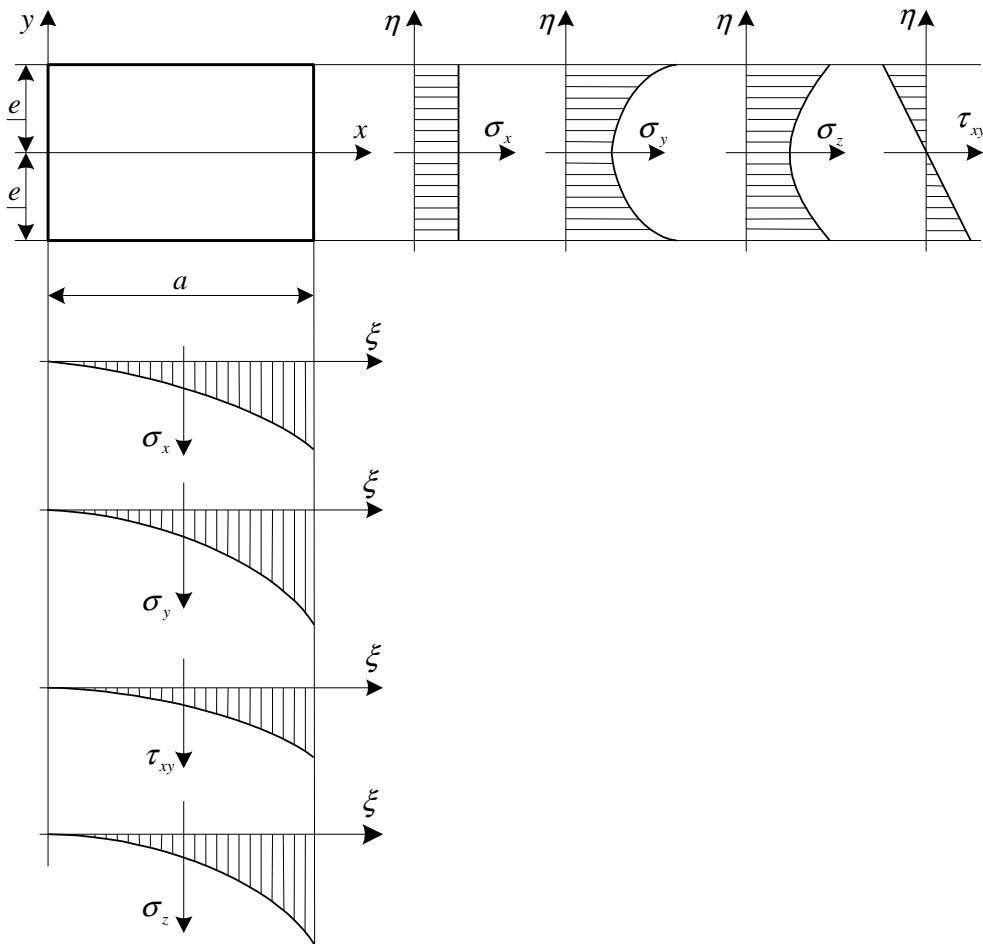
- $y = -e$ perem:

$$\sigma_y = 20Ax^3 + 6Be^2x, \quad \tau_{xy} = 6Be^2x, \quad \sigma_z = \nu[(20A + 2B)x^3 + 6Be^2x].$$

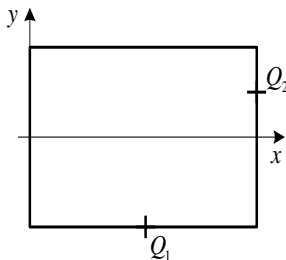
- $x = a$ perem:

$$\sigma_x = 2Ba^3, \quad \sigma_y = 20Aa^3 + 6Bay^2, \quad \tau_{xy} = -6Ba^2y, \quad \sigma_z = \nu[(20A + 2B)a^3 + 6Bay^2].$$

A feszültségeloszlás szemléltetése:



d) A felületi terhelés sűrűségének meghatározása a $Q_1 \left(\frac{a}{2}, -e, 0\right)$ és $Q_2 \left(a, \frac{e}{2}, 0\right)$ pontokban:



A feszültségi tenzor: $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$.

- A $Q_1 \left(\frac{a}{2}, -e, 0\right)$ pontban: $\vec{n} = -\vec{e}_y$.

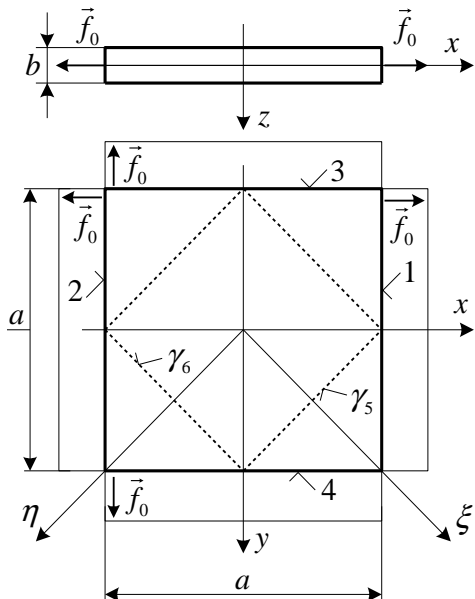
$$\vec{p}_1 = \underline{\underline{F}}|_{Q_1} \vec{n} = -\tau_{xy} \vec{e}_x - \sigma_y \vec{e}_y,$$

$$\tau_{xy} = 6Be \frac{a^2}{4} = \frac{3}{2}Bea^2, \quad \sigma_y = 20A \frac{a^3}{8} \frac{3}{2} + 6Be^2 \frac{a}{2} = \frac{5}{2}Aa^3 + 3Be^2a.$$

- A $Q_2 \left(a, \frac{e}{2}, 0\right)$ pontban: $\vec{n} = \vec{e}_x$.

$$\vec{p}_2 = \underline{\underline{F}}|_{Q_2} \vec{n} = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{xy} \vec{e}_y, \quad \sigma_x = 2Ba^3, \tau_{xy} = -6Ba^2 \frac{e}{2} = -3Ba^2e.$$

5. Általánosított síkfeszültségi állapot



Adott:

Az ábrán vázolt tárcsa méretei, terhelése és felületi feszültségi állapotára vonatkozó Airy-féle feszültségfüggvény:

$$U = \frac{f_0}{2} (x^2 + y^2).$$

A tárcsa középfelületének kerületét állandó, f_0 [N/m] sűrűségű külső, megoszló erőrendszer terheli.

Feladat:

- A felületi feszültségek értelmezésének felírása.
- A tárcsa egy tetszőleges pontjában az \underline{N} felületi feszültségi tenzor mátrixának meghatározása.

c) A peremfeltételek kielégülésének ellenőrzése.

d) Az N_ξ , $N_{\eta\xi}$, illetve N_η , $N_{\xi\eta}$ felületi feszültségek meghatározása a bejelölt γ_5 , illetve γ_6 élek mentén.

Kidolgozás:

a) A felületi feszültségek értelmezésének felírása:

$$N_x = \int_{(b)} \sigma_x dz = b \bar{\sigma}_x, \quad N_y = \int_{(b)} \sigma_y dz = b \bar{\sigma}_y, \quad N_{xy} = N_{yx} = \int_{(b)} \tau_{xy} dz = b \bar{\tau}_{xy}.$$

A felületi feszültségi tenzor:
$$[\underline{N}] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} & 0 \\ N_{yx} & N_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) A tárcsa egy tetszőleges pontjában az \underline{N} felületi feszültségi tenzor mátrixának meghatározása:

$$N_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f_0, \quad N_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f_0, \quad N_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0, \quad [\underline{N}] = \begin{bmatrix} f_0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) A peremfeltételek kielégülésének ellenőrzése:

$$\left. \begin{array}{l} x = \pm \frac{a}{2} \quad \underline{N} \cdot (\pm \vec{e}_x) = \pm f_0 \vec{e}_x \\ y = \pm \frac{a}{2} \quad \underline{N} \cdot (\pm \vec{e}_y) = \pm f_0 \vec{e}_y \end{array} \right\} \text{A peremfeltételek kielégülnek.}$$

d) Az N_ξ , $N_{\eta\xi}$, illetve N_η , $N_{\xi\eta}$ felületi feszültségek meghatározása a bejelölt γ_5 , illetve γ_6 élek mentén:

Az élek normális egységvektorai: $\vec{e}_\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y$, $\vec{e}_\eta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y$.

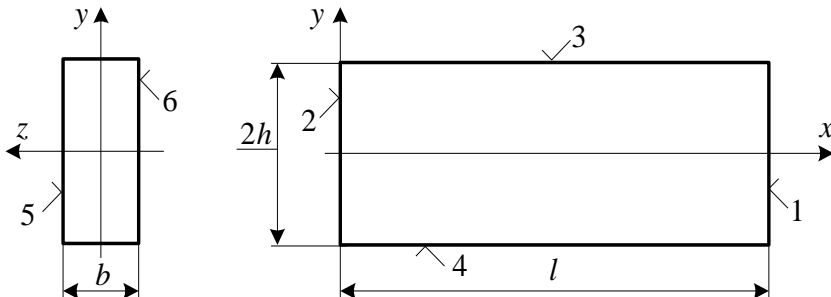
$$\vec{N}_\xi = \underline{N} \cdot \vec{e}_\xi = \begin{bmatrix} f_0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} f_0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} f_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$N_\xi = \vec{e}_\xi \cdot \vec{N}_\xi = \vec{e}_\xi \cdot \underline{N} \cdot \vec{e}_\xi = f_0, \quad N_{\eta\xi} = \vec{e}_\eta \cdot \vec{N}_\xi = \vec{e}_\eta \cdot \underline{N} \cdot \vec{e}_\xi = -\frac{f_0}{2} + \frac{f_0}{2} = 0.$$

$$\vec{N}_\eta = \underline{N} \cdot \vec{e}_\eta = \begin{bmatrix} f_0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} f_0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} f_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$N_{\eta\xi} = \vec{e}_\xi \cdot \vec{N}_\eta = -\frac{f_0}{2} + \frac{f_0}{2} = 0.$$

6. Sík alakváltozás

Adott:

A sík alakváltozási állapotban levő b vastagságú test az ábrán vázolt négyzögtartományának

Airy-féle feszültségfüggvénye:

$$U = \frac{1}{2}Ax^2 + Bxy + \frac{1}{2}Cy^2.$$

Feladat:

- A tartomány tetszőleges $P(x,y)$ pontjában az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor meghatározása.
- A tartomány hat oldalán lévő peremterhelések meghatározása. (A feladat megoldása során tekintsen el a térfogaton megoszló terheléstől.)

Kidolgozás:

- A tartomány tetszőleges $P(x,y)$ pontjában az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzor meghatározása:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = C, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = A, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -B.$$

- A tartomány hat oldalán lévő peremterhelések meghatározása:

$$\begin{array}{lll} x = 0, l & \vec{n} = \pm \vec{e}_x & \vec{\rho}_x = \pm \sigma_x \vec{e}_x \pm \tau_{xy} \vec{e}_y = \pm C \vec{e}_x \mp B \vec{e}_y, \\ x = 0, 2h & \vec{n} = \pm \vec{e}_y & \vec{\rho}_y = \pm \tau_{xy} \vec{e}_x \pm \sigma_y \vec{e}_y = \mp B \vec{e}_x \pm A \vec{e}_y, \\ z = \pm \frac{b}{2} & \vec{n} = \pm \vec{e}_z & \vec{\rho}_z = \pm \sigma_z \vec{e}_z = \pm \nu (A + C) \vec{e}_z. \end{array}$$

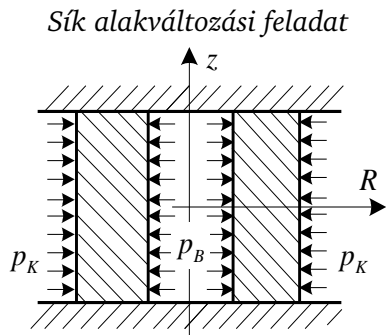
Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a síkbeli forgásszimmetrikus feladatok előfeltételezését! Rajzolja fel az SA és ÁSF modelljét! Írja fel/tanulja meg a feszültségfüggvényt, és a feszültségeket meghatározó összefüggéseket! Írja fel és jegyezze meg az alakváltozási jellemzőket és az alakváltozási tenzort SA és ÁSF esetében!

6.1.5. Forgásszimmetrikus síkbeli feladatok

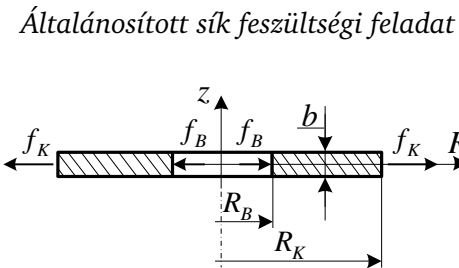
Forgásszimmetria/tengelyszimmetria: a mechanikai mennyiségek nem függenek a φ -tól.

Az elmozdulásmező: $\vec{u} = u(R) \vec{e}_R$, a feszültségfüggvény: $U = U(R)$.



Pl. vastagfalú cső

p_B - belső terhelés, p_K külső terhelés



Pl. furatos tárcsa

f_B - belső terhelés, f_K külső terhelés

Alakváltozási jellemzők tengelyszimmetrikus esetben: $\varepsilon_R = \frac{du}{dR}$, $\varepsilon_\varphi = \frac{u}{R}$, $\gamma_{R\varphi} = 0$.

Az alakváltozási tenzor tengelyszimmetrikus esetben:

Sík alakváltozási feladat

$$[\underline{A}] = [\underline{A}(R)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Általánosított sík feszültségi feladat

$$[\underline{A}] = [\underline{A}(R)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_R + \varepsilon_\varphi)$$

Tevékenység:

Írja fel/tanulja meg a Hooke-törvényt SA és ÁSF esetében! Tanulja meg az *Euler* típusú differenciálegyenlet megoldását! Írja fel és tanulja meg a feszültségfüggvényből a feszültségek származtatását!

A *Hooke*-törvény:

Sík alakváltozási feladat

$$\varepsilon_R = \frac{1}{2G}[\sigma_R - \nu(\sigma_R + \sigma_\varphi)],$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{2G}[\sigma_\varphi - \nu(\sigma_R + \sigma_\varphi)],$$

$$\varepsilon_z = 0.$$

Általánosított sík feszültségi feladat

$$\varepsilon_R = \frac{1}{E}(\sigma_R - \nu\sigma_\varphi),$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_R),$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_\varphi + \sigma_R).$$

A biharmonikus differenciálegyenlet tengelyszimmetrikus esetben:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left\{ R \frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dU(R)}{dR} \right) \right] \right\} = 0.$$

A kijelölt differenciálási műveletek elvégzése után látható, hogy ez egy homogén, közönséges negyedrendű Euler²⁵ típusú differenciálegyenlet.

Az Euler típusú differenciálegyenlet matematikából ismert alakja (I. Függelék):

$$x^4 y^{IV} + x^3 y''' + x^2 y'' + x y' = 0.$$

A megoldás keresése: $y_k(x) = x^n$.

A biharmonikus (Euler típusú) differenciálegyenlet megoldása:

$$U(R) = \frac{A}{2} R^2 + B \ln R + C + D R^2 \ln R$$

Az $R^2 \ln R$ -es tag nem ad egyértékű elmozdulásmezőt kör és körgyűrű tartományban, ezért ezt a tagot a megoldásból elhagyjuk:

$$U(R) = \frac{A}{2} R^2 + B \ln R + C.$$

Feszültségek: $\sigma_R(R) = \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} = A + \frac{B}{R^2}, \quad \sigma_z = \begin{cases} \nu(\sigma_R + \sigma_\varphi) & \text{SA} \\ 0 & \text{SF} \end{cases}$ esetén.

$$\sigma_\varphi(R) = \frac{d^2 U}{dR^2} = A - \frac{B}{R^2},$$

A megoldásban szereplő A, B állandók dinamikai peremfeltételekből határozhatóak meg.

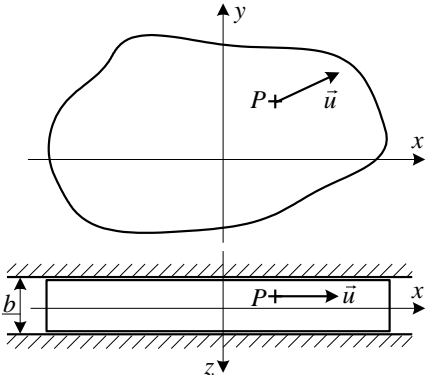
²⁵ Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikus és fizikus

Önellenőrzés

1. Egészítse ki a következő mondatot a megfelelő szavakkal!
 A 2D (két dimenziós) feladatok közös jellemzői:

- 1. _____ skálár elmozdulásmező különbözik _____ ,
- 2. minden mechanikai mennyiség _____ függ

2. Írja le egy papírra az elmozdulásmező skaláris koordinátáit SA esetén!



A megoldás megtekintéséhez kattintson [ide!](#)

3. Írja le egy papírra az alakváltozási tenzort SA esetén!
 A megoldás megtekintéséhez kattintson [ide!](#)

4. Írja le egy papírra a feszültségi tenzort SA esetén!
 A megoldás megtekintéséhez kattintson [ide!](#)

5. Írja le egy papírra az egyensúlyi egyenleteket sík-alakváltozásra DDKR-ben SA esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
6. Írja le egy papírra az egyensúlyi egyenleteket sík-alakváltozásra HKR-ben SA esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
7. Egészítse ki a következő mondatot a megfelelő szavakkal!
Tárca: Olyan test, melynek egyik mérete _____, mint a másik kettő és értelmezhető
és a terhelés vastagság mentén vett eredője a _____
esik.
8. Írja le egy papírra a feszültségekre vonatkozó 4 feltételezést ÁSF esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
9. Írja le egy papírra az átlagos feszültségeket meghatározó matematikai összefüggéseket ÁSF esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
10. Írja le egy papírra az átlagfeszültségi tenzor mátrix alakját ÁSF esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
11. Írja le egy papírra a felületi feszültségi tenzor mátrix alakját ÁSF esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
12. Szemléltesse, rajzolja le egy papírra a feszültségi és a felületi feszültségi állapotot bemutató 2 ábrát ÁSF esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
13. Írja le egy papírra az átlagos alakváltozást meghatározó összefüggéseket ÁSF esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
14. Írja le egy papírra az átlagos alakváltozási tenzor mátrix alakját ÁSF esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
15. Írja le egy papírra az egyensúlyi egyenleteket ÁSF esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

16. Írja le egy papírra a geometriai egyenleteket ÁSF esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
17. Forgásszimmetrikus feladatok (FSZ)
Egészítse ki a következő mondatot a megfelelő kifejezéssel!
A vizsgált test geometriája és terhelése is _____ szimmetrikus.
18. Forgásszimmetrikus feladatok (FSZ)
Egészítse ki a következő mondatot a megfelelő kifejezéssel!
Az R, z, φ _____ koordináta-rendszerben dolgozunk.
19. Forgásszimmetrikus feladatok (FSZ)
Egészítse ki a következő mondatot a megfelelő szavakkal!
A mechanikai mennyiségek _____ a φ hely-koordinátától.
20. Írja le egy papírra az elmozdulásmezőt megadó összefüggéseket forgásszimmetrikus feladatok esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
21. Írja le egy papírra az alakváltozási állapotot meghatározó összefüggéseket forgásszimmetrikus feladatok esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
22. Írja le egy papírra az alakváltozási tenzor mátrix alakját forgásszimmetrikus feladatok esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
23. Írja le egy papírra a feszültségi állapotot meghatározó matematikai összefüggéseket forgásszimmetrikus feladatok esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
24. Írja le egy papírra a feszültségi tenzor mátrix alakját forgásszimmetrikus feladatok esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

25. Hasonlítsa össze az SA és ÁSF feladatokat: miben hasonlóak illetve különböznek! Írja a „hasonló” illetve „különböző” előtti kisbetűt a megfelelő jellemzők mellé!

h: hasonló

k: különböző

Jelölés

Jellemzők

a két skaláris elmozdulásmező jellemzi a feladatot

az SA-nál a pontbeli, az ÁSF-nél a vastagság menti (átlagos) jellemzők szerepelnek

a három független feszültségi jellemző különbözik nullától

$$\sigma_z \neq 0$$

$$\varepsilon_z \neq 0$$

minden mennyiség csak az $x, y / R, \varphi$ helykoordináták függvénye

a geometriai és egyensúlyi egyenletek alakja

az anyagegyenletek alakja

a három független alakváltozási jellemző különbözik nullától

26. Síkfeladatok megoldása feszültségfüggvénnyel.

Rendezze sorba a megoldás gondolatmenetének lépéseit! Az első lépés kapja az 1-est!

Írja a számokat a lépések elé!

Szám

Lépések

Kompatibilitási egyenlet

Anyagegyenletek

Feszültségek származtatása U-ból

$\Delta \Delta U = 0$ - biharmonikus differenciálegyenlet.

Alakváltozások előállítása

27. Síkfeladatok megoldása feszültségfüggvénnyel.
Írja le egy papírra a biharmonikus differenciálegyenletet DDKR-ben!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
28. Egészítse ki a következő mondatot a megfelelő szavakkal!
Forgásszimmetria/tengelyszimmetria: a mechanikai mennyiségek a φ -től.
29. Írja le egy papírra az alakváltozási jellemzőket tengelyszimmetrikus esetben!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
30. Írja le egy papírra az alakváltozási tenzor mátrix alakját tengelyszimmetrikus SA feladat esetében!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
31. Írja le egy papírra az alakváltozási tenzor mátrix alakját tengelyszimmetrikus ÁSF feladat esetében!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
32. Írja le egy papírra a Hooke-törvényt SA feladatnál tengelyszimmetrikus esetben!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
33. Írja le egy papírra a Hooke-törvényt ÁSF feladatnál tengelyszimmetrikus esetben!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

19. LECKE

Vastagfalú csövek

6.2. Vastagfalú csövek

Cél: A tananyag felhasználója megismerje az egyszerű és az összetett vastagfalú csövek terhelését, el tudja készíteni a csődiagramot, el tudja végezni a vastagfalú csövek szilárdságtani méretezését és ellenőrzését.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja határozni a vastagfalú csövek terhelését;
2. fel tudja sorolni a vastagfalú csövek vizsgálatának feltételezéseit;
3. fel tudja írni a szuperpozíciós megoldást mátrix alakban;
4. fel tudja írni a csőben kialakuló feszültségi állapotot meghatározó összefüggéseket;
5. fel tudja írni a csőben fellépő tengelyirányú normál feszültségeket nyitott és zárt cső esetén;
6. meg tudja határozni a csődiagram funkcióját;
7. fel tudja írni az a és b állandókat meghatározó összefüggéseket;
8. fel tudja sorolni a csődiagram megrajzolásának lépéseit;
9. adatok alapján fel tudja rajzolni a csődiagramot;
10. el tudja végezni a vastagfalú cső szilárdságtani méretezését és ellenőrzését;
11. meg tudja határozni az összetett vastagfalú csövek jellemzőit, a túlfedés értelmezését;
12. meg tudja határozni összetett vastagfalú csöveknél a túlfedés következményeit;
13. fel tudja sorolni a peremfeltételeket;
14. fel tudja sorolni összetett vastagfalú csöveknél a csődiagram megrajzolásának lépéseit;
15. meg tudja határozni összetett vastagfalú csöveknél külső terhelés esetén a peremfeltételeket;

16. meg tudja határozni összetett vastagfalú csöveknél a szükséges túlfedést;
17. meg tudja határozni összetett vastagfalú csöveknél az optimális csőméreteket.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 70 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. egyszerű vastagfalú cső, sík alakváltozás, húzás-nyomás, szuperpozíció, feszültségi állapot, nyitott-, zárt cső, tengelyirányú normál feszültségek
2. csődiagram, feszültségkoordináta, dinamikai peremfeltétel
3. szilárdságtani méretezés, ellenőrzés, főfeszültség, *Mohr* szerint számított redukált feszültség
4. összetett vastagfalú cső, túlfedés, külső terhelés, optimális csőméret

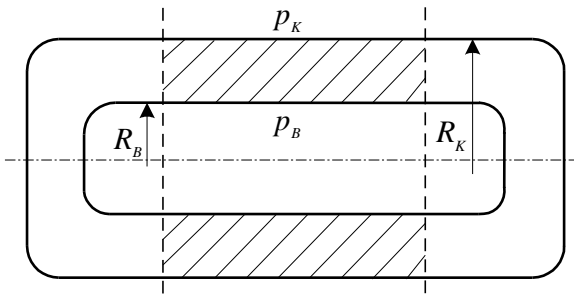
Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a vastagfalú csövek igénybevételeit és a megoldás előfeltételeit! Írja le/tanulja meg a szuperpozíciós megoldás tenzorait! Írja le/tanulja meg a csőben kialakuló feszültségi állapotot meghatározó összefüggéseket!

6.2.1. Egyszerű vastagfalú cső

Az R_B belső sugarú és R_K külső sugarú csövet p_B belső nyomás és p_K külső nyomás terheli. Feladat a cső szilárdsági állapotainak, elsősorban a feszültségi állapotnak a meghatározása.

Megoldás: a sík-alakváltozás és a húzás-nyomás szuperpozíciója.



A vastagfalú csőnek a csővégektől elég távol levő szakaszát vizsgáljuk.

Feltételezzük, hogy a vizsgált szakaszon a véglap zavaró hatása már nem érvényesül.

$$\text{Szuperpozíció: } \underline{\underline{F}}_{R\varphi z} = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma'_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_z \end{bmatrix}}_{\text{SA}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma''_z \end{bmatrix}}_{\text{húzás-nyomás}}.$$

A csőben kialakuló feszültségi állapot:

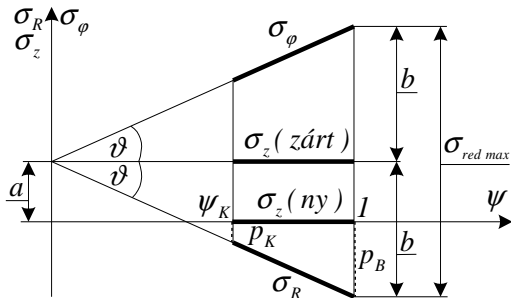
$$\begin{aligned} \sigma_R &= \sigma'_R = A + \frac{B}{R^2}, \\ \sigma_\varphi &= \sigma'_\varphi = A - \frac{B}{R^2}, \\ \sigma_z &= \sigma'_z + \sigma''_z. \end{aligned}$$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a vastagfalú csövek méretezésének és ellenőrzésének lépéseit!

Vastagfalú cső szilárdságtani méretezése, ellenőrzése

- Ha $p_B > p_K$:



A σ_R , σ_φ , σ_z főfeszültségek:

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi, \sigma_2 = \sigma_z, \sigma_3 = \sigma_R.$$

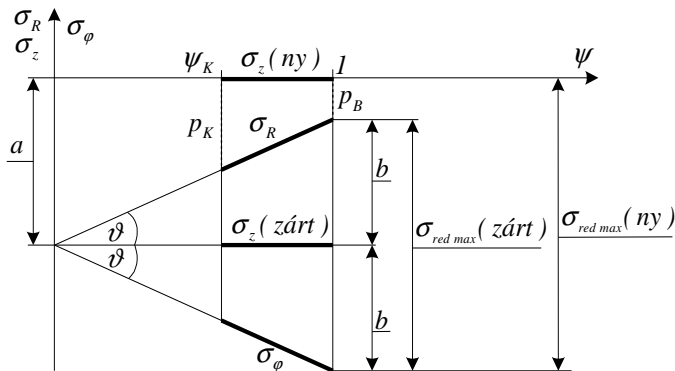
A Mohr szerint számított redukált feszültség:

$$\sigma_{red} (Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\varphi - \sigma_R.$$

A redukált feszültség maximuma: $\sigma_{red \max} (Mohr) = (\sigma_\varphi - \sigma_R)_{\max} = (\sigma_\varphi - \sigma_R)|_{\psi=1} = 2b.$

A csődiagramból: $\sigma_{red \max} (Mohr) = 2b = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K}.$

- Ha $p_K > p_B$:



A $\sigma_R, \sigma_\varphi, \sigma_z$ főfeszültségek:

Nyitott cső:

$$\sigma_1 = \sigma_z, \sigma_2 = \sigma_R, \sigma_3 = \sigma_\varphi.$$

Zárt cső:

$$\sigma_1 = \sigma_R, \sigma_2 = \sigma_z, \sigma_3 = \sigma_\varphi.$$

A Mohr szerint számított redukált feszültség:

$$\sigma_{red} (Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Nyitott cső:

$$\text{A redukált feszültség maximuma: } \sigma_{red \max} (Mohr) = |\sigma_\varphi \max| = |\sigma_\varphi|_{\psi=1} = 2b + p_B.$$

$$\text{A csődiagramból: } \sigma_{red \max} (Mohr) = 2b + p_B = 2 \frac{p_K - p_B}{1 - \psi_K} + p_B.$$

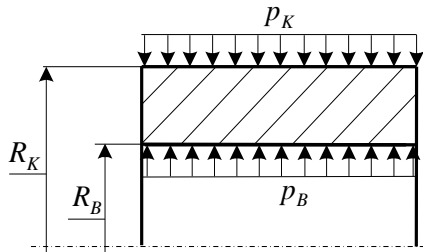
Zárt cső:

$$\text{A redukált feszültség maximuma: } \sigma_{red \max} (Mohr) = (\sigma_R - \sigma_\varphi)_{\max} = (\sigma_R - \sigma_\varphi)|_{\psi=1} = 2b.$$

$$\text{A csődiagramból: } \sigma_{red \max} (Mohr) = 2b = 2 \frac{p_K - p_B}{1 - \psi_K}.$$

Méretezés, ellenőrzés: $\sigma_{red \max} \leq \sigma_{meg}$.

Példa: egyszerű nyitott, vagy zárt vastagfalú cső méretezése



Adott: p_B , p_K , R_B , σ_{meg} .

Keresett: R_K .

Méretezés: $\sigma_{red \max} = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} \leq \sigma_{meg}, \Rightarrow 2 \frac{p_B - p_K}{\sigma_{meg}} \leq 1 - \psi_K, \Rightarrow$
 $\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} \leq 1 - 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K}, \Rightarrow R_K \geq \frac{R_B}{\sqrt{1 - 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \sigma_{meg}}}}$.

Megjegyzés: a nyomáskülönbség nem növelhető minden határon túl.

Ha $1 - 2 \frac{p_B - p_K}{\sigma_{meg}} = 0$, akkor $R_K \rightarrow \infty$

$$\Downarrow$$

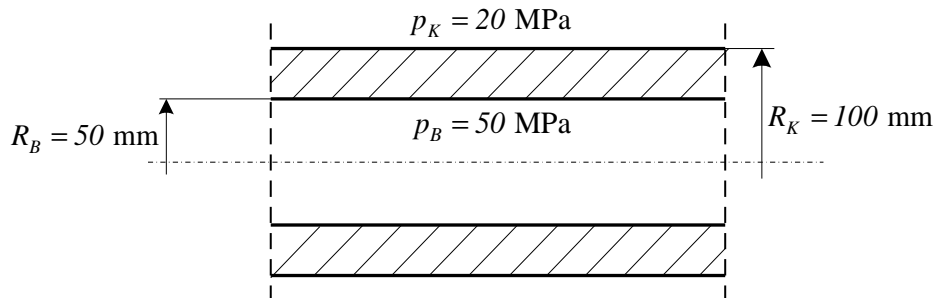
$$p_B - p_K < \frac{\sigma_{meg}}{2}.$$

Megoldás: csökkenteni kell a nyomáskülönbséget, például a p_K növelésével.

Gyakorló feladatok

Kövesse végig a levezetéseket! Oldja meg önállóan is a feladatokat!

1. feladat: Zárt vastagfalú cső



Adott: Az ábrán látható zárt vastagfalú cső geometriája és terhelése:
 $p_B = 50 \text{ MPa}$, $p_K = 20 \text{ MPa}$, $R_B = 50 \text{ mm}$, $R_K = 100 \text{ mm}$.

Feladat:

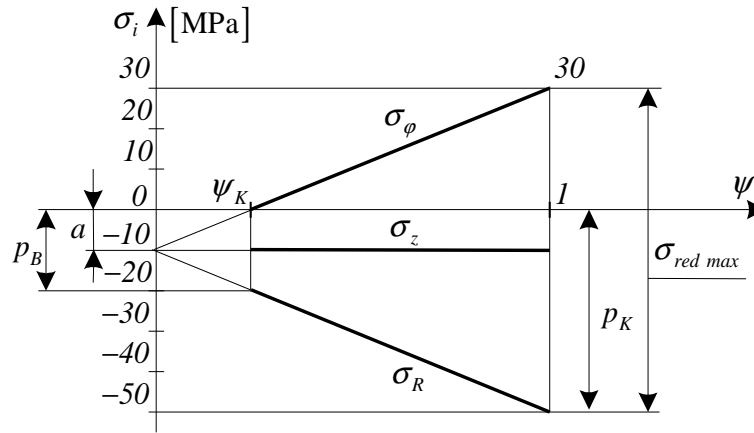
- A ψ_K értékének meghatározása.
- A csődiagram megrajzolása.
- A cső szilárdságtani ellenőrzése a *Mohr*-elmélet szerint, ha $\sigma_{meg} = 100 \text{ MPa}$.
- Az $R = R_K$ helyen lévő pontokban a feszültségi tenzor mátrixának felírása az R, φ, z koordináta-rendszerben.

Kidolgozás:

a) A ψ_K értékének meghatározása:

$$\psi = \frac{R_B^2}{R^2} \Rightarrow \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{50}{100} \right)^2 = 0,25.$$

b) A csődiagram:



c) Szilárdságtani ellenőrzés:

$$\sigma_{red \max}(Mohr) = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = 2 \frac{50 - 20}{1 - 0,25} = 2 \frac{30}{0,75} = 80 \text{ MPa.}$$

$\sigma_{red \max} \leq \sigma_{meg}$, $80 \text{ MPa} < 100 \text{ MPa}$, ezért a cső szilárdságtani szempontból megfelel!

d) A feszültségi tenzor mátrixa az R_K , vagy ψ_K helyen:

A csődiagramból: $\sigma_R(\psi_K) = -p_K = -20 \text{ MPa}$,

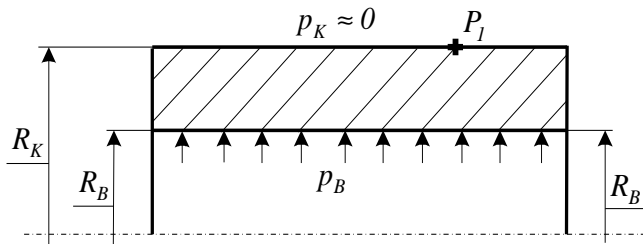
$$\sigma_\varphi(\psi_K) = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} \psi_K - p_K = 80 \cdot 0,25 - 20 = 0,$$

$$\sigma_{z \text{ zrt}} = a = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} \psi_K - p_K = -10 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_{z \text{ zrt}} = \frac{R_B^2 \pi p_B - R_K^2 \pi p_K}{(R_K^2 - R_B^2) \pi} = \frac{R_B^2 p_B - R_K^2 p_K}{R_K^2 - R_B^2} = \frac{\psi_K p_B - p_K}{1 - \psi_K} = \frac{0,25 \cdot 50 - 20}{1 - 0,25} = -10 \text{ MPa.}$$

A feszültségi tenzor mátrixa: $\underline{\underline{F}}(\psi_K) = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \Big|_{\psi_K} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$

2. feladat: Nyitott vastagfalú cső



Adott: az ábrán látható nyitott vastagfalú cső geometriája és terhelése:

$$R_B = 200 \text{ mm},$$

$$R_K = 400 \text{ mm}, p_K \approx 0,$$

$$p_B = 100 \text{ MPa}.$$

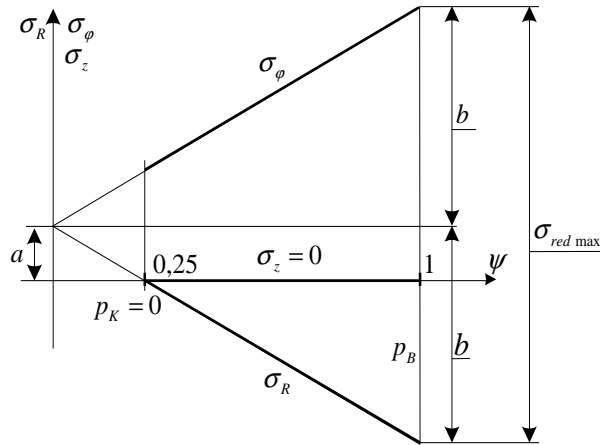
- Feladat:
- A csődiagram megrajzolása.
 - A cső szilárdságtani ellenőrzése *Mohr*-elmélet szerint, ha $\sigma_{meg} = 210 \text{ MPa}$.
 - A feszültségi tenzor mátrixának felírása a P_1 pontban.

Kidolgozás:

a) A csődiagram:

$$\psi = \frac{R_B^2}{R^2}, \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2}, \psi_K = \left(\frac{200}{400} \right)^2 = 0,25.$$

A feszültségeloszlás: $\sigma_R = a - b\psi$, $\sigma_\varphi = a + b\psi$, $\sigma_z = 0$.



Peremfeltételek:

$$\sigma_R(\psi = 1) = -p_B = a - b\psi = a - b,$$

$$\sigma_R(\psi_K = 0,25) = 0 = a - b\psi_K.$$

Az együtthatók:

$$a = \psi_K \frac{p_B}{1 - \psi_K} = 0,25 \frac{100}{1 - 0,25} = 33,3,$$

$$b = \frac{p_B}{1 - \psi_K} = \frac{100}{1 - 0,25} = 133,3$$

b) Szilárdságtani ellenőrzés Mohr-elmélet szerint:

$$\sigma_{red\ max}(Mohr) = (\sigma_R - \sigma_\varphi)_{\psi=1}, \sigma_{red\ max}(Mohr) = 2b = 2 \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} = 2 \frac{100 - 0}{1 - 0,25} = 266,6 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_{red\ max}(Mohr) = 266,6 \text{ MPa} > \sigma_{meg} = 210 \text{ MPa, ezért a cső szilárdságtanilag nem felel meg!}$$

c) A P_1 pont feszültségi állapota:

$$\psi_1 = \frac{R_B^2}{R_1^2} = \frac{R_B^2}{R_K^2} = 0,25$$

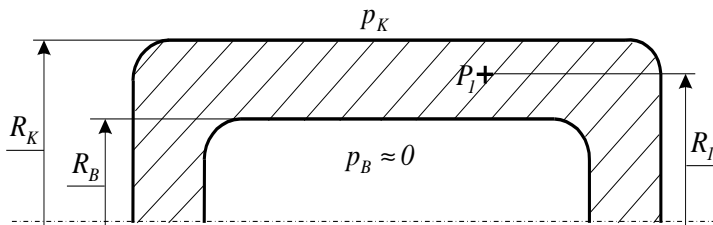
$$\sigma_R(\psi_1) = a - b\psi_1 = 33,3 - 133,15 \cdot 0,25 = 0,$$

$$\sigma_\varphi(\psi_1) = a + b\psi_1 = 33,3 + 133,15 \cdot 0,25 = 66,6 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_z(\psi_1) = 0.$$

$$\underline{\underline{F}}_{P_1} = \begin{bmatrix} \sigma_R(\psi_1) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi(\psi_1) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

3. feladat: Zárt vastagfalú cső



Adott: az ábrán látható zárt vastagfalú cső geometriája és terhelése:

$$R_B = 200 \text{ mm},$$

$$R_1 = 220 \text{ mm},$$

$$p_K = 120 \text{ MPa}, p_B \approx 0.$$

- Feladat: a) A csődiagram jelleghelyes megrajzolása.
 b) A cső R_K sugarának meghatározása, ha $\sigma_{meg} = 250 \text{ MPa}$.
 c) A feszültségi tenzor mátrixának felírása a P_1 pontban.

Kidolgozás:

- a) Csődiagram jelleghelyes megrajzolása:

A feszültségek:

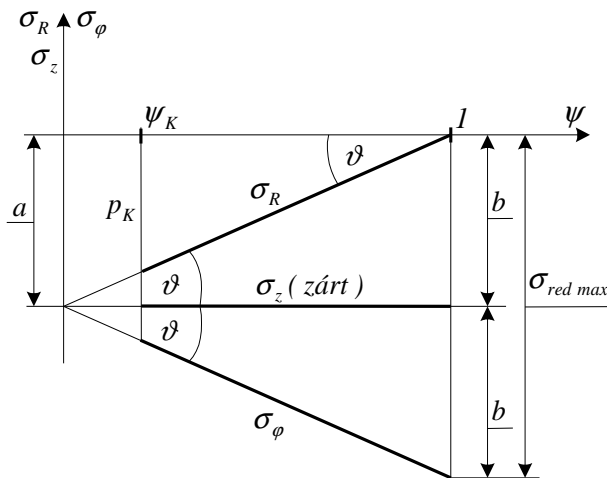
$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - b\psi \\ \sigma_\varphi &= a + b\psi \\ \sigma_z &= a \end{aligned} \right\} \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2}, \psi = \frac{R^2}{R_B^2}.$$

Peremfeltételek:

$$\sigma_R(\psi = 1) = 0,$$

$$\sigma_R(\psi_K) = -p_K.$$

Az ábrából: $tg\vartheta = \frac{p_K}{1-\psi_K} = b = a.$



b) A cső R_K sugarának meghatározása, ha $\sigma_{meg} = 250$ MPa.

$$\sigma_{red\max}(Mohr) = (\sigma_R - \sigma_\varphi)_{\psi=1} = 2b = \frac{2p_K}{1 - \psi_K},$$

$$\sigma_{red\max} = \frac{2p_K}{1 - \psi_K} \leq \sigma_{meg}, \Rightarrow \frac{2p_K}{\sigma_{meg}} \leq 1 - \frac{R_B^2}{R_K^2}, \quad R_K \geq \frac{R_B}{\sqrt{1 - \frac{2p_K}{\sigma_{meg}}}} = \frac{200}{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot 240}{250}}} = 1000 \text{ mm}.$$

c) A P_1 pont feszültségi állapota: $\psi_1 = \frac{R_B^2}{R_1^2} = \left(\frac{200}{220}\right)^2 = 0,826$,

$$\sigma_R(\psi_1) = a(1 - \psi_1) = -\frac{p_K}{1 - \psi_K}(1 - \psi_1) = -\frac{120}{1 - 0,04}(1 - 0,826) = -21,75 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi(\psi_1) = a(1 + \psi_1) = -\frac{p_K}{1 - \psi_K}(1 + \psi_1) = -\frac{120}{1 - 0,04}(1 + 0,826) = -228,25 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z = a = -\frac{p_K}{1 - \psi_K} = -\frac{120}{1 - 0,04} = -125 \text{ MPa}.$$

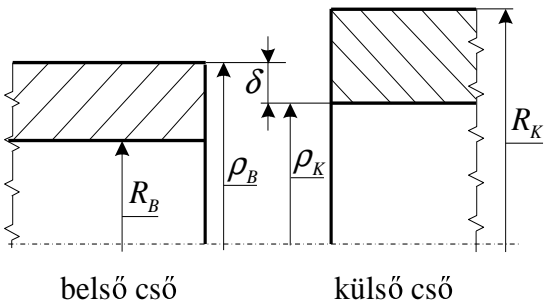
$$\underline{\underline{F}}_{P_1} = \begin{bmatrix} \sigma_R(\psi_1) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi(\psi_1) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21,75 & 0 & 0 \\ 0 & -228,25 & 0 \\ 0 & 0 & -125 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

6.2.2. Összetett vastagfalú cső

Tevékenység:

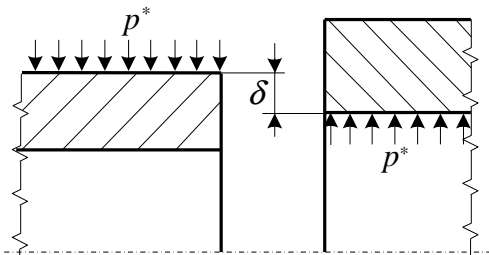
Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg az összetett vastagfalú csövek jellemzőit, a megvalósítás módját!

A két cső mindig túlfedéssel illesztett. Ezzel a belső cső külső felületén nyomásnövekedést hozunk létre.



Túlfedés: $\delta = \rho_B - \rho_K$.

Megvalósítás: a külső csövet felmelegítve ráhúzzuk a belső csőre, majd lehűtjük.



p^* - a lehűtés után fellépő nyomás,

$p^* = p^*(\delta)$.

A p^* nyomás nagysága a δ túlfedéstől függ.

Feltételezés: $\delta \ll \rho_B, \rho_K \Rightarrow \rho_B \approx \rho_K$.

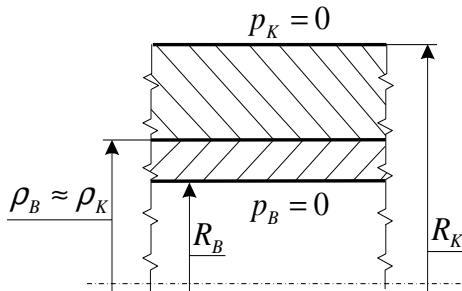
Új változó bevezetése: $\psi = \frac{R_B^2}{R^2}$, $\bar{\psi}_K = \frac{R_B^2}{\rho_B^2} = \frac{R_B^2}{\rho_K^2}$, $\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2}$, $\psi_K < \bar{\psi}_K < 1$.

6.3. A túlfedés következtében kialakuló állapot

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a túlfedés miatt kialakuló állapot jellemzőit!

Írja le és tanulja meg a csődiagram megrajzolásának gondolatmenetét!



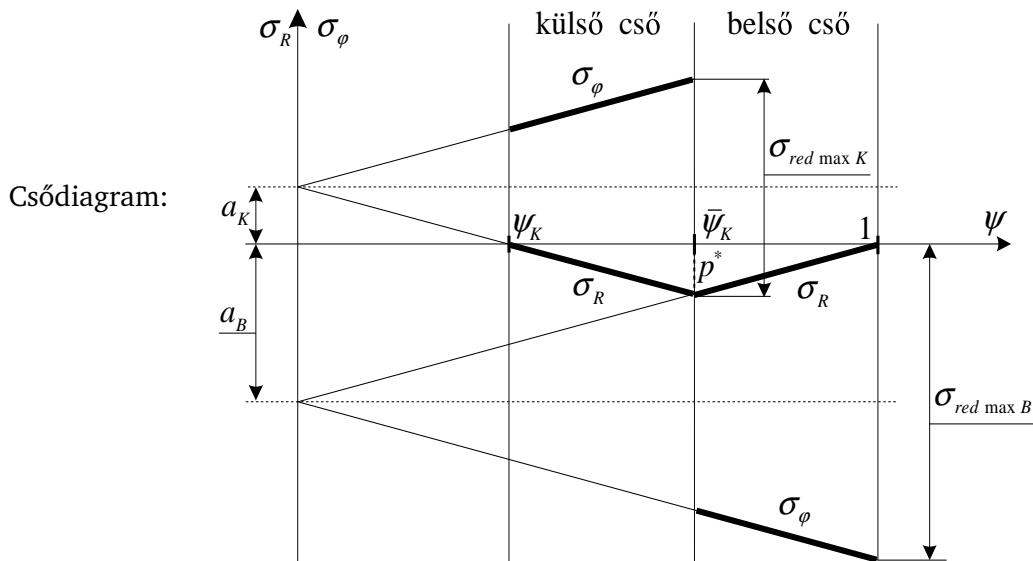
A csővön nincs külső/belső nyomási terhelés.
 p^* - a túlfedés következtében fellépő nyomás.

„Peremfeltételek” (ismert értékek):

$$\sigma_R(R_B) = \sigma_R(\psi = 1) = 0,$$

$$\sigma_R(\rho_B \approx \rho_K) = \sigma_R(\bar{\psi}_K) = -p^*,$$

$$\sigma_R(R_K) = \sigma_R(\psi_K) = 0.$$



A csődiagram megrajzolásának gondolatmenete:

- A peremfeltételek figyelembevételével felmérjük a $\sigma_R(\psi)$ függvény ismert értékeit:

A $\psi = \psi_K$ helyen $p_K = 0$ -át, a $\psi = \bar{\psi}_K$ helyen $-p^*$ -ot és a $\psi = 1$ helyen $p_B = 0$ -át.

- Az így kapott pontokat összekötve kapjuk meg külön-külön a belső, illetve a külső csőre $a\sigma_R(\psi)$ egyeneseket.

- Ezek az egyenesek a függőleges tengelyt az a_B , illetve az a_K helyen metszik.

- A $\sigma_\varphi(\psi)$ függvényeket (egyeneseket) úgy kapjuk, hogy $a\sigma_R(\psi)$ egyeneseket tükrözzük a $\sigma = a_B$, illetve a $\sigma = a_K$ vízszintes egyenesekre.

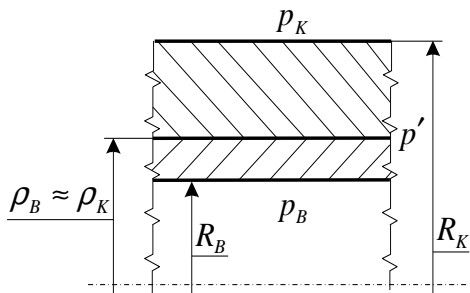
A maximális redukált feszültségek:

$$\text{Hasonló háromszögekből: } \frac{\sigma_{red \max B}}{2} = \frac{p^*}{1 - \psi_K} \cdot 1, \quad \frac{\sigma_{red \max K}}{2} = \frac{p^*}{\psi_K - \bar{\psi}_K} \bar{\psi}_K.$$

6.4. Összetett vastagfalú cső külső és belső terheléssel

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a feltételezést és annak következményeit!



Feltételezés: $p_B > p_K \neq 0$.

A szuperpozíció elvét alkalmazzuk.

p^* - a túlfedésből származó nyomás,

p' - a túlfedés helyén fellépő tényleges nyomás.

$$p' = p^* + \left[p_K + \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K} (\bar{\psi}_K - \psi_K) \right]$$

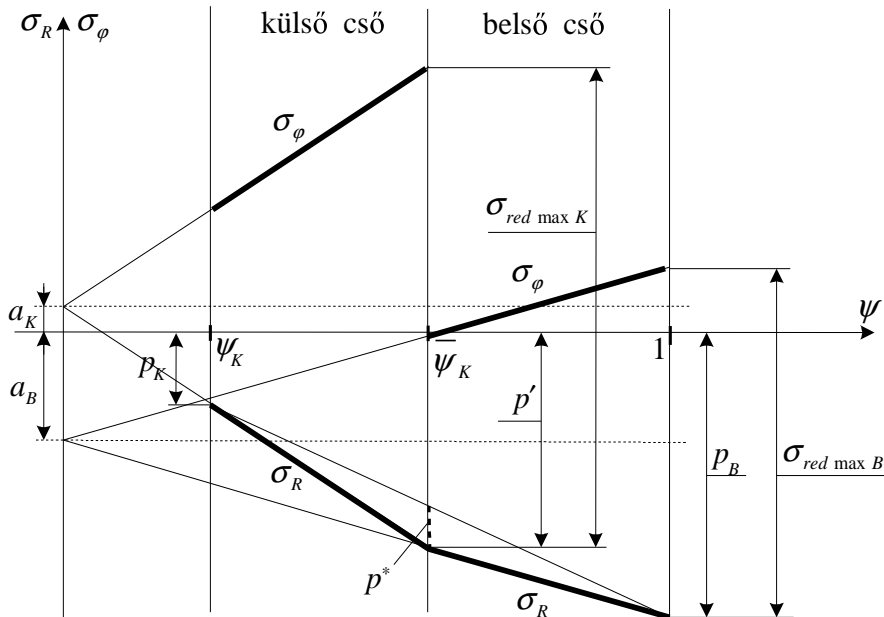
„Peremfeltételek” (ismert értékek):

$$\sigma_R(R_B) = \sigma_R(\psi = 1) = -p_B, \sigma_R(\rho_B \approx \rho_K) = \sigma_R(\bar{\psi}_K) = -p', \sigma_R(R_K) = \sigma_R(\psi_K) = -p_K.$$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Tanulmányozza a csődiagramot! Jegyezze meg a méretezés jellemzőit!

Csődiagram:



A diagram megrajzolása az előző pontban részletesen leírt gondolatmenettel történik.

A maximális redukált feszültségek:

$$\text{Hasonló háromszögekből: } \frac{\sigma_{red \max B}}{2} = \frac{p_B - p'}{1 - \psi_K}, \quad \frac{\sigma_{red \max K}}{2} = \frac{p' - p_K}{\psi_K - \psi_K} \bar{\psi}_K.$$

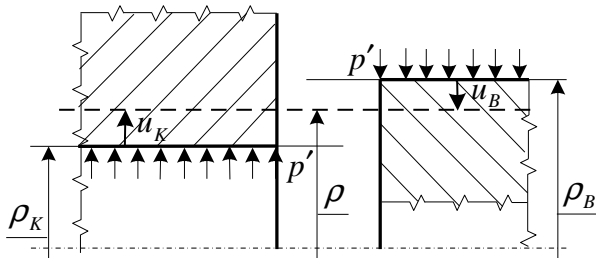
Méretezés:

Ha például adottak az $R_B, \rho_B \approx \rho_K, p_B, p_K$ paraméterek, akkor a fenti összefüggésekből meghatározhatóak ap' és a ψ_K értékek (azaz R_K).

6.5. A túlfedés meghatározása

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a zsugorkötés hatásait! Írja fel és jegyezze meg a túlfedést a Hooke-törvény alapján meghatározó összefüggést!



A sugár irányú elmozdulás: $\vec{u} = u \vec{e}_R$.

Az u előjeles skalár koordináta.

Túlfedés: $\delta = \rho_B - \rho_K$.

A zsugorkötés következtében a belső cső külső sugara csökken, a külső cső belső sugara pedig növekedni fog és így áll elő a ρ sugár.

$$\rho = \rho_K + u_K = \rho_B + u_B.$$

A túlfedés: $\delta = \rho_B - \rho_K = u_K - u_B = \rho_K \varepsilon_{\varphi K} - \rho_B \varepsilon_{\varphi B}$

Felhasználva a $\rho_K \approx \rho_B$ közelítést, a túlfedés:

$$\delta = \rho_B (\varepsilon_{\varphi K} - \varepsilon_{\varphi B}) \Big|_{R=\rho_B=\rho_K}.$$

$$\text{Hooke-törvény: } \varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{\varphi} - \nu \underbrace{(\sigma_R + \sigma_{\varphi})}_{=-p'} \right].$$

Ezt behelyettesítve a túlfedés összefüggésébe: $\delta = \rho_B \frac{1}{2G} [\sigma_{\varphi K} - \sigma_{\varphi B} - \nu (\sigma_{\varphi K} - \sigma_{\varphi B})] \Big|_{R=\rho_B}$.

6.6. Optimális csőméretek

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg az összetett vastagfalú cső méretezésére szolgáló összefüggéseket! Jegyezze meg az optimális közbülső sugár meghatározásának lépéseit azonos és különböző anyagok esetén!

Adott: $R_B, R_K, p_K, \sigma_{meg B}, \sigma_{meg K}$.

Kérdés: hogyan kell $\rho_K \approx \rho_B$ közbülső sugarat (vagyis $\bar{\psi}_K$ -t) megválasztani úgy, hogy p_B maximális legyen.

Az összetett vastagfalú cső méretezésére szolgáló összefüggések:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_B - p'}{1 - \psi_K} = \frac{\sigma_{red \max B}}{2} \leq \frac{\sigma_{meg B}}{2} \\ \frac{p' - p_K}{\psi_K - \psi_K} \bar{\psi}_K = \frac{\sigma_{red \max K}}{2} \leq \frac{\sigma_{meg K}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} p_B &= \frac{\sigma_{meg B}}{2} (1 - \bar{\psi}_K) + p' \\ p' &= \frac{\bar{\psi}_K - \psi_K}{2 \bar{\psi}_K} \sigma_{meg K} + p_K \end{aligned}$$

A második egyenletet az elsőbe helyettesítve:

$$p_B = \frac{\sigma_{meg B}}{2} (1 - \bar{\psi}_K) + \frac{\bar{\psi}_K - \psi_K}{2 \bar{\psi}_K} \sigma_{meg K} + p_K = p_B(\bar{\psi}_K).$$

Keressük a p_B szélsőértékét (maximumát):

$$\frac{dp_B}{d\bar{\psi}_K} = 0 = -\frac{\sigma_{meg B}}{2} + \frac{\sigma_{meg K}}{2} \frac{\psi_K}{\bar{\psi}_K^2},$$

Ebből a szélsőérték helye: $\bar{\psi}_K = \sqrt{\frac{\sigma_{meg K}}{\sigma_{meg B}} \psi_K}$.

$\frac{d^2 p_B}{d\bar{\psi}_K^2} = -\sigma_{meg K} \frac{\psi_K}{\bar{\psi}_K^3} < 0$. Tehát a szélsőérték maximum.

Különböző anyag esetén az optimális közbülső sugár:

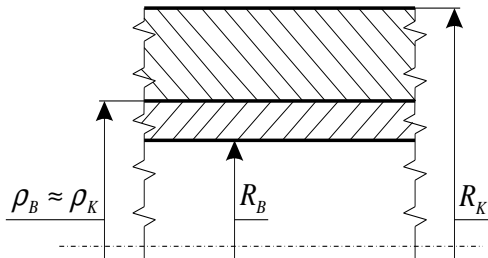
$$\bar{\psi}_K^2 = \frac{R_B^4}{\rho_B^4} = \frac{\sigma_{meg K}}{\sigma_{meg B}} \frac{R_B^2}{R_K^2} \Rightarrow \rho_B \approx \rho_K = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{meg K}}{\sigma_{meg B}} \right)^{\frac{1}{2}} R_B R_K}.$$

Azonos anyag esetén az optimális közbülső sugár: $\rho_K \approx \rho_B = \sqrt{R_B R_K}$.

Gyakorló feladatok

Kövesse végig a levezetéseket! Oldja meg önállóan is a feladatokat!

1. feladat: Összetett(kettősfalú) vastagfalú cső



Adott:

Az összetett (kettősfalú) cső terhelése, belső sugara valamint a $\bar{\psi}_K$ értéke, ami a $\rho = \rho_B = \rho_K$ helyet adja meg.

$$p_B = 80 \text{ MPa}, p_K = 0 \text{ MPa}, R_B = 100 \text{ mm},$$

$$\bar{\psi}_K = \frac{R_B^2}{\rho^2} = 0,5.$$

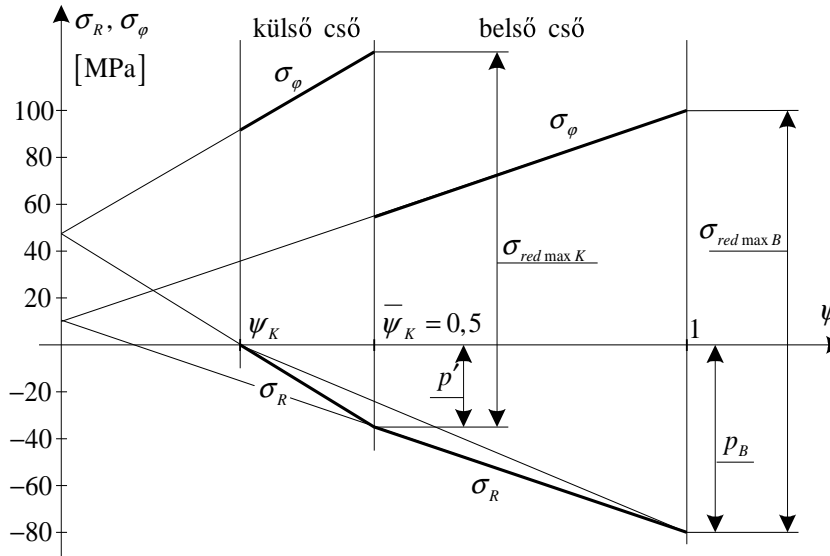
Feladat:

- A csődiagram megrajzolása, ha előírjuk, hogy a legnagyobb Mohrszerinti redukált feszültség mindkét csőben a $\sigma_{meg} = 200 \text{ MPa}$ megengedett feszültséggel egyenlő.
- Az összetett vastagfalú cső külső sugarának meghatározása.

Kidolgozás:

- A csődiagram megrajzolása, ha előírjuk, hogy a legnagyobb Mohr szerinti redukált feszültség mindkét csőben a $\sigma_{meg} = 200 \text{ MPa}$ megengedett feszültséggel egyenlő:

Csődiagram:



A csődiagramból:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{red \max B} &= \frac{2(p_B - p')}{1 - \bar{\psi}_K} = \sigma_{meg} \\ \sigma_{red \max K} &= \frac{2\bar{\psi}_K p'}{\bar{\psi}_K - \psi_K} = \sigma_{meg} \end{aligned} \right\} \text{Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer, ahol az ismeretlenek: } p' \text{ és } \psi_K.$$

Az első egyenletben csak a p' ismeretlen szerepel, ami így közvetlenül meghatározható:

$$p' = -\frac{\sigma_{meg}}{2} (1 - \bar{\psi}_K) + p_B = -\frac{200}{2} (1 - 0,5) + 80 = 30 \text{ MPa.}$$

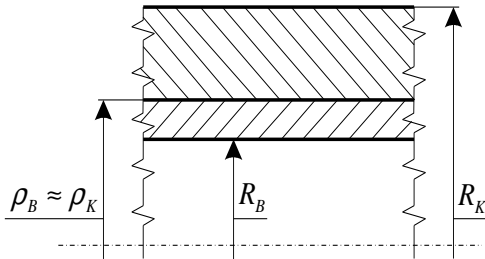
Ennek ismeretében a második egyenletből ψ_K meghatározható:

$$\psi_K = -2\bar{\psi}_K \frac{p'}{\sigma_{meg}} + \bar{\psi}_K = -\frac{3}{20} + \frac{10}{20} = 0,35.$$

b) Az összetett vastagfalú cső külső sugarának meghatározása:

$$\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} \Rightarrow R_K = \frac{R_B}{\sqrt{\psi_K}} = \frac{100}{\sqrt{0,35}} = 169 \text{ mm.}$$

2. feladat: Összetett(kettősfalú) vastagfalú cső



Adott:

A túlfedéssel illesztett összetett vastagfalú cső terhelése, méretei, valamint a $\bar{\psi}_K$ értéke.

$p_B = 80 \text{ MPa}$, $p_K = 0 \text{ MPa}$, $R_B = 70 \text{ mm}$,
 $R_K = 140 \text{ mm}$, $\rho = \rho_B = \rho_K$, $\bar{\psi}_K = 0,49$.

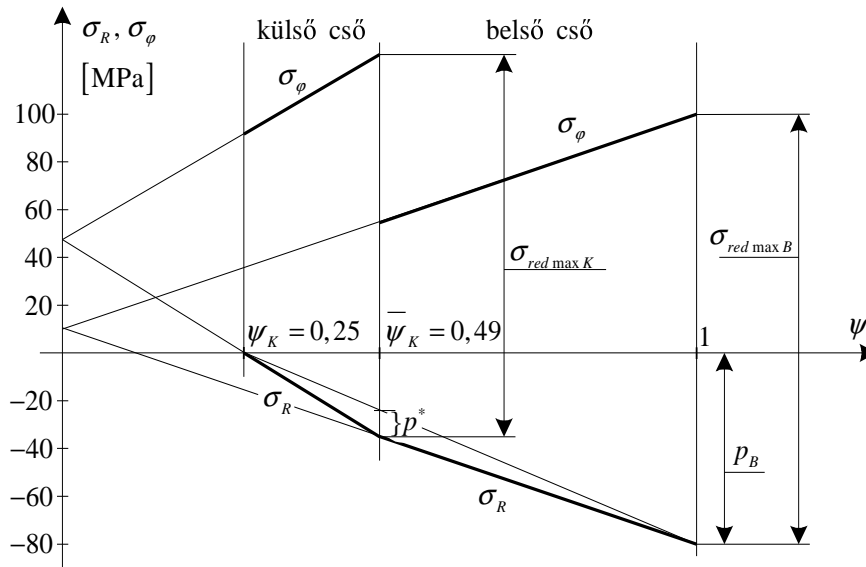
- Feladat:
- A ψ_K értékének és a belső cső $\rho = \rho_B$ külső sugarának kiszámítása.
 - A csődiagram megrajzolása.
 - A két cső között a túlfedésből származó p^* nyomás értékének meghatározása, ha $\sigma_{red \max K} = \sigma_{red \max B}$.
 - A két cső között a túlfedésből származó p^* nyomás lehetséges értékeinek meghatározása, ha $\sigma_{meg K} = \sigma_{meg B} = 200 \text{ MPa}$.

Kidolgozás:

a) A ψ_K értékének és a belső cső $\rho = \rho_B$ külső sugarának kiszámítása:

$$\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{70}{140} \right)^2 = 0,5^2 = 0,25, \bar{\psi}_K = \frac{R_B^2}{\rho_B^2} \approx \frac{R_B^2}{\rho_K^2} \rightarrow \rho_B = \frac{R_B}{\sqrt{\bar{\psi}_K}} = \frac{70}{\sqrt{0,49}} = \frac{70}{0,7} = 100 \text{ mm.}$$

b) A csődiagram megrajzolása:



c) A két cső között a túlfedésből származó p^* nyomás értékének meghatározása, ha $\sigma_{red\ max\ K} = \sigma_{red\ max\ B}$:
A csődiagramról a maximális redukált feszültségek leolvashatók:

$$\sigma_{red\ max\ K} = \frac{2\bar{\psi}_K}{\bar{\psi}_K - \psi_K} \left(p_B \frac{\bar{\psi}_K - \psi_K}{1 - \psi_K} + p^* \right) = \frac{2 \cdot 0,49}{0,24} \left(80 \frac{0,24}{0,75} + p^* \right) = 104,5 + 4,083p^*.$$

$$\sigma_{red\ max\ B} = \frac{2}{1 - \bar{\psi}_K} \left(p_B - p^* - p_B \frac{\bar{\psi}_K - \psi_K}{1 - \psi_K} \right) = \frac{2}{0,51} \left(80 - p^* - 80 \frac{0,24}{0,75} \right) = 288,1 - 3,92p^*.$$

A feltétel szerint $\sigma_{red\ max\ K} = \sigma_{red\ max\ B}$, tehát: $104,5 + 4,083p^* = 288,1 - 3,92p^*$.

Az egyenlet megoldása: $p^* = 22,94$ MPa.

Ekkor $\sigma_{red\ max\ K} = \sigma_{red\ max\ B} = 198,2$ MPa.

d) A két cső között a túlfedésből származó p^* nyomás lehetséges értékeinek meghatározása, ha $\sigma_{meg K} = \sigma_{meg B} = 200$ MPa:

A csődiagramon megfigyelhető, hogy (változatlan nyomás esetén) p^* növelésekor $\sigma_{red max K}$ növekedni fog, míg $\sigma_{red max B}$ csökken. p^* felső korlátját tehát a külső cső megengedett feszültsége határozza meg:

$$\sigma_{red max K} = \frac{2\bar{\psi}_K}{\bar{\psi}_K - \psi_K} \left(p_B \frac{\bar{\psi}_K - \psi_K}{1 - \psi_K} + p^* \right) = \sigma_{meg},$$

$$\frac{2 \cdot 0,49}{0,24} \left(80 \frac{0,24}{0,75} + p^* \right) = 104,5 + 4,083p^* = 200 \Rightarrow p^*_{max} = 23,39 \text{ MPa.}$$

A p^* csökkentésekor $\sigma_{red max K}$ csökkenni fog, míg $\sigma_{red max B}$ növekszik. p^* alsó korlátját tehát a belső cső megengedett feszültsége határozza meg:

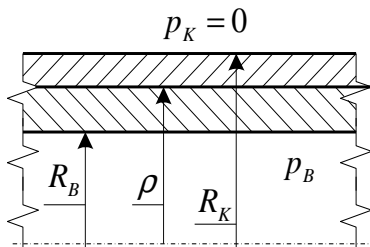
$$\sigma_{red max B} = \frac{2}{1 - \bar{\psi}_K} \left(p_B - p^* - p_B \frac{\bar{\psi}_K - \psi_K}{1 - \psi_K} \right) = \sigma_{meg},$$

$$\frac{2}{0,51} \left(80 - p^* - 80 \frac{0,24}{0,75} \right) = 288,1 - 3,92p^* = 200 \Rightarrow p^*_{min} = 22,47 \text{ MPa.}$$

A túlfedésből származó p^* nyomás lehetséges értékei:

$$22,47 \text{ MPa} \leq p^* \leq 23,39 \text{ MPa.}$$

3. feladat: Összetett (kettősfalú) vastagfalú cső



Adott: az összetett kettősfalú cső anyaga, terhelése,
 R_B belső sugara valamint $\psi_K = \frac{R_B^2}{\rho^2} = 0,5$.
 $\sigma_{meg} = 200$ MPa, $R_B = 100$ mm, $\rho = \rho_B \cong \rho_K$,
 $p_B = 80$ MPa, $p_K = 0$.

Feladat:

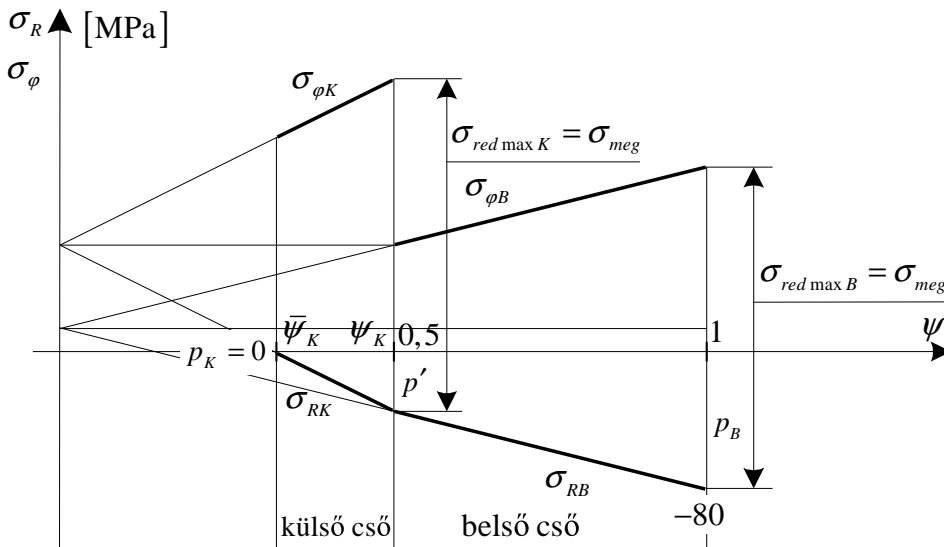
- A feszültségi csődiagram megrajzolása, ha a *Mohr* szerinti legnagyobb feszültség mindkét csőben éppen a megengedett feszültséggel legyen egyenlő.
- A cső külső sugarának meghatározása.

Kidolgozás:

- A feszültségi diagram megrajzolása:

Jelleghelyesen megrajzoljuk a csődiagramot. Ebből:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{red \max B} &= \frac{p_B - p'}{1 - \psi_K} 2 = \sigma_{meg} \\ \sigma_{red \max K} &= \frac{p'}{\psi_K - \bar{\psi}_K} \psi_K 2 = \sigma_{meg} \end{aligned} \right\} \text{Itt ismeretlen: } p' \text{ és } \bar{\psi}_K.$$



Az ismeretlenek az egyenletrendszerből meghatározhatók:

$$p' = -\frac{\sigma_{meg}}{2} (1 - \psi_K) + p_B = -100 (1 - 0,5) + 80 = 30 \text{ MPa.}$$

$$\bar{\psi}_K = -2\psi_K \frac{p'}{\sigma_{meg}} + \psi_K = -\frac{3}{20} + \frac{10}{20} = \frac{7}{20} = 0,35.$$

b) A cső külső sugarának meghatározása:

$$\bar{\psi}_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} \Rightarrow R_K = \frac{R_B}{\sqrt{\bar{\psi}_K}} = \frac{100}{\sqrt{0,35}} \cong 169 \text{ mm.}$$

Önellenőrzés

1. Egészítse ki a következő két mondatot a megfelelő szavakkal!

A vastagfalú csőnek a csővégektől elég

levő

vizsgáljuk. Feltételezzük, hogy a vizsgált szakaszon a

zavaró hatása már

2. Írja le egy papírra mátrix alakban a vastagfalú cső szuperpozícion alapuló megoldását!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

3. Írja le egy papírra a csőben kialakuló feszültségi állapotot meghatározó összefüggéseket!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

4. Írja le egy papírra a vastagfalú csőben ténylegesen fellépő tengely irányú normál feszültségeket meghatározó összefüggéseket nyitott és zárt csövek esetén!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

5. Rendezze megfelelő sorrendbe a csődiagram megrajzolásának a lépéseit! Az első lépés kapja az 1-est! Írja a számokat a megfelelő lépések elé!

Sorrend

Lépések

A $\sigma_\varphi(\psi)$ egyenest a $\sigma_R(\psi)$ egyenesnek a $\sigma = a$ vízszintes egyenesre történő tükrözésével kapjuk.

A két pont összekötésével kapjuk a $\sigma_R(\psi)$ egyenest.

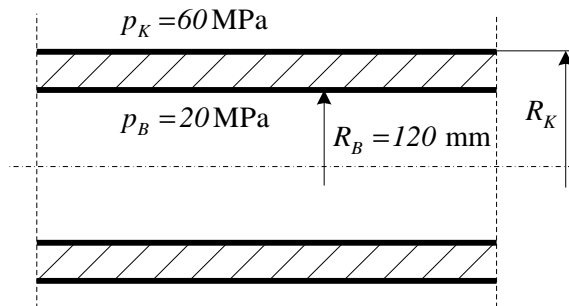
A $\sigma_R(\psi)$ egyenes iránytangense $-b = -\operatorname{tg}\vartheta$, az egyenes a függőleges tengelyt az a helyen metszi.

A $\sigma_z =$ állandó egyenesek értékei a megfelelő összefüggésekből számíthatók.

A dinamikai peremfeltételekből a $\psi = 1$ és a $\psi = \psi_K$ helyen ismert a σ_R értéke, ezért a $\psi = 1$ helyre $-p_B$ -t, a $\psi = \psi_K$ helyre pedig $-p_K$ -t mérünk fel.

6. Vastagfalú cső

Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



Adott: az ábrán látható vastagfalú cső anyaga, terhelése és belső sugara:

$p_B = 20$ MPa, $p_K = 60$ MPa,

$R_B = 120$ mm, $\sigma_{meg} = 125$ MPa.

Feladat:

- A) A csődiagram jelleghelyes megrajzolása.
 B) A cső szilárdságtani méretezése (az R_K sugár meghatározása), ha a cső zárt.
 C) A cső szilárdságtani méretezése (az R_K sugár meghatározása), ha a cső nyitott.

A) A csődiagram jelleghelyes megrajzolása.

I./ Rajzolja le egy papírlapra a csődiagramot!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

B) A cső szilárdságtani méretezése (az R_K sugár meghatározása), ha a cső zárt.

Egész szám a megoldás minden olyan feladatnál, ahol be kell írni az eredményt!

I./ Írja be a R_K erő értékét zárt cső esetén:

A $R_K =$ mm

C) A cső szilárdságtani méretezése (az R_K sugár meghatározása), ha a cső nyitott.

I./ Válassza ki a helyes megoldást!

Az R_K sugár nyitott cső esetén:

$$R_K \cong 156 \text{ mm}$$

$$R_K \cong 173 \text{ mm}$$

$$R_K \cong 199 \text{ mm}$$

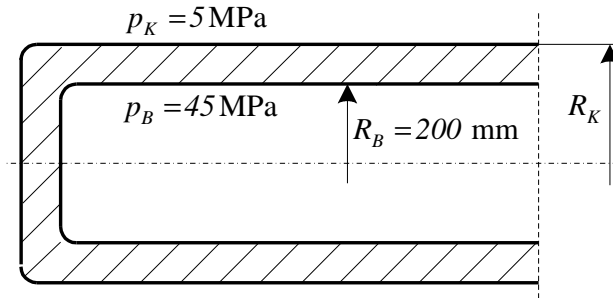
$$R_K \cong 223 \text{ mm}$$

$$R_K \cong 246 \text{ mm}$$

$$R_K \cong 278 \text{ mm}$$

7. Zárt vastagfalú cső

Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



Adott: az ábrán látható zárt vastagfalú cső geometriája és terhelése:

$p_B = 45 \text{ MPa}$, $p_K = 5 \text{ MPa}$,
 $R_B = 200 \text{ mm}$, $\psi_K = 0,6$.

- Feladat:
- A) A csődiagram megrajzolása.
 - B) Az R_K külső sugár meghatározása.
 - C) A *Mohr* szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása.
 - D) A zárt csőben fellépő σ_z feszültség kiszámítása.

A) A csődiagram jelleghelyes megrajzolása.

I./ Rajzolja le egy papírlapra a csődiagramot!

A megoldás megtekintéséhez kattintson [ide!](#)

B) Az R_K külső sugár meghatározása.

I./ Válassza ki a helyes megoldást!

Az R_K külső sugár:

$$R_K = 310,632 \text{ mm}$$

$$R_K = 297,321 \text{ mm}$$

$$R_K = 276,123 \text{ mm}$$

$$R_K = 258,198 \text{ mm}$$

$$R_K = 221,543 \text{ mm}$$

C) A *Mohr* szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása.

Egész szám a megoldás minden olyan feladatnál, ahol be kell írni az eredményt!

I./ Írja be a *Mohr* szerinti legnagyobb redukált feszültséget!

A $\sigma_{red \max}(Mohr) =$ MPa

D) A zárt csőben fellépő σ_z feszültség kiszámítása.

Egész szám a megoldás minden olyan feladatnál, ahol be kell írni az eredményt!

I./ Írja be a σ_z feszültséget!

A $\sigma_z =$ MPa

8. Egészítse ki a következő két mondatot a megfelelő szavakkal!

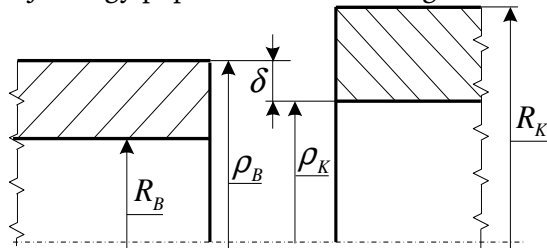
Összetett vastagfalú csőveknél a két cső mindig

külső felületén

hozunk létre.

illetített. Ezzel a belső cső

9. Írja le egy papírra a túlfedést meghatározó összefüggést!



belső cső

külső cső

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

10. Rendezze megfelelő sorrendbe összetett vastagfalú csövek esetében a csődiagram megrajzolásának a lépéseit, ha nincs külső és belső terhelés! Az első lépés kapja az 1-est! Írja a számokat a megfelelő lépések elé!

Sorrend

Lépések

Ezek az egyenesek a függőleges tengelyt az a_B , illetve az a_K helyen metszik.

Az így kapott pontokat összekötve kapjuk meg külön-külön a belső, illetve a külső csőre a $\sigma_R(\psi)$ egyeneseket.

A függvényeket (egyeneseket) úgy kapjuk, hogy a egyeneseket tükrözzük a , illetve a vízszintes egyenesekre.

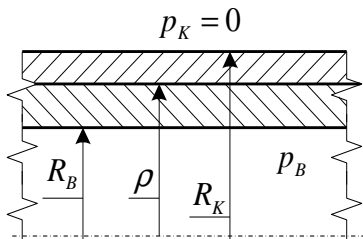
A peremfeltételek figyelembevételével felmérjük a $\sigma_R(\psi)$ függvény ismert értékeit:

A $\psi = \psi_K$ helyen $p_K = 0$ -át, a $\psi = \bar{\psi}_K$ helyen $-p^*$ -otés a $\psi = 1$ helyen $p_B = 0$ -át.

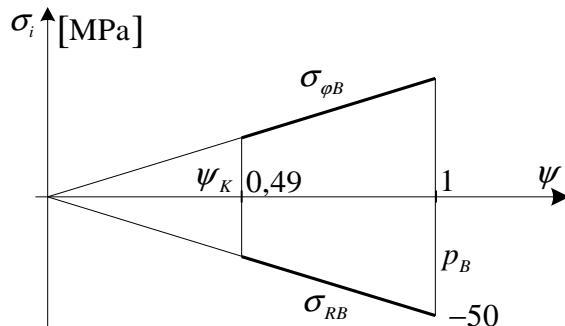
11. Írja le egy papírra a maximális redukált feszültségeket ($\sigma_{red\ max\ B}$ és a $\sigma_{red\ max\ K}$) meghatározó összefüggéseket külső és belső nyomással terhelt összetett vastagfalú csöveknél!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
12. Írja le egy papírra összetett vastagfalú csöveknél Hooke-törvény alapján a túlfedést meghatározó összefüggést!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
13. Írja le egy papírra összetett vastagfalú csöveknél az optimális közbülső sugarat meghatározó összefüggést – *különböző anyagok esetén!*
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
14. Írja le egy papírra összetett vastagfalú csöveknél az optimális közbülső sugarat meghatározó összefüggést – *azonosanyag esetén!*
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

15. Összetett (kettősfalú) vastagfalú cső

Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



A belső cső diagramja:



Adott: a túlfedéssel illesztett összetett (kettősfalú) cső belső csövének $\sigma_i(\psi)$ ($i=R, \varphi$) diagramja. méretei és terhelése: $R_B = 70$ mm, $R_K = 140$ mm, $\psi_K = 0,49$, $p_B = 50$ MPa, $p_K = 0$.

- Feladat:
- A $\bar{\psi}_K$ értékének, valamint a belső cső ρ_B külső sugarának kiszámítása.
 - Az összetett cső külső csövére a feszültségi diagram megrajzolása.
 - A külső cső *Mohr*-szerinti legnagyobb redukált feszültségének meghatározása.
 - A két cső között a túlfedésből keletkező p nyomás értékének kiszámítása.

A) A $\bar{\psi}_K$ értékének, valamint a belső cső ρ_B külső sugarának kiszámítása.

Egész szám a megoldás minden olyan feladatnál, ahol be kell írni az eredményt!

I./ Válassza ki a $\bar{\psi}_K$ értékét!

$$\bar{\psi}_K = 0,20$$

$$\bar{\psi}_K = 0,22$$

$$\bar{\psi}_K = 0,25$$

$$\bar{\psi}_K = 0,29$$

$$\bar{\psi}_K = 0,30$$

II./ Írja be belső cső ρ_B külső sugarát!

$\rho_B =$ _____ mm

B) Rajzolja le egy lapra az összetett cső külső csövére a feszültségi diagramot!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

C) A külső cső Mohr-szerinti legnagyobb redukált feszültségének meghatározása.

I./ Válassza ki a $\sigma_{red\ max\ B}$ értékét!

$$\sigma_{red\ max\ B} = 80\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{red\ max\ B} = 90\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{red\ max\ B} = 100\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{red\ max\ B} = 110\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{red\ max\ B} = 120\ \text{MPa}$$

II./ Válassza ki a $\sigma_{red\ max\ K}$ értékét!

$$\sigma_{red\ max\ K} \approx 90,11\text{MPa}$$

$$\sigma_{red\ max\ K} \approx 95,21\text{MPa}$$

$$\sigma_{red\ max\ K} \approx 98,01\text{MPa}$$

$$\sigma_{red\ max\ K} \approx 100,04\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{red\ max\ K} \approx 103,25\text{MPa}$$

$$\sigma_{red\ max\ K} \approx 105,68\text{MPa}$$

D) A két cső között a túlfedésből keletkező p nyomás értékének kiszámítása.

I./ Válassza ki a p nyomás értékét!

$$p = 7,6\ \text{MPa}$$

$$p = 8,5\ \text{MPa}$$

$$p = 9,3\text{MPa}$$

$$p = 10,1\text{MPa}$$

$$p = 12,3\text{MPa}$$

20. LECKE

Gyorsan forgó tengelyek, csőtengelyek

6.7. Gyorsan forgó tengelyek, csőtengelyek

Cél: A tananyag felhasználója megismerje a gyorsan forgó tengelyek, csőtengelyek:

1. feladatának megfogalmazását, kitűzését,
2. meg tudja rajzolni a feszültségi diagramot,
3. el tudja végezni a szilárdságtani méretezést és ellenőrzést.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. fel tudja sorolni a gyorsan forgó tengely/csőtengely feladatok ismert mennyiségeit és a keresett mezőket;
2. meg tudja határozni a feladat megoldásának feltételezéseit;
3. fel tudja sorolni a gyorsan forgó tengely, csőtengely feladatok megoldásának a lépéseit;
4. fel tudja írni a sík-alakváltozásakor fellépő feszültségeket meghatározó összefüggéseket;
5. fel tudja írni a forgó tengely/csőtengely feszültségeit meghatározó összefüggéseket;
6. meg tudja határozni a dinamikai peremfeltételekből az összefüggésekben szereplő konstansokat;
7. meg tudja határozni a gyorsan forgó csőtengely diagramjának a szerepét;
8. fel tudja sorolni a gyorsan forgó csőtengely diagram megrajzolásának a gondolatmenetét;
9. fel tudja sorolni a gyorsan forgó tengely méretezésének és ellenőrzésének összefüggéseit és lépéseit;
10. fel tudja rajzolni a gyorsan forgó csőtengelyek/tengelyek feszültségi diagramjait;
11. el tudja végezni a gyorsan forgó csőtengelyek/tengelyek szilárdságtani méretezését és ellenőrzését.

Időszükséglet:

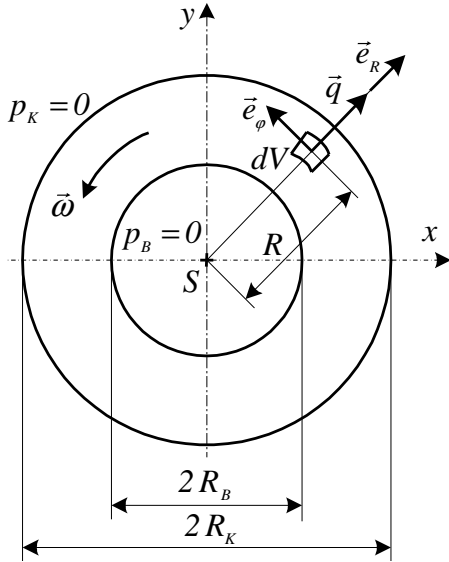
A tananyag elsajátításához körülbelül 75 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. gyorsan forgó tengelyek, csőtengelyek
2. sík-alakváltozás, biharmonikusdifferenciál egyenlet, feszültség
3. húzás-nyomás, normálfeszültség, szuperpozíció, peremfeltételek
4. gyorsan forgó csőtengely diagramja, hiperbolák, aszimptota
5. szilárdságtani méretezés, ellenőrzés, Mohr-féle redukált feszültség
6. gyorsan forgó tengely diagramja

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki, majd tanulja meg a gyorsan forgó tengelyek, csőtengelyek feladatok ismert mennyiségeit! Jegyezze meg a feladatok megoldásának feltételezéseit!



Feltételezés:

- $\omega = \text{állandó}$,
- a súlyerő ≈ 0 ,
- $p_B = p_K = 0$.

A szilárdságtani állapotokat henger koordináta-rendszerben (HKR-ben) írjuk le.

Forgás \Rightarrow a gyorsulásból származó, a térfogaton megoszló erőrendszer:

$$\vec{q} = q_R \vec{e}_R = \rho R \omega^2 \vec{e}_R = \frac{\gamma}{g} R \omega^2 \vec{e}_R.$$

ρ – a tömegsűrűség $[\text{kg}/\text{m}^3]$,

γ – a fajsúly $[\text{N}/\text{m}^3]$,

g – a gravitációs gyorsulás $[\text{m}/\text{s}^2]$.

A $\vec{q} = q_R \vec{e}_R$ a tengely/csőtengely keresztmetszetének síkjába esik, ezért az alakváltozás során a keresztmetszetek síkok maradnak.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki, majd tanulja meg a gyorsan forgó tengelyek, csőtengelyek feladat megoldásának a lépéseit! Jegyezze meg a megoldáshoz felhasznált matematikai összefüggéseket!

A feladat megoldása: SA + tiszta húzás-nyomás $\Rightarrow \underline{F} = \underline{F}' + \underline{F}''$.

a) Sík alakváltozás:

Ebben az esetben a biharmonikus differenciálegyenlet nem homogén, a jobboldalon megjelenik egy, az ω -tól függő tag.

Biharmonikus differenciál egyenlet: $\Delta \Delta U = -2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \rho \omega^2$.

Tengelyszimmetrikus esetben: $\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left\{ R \frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dU}{dR} \right) \right] \right\} = 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\gamma}{g} \omega^2 = \text{állandó}$.

Megoldás: $U(R) = U_h(R) + U_p(R)$.

$$\begin{aligned} U(R) &= \frac{A}{2} R^2 + B \ln R + C + (DR^2 \ln R) + 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \frac{R^4}{64} = \\ &= \frac{A}{2} R^2 + B \ln R + C + 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \frac{R^4}{64}. \end{aligned}$$

Megjegyzés: a $(DR^2 \ln R)$ tagot azért hagyjuk el, mert nem ad egyértékű elmozdulásmezőt kör és körgyűrű tartományon.

Új változó bevezetése: $\lambda = \frac{R^2}{R_K^2}$.

Az $U = U(R)$ függvényből származtatott feszültségek:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma'_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma'_z &= \nu (\sigma'_R + \sigma'_\varphi) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Szögsebességtől és anyagtól függő állandók:} \\ \sigma_{\omega 0} &= \frac{3-2\nu}{1-\nu} \frac{\rho}{8} (R_K \omega)^2, \\ \mu_1 &= \frac{1+2\nu}{3-2\nu} < 1. \end{aligned}$$

b) Tiszta húzás:

A húzó-nyomó erőt olyan nagyságúra kell felvenni, hogy a szuperpozíció után zérus tengely irányú erőt kapjunk.

$$N = N' + N'' = 0.$$

$$N = \int_{R_B}^{R_K} \sigma'_z 2R \pi dR + N'' = 0. \quad \sigma'_z = \nu (\sigma'_R + \sigma'_\varphi) = \nu 2a - \nu \sigma_{\omega 0} (1 + \mu) \lambda.$$

Behelyettesítve és átrendezve:

$$N'' = -2\pi a \nu (R_K^2 - R_B^2) + \nu \sigma_{\omega 0} (1 - \mu_1) \pi R_K^2 \int_{\lambda_B}^1 \lambda d\lambda, \quad d\lambda = 2R \frac{1}{R_K^2} dR,$$

$$N'' = -2\pi a \nu (R_K^2 - R_B^2) + \nu \sigma_{\omega 0} (1 - \mu_1) \pi \frac{1}{2} (1 - \lambda_B^2) R_K^2.$$

$$\sigma''_z = \frac{N''}{A}.$$

c) Szuperpozíció: forgó csőtengely/tengely

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R = \sigma'_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda, \\ \sigma_\varphi = \sigma'_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda, \\ \sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z &= \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B - 2\lambda). \end{aligned} \right\} \text{Anyagtól függő állandó:}$$

$$\mu_2 = \frac{2\nu}{3-2\nu} < 1, \quad \mu_2 < \mu_1.$$

A konstansok meghatározása a peremfeltételekből:

$$\left. \begin{aligned} R = R_B \quad (\lambda = \lambda_B) \quad \sigma_R = 0 &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda \\ R = R_K \quad (\lambda = 1) \quad \sigma_R = 0 &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda \end{aligned} \right\}$$

Az a és b állandók ebből a két egyenletből meghatározhatók.

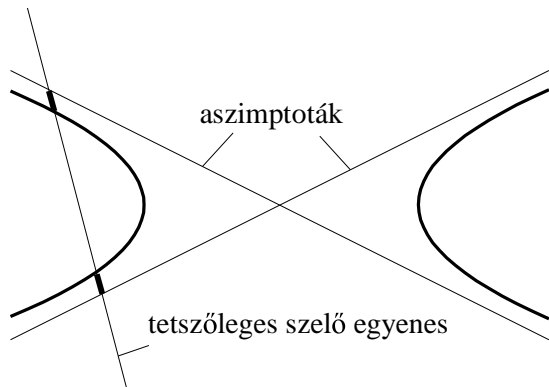
Jelölés: $\left. \begin{array}{l} h_R = a - \frac{b}{\lambda} \\ h_\varphi = a + \frac{b}{\lambda} \end{array} \right\}$ hiperbolák.

A hiperbolák aszimptotái:

Ha $\lambda \rightarrow 0$, akkor $h_R \rightarrow -\infty$, $h_\varphi \rightarrow \infty$,

Ha $\lambda \rightarrow \infty$, akkor $h_R \rightarrow a$, $h_\varphi \rightarrow a$.

A hiperbolák tulajdonsága:



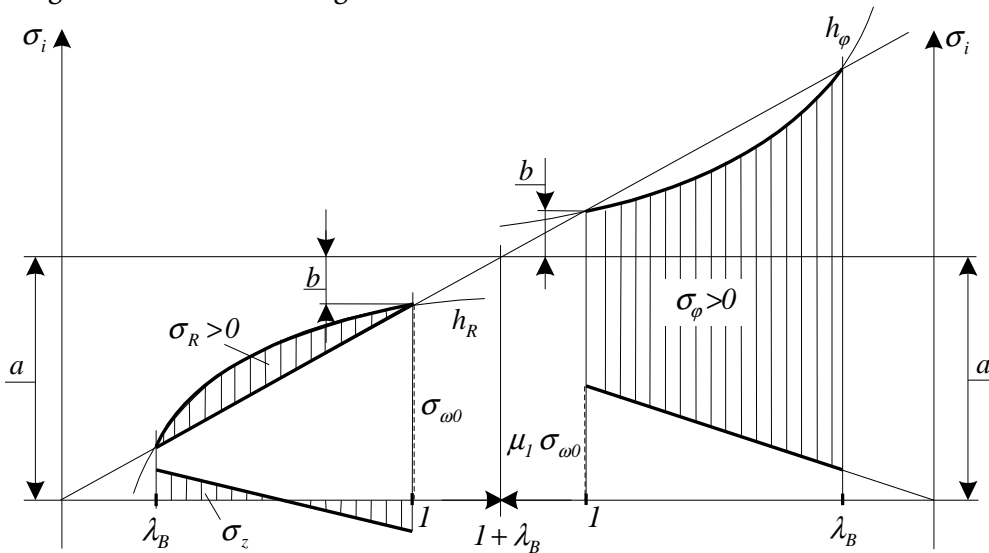
Egy tetszőleges szelő egyenes a hiperbolán és az aszimptotán levő pontjainak távolsága azonos.

Az azonos távolságokat (szakaszokat) az ábrán vastag vonal jelöli.

6.7.1. A gyorsan forgó csőtengely diagramja

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki, majd tanulja meg a gyorsan forgó csőtengely diagramból leolvasható jellemzőket és a diagram elkészítésének a gondolatmenetét!



A csőtengely diagram megrajzolásának gondolatmenete:

- Megrajzoljuk a $\sigma_{\omega 0} \lambda$ egyenest.
- Felvesszük a h_R és h_ϕ hiperbola aszimptótáit: $a\sigma_i$ függőleges és a $\sigma = a$ vízszintes egyeneseket.
- A peremfeltételekből ($\lambda = 1 - n l \sigma_R = 0$ s $\lambda_B - n l \sigma_R = 0$) meghatározzuk a h_R hiperbola két pontját, majd felrajzoljuk a h_R hiperbolát.
- Berajzoljuk a h_ϕ hiperbolát és a $\mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda$ egyenest.

Az a és b állandók meghatározása peremfeltételekből:

$$\sigma_R|_{\lambda_B} = 0 = a - \frac{b}{\lambda_B} - \sigma_{\omega 0} \lambda_B, \quad \sigma_R|_{\lambda=1} = 0 = a - b - \sigma_{\omega 0}.$$

A második peremfeltételből: $a = b + \sigma_{\omega 0}$.

Ezt behelyettesítve az első peremfeltételbe: $0 = b - \frac{b}{\lambda_B} + \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B),$

$$0 = -\frac{b}{\lambda_B} (1 - \lambda_B) + \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B) \Rightarrow b = \lambda_B \sigma_{\omega 0}.$$

Visszahelyettesítve a második peremfeltételbe: $a = (1 + \lambda_B) \sigma_{\omega 0}$.

A gyorsan forgó csőtengely tetszőleges P pontjának feszültségállapota:

$$[\underline{F}] = [\underline{F}(R)] = [\underline{F}'] + [\underline{F}'''] = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \text{ ahol } \sigma_R, \sigma_\varphi, \sigma_z \text{ főfeszültségek.}$$

Maximális redukált feszültség:

$$\sigma_{red \max}(Mohr) = (\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_\varphi (\lambda_B) = a + \frac{b}{\lambda_B} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda_B.$$

A peremfeltételekből meghatározott a, b értéket behelyettesítve:

$$\sigma_{red \max}(Mohr) = (1 + \lambda_B) \sigma_{\omega 0} + \lambda_B \sigma_{\omega 0} \frac{1}{\lambda_B} (-\mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda_B),$$

$$\sigma_{red \max}(Mohr) = \sigma_{\omega 0} (2 + \lambda_B - \mu_1 \lambda_B).$$

6.7.2. A gyorsan forgó tengely diagramja

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Tanulja meg a gyorsan forgó tengely diagram elkészítésének a lépéseit!

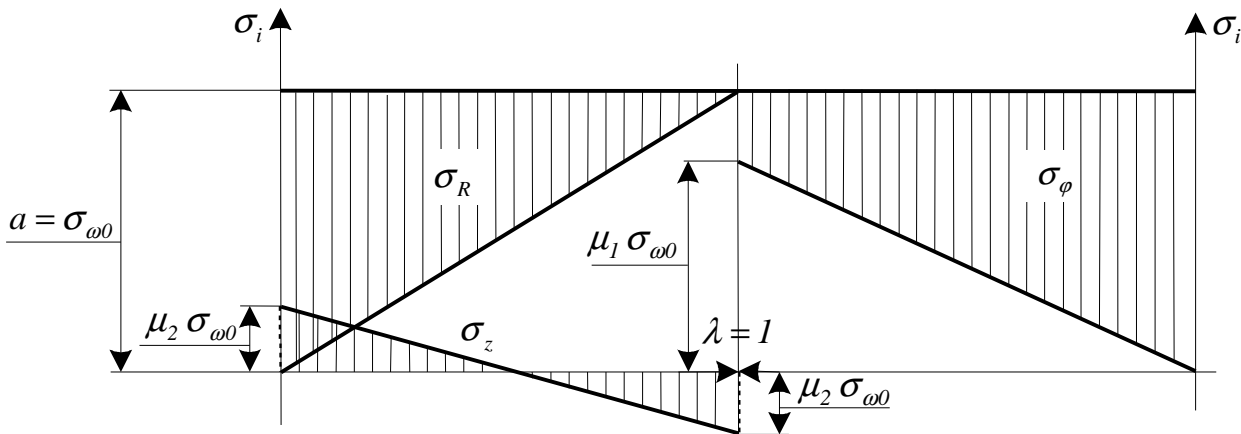
Tömör/furat nélküli tengely: $R_B = 0$ ($\lambda_B = 0$).

Tapasztalat: $R = 0$ ($\lambda = 0$)-nál is véges nagyságúak a feszültségek $\Rightarrow b = 0$.

Feszültségek:

$$\begin{aligned}\sigma_R &= a - \sigma_{\omega 0} \lambda, \\ \sigma_\varphi &= a - \mu \sigma_{\omega 0} \lambda, \\ \sigma_z &= \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 - 2\lambda).\end{aligned}$$

Peremfeltétel: $R = R_K$ ($\lambda = 1$) $\sigma_R = 0 = a - \sigma_{\omega 0} \Rightarrow a = \sigma_{\omega 0}$.



Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki, majd tanulja meg a gyorsan forgó tengely szilárdságtani méretezéséhez felhasznált matematikai összefüggéseket!

A *Mohr* szerint számított redukált feszültség:

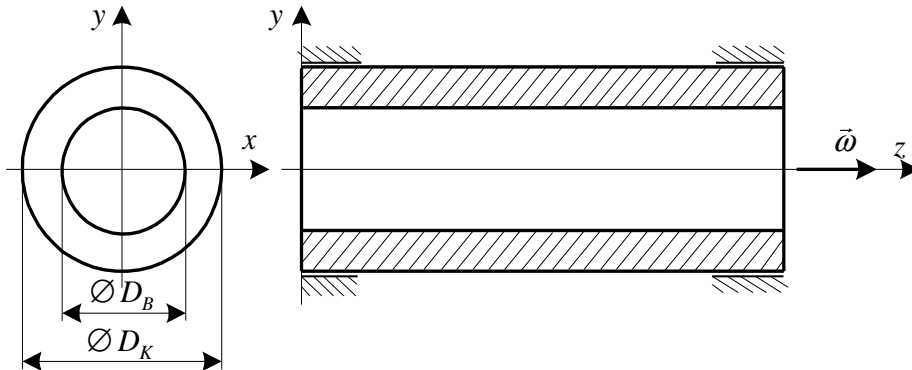
$$\sigma_{red}(Mohr)|_{\lambda=0} = (\sigma_R - \sigma_z)|_{\lambda=0} = \sigma_{\omega 0} (1 - \mu_2),$$

$$\sigma_{red}(Mohr)|_{\lambda=1} = (\sigma_{\varphi} - \sigma_z)|_{\lambda=1} = \sigma_{\omega 0} (1 - \mu_1 + \mu_2).$$

Gyakorló feladatok

Kövesse végig a levezetéseket! Oldja meg önállóan is a feladatokat!

1. feladat: Gyorsan forgó csőtengely



Adott: Az ábrán látható gyorsan forgó csőtengely anyaga, geometriája és szögsebessége:

$$D_B = 400 \text{ mm}, \quad D_K = 600 \text{ mm}, \quad \omega = 200 \text{ rad/s} = \text{állandó}, \quad \rho = 8000 \text{ kg/m}^3, \quad \nu = 1/3.$$

- Feladat:
- A λ_B és $\sigma_{\omega 0}$ mennyiségek meghatározása.
 - A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ feszültségi diagramok megrajzolása.
 - Az $R_K = D_K/2$ helyen levő P pontokban a feszültségi tenzor mátrixának felírása az R , φ , z henger koordináta-rendszerben.
 - A Mohr-féle elmélet szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása.

Kidolgozás:

- a) A λ_B és $\sigma_{\omega 0}$ mennyiségek meghatározása:

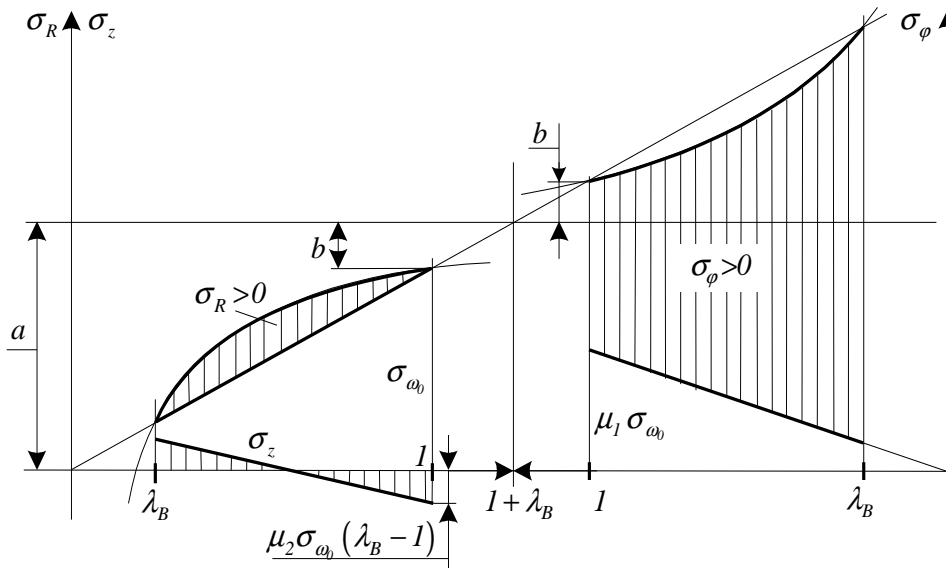
$$\lambda_B = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{200}{300}\right)^2 = 0,444444,$$

$$\sigma_{\omega 0} = \frac{(3 - 2\nu) \rho}{(1 - \nu) 8} (R_K \omega)^2 = \frac{(3 - 2 \cdot 0,33333) 10^3}{1 - 0,33333} (0,3 \cdot 200)^2 = 12,6 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 12,6 \text{ MPa}.$$

- b) A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ feszültségi diagramok megrajzolása:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_z &= \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B - 2\lambda) \end{aligned} \right\} \text{ A vastagság menti feszültségeloszlás függvényei.}$$

Peremfeltételek: $\sigma_R(\lambda = \lambda_B) = 0, \quad \sigma_R(\lambda = 1) = 0.$



$$\lambda = \frac{R^2}{R_K^2}, \mu_1 = \frac{1 + 2\nu}{3 - 2\nu} = \frac{1 + 2 \cdot 0,3333}{3 - 2 \cdot 0,3333} = 0,714, \quad \mu_2 = \frac{2\nu}{3 - 2\nu} = \frac{2 \cdot 0,3333}{3 - 2 \cdot 0,3333} = 0,285.$$

c) Az $R_K = D_K/2$ helyen levő P pontokban a feszültségi tenzor mátrixának felírása R, φ, z henger koordináta-rendszerben:

A diagramból:

$$\sigma_R(\lambda = 1) = 0,$$

$$\sigma_\varphi(\lambda = 1) = \sigma_{\omega_0}(1 + 2\lambda_B) - \mu_1 \sigma_{\omega_0} = 12,6((1 + 2 \cdot 0,4444 - 0,714)) = 14,8 \text{ MPa}$$

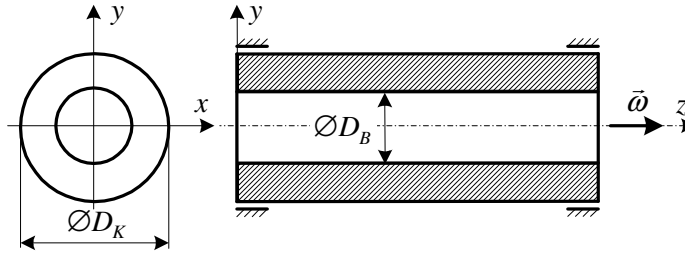
$$\sigma_z(\lambda = 1) = \mu_2 \sigma_{\omega_0}(\lambda_B - 1) = 0,285 \cdot 12,6(0,4444 - 1) = -2 \text{ MPa}.$$

A feszültségi tenzor mátrixa: $\left[\begin{array}{ccc} \underline{F} \\ R\varphi z \end{array} \right] (\lambda = 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14,8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ MPa.

d) A Mohr-féle elmélet szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása:

$$\sigma_{red \max} = \sigma_{\varphi}|_{\lambda_B} = \sigma_{\omega_0} (2 + \lambda_B) - \mu_1 \sigma_{\omega_0} \lambda_B = 12,6 (2 + 0,4444 - 0,314) = 26,79 \text{ MPa.}$$

2. feladat: Gyorsan forgó csőtengely



Adott: Az $\omega = \text{áll. szögsebességgel}$ forgó D_K külső és D_B belső átmérőjű csőtengely. $D_B = 400 \text{ mm}$, $D_K = 600 \text{ mm}$, $\omega = 200 \text{ rad/s}$, $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1/3$.

Feladat:

- A λ_B és σ_{ω_0} értékének meghatározása.
- A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_{\varphi}(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ diagramok megrajzolása.
- A Mohr szerinti legnagyobb redukált feszültség meghatározása.
- Az $R_K = D_K/2$ sugárral kijelölt körön levő tetszőleges P pontban a feszültségi tenzor mátrixának meghatározása henger koordináta-rendszerben.

Kidolgozás:

a) A λ_B és $\sigma_{\omega 0}$ értékének meghatározása:

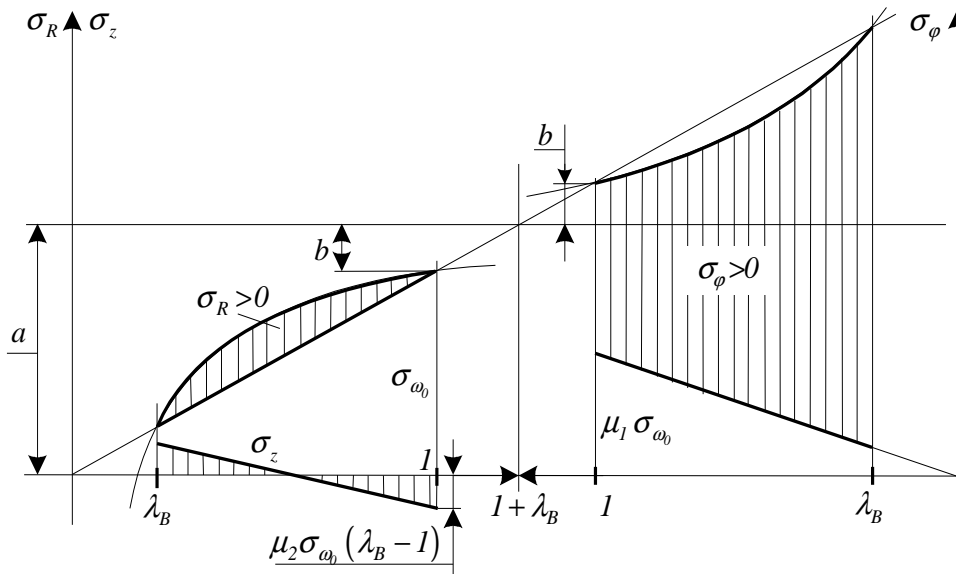
$$\lambda_B = \left(\frac{R_B}{R_K} \right)^2 = \left(\frac{200}{300} \right)^2 = \frac{4}{9} = 0,44444,$$

$$\sigma_{\omega 0} = \frac{(3 - 2\nu) \rho}{(1 - \nu) 8} (R_K \omega)^2 = \frac{(3 - 2 \cdot 0,44444) 8000}{(1 - 0,44444) 8} (300 \cdot 200)^2 = 12,6 \text{ N/mm}^2.$$

b) A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ diagramok megrajzolása:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_z &= \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B - 2\lambda) \end{aligned} \right\} \lambda = \frac{R^2}{R_K^2}, \quad \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2 \cdot 0,44444}{3-2 \cdot 0,44444} = \frac{5}{7}, \\ \mu_2 &= \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2 \cdot 0,44444}{3-2 \cdot 0,44444} = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Peremfeltételek: $\sigma_R(\lambda = \lambda_B) = 0, \quad \sigma_R(\lambda = 1) = 0.$



Peremfeltételek:

$$\left. \begin{array}{l} R = R_B \quad (\lambda = \lambda_B) \quad \sigma_R = 0 = a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega_0} \lambda \\ R = R_K \quad (\lambda = 1) \quad \sigma_R = 0 = a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = a - \frac{b}{\lambda_B} - \sigma_{\omega_0} \lambda_B \\ 0 = a - b - \sigma_{\omega_0} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow a = b + \sigma_{\omega_0}$$

Az első peremfeltételi egyenletbe visszahelyettesítve:

$$0 = b - \frac{b}{\lambda_B} + \sigma_{\omega_0} (1 - \lambda_B),$$

$$0 = -\frac{b}{\lambda_B} (1 - \lambda_B) + \sigma_{\omega_0} (1 - \lambda_B) \quad \Rightarrow \quad b = \lambda_B \sigma_{\omega_0}.$$

Visszahelyettesítve a második peremfeltételi egyenletbe: $a = (1 + \lambda_B) \sigma_{\omega 0}$.

$$a = \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B) = 12,6 (1 + 0,4444) = 18,2 \text{ MPa.} \quad b = a - \sigma_{\omega 0} = 18,2 - 12,6 = 5,6 \text{ MPa.}$$

A feszültségek jellemző értékei:

$$\sigma_z(\lambda_B) = \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B - 2\lambda_B) = \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 - \lambda_B) = \frac{2}{7} 12,6 (1 - 0,4444) = 2 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_z(\lambda = 1) = \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B - 2) = \mu_2 \sigma_{\omega 0} (\lambda_B - 1) = \frac{2}{7} 12,6 (0,4444 - 1) = -2 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_{\varphi}(\lambda_B) = a + \frac{b}{\lambda_B} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda_B, h_{\varphi}(\lambda_B) = a + \frac{b}{\lambda_B} = 18,2 + \frac{5,6}{0,4444} = 18,2 + 12,6 = 30,8 \text{ MPa,}$$

$$\mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda_B = \frac{5}{7} 12,6 \cdot 0,4444 = 4 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{\varphi}(\lambda_B) = a + \frac{b}{\lambda_B} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda_B = 30,8 - 4 = 26,8 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_{\varphi}(\lambda = 1) = a + b - \mu_1 \sigma_{\omega 0}, h_{\varphi}(\lambda = 1) = a + b = 18,2 + 5,6 = 23,8 \text{ MPa,}$$

$$\mu_1 \sigma_{\omega 0} = \frac{5}{7} 12,6 = 9 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{\varphi}(\lambda = 1) = a + b - \mu_1 \sigma_{\omega 0} = 23,8 - 9 = 14,8 \text{ MPa.}$$

c) A Mohr szerinti legnagyobb redukált feszültség meghatározása:

$$\lambda = 1 \quad , \sigma_{red}(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\varphi} - \sigma_z = 14,8 - (-2) = 16,8 \text{ MPa,}$$

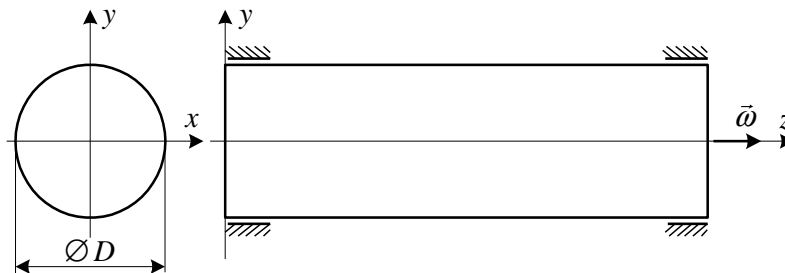
$$\lambda_B = 0,44444, \quad \sigma_{red}(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\varphi} - \sigma_R = 26,8 - 0 = 26,8 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{red \max}(Mohr) = 26,8 \text{ MPa.}$$

d) Az $R_K = D_K/2$ sugárral kijelölt körön levő tetszőleges P pontban a feszültségi tenzor mátrixának meghatározása henger koordináta-rendszerben:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{F}} \\ R_{\varphi z} (P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_R(\lambda = 1) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varphi}(\lambda = 1) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z(\lambda = 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14,8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

3. feladat: Gyorsan forgó tengely



Adott: Az $\omega = \text{áll. szögsebességgel}$ forgó D átmérőjű tengely. $D = 400 \text{ mm}$, $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$, $\sigma_{\omega 0} = 40 \text{ MPa}$, $\nu = 0,25$.

Feladat:

- A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_{\varphi}(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ diagramok megrajzolása.
- A Mohr szerinti legnagyobb redukált feszültség meghatározása.
- A tengely legnagyobb megengedett fordulatszámának meghatározása, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 80 \text{ MPa}$.

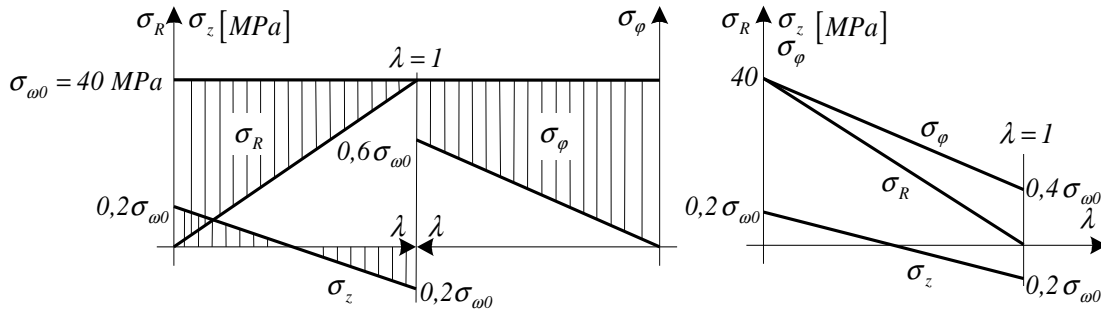
Kidolgozás:

a) A feszültségi diagramok megrajzolása:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_{\varphi} &= a - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_z &= \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 - 2\lambda) \end{aligned} \right\} \lambda = \frac{R^2}{R_K^2}. \quad \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2 \cdot 0,25}{3-2 \cdot 0,25} = 0,6, \\ \mu_2 &= \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2 \cdot 0,25}{3-2 \cdot 0,25} = 0,2. \end{aligned}$$

Peremfeltétel: $R = R_K (\lambda = 1) \Rightarrow \sigma_R = 0 = a - \sigma_{\omega 0} = 0 \Rightarrow a = \sigma_{\omega 0} = 40 \text{ MPa}$.

A gyorsan forgó tengely diagramja két alakban:



A feszültségek jellemző értékei:

$$\sigma_R (\lambda = 0) = a - \sigma_{\omega 0} \lambda = 40 - 40 \cdot 0 = 40 \text{ MPa},$$

$$\sigma_R (\lambda = 1) = a - \sigma_{\omega 0} \lambda = 40 - 40 \cdot 1 = 0 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi (\lambda = 0) = a - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda = 40 - 0,6 \cdot 40 \cdot 0 = 40 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi (\lambda = 1) = a - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda = 40 - 0,6 \cdot 40 \cdot 1 = 16 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z (\lambda = 0) = \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 - 2\lambda) = 0,2 \cdot 40 \cdot (1 - 2 \cdot 0) = 8 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z (\lambda = 1) = \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 - 2\lambda) = 0,2 \cdot 40 \cdot (1 - 2 \cdot 1) = -8 \text{ MPa}.$$

b) A Mohr szerinti legnagyobb redukált feszültség meghatározása:

$$\lambda = 0, \sigma_{red}(Mohr) = \sigma_{\omega 0} - 0,2\sigma_{\omega 0} = 0,8\sigma_{\omega 0} = 0,8 \cdot 40 = 32 \text{ MPa},$$

$$\lambda = 1, \sigma_{red}(Mohr) = 0,4\sigma_{\omega 0} + 0,2\sigma_{\omega 0} = 0,6\sigma_{\omega 0} = 0,6 \cdot 40 = 24 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{red \max}(Mohr) = 32 \text{ MPa}.$$

c) A tengely legnagyobb megengedett fordulatszámának meghatározása, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 80$ MPa:

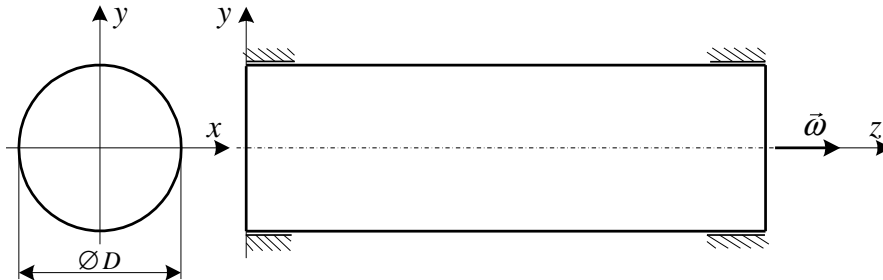
$$\sigma_{red \max}(Mohr) = 0,8 \sigma_{\omega 0} \leq \sigma_{meg} \quad \sigma_{meg} \geq 0,8 \sigma_{\omega 0} = 0,8 \frac{(3 - 2\nu) \rho}{(1 - \nu)} \frac{\rho}{8} (R_K \omega)^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma_{meg} (1 - \nu)}{0,1 (3 - 2\nu) \rho R_K^2}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 10^6 \cdot 0,75}{0,1 \cdot 2,5 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 0,2^2}} = 866 \text{ rad/s,}$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \Rightarrow n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30}{3,141} 866 = 8269 \text{ ford/min.}$$

4. feladat: Gyorsan forgó tengely

Adott: A hosszú, tömör, D átmérőjű tengely, amely $\omega =$ állandó szögsebességgel forog. $D = 600$ mm, $\omega = 400 \frac{1}{s}$: A tengely anyagának sűrűsége: $\rho = 8000$ kg/m³, Poisson-tényezője: $\nu = 1/3$, megengedett feszültsége: $\sigma_{meg} = 110$ MPa.



- Feladat:
- A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ diagramok megrajzolása.
 - A feszültségi tenzor mátrixának meghatározása hengerkoordináta-rendszerben az $R_1 = 100$ mm sugárral kijelölt körön levő P pontban.
 - A feszültségállapot szemléltetése a P pont környezetéből kiragadott elemi kockán.
 - A tengely szilárdságtani ellenőrzése a *Mohr* elmélet szerint.

Kidolgozás:

a) A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ diagramok megrajzolása:

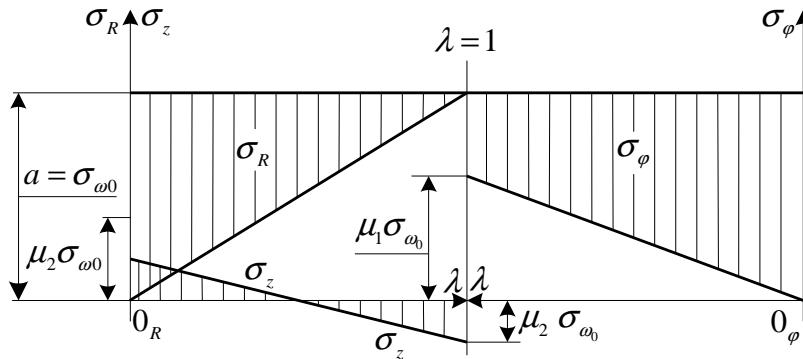
$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_\varphi &= a - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_z &= \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 - 2\lambda) \end{aligned} \right\}, \lambda = \frac{R^2}{R_K^2}, R_K = 0,3 \text{ m.}$$

$$\mu_1 = \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2 \cdot 0,333}{3-2 \cdot 0,333} = 0,714,$$

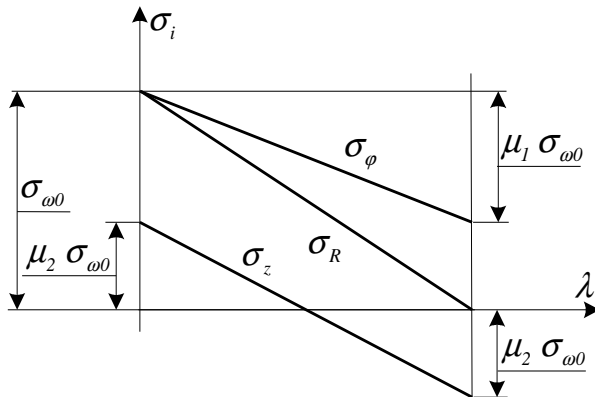
$$\mu_2 = \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2 \cdot 0,333}{3-2 \cdot 0,333} = 0,286.$$

$$\sigma_{\omega 0} = \frac{(3-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{\rho}{8} (R_K \omega)^2 = 3,5 \cdot \frac{8000}{8} \cdot 120^2 = 3,5 \cdot 1,44 \cdot 10^7 = 5,04 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad \sigma_{\omega 0} = 50,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

A diagram:



A diagramok más alakban:



Redukált feszültségek:

$$\sigma_{red}(\lambda = 0) = \sigma_{\omega 0} (1 - \mu_2),$$

$$\sigma_{red}(\lambda = 0) = 0,714 \sigma_{\omega 0},$$

$$\sigma_{red}(\lambda = 1) = \sigma_{\omega 0} (1 - \mu_1 + \mu_2),$$

$$\sigma_{red}(\lambda = 1) = 0,572 \sigma_{\omega 0}.$$

b) A feszültségi tenzor mátrixának meghatározása hengerkoordináta-rendszerben az $R_1 = 100$ mm sugárral kijelölt körön levő P pontban:

$$\lambda_1 = \frac{R_1^2}{R_K^2} = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$$

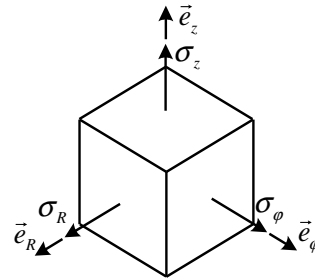
$$\sigma_R = \sigma_{\omega 0} (1 - \lambda_1) = \frac{8}{9} \sigma_{\omega 0} = \frac{8}{9} 50,4 = 44,8 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_{\omega 0} (1 - \mu_1 \lambda_1) = 50,4 \left(1 - \frac{0,714}{9} \right) = 46,4 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z = \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 - 2\lambda_1) = 0,286 \cdot 50,4 \left(1 - \frac{2}{9} \right) = 11,2 \text{ MPa}.$$

A feszültségi tenzor: $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 44,8 & 0 & 0 \\ 0 & 46,4 & 0 \\ 0 & 0 & 11,2 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$

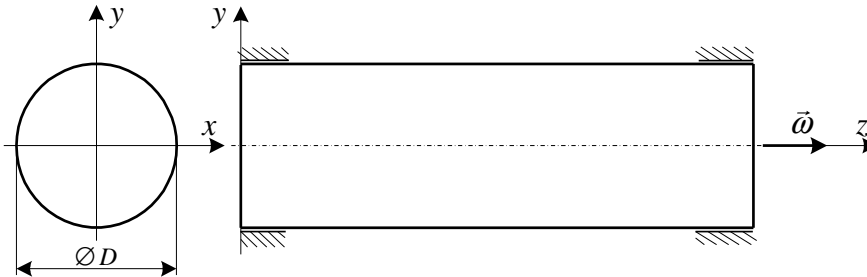
c) A feszültségállapot szemléltetése a P pont környezetéből kiragadott elemi kockán:



d) A tengely ellenőrzése *Mohr* elmélete szerint:

$$\sigma_{red\ max} = (\sigma_\varphi - \sigma_z)_{\lambda=0} = 0,714 \sigma_{\omega_0} = 35,99 \text{ MPa}$$

5. feladat: Gyorsan forgó tengely



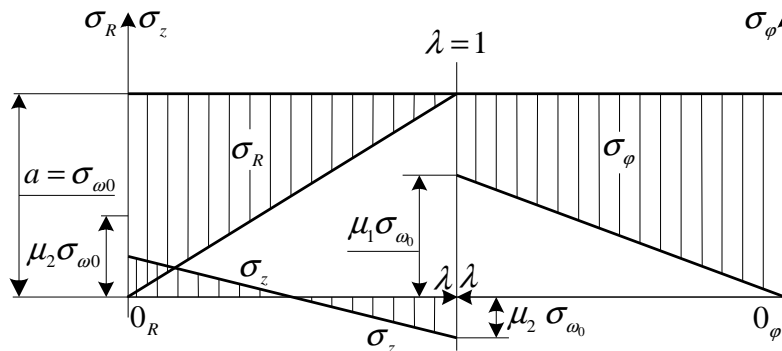
Adott: A hosszú, tömör, $\omega = \text{áll.}$ szögsebességgel forgó D átmérőjű tengely. $D = 400 \text{ mm}$, $\sigma_{\omega_0} = 40 \text{ MPa}$, $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,25$.

- Feladat:
- A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$, $\sigma_z(\lambda)$ függvények felírása és a diagramok megrajzolása.
 - A Mohr-féle elmélet alapján a redukált feszültség maximumának meghatározása.
 - A tengely legnagyobb megengedett fordulatszámának meghatározása, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 80$ MPa.
 - Mekkora átmérőjű furat esetén felel meg a tengely az adott ω szögsebességre a Mohr elmélet szerint?

Kidolgozás:

- a) A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$, $\sigma_z(\lambda)$ függvények felírása és a diagramok megrajzolása:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - \sigma_{\omega_0} \lambda \\ \sigma_\varphi &= a - \mu_1 \sigma_{\omega_0} \lambda \\ \sigma_z &= \mu_2 \sigma_{\omega_0} (1 - 2\lambda) \end{aligned} \right\} \lambda = \frac{R^2}{R_K^2}, \quad R_K = 0,2 \text{ m} \quad \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2 \cdot 0,25}{3-2 \cdot 0,25} = 0,6, \\ \mu_2 &= \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2 \cdot 0,25}{3-2 \cdot 0,25} = 0,2. \end{aligned}$$



- b) A Mohr-féle elmélet alapján a redukált feszültség maximumának meghatározása:

$$\sigma_{red \max} = (\sigma_\varphi - \sigma_z)_{\lambda=0} = \sigma_{\omega_0} (1 - \mu_2) = 0,8 \cdot 40 = 32 \text{ MPa.}$$

c) A tengely legnagyobb megengedett fordulatszámának meghatározása, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 80 \text{ MPa}$:

$$\sigma_{red\ max} \leq \sigma_{meg} \quad \sigma_{meg} = 80 \text{ N/mm}^2 = 8 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

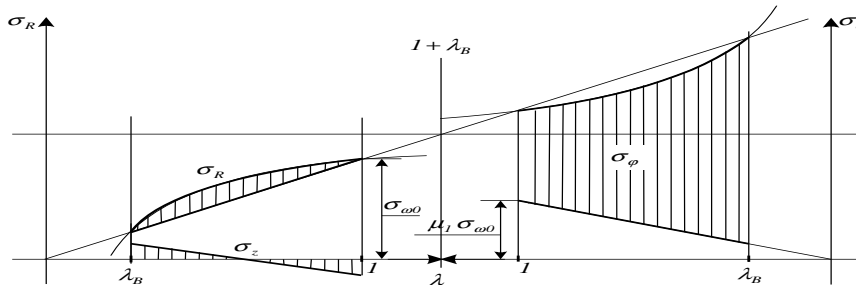
$$\sigma_{\omega_0} (1 - \mu_2) \leq \sigma_{meg} \Rightarrow (1 - \mu_2) \frac{3m-2}{m-1} \frac{\rho}{8} (R_k \omega_{\max})^2 = \sigma_{meg}.$$

$$R_k \omega_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma_{meg}}{1 - \mu_2} \frac{8}{\rho} \frac{m-1}{3m-2}} = \sqrt{10^6 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3} = 10\sqrt{3} \Rightarrow \omega_{\max} = \frac{10\sqrt{3}}{0,2} = 50\sqrt{3} \frac{1}{s}.$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{n}{60} \Rightarrow n_{\max} = \frac{30\omega_{\max}}{\pi} = \frac{1500\sqrt{3}}{3,14} = 821 \frac{1}{\text{min}}.$$

d) Mekkora átmérőjű furat esetén felel meg a tengely az adott ω szögsebességre a Mohr elmélet szerint?

$$\sigma_R = a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega_0} \lambda, \quad \sigma_{\varphi} = a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega_0} \lambda, \quad \sigma_z = \mu_2 \sigma_{\omega_0} (1 + \lambda_B - 2\lambda).$$



$$\sigma_{red\ max} = \sigma_{\varphi}(\lambda_B) = \sigma_{\omega_0} (2 + \lambda_B) - \mu_1 \sigma_{\omega_0} \lambda_B,$$

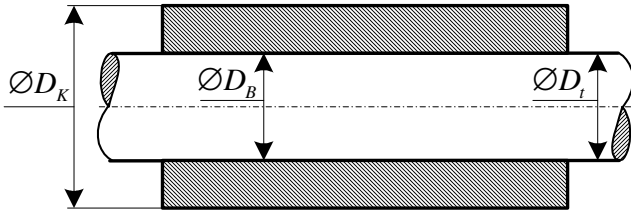
$$\sigma_{red\ max} = 2\sigma_{\omega_0} + \lambda_B (1 - \mu_1) \sigma_{\omega_0} \leq \sigma_{meg},$$

$$\lambda_B = \frac{\sigma_{meg} - 2\sigma_{\omega_0}}{(1 - \mu_1) \sigma_{\omega_0}} = \frac{80 - 80}{40(1 - 0,6)} = 0 \Rightarrow R_B = 0.$$

A tengelybe furat nem készíthető.

6. feladat: Gyorsan forgó hüvely

A D_K külső és D_B belső átmérőjű hüvelyt (csőtengelyt) felmelegítve D_t átmérőjű merev tengelyre húzunk, majd lehűtjük. Ekkor a hüvely $\delta = (D_t - D_B) / 2$ túlfedéssel illeszkedik a tengelyre. Lehűtés után a szerkezetet forgatni kezdjük. Feltételezzük, hogy a hüvely anyaga lineárisan rugalmas, a tengely pedig tökéletesen merev.



Adott:

$$D_K = 200\sqrt{2} \text{ mm}, \quad D_t = 200 \text{ mm},$$

$$\delta = 0,2175 \text{ mm}, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa},$$

$$\nu = 0,25, \quad \rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3,$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2,5} = 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}.$$

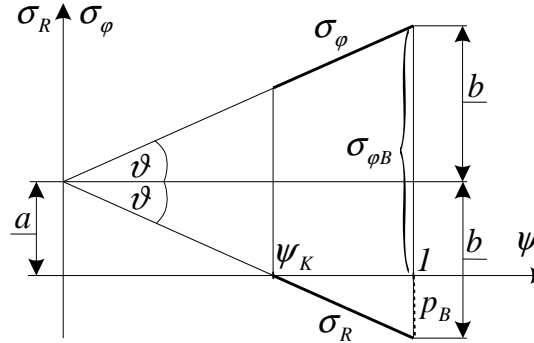
- Feladat:
- A túlfedés következtében a hüvely belső felületén fellépő nyomás meghatározása.
 - Mekkora fordulatszámnál lazul meg a hüvely tengelyen, ha a hüvelyt hosszú, gyorsan forgó vastagfalú csőként (csőtengelyként) modellezzük?

Kidolgozás:

- a) A túlfedés következtében a hüvely belső felületén fellépő nyomás meghatározása:

$$R_B = 100 \text{ mm}, \quad R_K = 100\sqrt{2} \text{ mm}, \quad \psi_K = \lambda_B = \left(\frac{R_B}{R_K} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

A túlfedésből származó nyomás meghatározása (az álló cső diagramja):



A túlfedés:
$$\delta = \frac{D_t - D_B}{2} = u_B = R_B \varepsilon_{\varphi B} = R_t \varepsilon_{\varphi}(\psi = 1) = \frac{R_t}{2G} [\sigma_{\varphi B} - \nu(\sigma_{RB} + \sigma_{\varphi B})],$$

$$\delta = \frac{R_t}{2G} [\sigma_{\varphi B} - \nu(-p_B + \sigma_{\varphi B})].$$

A csődiagramból:
$$\sigma_{\varphi B} = \sigma_{\varphi}(\psi = 1) = 2b - p_B = 2 \frac{p_B}{1 - \psi_B} - p_B = p_B \frac{1 + \psi_K}{1 - \psi_K}.$$

$$\delta = \frac{R_t}{2G} \left[p_B \frac{1 + \psi_K}{1 - \psi_K} - \nu p_B \left(-1 + \frac{1 + \psi_K}{1 - \psi_K} \right) \right] = \frac{R_t}{G} p_B \left[\frac{1 + \psi_K(1 - 2\nu)}{1 - \psi_K} \right].$$

A túlfedésből származó nyomás:
$$p_B = \frac{\delta}{\frac{R_t}{G} \left[\frac{1 + \psi_K(1 - 2\nu)}{1 - \psi_K} \right]}.$$

b) Mekkora fordulatszámnál lazul meg a hüvely tengelyen, ha a hüvelyt hosszú, gyorsan forgó vastagfalú csőként (csőtengelyként) modellezzük?

A forgó hüvely diagramja:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_{\varphi} &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_z &= \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B - 2\lambda) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2 \cdot 0,25}{3-2 \cdot 0,25} = 0,6, \\ \mu_2 &= \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2 \cdot 0,25}{3-2 \cdot 0,25} = 0,2. \end{aligned}$$

Peremfeltételek: $\sigma_R(\lambda = 1) = 0 = a - b - \sigma_{\omega 0}$,
 $\sigma_R(\lambda = \lambda_B) = -p_B = a - \frac{b}{\lambda_B} - \sigma_{\omega 0} \lambda_B$.

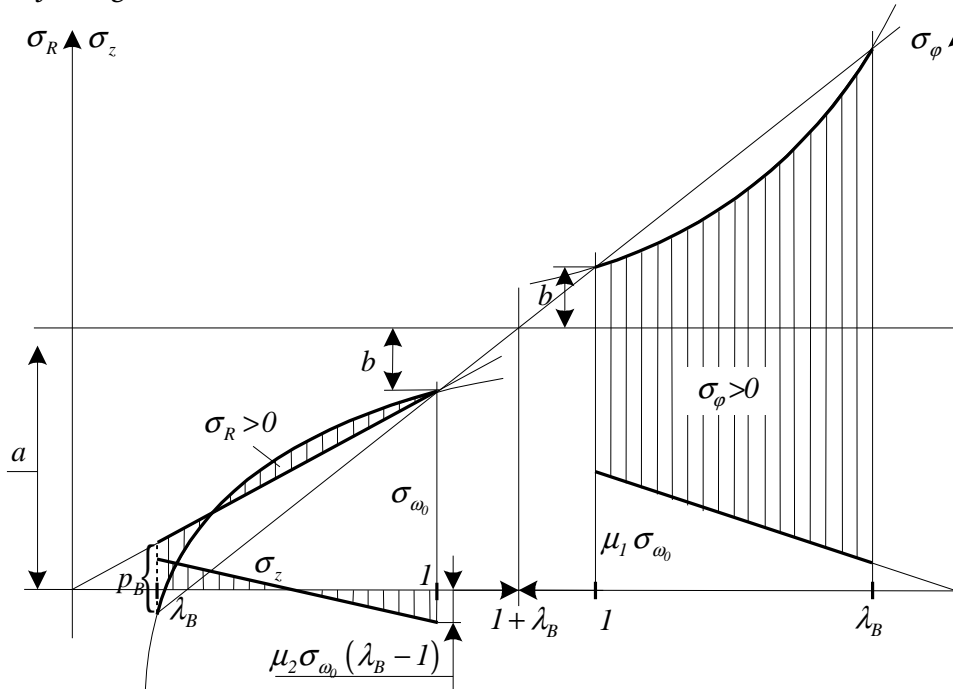
Feszültségállapot a belső sugárnál:

$$\sigma_R(\lambda_B) = -p_B,$$

$$\sigma_z(\lambda_B) = \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 - \lambda_B) = 0,2 \cdot 0,5 \cdot \sigma_{\omega 0} = 0,1 \cdot \sigma_{\omega 0},$$

$$\sigma_\varphi(\lambda_B) = \sigma_{\omega 0} + (1 + \lambda_B) \frac{\sigma_{\omega 0} - p_B}{1 - \lambda_B} - \sigma_{\omega 0} \mu_1 \lambda_B.$$

A forgó cső diagramja zsugorkötés esetén:



Lazulásnál: $p_B = 0$.

Alakváltozási állapot a $\lambda = \lambda_B$ helyen lazulásnál:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \frac{F_I}{m+1} \underline{\underline{E}} \right); F_I = \sigma_\varphi + \sigma_z = 2,3\sigma_{\omega_0}, 2G = E \frac{1}{1+\nu} = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot 10^5 = 1,6 \cdot 10^5 \text{MPa.}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{2G} \left(\sigma_\varphi - \nu \frac{\sigma_\varphi + \sigma_z}{1+\nu} \right) = \frac{1}{2G} \left(2,2\sigma_{\omega_0} - \frac{2,3}{5}\sigma_{\omega_0} \right),$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{10}{16} \cdot 10^{-5} \cdot 1,74\sigma_{\omega 0} = 1,0875 \cdot 10^{-5}\sigma_{\omega 0}$$

Lazulás:

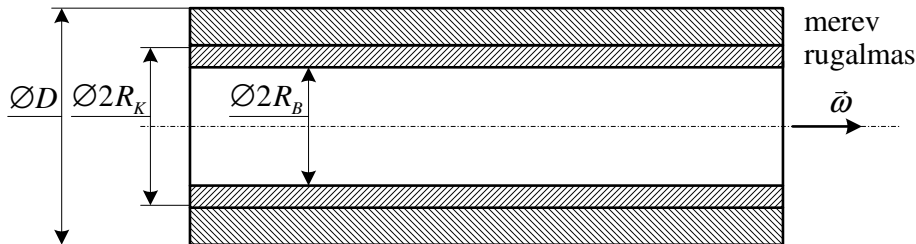
$$\delta = R_B \varepsilon_\varphi (R_B) = \frac{D_B}{2} \varepsilon_\varphi (R_B) = 100 \cdot 1,0875 \cdot 10^{-5} \sigma_{\omega 0},$$

$$0,2175 = 10,875 \cdot 10^{-4} \sigma_{\omega 0} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\omega 0} = 200 \text{ N/mm}^2 = 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2.$$

$$\sigma_{\omega 0} = \frac{3 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{\rho}{8} (R_K \omega)^2 = 2 \cdot 10^8, (R_K \omega)^2 = 0,6 \cdot 10^5 = 6 \cdot 10^4, R_K \omega = 100\sqrt{6},$$

$$\omega_l = \frac{100\sqrt{6}}{0,1\sqrt{2}} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \frac{n}{60} \Rightarrow n = \frac{30}{\pi} \omega \Rightarrow n_l = \frac{3 \cdot 10^4 \sqrt{6}}{3,1415 \sqrt{2}} = 16\,589 \frac{1}{\text{min}}.$$

7. feladat: Gyorsan forgó kettősfalú csőtengely



Adott: Lineárisan rugalmas anyagú csőre tökéletesen merev csövet húzunk úgy, hogy hézag és túlfedés nélkül illeszkedjenek. Ezután a két csövet azonos ω szögsebességgel megforgatjuk. A belső csőre: $\lambda_B = 0,5$, $\sigma_{\omega 0} = 60 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,25$.

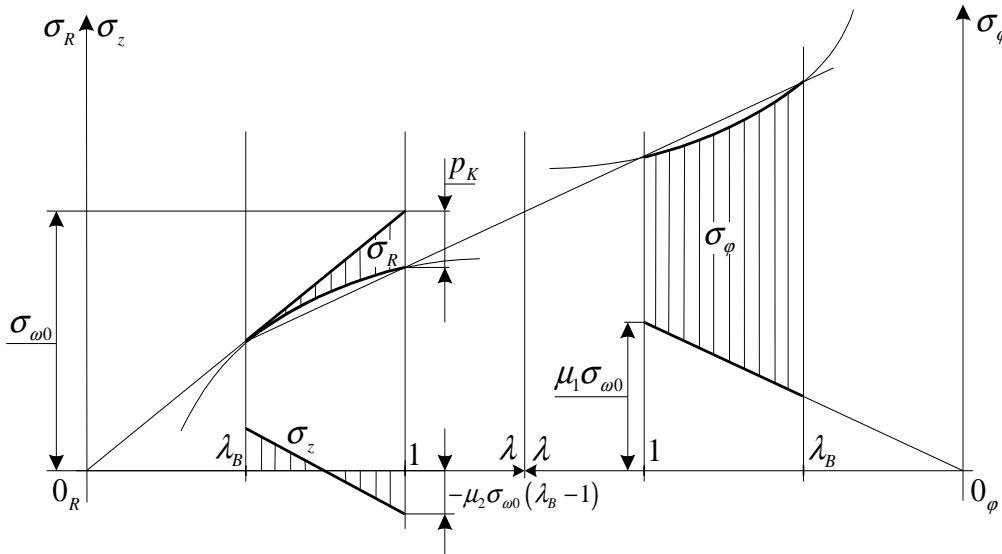
- Feladat:**
- A belső csőben fellépő feszültségek eloszlásának jelleghelyes ábrázolása.
 - A belső csőre az R_K sugárnál átadódó erőrendszer p_K sűrűségének meghatározása.
 - A Mohr-féle elmélet alapján a belső csőben fellépő legnagyobb redukált feszültség kiszámítása.

Kidolgozás:

a) A belső csőben fellépő feszültségek eloszlásának jelleghelyes ábrázolása:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_{\varphi} &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma_z &= \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B - 2\lambda) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1+2\nu}{3-2\nu} = \frac{1+2 \cdot 0,25}{3-2 \cdot 0,25} = 0,6, \\ \mu_2 &= \frac{2\nu}{3-2\nu} = \frac{2 \cdot 0,25}{3-2 \cdot 0,25} = 0,2. \end{aligned}$$

Peremfeltételek: $\sigma_R(\lambda = 1) = -p_K = a - b - \sigma_{\omega 0}$,
 $\sigma_R(\lambda = \lambda_B) = 0 = a - \frac{b}{\lambda_B} - \sigma_{\omega 0} \lambda_B$.



b) A belső csőre az R_K sugárnál átadódó erőrendszer p_K sűrűségének meghatározása:

A belső cső külső felületén ($\lambda = 1$) a feszültségek:

$$\sigma_R = -p_K, \sigma_z = -\mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 - \lambda_B) = -6 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi = \left[\sigma_{\omega 0} - \frac{p_K}{1 - \lambda_B} \right] 2\lambda_B + (\sigma_{\omega 0} - p_K) - \mu_1 \sigma_{\omega 0} = \sigma_{\omega 0} (2\lambda_B + 1 - \mu_1) - p_K \left(\frac{2\lambda_B}{1 - \lambda_B} + 1 \right),$$

$$\sigma_\varphi = 60(2 - 0,6) - 3p_K = 84 - 3p_K \text{ MPa}.$$

A belső cső külső felületén ($\lambda = 1$) az alakváltozási jellemzők:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \nu \frac{F_I}{1 + \nu} \underline{\underline{E}} \right), \quad 2G = E \frac{1}{1 + \nu}, \quad 2G = 1,6 \cdot 10^5 \text{ MPa}.$$

$$F_I = \sigma_R + \sigma_\varphi + \sigma_z = -p_K - 6 + (84 - 3p_K), \quad F_I = 78 - 4p_K.$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{2G} \left(\sigma_\varphi - \frac{\nu F_I}{1 + \nu} \right) = \frac{1}{2G} [(84 - 3p_K) - 0,2(78 - 4p_K)].$$

$$\varepsilon_\varphi(R_K) = \varepsilon_\varphi(\lambda = 1) = \frac{1}{2G} (84 - 17,6 - 2,2p_K).$$

$$u(R_K) = 0 = R_K \varepsilon_\varphi(R_K) \quad \Rightarrow \quad 0 = 66,4 - 2,2p_K \quad \Rightarrow \quad p_K = \frac{66,4}{2,2} = 31,09 \text{ MPa}.$$

c) A Mohr-féle elmélet alapján a belső csőben fellépő legnagyobb redukált feszültség kiszámítása:

Feszültségek meghatározása a belső cső belső és külső felületén:

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_B \quad \sigma_\varphi(\lambda_B) &= \left[\sigma_{\omega 0} - \frac{p_K}{1 - \lambda_B} \right] (1 + \lambda_B) + \sigma_{\omega 0} - \mu_1 \lambda_B \sigma_{\omega 0} = \\ &= \sigma_{\omega 0} (2 + \lambda_B - \mu_1 \lambda_B) - p_K \frac{1 + \lambda_B}{1 - \lambda_B} = 168 - 47,43 \cdot 3 = 25,71 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

$$\sigma_{red}(\lambda_B) = \sigma_\varphi(\lambda_B) = 25,71 \text{ MPa.}$$

$$\lambda = \lambda_B \quad \sigma_\varphi(\lambda = 1) = 84 - 93,3 = -9,7 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_z(\lambda = 1) = -6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_R(\lambda = 1) = -p_K = -31,09 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red}(\lambda = 1) = \sigma_z(\lambda = 1) - \sigma_R(\lambda = 1) = 25,09 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_{red \max} = 25,71 \text{ MPa.}$$

Önellenzés

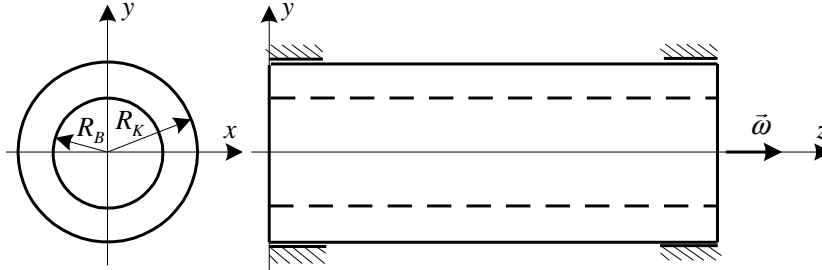
1. Írja fel egy lapra a gyorsan forgó tengelyek, csőtengelyek feladatában a sík alakváltozásakor fellépő feszültségeket meghatározó összefüggéseket!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
2. Egészítse ki a következő meghatározást a megfelelő szavakkal!
Tiszta húzás: A húzó-nyomó erőt olyan nagyságúra kell felvenni, hogy a szuperpozíció után irányú erőt kapjunk
3. Írja fel egy lapra a gyorsan forgó tengelyek, csőtengelyek feladatában a szuperpozícióval meghatározott feszültségeket megadó összefüggéseket!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)
4. Rendezze megfelelő sorrendbe a csőtengely diagram megrajolásának a lépéseit!

Az első lépést jelölje 1-el!	Írja a lépések elé a megfelelő számot!	
Sorrend	Lépés	

 - Megrajzoljuk a $\sigma_{\omega 0} \lambda$ egyenest.
 - A peremfeltételekből ($\lambda = 1 - nI$ $\sigma_R = 0$ s $\lambda_B - nI$ $\sigma_R = 0$) meghatározzuk a h_R hiperbola két pontját, majd felrajzoljuk a h_R hiperbolát.
 - Berajzoljuk a h_{φ} hiperbolát és a $\mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda$ egyenest.
 - Felvesszük a h_R és h_{φ} hiperbola aszimptótáit: a σ_i függőleges és a $\sigma = a$ vízszintes egyeneseket.
5. Írja fel egy lapra a gyorsan forgó tengelyek, csőtengelyek esetében a maximális redukált feszültséget meghatározó összefüggést!
[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

6. Gyorsan forgó csőtengely

Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



Adott: Az ábrán látható, $\vec{\omega} =$ állandó szögsebességgel gyorsan forgó csőtengely:

$$R_K = 200\sqrt{2} \text{ mm}, \sigma_{\omega_0} = 200 \text{ MPa}, \rho = 8000 \text{ kg/m}^3, \nu = 0,25; E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}.$$

Feladat: A) A $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ feszültségi diagramok jelleghelyes megrajzolása.

B) Az R_B belső sugár értékének meghatározása, ha $\sigma_\varphi(\lambda_B) = 440 \text{ MPa}$.

C) Az R_K helyen kialakuló feszültségi állapot meghatározása.

D) A csőtengely külső átmérőjének ΔD_K megváltozásának kiszámítása.

E) A csőtengely legnagyobb megengedett szögsebességének meghatározása, ha az anyag megengedett feszültsége $\sigma_{meg} = 110 \text{ MPa}$.

A) A $\sigma_R(\lambda), \sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ feszültségi diagramok jelleghelyes megrajzolása.

I./ Rajzolja fel egy lapra a gyorsan forgó csőtengely diagramját!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

B) Az R_B belső sugár értékének meghatározása, ha $\sigma_\varphi(\lambda_B) = 440 \text{ MPa}$.

Egész szám a megoldás minden olyan feladatnál, ahol be kell írni az eredményt!

A megadás módja: pozitív szám: 5, negatív szám: -8, nulla: 0

I./ Határozza meg az R_B belső sugarat!

Írja be a keresett R_B értéket!

Az $R_B =$ mm

C) Az R_K helyen kialakuló feszültségi állapot meghatározása.

I./ Határozza meg az $\begin{bmatrix} F \\ R\varphi z \end{bmatrix}$ feszültségi tenzor mátrixát!

Egész szám a megoldás minden olyan feladatnál, ahol *be kell írni* az eredményt!

A megadás módja: pozitív szám: 5, negatív szám: -8, nulla: 0

A feszültségi tenzort a következő formában kell felépíteni:

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ 1 & x1 & y1 & z1 \\ 2 & x2 & y2 & z2 \\ 3 & x3 & y3 & z3 \end{array} \quad \text{MPa}$$

Írja be a keresett értékeket!

A tenzor értékei:

$$\begin{array}{lll} x1 = & y1 = & z1 = \\ x2 = & y2 = & z2 = \\ x3 = & y3 = & z3 = \end{array}$$

D) A csőtengely külső átmérőjének ΔD_K megváltozásának kiszámítása.

I./ Válassza ki a helyes megoldást!

A ΔD_K keresett értéke:

- 0,3 mm
- 0,4 mm
- 0,5 mm
- 0,6 mm
- 0,7 mm
- 0,8 mm
- 0,9 mm

E) A csőtengely legnagyobb megengedett szögsebességének és fordulatszámának a meghatározása, ha az anyag megengedett feszültsége $\sigma_{meg} = 110 \text{ MPa}$.

I./ Válassza ki a helyes megoldást!

A ω_{\max} megengedett legnagyobb szögsebesség:

$$\omega_{\max} = 212 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_{\max} = 319 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_{\max} = 434 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_{\max} = 508 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_{\max} = 552 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

II./ Válassza ki a helyes megoldást!

A n_{\max} megengedett legnagyobb fordulatszám:

$$n_{\max} = 2026 \frac{\text{ford}}{\text{min}}$$

$$n_{\max} = 3048 \frac{\text{ford}}{\text{min}}$$

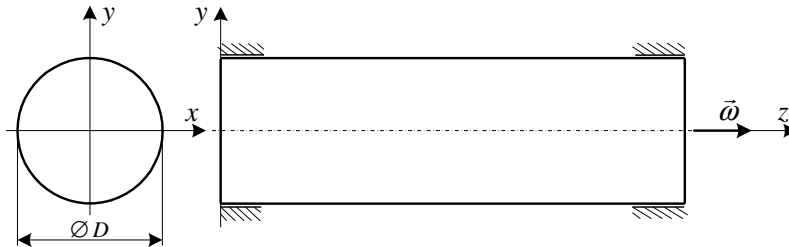
$$n_{\max} = 2026 \frac{\text{ford}}{\text{min}}$$

$$n_{\max} = 4148 \frac{\text{ford}}{\text{min}}$$

$$n_{\max} = 4751 \frac{\text{ford}}{\text{min}}$$

7. Gyorsan forgó tengely

Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



Adott: Az $\omega = \text{áll. szögsebességgel}$ forgó D átmérőjű tengely. $D = 400 \text{ mm}$, $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$, $\sigma_{\omega 0} = 40 \text{ MPa}$, $\nu = 0,25$.

- Feladat:
- A) A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ diagramok megrajzolása.
 - B) A *Mohr* szerinti legnagyobb redukált feszültség meghatározása.
 - C) A tengely legnagyobb megengedett fordulatszámának meghatározása, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 80 \text{ MPa}$.

A) A $\sigma_R(\lambda)$, $\sigma_\varphi(\lambda)$ és $\sigma_z(\lambda)$ diagramok megrajzolása.

I./ Rajzolja fel egy lapra a csődiagramokat!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

Egész szám a megoldás minden olyan feladatnál, ahol be kell írni az eredményt!

A megadás módja: pozitív szám: 5, negatív szám: -8, nulla: 0

II./ Határozza meg a $\sigma_R(\lambda = 0)$ feszültséget!

Írja be a keresett $\sigma_R(\lambda = 0)$ értéket!

Az $\sigma_R(\lambda = 0) =$

MPa

III./ Határozza meg a $\sigma_R (\lambda = 1)$ feszültséget!

Írja be a keresett $\sigma_R (\lambda = 1)$ értéket!

Az $\sigma_R (\lambda = 1) =$ MPa

IV./ Határozza meg a $\sigma_\varphi (\lambda = 0)$ feszültséget!

Írja be a keresett $\sigma_\varphi (\lambda = 0)$ értéket!

Az $\sigma_\varphi (\lambda = 0) =$ MPa

V./ Határozza meg a $\sigma_\varphi (\lambda = 1)$ feszültséget!

Írja be a keresett $\sigma_\varphi (\lambda = 1)$ értéket!

Az $\sigma_\varphi (\lambda = 1) =$ MPa

VI./ Határozza meg a $\sigma_z (\lambda = 0)$ feszültséget!

Írja be a keresett $\sigma_z (\lambda = 0)$ értéket!

Az $\sigma_z (\lambda = 0) =$ MPa

VII./ Határozza meg a $\sigma_z (\lambda = 1)$ feszültséget!

Írja be a keresett $\sigma_z (\lambda = 1)$ értéket!

Az $\sigma_z (\lambda = 1) =$ MPa

B) A Mohr szerinti legnagyobb redukált feszültség meghatározása.**Egész szám a megoldás minden olyan feladatnál, ahol *be kell írni* az eredményt!**

A megadás módja: pozitív szám: 5, negatív szám: -8, nulla: 0

I./ Határozza meg a $\lambda = 0$ -hoz tartozó $\sigma_{red}(Mohr)$ feszültséget!Írja be a keresett $\lambda = 0$ $\sigma_{red}(Mohr)$ feszültséget!Az $\lambda = 0$ $\sigma_{red}(Mohr) =$ MPaII./ Határozza meg a $\lambda = 1$ -hez tartozó $\sigma_{red}(Mohr)$ feszültséget!Írja be a keresett $\lambda = 1$ $\sigma_{red}(Mohr)$ feszültséget!Az $\lambda = 1$ $\sigma_{red}(Mohr) =$ MPa

III./ Határozza meg a Mohr szerinti legnagyobb redukált feszültséget!

Írja be a keresett $\sigma_{red \max}(Mohr)$ feszültséget!Az $\sigma_{red \max}(Mohr) =$ MPa**C) A tengely legnagyobb megengedett fordulatszámának meghatározása, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 80$ MPa.**

I./ Válassza ki a helyes megoldást!

A ω_{\max} megengedett legnagyobb szögsebesség:

$$\omega_{\max} = 567 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_{\max} = 687 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_{\max} = 754 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_{\max} = 799 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_{\max} = 866 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

II./ Válassza ki a helyes megoldást!

A n_{\max} megengedett legnagyobb fordulatszám:

$$n_{\max} = 5413 \frac{\text{ford}}{\text{min}}$$

$$n_{\max} = 6559 \frac{\text{ford}}{\text{min}}$$

$$n_{\max} = 8270 \frac{\text{ford}}{\text{min}}$$

$$n_{\max} = 8999 \frac{\text{ford}}{\text{min}}$$

$$n_{\max} = 9321 \frac{\text{ford}}{\text{min}}$$

21. LECKE

Kör és körgyűrű alakú tárcsák

6.8. Kör és körgyűrű alakú tárcsák

Cél: A tananyag felhasználója megismerje a kör és körgyűrű alakú tárcsák:

1. feladatának megfogalmazását, kitűzését,
2. meg tudja rajzolni a furatos tárcsa feszültségi diagramjait,
3. el tudja végezni a szilárdságtani méretezést és ellenőrzést.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja határozni a kör és körgyűrű alakú tárcsák feladatának megoldását;
2. fel tudja írni kör és körgyűrű alakú tárcsák feladatának változóját;
3. fel tudja írni a furatos tárcsa esetében a redukált feszültségeket meghatározó összefüggéseket;
4. fel tudja rajzolni furatos tárcsa feszültségi diagramját;
5. el tudja végezni furatos tárcsa szilárdságtani méretezését és ellenőrzését;
6. fel tudja írni túlfedéssel illesztett összetett furatos tárcsa feladat feltételezését;
7. fel tudja írni túlfedéssel illesztett összetett furatos tárcsa feladat változóját;
8. fel tudja írni a túlfedéssel illesztett összetett furatos tárcsa esetében a peremfeltételeket;
9. fel tudja rajzolni a túlfedéssel illesztett összetett furatos tárcsafeszültségi diagramját;
10. el tudja végezni a túlfedéssel illesztett összetett furatos tárcsaszilárdságtani méretezését és ellenőrzését.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 55 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. kör és körgyűrű alakú tárcsa, furatos tárcsa, peremfeltétel, diagram, redukált feszültség
2. túlfedéssel illesztett összetett furatos tárcsa, Hooke-törvény

Tevékenység:

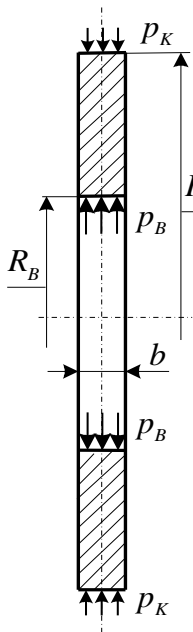
Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a megoldást, a feladat változóját! Rajzolja le a feladat modelljét! Jegyezze meg a feszültségeket és a peremfeltételeket meghatározó összefüggéseket!

Megoldás: általánosított sík feszültségi állapot.

Változó: $\psi = \frac{R_B^2}{R^2}$.

A biharmonikus differenciálegyenlet megoldásával előállított $U = U(R)$ feszültségfüggvényből formailag a vastagfalú csöveknél kapottal azonos a megoldás a feszültségekre nézve, azonban itt $\bar{\sigma}_z = 0$.

6.8.1. Furatos tárcsa



A feszültségek

$$\bar{\sigma}_R = a - b\psi$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = a + b\psi$$

$$\bar{\sigma}_z = 0.$$

} A tengelyszimmetria miatt: $\bar{\tau}_{R,\varphi} = 0$.

Peremfeltételek:

$$\bar{\sigma}_R(\psi = 1) = a - b = -p_B, \quad \bar{\sigma}_R(\psi = \psi_K) = a - b\psi_K = -p_K.$$

$$\text{Az első egyenletből: } a = b - p_B,$$

$$\text{A második egyenletből: } b - p_B - b\psi_K = -p_K \quad \Rightarrow$$

$$b = \frac{p_B - p_K}{1 - \psi_K}.$$

Visszahelyettesítve:

$$a = b - p_B = \frac{p_B - p_K - p_B(1 - \psi_K)}{1 - \psi_K} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{p_B \psi_K - p_K}{1 - \psi_K}.$$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a diagram szerkesztés gondolatmenetét! Rajzolja le a furatos tárcsa diagramját! Írja fel és jegyezze meg a redukált feszültséget meghatározó összefüggéseket!

A furatos tárcsa diagramja:

A tárcsa diagram megszerkesztésének gondolatmenete megegyezik a vastagfalú cső diagramjának szerkesztésével.

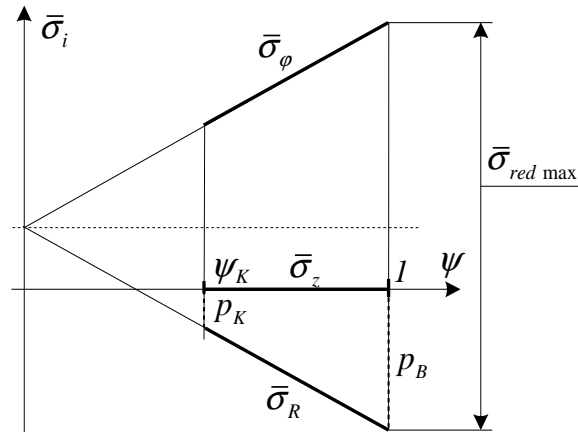
A tárcsadiagramot $p_B > p_K$ esetre rajzoltuk meg.

A $\bar{\sigma}_R$, $\bar{\sigma}_\varphi$, $\bar{\sigma}_z$ ebben az esetben is főfeszültségek.

Redukált feszültség a diagramból:

$$\bar{\sigma}_{red} (Mohr) = \bar{\sigma}_\varphi - \bar{\sigma}_R,$$

$$\bar{\sigma}_{red \max} (Mohr) = 2 \frac{p_K - p_B}{1 - \psi_K}.$$

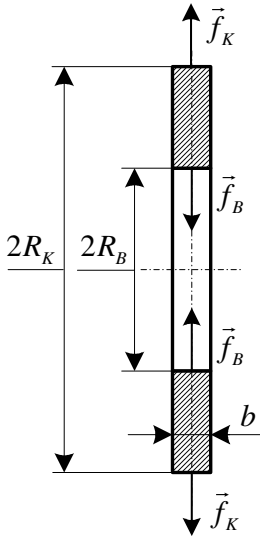


Ebben az esetben is fennáll az a probléma, hogy a $p_B - p_K$ terheléskülönbség nem növelhető minden határon túl. Megoldás: növelni kell a p_K terhelést – összetett tárcsát kell alkalmazni.

Gyakorló feladatok

Kövesse végig a levezetéseket! Oldja meg önállóan is a feladatokat!

1. feladat: Körgyűrű alakú tárcsa



Adott:

Az állandó b vastagságú tárcsa terhelése: $f_B = 50$ N/mm és $f_K = 20$ N/mm, méretei: $b = 5$ mm, $R_B = 100$ mm, $R_K = 200$ mm.

Feladat:

- A peremfeltételek felírása.
- Az N_R , N_φ felületi feszültségek diagramjának megrajzolása a jellemző metszések számértékeinek megadásával.
- A $\bar{\sigma}_\varphi$ értékének meghatározása az $R = R_B$ és $R = R_K$ helyen.
- Az $R = R_B$ helyen fellépő felületi feszültségállapot szemléltetése az elemi négyzeten.

Kidolgozás:

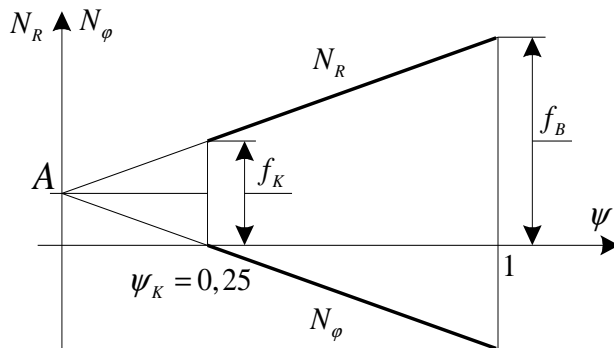
a) A peremfeltételek felírása:

$$\psi = \frac{R_B^2}{R^2}, \psi = \frac{R_B^2}{R_K^2} = 0,25$$

$$\begin{aligned} \text{Peremfeltételek: } R = R_B &\Rightarrow \psi = 1 \quad N_R = f_B = 50 \text{ N/mm.} \\ R = R_K &\Rightarrow \psi = \psi_K \quad N_R = f_K = 20 \text{ N/mm.} \end{aligned}$$

b) Az N_R , N_φ felületi feszültségek diagramjának megrajzolása a jellemző metszések számértékeinek megadásával:

$$\left. \begin{aligned} N_R &= A - B\psi \\ N_\varphi &= A + B\psi \end{aligned} \right\}$$



c) A $\bar{\sigma}_\varphi$ értékének meghatározása az $R = R_B$ és $R = R_K$ helyen:

$$\frac{f_B - f_K}{1 - \psi_K} = \frac{N_\varphi + f_B}{2} \quad \Rightarrow \quad N_\varphi(\psi = 1) = 2 \frac{f_B - f_K}{1 - \psi_K} - f_B = 2 \frac{30,4}{3} - 50.$$

$$N_\varphi(\psi = 1) = -50 \text{ N/mm},$$

$$\bar{\sigma}_\varphi(\psi = 1) = \frac{N_\varphi(\psi = 1)}{b} = -6 \text{ N/mm}^2.$$

$$\frac{f_B - f_K}{1 - \psi_K} = \frac{N_\varphi + f_K}{2\psi_K}$$

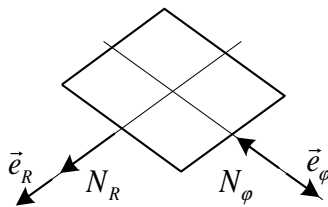
$$\Rightarrow N_\varphi(\psi_K) = 2\psi_K \frac{f_B - f_K}{1 - \psi_K} - f_K = 20 - 20 = 0.$$

$$N_\varphi(\psi = \psi_K) = 0,$$

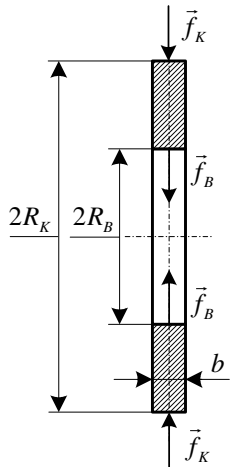
$$\bar{\sigma}_\varphi(\psi_K) = \frac{N_\varphi(\psi_K)}{b} = 0.$$

d) Az $R = R_B$ helyen fellépő felületi feszültségállapot szemléltetése az elemi négyzeten:

$$\underline{\underline{N}}(R = R_B) = \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & N_\varphi \end{bmatrix}$$



2. feladat: Körgyűrű alakú tárcsa

Adott:

A $b = 4$ mm vastag tárcsa $f_B = 60$ N/mm és $f_K = -30$ N/mm terhelése, a furat $R_B = 80$ mm belső sugara és a tárcsa anyagának megengedett feszültsége: $\sigma_{meg} = 60$ MPa.

Feladat:

- A peremfeltételek felírása.
- Az N_R , N_φ felületi feszültségi diagramok jelleghelyes megrajzolása.
- A tárcsa R_K külső sugarának meghatározása.

Kidolgozás:

- A peremfeltételek felírása:

$$\psi = \frac{R_B^2}{R^2}$$

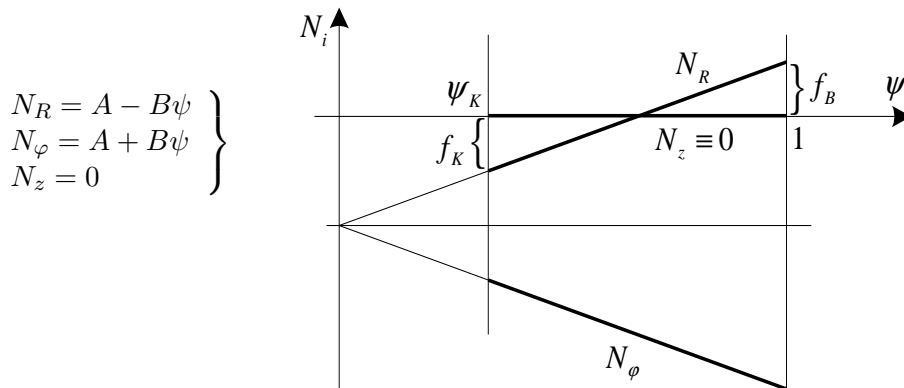
$$R = R_B \quad (\psi = 1)$$

$$N_R = f_B,$$

$$R = R_K \quad (\psi = \psi_K)$$

$$N_R = -f_K.$$

b) Az N_R , N_φ felületi feszültségi diagramok jelleghelyes megrajzolása:



c) A tárcsa R_K külső sugarának meghatározása:

$$\frac{N_{red\ max}}{2} = \frac{f_B + f_K}{1 - \psi_K}$$

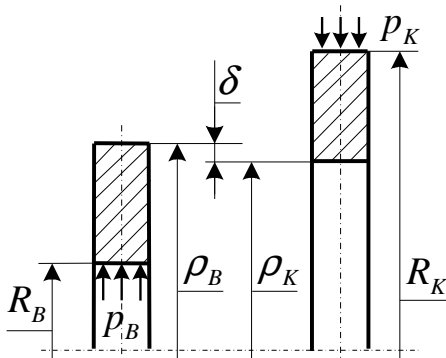
$$\bar{\sigma}_{red\ max} \leq \sigma_{meg}$$

$$2 \frac{f_B + f_K}{1 - \psi_K} \cdot \frac{1}{b} \leq \sigma_{meg} \quad R_K \geq \frac{R_B}{\sqrt{1 - 2 \frac{f_B + f_K}{\sigma_{meg} b}}} = \frac{R_B}{\sqrt{1 - 2 \frac{90}{60 \cdot 4}}} = \frac{R_B}{\sqrt{0,25}} = 160 \text{ mm.}$$

6.8.2. Túlfedéssel illesztett összetett furatos tárcsa

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Rajzolja le a feladat modelljét! Jegyezze meg a túlfedést, a feltételezést és a változót meghatározó összefüggéseket!



Túlfedés: $\delta = \rho_B - \rho_K$.

Feltételezés: $\delta \ll \rho_B, \rho_K \Rightarrow \rho_B \approx \rho_K$.

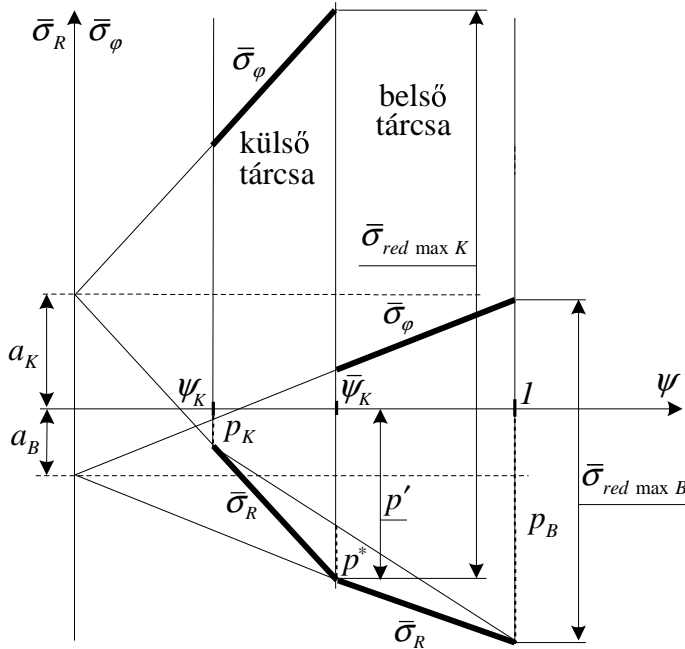
Változó: $\psi = \frac{R_B^2}{R_K^2}$.

$\bar{\psi}_K = \frac{R_B^2}{\rho_B^2} = \frac{R_B^2}{\rho_K^2}, \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2}$.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a diagram szerkesztés gondolatmenetét! Rajzolja le a túlfedéssel illesztett összetett furatos tárcsa diagramját! Írja fel és jegyezze meg a redukált feszültséget és a Hooke-törvényt meghatározó összefüggéseket!

Tárcsa diagram:



A tárcsadiagram megszerkesztése a összetett cső diagramjának szerkesztésével analóg módon történik.

Feltételezés: $p_B > p_K$.

„Peremfeltételek” (ismert értékek):

$$\sigma_R(R_B) = \sigma_R(\psi = 1) = -p_B,$$

$$\sigma_R(\rho_B \approx \rho_K) = \sigma_R(\bar{\psi}_K) = -p',$$

$$\sigma_R(R_K) = \sigma_R(\psi_K) = -p_K.$$

Maximális redukált feszültségek:

$$\bar{\sigma}_{red \max B} = \frac{p_B - p'}{1 - \bar{\psi}_K},$$

$$\bar{\sigma}_{red \max K} = \frac{p' - p_K}{\psi_K - \bar{\psi}_K} \bar{\psi}_K.$$

A túlfedés meghatározása: $\delta = \rho_B (\bar{\varepsilon}_{\varphi K} - \bar{\varepsilon}_{\varphi B})|_{R = \rho_B = \rho_K}$.

$$\text{Hooke-törvény: } \bar{\varepsilon}_{\varphi} = \frac{1}{E} \left(\bar{\sigma}_{\varphi} - \nu \underbrace{\bar{\sigma}_R}_{=-p'} \right) \Rightarrow \delta = \frac{\rho_B}{E} (\bar{\sigma}_{\varphi K} - \bar{\sigma}_{\varphi B})|_{R = \rho_B = \rho_K}$$

A tárcsa diagramból:

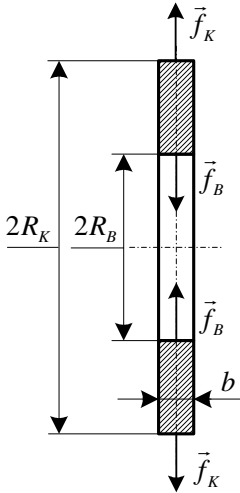
$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varphi K} &= \bar{\sigma}_{red \max K} - p' = 2 \frac{p' - p_K}{\psi_K - \bar{\psi}_K} \bar{\psi}_K - p' \\ \bar{\sigma}_{\varphi B} &= 2 \frac{p_B - p'}{1 - \bar{\psi}_K} \bar{\psi}_K - p' \end{aligned} \right\} \text{Ezek az } R = \rho_B = \rho_K (\psi = \bar{\psi}_K) \text{ helyen vett értékek.}$$

Önellenőrzés

1. Írja fel egy lapra kör és körgyűrű alakú tárcsákesetén a változót!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
2. Írja fel egy lapra furatos tárcsa esetén a peremfeltételeket!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
3. Írja fel egy lapra furatos tárcsa esetén a feszültségeket!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
4. Írja fel egy lapra túlfedéssel illesztett összetett furatos tárcsaesetén a változót!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
5. Írja fel egy lapra túlfedéssel illesztett összetett furatos tárcsa esetén a feltételezéseket!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
6. Írja fel egy lapra túlfedéssel illesztett összetett furatos tárcsaesetén a túlfedést!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

7. Körgyűrű alakú tárcsa

Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



Adott:

Az állandó b vastagságú tárcsa geometriája és \vec{f}_B és \vec{f}_K állandó sűrűségű megoszló terhelése.

$R_B = 100$ mm, $R_K = 100\sqrt{2}$ mm, $b = 4$ mm, $f_B = 20$ N/mm, $f_K = 20$ N/mm.

Feladat:

- Az N_R , N_φ felületi feszültségi diagramok megrajzolása a jellemző metszések számértékeinek megadásával.
- A N_φ legnagyobb értékének meghatározása.
- A Mohr szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása.

A) Az N_R , N_φ felületi feszültségi diagramok megrajzolása a jellemző metszések számértékeinek megadásával:

I./ Rajzolja fel egy lapra a feszültségi diagramokat!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

B) A N_φ legnagyobb értékének meghatározása:

Égész szám a megoldás minden olyan feladatnál, ahol *be kell írni* az eredményt!

A megadás módja: pozitív szám: 5, negatív szám: -8, nulla: 0

I./ Határozza meg az $N_{red\ max}$ értékét!

Írja be a keresett $N_{red\ max}$ értékét!

Az $N_{red\ max} =$ N/mm

II./ Határozza meg az $|N_{\varphi\ max}|$ értékét!

Írja be a keresett $|N_{\varphi\ max}|$ értékét!

Az $|N_{\varphi\ max}| =$ N/mm

C) A Mohr szerinti legnagyobb redukált feszültség kiszámítása:

Egész szám a megoldás minden olyan feladatnál, ahol *be kell írni* az eredményt!

A megadás módja: pozitív szám: 5, negatív szám: -8, nulla: 0

I./ Határozza meg az $\bar{\sigma}_{red\ max}$ értékét!

Írja be a keresett $\bar{\sigma}_{red\ max}$ értékét!

Az $\bar{\sigma}_{red\ max} =$ N/mm²

22. LECKE

Gyorsan forgó kör és körgyűrű alakú tárcsák

6.9. Gyorsan forgó kör és körgyűrű alakú tárcsák

Cél: A tananyag felhasználója megismerje a gyorsan forgó kör és körgyűrű alakú tárcsák terhelését, szilárdsági ellenőrzését.

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja határozni a gyorsan fogó furatos tárcsa feladat kiinduló feltételezéseit;
2. fel tudja írni a gyorsan fogó furatos tárcsa feladat esetében a feszültségeket meghatározó összefüggéseket;
3. fel tudja írni a gyorsan fogó furatos tárcsa feladat esetében a peremfeltételeket;
4. fel tudja írni a furatos tárcsa esetében a redukált feszültségeket meghatározó összefüggéseket;
5. fel tudja rajzolni a gyorsan fogó furatos tárcsa feszültségi diagramját;
6. el tudja végezni a gyorsan fogó furatos tárcsa szilárdságtani méretezését és ellenőrzését;
7. fel tudja írni a gyorsan fogó tömör tárcsa feladat esetében a feszültségeket meghatározó összefüggéseket;
8. fel tudja írni a gyorsan fogó tömör tárcsa feladat esetében a peremfeltételeket;
9. fel tudja rajzolni a gyorsan fogó tömör tárcsa feszültségi diagramját;
10. el tudja végezni a gyorsan fogó tömör tárcsa szilárdságtani méretezését és ellenőrzését;
11. fel tudja írni a gyorsan fogó egyenszilárdságú tömör tárcsa esetében az egyensúlyi egyenletet;
12. meg tudja határozni $\bar{\sigma}_R = \bar{\sigma}_\varphi = \bar{\sigma}_0 =$ állandó esetén a szükséges tárcsavastagság függvényét.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 60 percre lesz szüksége.

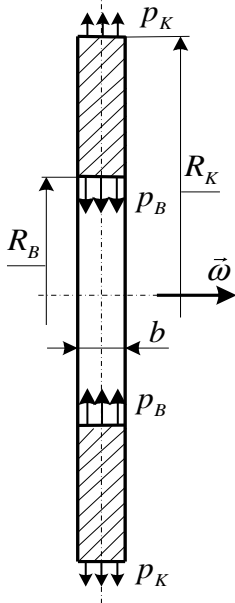
Kulcsfogalmak:

1. gyorsan fogó furatos tárcsa, redukált feszültség, feszültségi diagram
2. gyorsan forgó tömör tárcsa, gyorsan forgó egyenszilárdságú tömör tárcsa

6.9.1. Gyorsan forgó furatos tárcsa

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a feladat feltételezését! Rajzolja le a feladat modelljét! Jegyezze meg a feszültségeket és a peremfeltételeket meghatározó összefüggéseket!



Kiinduló feltételezések: - $\omega = \text{állandó}$,
- $\text{súlyerő} \approx 0$.

A p_B és a p_K más, a tárcsához kapcsolódó alkatrész hatását modellezi.

Változó: $\lambda = \frac{R^2}{R_K^2}$.

Feszültségek:

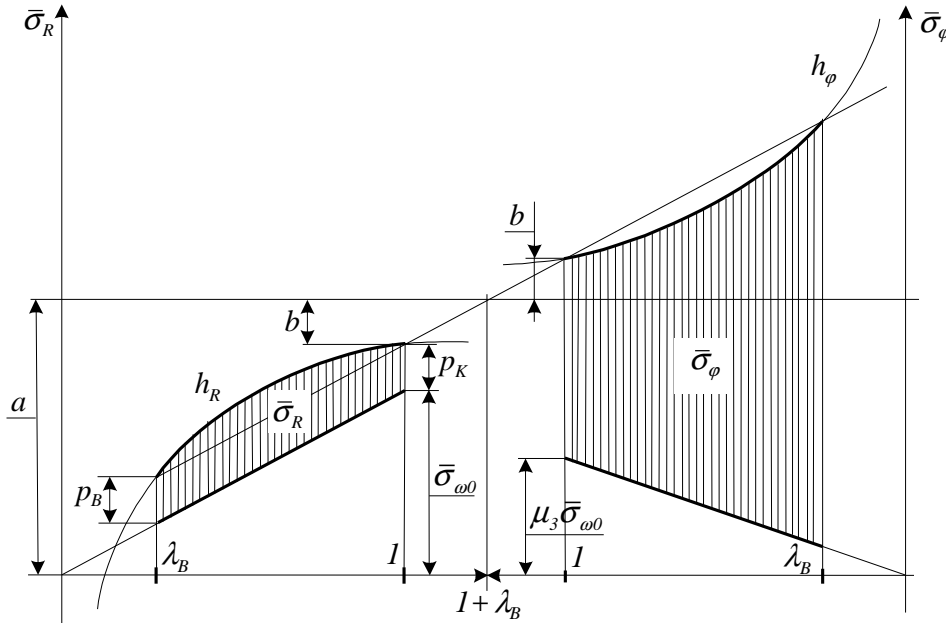
$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda \\ \bar{\sigma}_{\varphi} &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda \end{aligned} \right\}, \quad \bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3+\nu)\rho}{\nu} \frac{1}{8} (R_K \omega)^2, \quad \mu_3 = \frac{1+3\nu}{3+\nu}.$$

Peremfeltételek: $R = R_B, \quad (\lambda = \lambda_B), \quad \bar{\sigma}_R = p_B,$
 $R = R_K, \quad (\lambda = 1), \quad \bar{\sigma}_R = p_K.$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Rajzolja le a forgó tárcsa feszültségi diagramját! Írja fel és jegyezze meg a redukált feszültséget meghatározó összefüggéseket!

A forgó tárcsa diagramja:



A diagram szerkesztésének gondolatmenete megegyezik a gyorsan forgó csőtengely diagramjának szerkesztésénél leírtakkal.

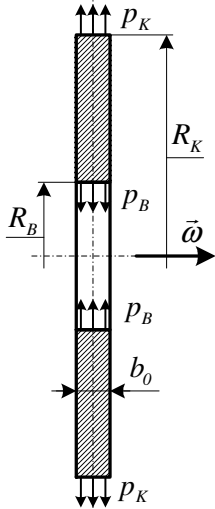
A redukált feszültség maximuma *Mohr* szerint:

$$\bar{\sigma}_{red \max} (Mohr) = \bar{\sigma}_\varphi (\lambda_B) = \sigma_{\omega_0} (2 + \lambda_B) - \mu_3 \sigma_{\omega_0} \lambda_B .$$

Gyakorló feladatok

Kövesse végig a levezetéseket! Oldja meg önállóan is a feladatokat!

1. feladat: Gyorsan forgó furatos körtárcsa



Adott:

Az ábrán látható állandó fordulatszámmal gyorsan forgó furatos tárcsa méretei, anyaga és fordulatszámja:

$\nu = 0,33$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $R_K = 200 \text{ mm}$, $R_B = 20 \text{ mm}$,
 $n = 3000 \text{ ford/min}$, $p_K = p_B = 0$.

Feladat:

- A $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ és a $\bar{\sigma}_\varphi(\lambda)$ függvények meghatározása.
- A $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ feszültség maximumának meghatározása.
- A furatos tárcsa megengedett legnagyobb fordulatszámának meghatározása, ha $\sigma_{meg} = 100 \text{ MPa}$.

Kidolgozás:

a) A $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ és a $\bar{\sigma}_\varphi(\lambda)$ függvények meghatározása:

$$\lambda_B = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{20}{200}\right)^2 = 0,01, \quad \mu_3 = \frac{3\nu + 1}{3 + \nu} = \frac{3 \cdot (0,33) + 1}{3 + (0,33)} = 0,598, \quad \omega = \frac{2\pi}{60} n = 314,2 \frac{1}{s}$$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3+\nu)\rho}{\nu} \frac{1}{8} (R_K \omega)^2 = \frac{(3+0,33) \cdot 7,8 \cdot 10^3}{0,33 \cdot 8} (0,2 \cdot 314,2)^2 = 38,85 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 38,85 \text{ MPa}.$$

Az átlagos feszültségek:

$$\bar{\sigma}_R = a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda, \quad \bar{\sigma}_{\varphi} = a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda, \quad \bar{\sigma}_z = 0.$$

Peremfeltételek:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_R(\lambda = \lambda_B) = p_B = 0 &\Rightarrow a - \frac{b}{0,01} = 0,01 \bar{\sigma}_{\omega 0}, \\ \bar{\sigma}_R(\lambda = 1) = p_K = 0 &\Rightarrow a - b = \bar{\sigma}_{\omega 0}. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} b &= \frac{\bar{\sigma}_{\omega 0}}{100} = 3,89 \text{ MPa}, \\ a &= 1,01 \bar{\sigma}_{\omega 0} = 39,25 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

A peremfeltételekből meghatározott a, b paramétereket az átlagos feszültségekre felírt összefüggésekbe helyettesítve:

$$\bar{\sigma}_R(\lambda) = 39,25 - \frac{3,89}{\lambda} - 38,85\lambda; \quad \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda) = 39,25 + \frac{3,89}{\lambda} - 23,23\lambda; \quad \bar{\sigma}_z = 0.$$

b) A $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ feszültség maximumának meghatározása:

Szélsoérték ott van, ahol a $\bar{\sigma}_R(\lambda)$ függvény deriváltja zérus:

$$\frac{d\bar{\sigma}_R(\lambda)}{d\lambda} = \frac{3,89}{\lambda^2} - 38,85 = 0, \Rightarrow \lambda = 0,3164 \text{ (a negatív gyöknek nincs fizikai tartalma).}$$

$$\bar{\sigma}_{R \max} = \bar{\sigma}_R(\lambda = 0,3164) = 39,25 - \frac{3,89}{0,3164} - 38,85 \cdot 0,3164 = 14,67 \text{ MPa}.$$

c) A furatos tárcsa megengedett legnagyobb fordulatszámának meghatározása, ha $\bar{\sigma}_{meg} = 100 \text{ MPa}$:

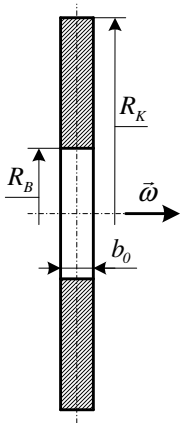
$$\bar{\sigma}_{red \max} = \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda_B) = (2 + \lambda_B - \mu_3 \lambda_B) \bar{\sigma}_{\omega 0 \max} = 2,004 \bar{\sigma}_{\omega 0 \max} = \bar{\sigma}_{meg} = 100 \text{ MPa},$$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0 \max} = \frac{100}{2,004} = 49,9 \text{ MPa}.$$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3+\nu)\rho}{\nu} \frac{\rho}{8} (R_K \omega)^2 \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\frac{8\nu\bar{\sigma}_{\omega 0 \max}}{(3+\nu)\rho R_K^2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0,33 \cdot 49,9 \cdot 10^6}{3,33 \cdot 7800 \cdot 0,04}} = 356 \frac{1}{s}.$$

$$n_{\max} = \omega_{\max} \frac{60}{2\pi} = 3400 \frac{\text{ford}}{\text{min}}.$$

2. feladat: Gyorsan forgó furatos körtárcsa



Adott:

Az ábrán látható $\bar{\omega}$ szögsebességgel gyorsan forgó furatos tárcsa anyaga, külső sugara és megengedett feszültsége: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 1/3$, $\rho = 8000$ kg/m³, $R_K = 200$ mm, $\sigma_{meg} = 80$ MPa.

Feladat:

- A forgó tárcsa diagramjának megrajzolása.
- Annak vizsgálata, hogyan függ a maximális fordulatszám a furat átmérőjétől.

Kidolgozás:

- A forgó tárcsa diagramjának megrajzolása:

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3+\nu)\rho}{\nu} \frac{\rho}{8} (R_K \omega)^2 = \frac{(10/3) \cdot 8 \cdot 10^3}{1/3 \cdot 8} (0,2 \cdot \omega)^2 = 400\omega^2, \quad \mu_3 = \frac{3\nu + 1}{3 + \nu} = \frac{3 \cdot (1/3) + 1}{3 + (1/3)} = 0,6.$$

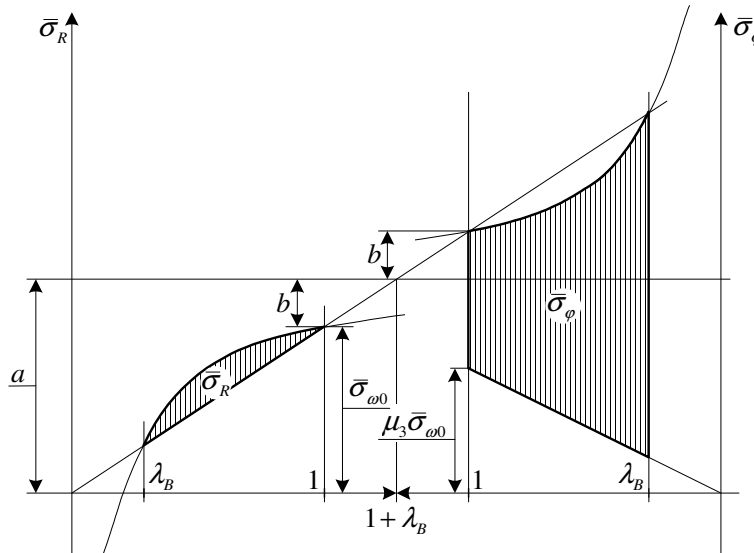
Feszültségek:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda, \\ \bar{\sigma}_{\varphi} &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda, \\ \bar{\sigma}_z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Peremfeltételek:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_R(\lambda = \lambda_B) &= p_B = 0, \\ \bar{\sigma}_R(\lambda = 1) &= p_K = 0. \end{aligned} \right\}$$

A forgó furatos tárcsa feszültség eloszlási diagramja:



b) Annak vizsgálata, hogyan függ a maximális fordulatszám a furat átmérőjétől:

A tárcsadiagramról leolvasható, hogy a Mohr-féle redukált feszültség maximális értéke:

$$\bar{\sigma}_{red \max} = \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda_B) - \bar{\sigma}_z(\lambda_B) = \bar{\sigma}_{\omega 0} (2 + \lambda_B - \mu_3 \lambda_B) - 0 = 400\omega^2 (2 + 0,4\lambda_B) \quad [\text{MPa}].$$

A fordulatszám csak addig növelhető, amíg a redukált feszültség el nem éri a megengedett feszültséget:

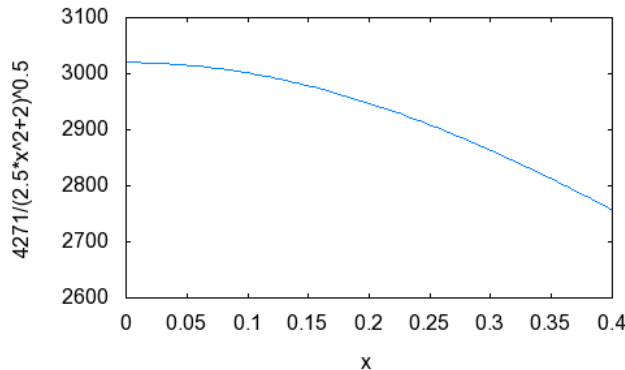
$$\sigma_{meg} = 80 \text{ MPa} = \bar{\sigma}_{red \max}(\omega_{\max}) = 400\omega_{\max}^2(2 + 0,4\lambda_B).$$

Figyelembe véve a $\lambda_B = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \frac{R_B^2}{0,04} = 25R_B^2 = 6,25D_B^2$ és $\omega = \frac{2\pi}{60}n$ összefüggéseket:

$$80 \cdot 10^6 = 400 \left(\frac{2\pi}{60} n_{\max} \right)^2 (2 + 0,4 \cdot 6,25 D_B^2) \Rightarrow n_{\max} = \frac{4271}{\sqrt{2 + 2,5 D_B^2}} \left[\frac{\text{ford}}{\text{min}} \right].$$

A képletbe a furatátmérőt méterben kell behelyettesíteni.

Az $n_{\max} = n_{\max}(D_B)$ függvény a jobb oldali ábrán látható:



6.9.2. Gyorsan forgó tömör tárcsa

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a tömör tárcsa mechanikai jellemzőit! Jegyezze meg a feszültségeket és a peremfeltételeket meghatározó összefüggéseket!

Tömör tárcsa: $R = R_B = 0$ ($\lambda_B = 0$).

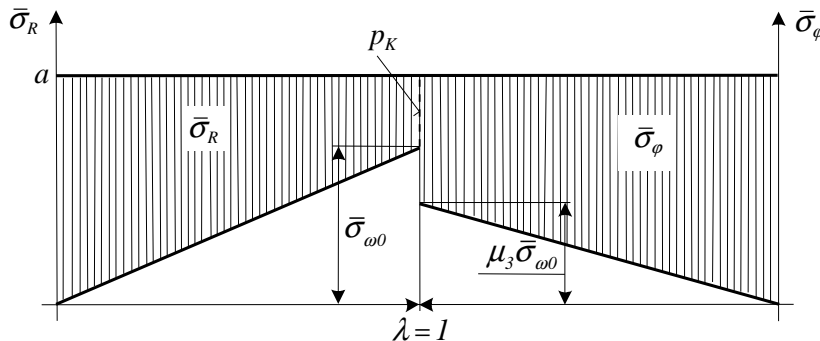
Tapasztalat: $R = 0$, ($\lambda = 0$)-nál is véges nagyságúak a feszültségek $\Rightarrow b = 0$.

$$\text{Feszültségek: } \left. \begin{array}{l} \bar{\sigma}_R = a - \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda, \\ \bar{\sigma}_{\varphi} = a - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda. \end{array} \right\}$$

Peremfeltétel: $\sigma_R(\lambda = 1) = p_K$.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Rajzolja le a tömör tárcsa feszültségi diagramját! Írja fel és jegyezze meg a redukált feszültséget meghatározó összefüggéseket!



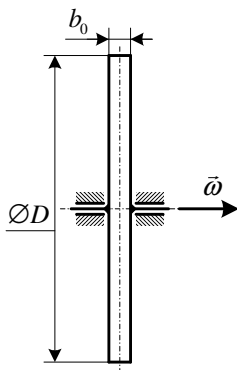
A redukált feszültség maximuma Mohr szerint:

$$\bar{\sigma}_{red \max} (Mohr) = \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda = 0) = a = \bar{\sigma}_{\omega 0} + p_K.$$

Gyakorló feladatok

Kövesse végig a levezetéseket! Oldja meg önállóan is a feladatokat!

1. feladat: Gyorsan forgó tömör körtárcsa



Adott: A D átmérőjű tömör tárcsa, amely $\vec{\omega}$ =állandó szögsebességgel forog. $D = 100$ mm, $b_0 = 10$ mm, $\rho = 8000$ kg/m³, $\nu = 1/3$, $\sigma_{\omega 0} = 30$ MPa.

Feladat:

- A $\bar{\sigma}_R(\lambda), \bar{\sigma}_\varphi(\lambda)$ függvények meghatározása.
- A $\bar{\sigma}_R(\lambda), \bar{\sigma}_\varphi(\lambda)$ diagramok megrajzolása.
- A Mohr-féle redukált feszültség maximumának meghatározása.
- A tárcsa legnagyobb szögsebességének kiszámítása, ha a megengedett feszültség: $\sigma_{meg} = 140$ MPa.

Kidolgozás:

a) A $\bar{\sigma}_R(\lambda), \bar{\sigma}_\varphi(\lambda)$ függvények meghatározása:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda \end{aligned} \right\} \lambda = \frac{R^2}{R_K^2}, \quad \mu_3 = \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} = \frac{1 + 3 \cdot 0,3333}{3 + 0,3333} = 0,6.$$

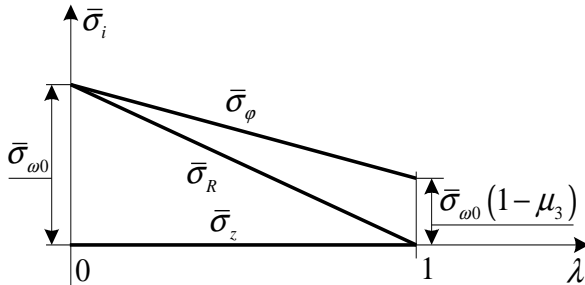
Az állandók meghatározása a peremfeltételekből:

$$\bar{\sigma}_R(\lambda = 1) = 0 = a - \bar{\sigma}_{\omega 0} \Rightarrow a = \bar{\sigma}_{\omega 0} = 30 \text{ MPa.}$$

$$\bar{\sigma}_R(\lambda = 0) \text{ véges} \Rightarrow b = 0.$$

b) A $\bar{\sigma}_R(\lambda), \bar{\sigma}_\varphi(\lambda)$ diagramok megrajzolása:

Feszültségi diagramok:



A feszültségeloszlás függvények:

$$\bar{\sigma}_R(\lambda) = \bar{\sigma}_{\omega 0}(1 - \lambda) = 30(1 - \lambda) \text{ [MPa]},$$

$$\bar{\sigma}_\varphi(\lambda) = \bar{\sigma}_{\omega 0}(1 - \mu_3\lambda) = 30(1 - 0,6\lambda) \text{ [MPa]},$$

$$\bar{\sigma}_z(\lambda) = 0.$$

c) A Mohr-féle redukált feszültség maximumának meghatározása:

A fenti tárcsa-diagramról leolvasható, hogy a legnagyobb- és a legkisebb főfeszültség közti különbség a $\lambda = 0$ helyen, vagyis a tárcsa középpontjában lép fel.

$$\bar{\sigma}_{red\ max}(Mohr) = \bar{\sigma}_R(\lambda = 0) - \bar{\sigma}_z(\lambda = 0) = \bar{\sigma}_{\omega 0} = 30 \text{ MPa}.$$

d) A tárcsa legnagyobb szögsebességének kiszámítása, ha $\sigma_{meg} = 140$ MPa:

A Mohr-elmélet szerint a tárcsa szilárdsági szempontból akkor megfelelő, ha a Mohr-féle redukált feszültség sehol sem haladja meg a megengedett feszültséget:

$$\sigma_{meg} \geq \bar{\sigma}_{red\ max}(Mohr) = \bar{\sigma}_{\omega 0} \Rightarrow \bar{\sigma}_{\omega 0} = 140 \text{ MPa}.$$

A $\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3+\nu)}{\nu} \frac{\rho}{8} (R_K \omega)^2$ összefüggésből a maximális szögsebesség meghatározható: $\omega_{\max} = \sqrt{\frac{8\nu}{3+\nu} \frac{\bar{\sigma}_{\omega 0}}{\rho R_K^2}} =$

$$\sqrt{\frac{8/3}{10/3} \frac{140 \cdot 10^6}{8000 \cdot 0,0025}} = 2366 \frac{1}{s}, \Rightarrow n_{\max} = \frac{60\omega_{\max}}{2\pi} = 22600 \frac{\text{ford}}{\text{min}}.$$

6.9.3. Gyorsan forgó egyenszilárdságú tömör tárcsa

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Tanulmányozza a kérdést és a megoldás lépéseit!

Kérdés: Milyen $b = b(R)$ tárcsavastagsággal érhető el a $\bar{\sigma}_R = \bar{\sigma}_\varphi = \bar{\sigma}_0 =$ állandó feltétel teljesülése?

A forgó tárcsa térfogati terhelése: $q_R = \rho \omega^2 R$.

Egyensúlyi egyenlet ÁSF esetén henger koordináta-rendszerben:

$$\frac{d(\bar{\sigma}_R b)}{dR} + \frac{(\bar{\sigma}_R - \bar{\sigma}_\varphi) b}{R} + b q_R = 0.$$

A $\bar{\sigma}_R = \bar{\sigma}_\varphi = \bar{\sigma}_0 =$ állandó, illetve a $\bar{\sigma}_R - \bar{\sigma}_\varphi = 0$ feltétel teljesülését akarjuk elérni!

$$\bar{\sigma}_0 \frac{db}{dR} + b q_R = 0,$$

$\frac{db}{dR} + \underbrace{\frac{\rho \omega^2}{\bar{\sigma}_0}}_{K=\text{áll.}} R b = 0$. Ez egy szétválasztható típusú differenciálegyenlet.

A differenciál egyenlet megoldása:

Átrendezés után: $\frac{db}{b} = -K R dR$.

Mindkét oldalt integrálva: $\int_{b_0}^b \frac{db}{b} = -K \int_{R=0}^R R dR$, ahol b_0 a tárcsavastagság az $R = 0$ helyen.

Az integrálást elvégezve: $\ln \frac{b}{b_0} = -K R^2 \Rightarrow b = b(R) = b_0 e^{-\frac{K}{2} R^2}$.

Ez az egyenszilárdságú gyorsan forgó tömör tárcsa meridián görbéjének egyenlete.

A görbe inflexiós pontjának megkeresése:

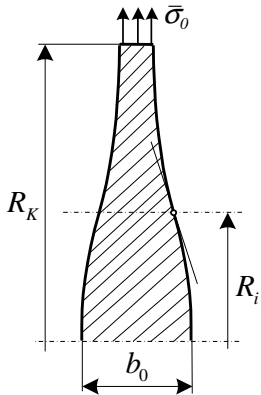
Az első derivált: $\frac{db}{dR} = -b(KR)$,

A második derivált: $\frac{d^2b}{dR^2} = \frac{db}{dR}(-KR) - bK = bK^2R^2 - bK = b(K^2R^2 - K) = 0$.

Az átalakítás során felhasználtuk, hogy $\frac{db}{dR} = b_0 e^{-\frac{K}{2}R^2} 2\left(-\frac{K}{2}\right)R = -bKR$.

A görbe inflexiós pontjában a második derivált nulla:

$$\frac{d^2b}{dR^2} = KR^2 - 1 = 0, \Rightarrow R_i = \sqrt{\frac{1}{K}} = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_0}{\rho\omega^2}} \text{ az inflexiós hely sugara.}$$



A megoldás az $R \rightarrow \infty$ esetre érvényes.

A megoldást úgy használjuk, hogy a tárcsát az R_K -nál elvágjuk és itt működtetünk egy $p_K = \bar{\sigma}_0$ felületi terhelést.

Gyakorlati példa:

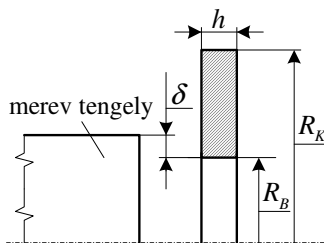
Gázturbina forgórésze modellezhető így.

A $p_K = \bar{\sigma}_0$ a lapátozás forgás következtében fellépő hatása.

Gyakorló feladatok

Kövesse végig a levezetéseket! Oldja meg önállóan is a feladatokat!

1. feladat: Merev tengelyre szerelt gyorsan forgó furatos körtárcsa



Adott: A merev tengelyre δ túlfedéssel szerelt tárcsa méretei és anyagjellemzői:

$$R_B = 20 \text{ mm}, R_K = 200 \text{ mm}, h = 40 \text{ mm}, \\ \delta = 0,02 \text{ mm}, \rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \nu = 0,3, E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}.$$

Feladat:

- Annak az ω_{\max} szögsebességnek a meghatározása, amelynél a tárcsa „lelazul” (megszűnik a túlfedés).
- A feszültségek meghatározása ebben a „lelazulási” esetben.
- Milyen p nyomás lép fel a tárcsa és a tengely között, ha nem forog a tengely?
- Mekkora axiális erő szükséges a tárcsa lehúzásához, ha $\mu = 0,25$?
- Melyik állapot, a gyors forgási, vagy a nyugalmi állapot a veszélyesebb?

Kidolgozás:

- Annak az ω_{\max} szögsebességnek a meghatározása, amelynél a tárcsa „lelazul” (megszűnik a túlfedés):

$$\lambda = \frac{R^2}{R_K^2}, \quad \lambda_B = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0,01, \quad \mu_3 = \frac{1+3\nu}{3+\nu} = \frac{1,9}{3,3} = 0,5757.$$

Feszültségek: $\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda, \\ \bar{\sigma}_{\varphi} &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda. \end{aligned} \right\} \text{ ahol } \bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3+\nu}{8} \rho (R_K \omega)^2.$

Peremfeltételek a lazuláskor: $\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_R(\lambda=1) &= 0 = a - b \bar{\sigma}_{\omega 0} \\ \bar{\sigma}_R(\lambda_B) &= 0 = a - \frac{b}{\lambda_B} - \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda_B \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = b + \bar{\sigma}_{\omega 0}.$

Az állandók meghatározása:

$$0 = b - \frac{b}{\lambda_B} + \bar{\sigma}_{\omega 0} - \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda_B = b \frac{\lambda_B - 1}{\lambda_B} + \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda_B (1 - \lambda_B) \Rightarrow b = \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda_B, \quad a = \bar{\sigma}_{\omega 0} (1 + \lambda_B).$$

A túlfedés: $\delta = R_B \varepsilon_{\varphi}(\lambda_B) = \frac{R_B}{E} \sigma_{\varphi}(\lambda_B) = \frac{R_B}{E} \bar{\sigma}_{\omega 0} \underbrace{[(1 + \lambda_B) + 1 - \mu_3 \lambda_B]}_{[2 + (1 - \mu_3) \lambda_B]}.$

Ebből: $\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{E}{R_B} \frac{\delta}{2 + (1 - \mu_3) \lambda_B},$ illetve $\frac{3+\nu}{8} \rho R_K^2 \omega_{\max}^2 = \frac{E}{R_B} \frac{\delta}{2 + (1 - \mu_3) \lambda_B}.$

$$\omega_{\max} = \frac{1}{R_K} \sqrt{\frac{E}{\rho R_B} \frac{8}{3+\nu} \frac{\delta}{2 + (1 - \mu_3) \lambda_B}} = \frac{1}{0,2} \sqrt{\frac{8}{3,3} \cdot \frac{2 \cdot 10^6}{7800 \cdot 0,02} \frac{2 \cdot 10^{-5}}{2 + (1 - 0,57) 10^{-2}}}.$$

$$\omega_{\max} = 881,55 \frac{1}{s}.$$

b) A feszültségek meghatározása ebben a „lelazulási” esetben:

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3+\nu}{8} \rho R_K^2 \omega_{\max}^2 = \frac{3,3}{8} \cdot 7800 \cdot 0,2^2 \cdot 881,5^2 = 100\,005\,337,6 \text{ Pa.}$$

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = 100 \text{ MPa.}$$

Az állandók meghatározása: $a = b + \bar{\sigma}_{\omega 0} (1 + \lambda_B) = 101 \text{ MPa}, \quad b = \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda_B = 1 \text{ MPa.}$

Feszültségek a külső és belső sugárnál:

$$\bar{\sigma}_R(\lambda=1) = a - b - \bar{\sigma}_{\omega 0} = \bar{\sigma}_{\omega 0}(1 + \lambda_B) - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B - \bar{\sigma}_{\omega 0} = 0.$$

$$\bar{\sigma}_R(\lambda_B) = a - \frac{b}{\lambda_B} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B = \bar{\sigma}_{\omega 0}(1 + \lambda_B) - \bar{\sigma}_{\omega 0} - \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B = 0.$$

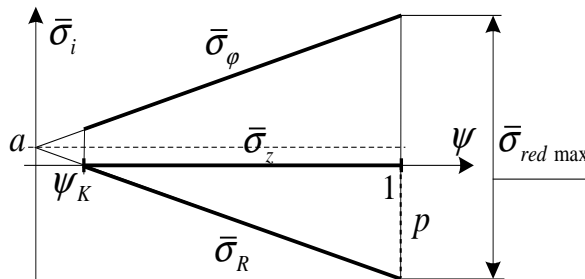
$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda=1) &= a + b - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0} = \bar{\sigma}_{\omega 0}(1 + \lambda_B) + \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0} = \\ &= \bar{\sigma}_{\omega 0}(1 + 2\lambda_B - \mu_3) = 100(1 + 0,02 - 0,5757) = 44,43 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda_B) &= a + \frac{b}{\lambda_B} - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B = \bar{\sigma}_{\omega 0}(1 + \lambda_B) + \bar{\sigma}_{\omega 0} - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0}\lambda_B = \\ &= \bar{\sigma}_{\omega 0}(1 + 2\lambda_B - \mu_3\lambda_B) = 100(1 + 0,01 - 0,00575) = 200,4 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

c) Milyen p nyomás lép fel a tárcsa és a tengely között, ha nem forog a tengely?

Feszültségeloszlás álló tárcsa esetén: $\left. \begin{array}{l} \bar{\sigma}_R = a - b \psi \\ \bar{\sigma}_{\varphi} = a + b \psi \end{array} \right\}$, ahol $\psi = \frac{R_B^2}{R^2}$.

Peremfeltételek: $\left. \begin{array}{l} \bar{\sigma}_R(\psi_K) = 0 = a - b \psi_K \\ \bar{\sigma}_R(\psi=1) = -p = a - b \end{array} \right\}$, $\psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2} = 0,01$.



A túlfedés:

$$\delta = R_B \bar{\varepsilon}_\varphi (\psi=1) = \frac{R_B}{E} [\bar{\sigma}_\varphi - \nu \bar{\sigma}_R]_{\psi=1}.$$

$$\delta = \frac{R_B}{E} \left[\frac{p}{1-\psi_K} 2 - p + \nu p \right] = \frac{R_B}{E} p \left(\frac{1+\psi_K}{1-\psi_K} + \nu \right).$$

Ebből:

$$p = \frac{\delta E}{R_B \left(\frac{1+\psi_K}{1-\psi_K} + \nu \right)} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{0,02 \left(\frac{1,01}{0,99} + 0,3 \right)} = 151,5 \cdot 10^6 \text{ Pa} \approx 152 \text{ MPa}.$$

d) Mekkora axiális erő szükséges a tárcsa lehúzásához, ha $\mu = 0,25$?

$$F_{ax} = \mu p 2R_B \pi h = 1,9 \cdot 10^5 \text{ N} = 190 \text{ kN}.$$

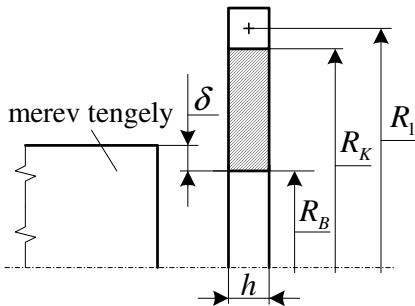
e) Melyik állapot, a gyors forgási, vagy a nyugalmi állapot a veszélyesebb?

$$\sigma_{red \max} \text{ alapján dönthető el: } \sigma_{red \max} (\text{álló}) = \frac{2p}{1-2\nu} = 307,1 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{red \max} (\text{forgó}) = \sigma_\varphi (\lambda_B) = 133,9 \text{ MPa}.$$

A nyugalmi állapot a veszélyesebb.

2. feladat: Merev tengelyre szerelt gyorsan forgó furatos körtárcsa



Adott: A vázolt h vastagságú tárcsát δ túlfedéssel szerelik a merev tengelyre. A tárcsa kerületén sűrű lapátózás van. A lapátok együttes tömege m_1 és súlypontjuk az R_1 sugárra esik. Ismert a tárcsa geometriája és anyaga:

$$R_B = 15 \text{ mm}, R_K = 120 \text{ mm}, R_1 = 135 \text{ mm}, h = 20 \text{ mm},$$

$$m_1 = 1,5 \text{ kg}, \rho = 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}, \nu = 0,3.$$

Feladat:

- Milyen δ túlfedés kell ahhoz, hogy a tárcsa $\omega = 1000$ 1/s szögsebesség esetén lazuljon le a tengelyről?
- Mekkora p nyomás lép fel a tárcsa és a tengely között összeszerelés után, ha $\omega = 0$?
- Tönkremenetel (törés) szempontjából melyik állapot a veszélyesebb?

Kidolgozás:

- Milyen δ túlfedés kell ahhoz, hogy a tárcsa $\omega = 1000$ 1/s szögsebesség esetén lazuljon le a tengelyről?

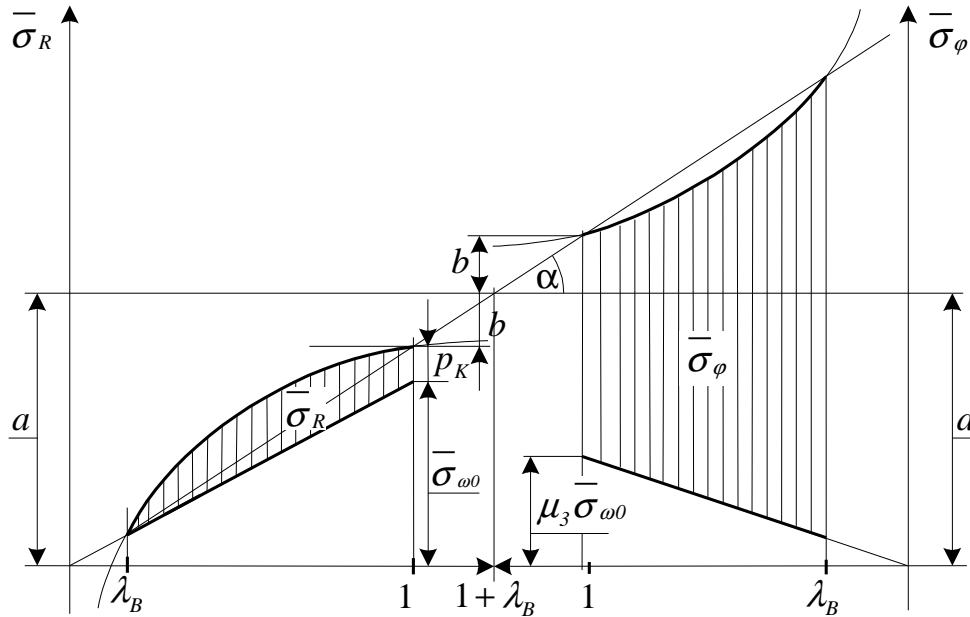
A lapátózásból származó kerületi (felületen megoszló) terhelés:

$$p_k = \frac{m_1 R_1 \omega^2}{2 R_K \pi h} = \frac{1,5 \cdot 0,135 \cdot 1000^2}{2 \cdot 0,12 \cdot 3,1415 \cdot 0,02} = 13,429 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 13,44 \text{ MPa}.$$

Feszültségek:
$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda \\ \bar{\sigma}_{\varphi} &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda \end{aligned} \right\}, \lambda = \frac{R^2}{R_K^2}, \bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3+\nu}{8} \rho (R_K \omega)^2.$$

Peremfeltételek lazuláskor:
$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_R(\lambda=1) &= p = a - b - \bar{\sigma}_{\omega 0} \\ \bar{\sigma}_R(\lambda_B) &= a - \frac{b}{\lambda_B} - \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda_B \end{aligned} \right\}$$

Tárcsa diagram:



Állandók meghatározása: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{(\bar{\sigma}_{\omega 0} + p_K) - \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda_B}{1 - \lambda_B}$,

$$a = \frac{\bar{\sigma}_{\omega 0} (1 - \lambda_B) + p_K}{1 - \lambda_B} + \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda_B, b = \frac{\bar{\sigma}_{\omega 0} (1 - \lambda_B) + p_K}{1 - \lambda_B} \lambda_B.$$

Az állandók kiszámítása: $\lambda_B = \frac{R_B^2}{R_K^2} = \left(\frac{15}{120}\right)^2 = 15,63 \cdot 10^{-3}$, $\mu_3 = \frac{1+3\nu}{3+\nu} = \frac{1,9}{3,3} = 0,5757$.

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3+\nu}{8} \rho R_K^2 \omega^2 = \frac{3,3}{8} \cdot 7860 \cdot 0,12^2 \cdot 10^6 = 46,688 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 46,688 \text{ MPa},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\bar{\sigma}_{\omega 0} (1 - \lambda_B) + p_K}{1 - \lambda_B} = 60,33 \text{ MPa},$$

$$a = \operatorname{tg} \alpha + \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda_B = 60,33 + 46,688 \cdot 15,63 \cdot 10^{-3} = 61,06 \text{ MPa},$$

$$b = \operatorname{tg} \alpha \cdot \lambda_B = 60,33 \cdot 15,63 \cdot 10^{-3} = 0,943 \text{ MPa}.$$

Túlfedés:
$$\delta = R_B \varepsilon_{\varphi}(\lambda_B) = \frac{R_B}{E} \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda_B) = \frac{R_B}{E} \left(a + \frac{b}{\lambda_B} - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda_B \right) =$$

$$= \frac{15}{2 \cdot 10^5} (61,06 + 60,33 - 0,576 \cdot 46,688 \cdot 15,63 \cdot 10^{-3}) = 9,1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}.$$

Feszültségek: $\bar{\sigma}_B(\lambda_B) = 0, \bar{\sigma}_R(\lambda = 1) = p_K = 13,44 \text{ MPa},$
 $\bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda_B) = 121 \text{ MPa}, \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda = 1) = 35,1 \text{ MPa}.$

b) A tárcsa és a tengely között összeszerelés után fellépő p nyomás meghatározása, ha $\omega = 0$:

Feszültségeloszlás nyugalmi helyzetben:
$$\left. \begin{array}{l} \bar{\sigma}_R = a - b \psi, \\ \bar{\sigma}_{\varphi} = a + b \psi. \end{array} \right\}$$

Peremfeltételek:
$$\left. \begin{array}{l} \bar{\sigma}_R(\psi_K) = 0 = a - b \psi_K, \\ \bar{\sigma}_R(\psi = 1) = p = a - b. \end{array} \right\} \quad \psi_K = \lambda_B = 15,63 \cdot 10^{-3}.$$

$$\delta = R_B \varepsilon_{\varphi}(\psi = 1) = \frac{R_B}{E} [\bar{\sigma}_{\varphi} - \nu \bar{\sigma}_R]_{\psi=1} = \frac{R_B}{E} p \left(\frac{1 + \psi_K}{1 - \psi_K} + \nu \right).$$

Ebből:
$$p = \frac{\delta E}{R_B \left(\frac{1 + \psi_K}{1 - \psi_K} + \nu \right)} = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 9,1 \cdot 10^{-6}}{0,0015 \left(\frac{1,0156}{0,984} + 0,3 \right)} = 87,44 \cdot 10^6 \text{ Pa} \approx 87,44 \text{ MPa}.$$

c) Tönkremenetel (törés) szempontjából veszélyesebb állapot meghatározása:

Ez a kérdés a $\sigma_{red \max}$ alapján dönthető el:

Gyors forgás: $\bar{\sigma}_{red \max f} = \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda_B) = 121 \text{ MPa}.$

Nyugalmi állapot: $\bar{\sigma}_{red \max} = 2 \frac{p}{1 - \psi_K} = 2 \frac{87,44}{1 - 0,0156} = 177,72 \text{ MPa}.$

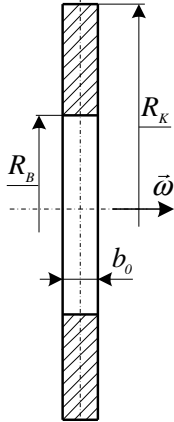
A nyugalmi állapot a veszélyesebb.

Önellenőrzés

1. Írja fel egy lapra a gyorsan fogó furatos tárcsa feladat feltételezéseit!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
2. Írja fel egy lapra a gyorsan fogó furatos tárcsa esetén a peremfeltételeket!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
3. Írja fel egy lapra gyorsan fogó furatos tárcsa esetén a feszültségeket meghatározó összefüggést!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
4. Írja fel egy lapra gyorsan fogó furatos tárcsa esetén a redukált feszültség maximumát meghatározó összefüggést Mohr-szerint!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
5. Írja fel egy lapra a gyorsan fogó tömör tárcsa esetén a peremfeltételeket!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!
6. Írja fel egy lapra gyorsan forgó tömör tárcsa esetén a redukált feszültség maximumát meghatározó összefüggést Mohr-szerint!
A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

7. Gyorsan forgó furatos körtárcsa

Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



Adott:

Az $\vec{\omega}$ szögsebességgel gyorsan forgó furatos tárcsa geometriája, anyaga és terhelése:

$$D_K = 400 \text{ mm}, D_B = 40 \text{ mm}, \rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, n = 3000 \frac{1}{\text{min}},$$

$$\nu = 0,3.$$

A forgásból származó és az anyagra jellemző állandók:

$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{3+\nu}{8} 8 (R_K \omega)^2 = 12,701 \text{ MPa}, \mu_3 = \frac{1+3\nu}{3+\nu} = \frac{1,9}{3,3} = 0,5757.$$

- Feladat: A) A $\bar{\sigma}_{R \max}$, $\bar{\sigma}_{\varphi}$ feszültségek meghatározása.
B) Legfeljebb milyen szögsebességgel foroghat a tárcsa, ha $\sigma_{meg} = 100 \text{ MPa}$?

A) A $\bar{\sigma}_R$, $\bar{\sigma}_{\varphi}$ feszültségek meghatározása.

I./ Válassza ki a helyes megoldást! A keresett $\bar{\sigma}_{R \max}$ feszültség:

$$\bar{\sigma}_{R \max} = 9,23 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{R \max} = 9,86 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{R \max} = 10,29 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{R \max} = 12,76 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{R \max} = 14,34 \text{ MPa}$$

II./ Válassza ki a helyes megoldást! A keresett $\bar{\sigma}_\varphi (\lambda=1)$ feszültség:

$$\bar{\sigma}_\varphi (\lambda=1) = 4,8 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_\varphi (\lambda=1) = 5,7 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_\varphi (\lambda=1) = 6,3 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_\varphi (\lambda=1) = 6,9 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_\varphi (\lambda=1) = 7,2 \text{ MPa}$$

III./ Válassza ki a helyes megoldást! A keresett $\bar{\sigma}_\varphi (\lambda_B)$ feszültség:

$$\bar{\sigma}_\varphi (\lambda_B) = 25,46 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_\varphi (\lambda_B) = 22,12 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_\varphi (\lambda_B) = 20,41 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_\varphi (\lambda_B) = 18,32 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_\varphi (\lambda_B) = 16,11 \text{ MPa}$$

B) Legfeljebb milyen szögsebességgel foroghat a tárcsa, ha $\sigma_{meg} = 100 \text{ MPa}$?

I./ Válassza ki a helyes megoldást! A keresett ω_{\max} szögsebesség:

$$\omega_{\max} = 541 \text{ 1/s}$$

$$\omega_{\max} = 589 \text{ 1/s}$$

$$\omega_{\max} = 610 \text{ 1/s}$$

$$\omega_{\max} = 621 \text{ 1/s}$$

$$\omega_{\max} = 659 \text{ 1/s}$$

8. Gyorsan forgó tömör körtárcsa

Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!

Adott: A forgó tömör tárcsa geometriája, fordulatszáma és anyaga.

$$D = 400 \text{ mm}, \rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, n = 3000 \frac{1}{\text{min}}, \nu = 0,3.$$

Feladat: A) A $\bar{\sigma}_R$, $\bar{\sigma}_\varphi$ feszültségek meghatározása.

B) Milyen fordulatszámnál megy tönkre a tárcsa, ha $\sigma_{meg} = 240 \text{ MPa}$?

A) A $\bar{\sigma}_R$, $\bar{\sigma}_\varphi$ feszültségek meghatározása.

I./ Rajzolja fel egy lapra a feszültségi diagramot a szükséges értékekkel!

A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!

B) Milyen fordulatszámnál megy tönkre a tárcsa, ha $\sigma_{meg} = 240 \text{ MPa}$?

I./ Válassza ki a helyes megoldást! A keresett n_{\max} fordulatszám:

$$n_{\max} = 12,231 \text{ 1/min}$$

$$n_{\max} = 13,041 \text{ 1/min}$$

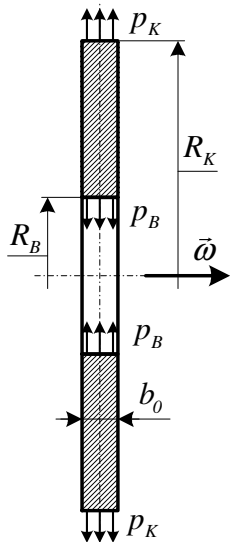
$$n_{\max} = 14,253 \text{ 1/min}$$

$$n_{\max} = 15,221 \text{ 1/min}$$

$$n_{\max} = 16,005 \text{ 1/min}$$

9. Gyorsan forgó körgyűrű tárcsa

Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



Adott:

Az ábrán látható $\vec{\omega}$ szögsebességgel gyorsan forgó furatos tárcsa anyaga, geometriája és szögsebessége:

$E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 1/3$, $\rho = 8000$ kg/m³, $b_0 = 20$ mm,

$R_K = 200$ mm, $R_B = 100$ mm, $\omega = 300$ rad/s, $p_K = p_B = 0$.

Feladat:

- A gyorsan forgó tárcsa diagramjának megszerkesztése.
- Az $R = R_K$ helyen levő P pontokban a feszültségi tenzor mátrixának felírása az R, φ, z hengerkoordináta-rendszerben.
- A tárcsa szilárdságtani ellenőrzésének elvégzése *Mohr* szerint, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 80$ MPa.
- A tárcsa belső átmérője ΔD_B megváltozásának kiszámítása.

A) A forgó tárcsa diagramjának megszerkesztése:

I./ Rajzolja fel egy lapra a feszültségi diagramot!

A megoldás megtekintéséhez kattintson [ide!](#)

B) Az $R = R_K$ helyen levő P pontokban a feszültségi tenzor mátrixának felírása az R, φ, z hengerkoordináta-rendszerben:

I./ Határozza meg az $\begin{bmatrix} F \\ \underline{\underline{P}} \end{bmatrix}_{R\varphi z}$ feszültségi tenzor mátrixát!

A megadás módja: pozitív szám: 5, negatív szám: -8, nulla: 0, tört szám: 23,2

A feszültségi tenzort a következő formában kell felépíteni:

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ 1 & x1 & y1 & z1 \\ 2 & x2 & y2 & z2 \\ 3 & x3 & y3 & z3 \end{array} \quad \text{MPa}$$

Írja be a keresett értékeket!

A tenzor értékei:

$$\begin{array}{lll} x1 = & y1 = & z1 = \\ x2 = & y2 = & z2 = \\ x3 = & y3 = & z3 = \end{array}$$

C) A tárcsa szilárdságtani ellenőrzésének elvégzése *Mohr* szerint, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 80$ MPa.

I./ Válassza ki a helyes megoldást! A keresett $\bar{\sigma}_{red \max}$ feszültség:

$$\bar{\sigma}_{red \max} = 64,34 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{red \max} = 75,6 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{red \max} = 79,6 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{red \max} = 81,2 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{red \max} = 85,6 \text{ MPa}$$

II./ Döntse el, hogy a tárcsa szilárdsági szempontból megfelel-e! Válassza ki a helyes választ!

igen

nem

**D) A tárcsa belső átmérője ΔD_B megváltozásának kiszámítása:**

I./ Válassza ki a helyes megoldást! A keresett ΔD_B méretváltozás:

$$\Delta D_B = 21,6 \mu\text{m}$$

$$\Delta D_B = 24,5 \mu\text{m}$$

$$\Delta D_B = 27,9 \mu\text{m}$$

$$\Delta D_B = 30,5 \mu\text{m}$$

$$\Delta D_B = 32,4 \mu\text{m}$$

VII. MODUL

Vékony forgáshéjak membrán elmélete

23. LECKE

Alapfogalmak, egyenletek, példák

7. Vékony forgáshéjak membrán elmélete

7.1. Alapfogalmak, egyenletek, példák

Cél: a hallgató megismerje a vékony forgáshéjak membrán elméletét

Követelmények:

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha:

1. meg tudja határozni a héj, a középfelület, a forgásszimmetrikus héj, meridiánsík, meridián metszet fogalmak jelentését;
2. fel tudja sorolni a membrán feszültségi állapot jellemzőit;
3. fel tudja írni a feszültségi tenzort;
4. le tudja rajzolni az élerőket szemléltető ábrát;
5. fel tudja írni az élerőket meghatározó összefüggéseket;
6. fel tudja írni az egyensúlyi egyenletet;
7. fel tudja írni a leggyakrabban előforduló héjak geometriai jellemzőit meghatározó összefüggéseket;
8. membrán állapot esetén adatok alapján meg tudja határozni a felületi feszültségi állapotot, a fajlagos alakváltozási jellemzőket és az elmozdulás-koordinátákat.

Időszükséglet:

A tananyag elsajátításához körülbelül 65 percre lesz szüksége.

Kulcsfogalmak:

1. héj, középfelület, forgásszimmetrikus héj, meridián
2. feszültségi állapot
3. membrán, membrán állapot
4. élerő, igénybevétel, egyensúlyi egyenlet
5. geometriai jellemző
6. felületi feszültségi állapot, fajlagos alakváltozási jellemző, elmozdulás-koordináta

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Jegyezze meg a héj, a középfelület, a forgásszimmetrikus héj, a meridiánsík, meridián metszet, meridián görbe fogalmak jelentését!

Héj: olyan test, amelynek egyik mérete (a vastagsága) lényegesen kisebb, mint a másik kettő, értelmezhető a középfelület és ez nem sík.

Középfelület: a b vastagsági méret felezési pontjai által alkotott felület.

Gyakorlati példa héjra: csővezetékek, tartályok, nyomástartó edények, stb.

Közös jellemző: a tárolt, szállított közeg (folyadék, gáz) a héj felületére merőleges felületi terhelést hoz létre.

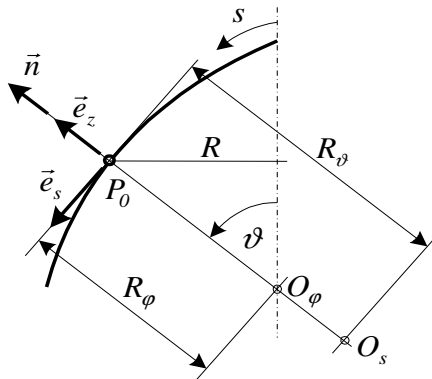
Forgásszimmetrikus héj:

- a héj középfelülete forgásfelület (a középfelület egy görbének, az ún. meridiángörbének egy adott tengely körüli forgatásával állítható elő),
- a héj terhelése is forgásszimmetrikus/tengelyszimmetrikus.

Következmény: a mechanikai mennyiségek nem függenek a tengely körüli φ forgatási szögtől.

Meridiánsík: a forgástengelyre illeszkedő sík.

Meridián metszet / meridiángörbe: a középfelület és a forgástengelyre illeszkedő sík metszetgörbéje.



s – a meridiángörbén mért ívkoordináta,

P_0 - a középfelület pontja,

\vec{e}_s - a meridiángörbe érintő irányú egységvektora,

$\vec{n} = \vec{e}_z$ - a meridiángörbe normális egységvektora,

$\vec{e}_s, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ - a meridiángörbéhez kötött derékszögű koordináta-rendszer egységvektorai,

$\vec{e}_z \vec{e}_s$ - a meridiánsík,

R_ϑ - a meridiángörbe görbületi sugara,

$\vec{e}_\varphi \vec{e}_z$ - a normál sík,

R_φ - a normál metszet görbéjének görbületi sugara.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki és jegyezze meg a membrán feszültségi állapot jellemzőit! Írja fel és jegyezze meg a feszültségi tenzort!

Membrán feszültségi állapot:

- A feszültségek a héj b vastagsága mentén nem változnak \Rightarrow a mechanikai mennyiségek csak az s ívkoordinátától függenek.
- A belső erők (feszültségek) héj vastagsága mentén vett eredő ereje (élerő) az érintősíkba esik.
- A belső erők (feszültségek) héj vastagsága mentén vett eredő nyomatéka (élnyomaték) zérus.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_s = \text{állandó,} \\ \sigma_\varphi = \text{állandó,} \\ \tau_{s\varphi} = \text{állandó.} \end{array} \right\} \text{ a vastagság mentén.} \quad \Rightarrow \quad \text{A feszültségi tenzor: } \underline{\underline{F}}_{s\varphi z} = \underline{\underline{F}}(s) = \begin{bmatrix} \sigma_s & \tau_{s\varphi} & 0 \\ \tau_{\varphi s} & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\sigma_z = \tau_{sz} = \tau_{\varphi z} = 0.$$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Gyűjtse ki és jegyezze meg az élerő jellemzőit! Írja fel és jegyezze meg az élerőket meghatározó összefüggéseket! Rajzolja fel az élerőket szemléltető ábrát!

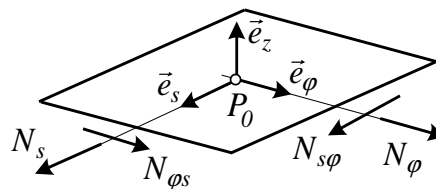
Vastagság mentén vett feszültségi eredők (élerők):

Élerő:

- a héj vastagsága mentén vett feszültségi eredő,
- vonal mentén megosztó belső erő [N/mm].

A zérustól különböző élerők membrán állapot esetén:

$$N_s = b\sigma_s, \quad N_\varphi = b\sigma_\varphi, \quad N_{s\varphi} = N_{\varphi s} = b\tau_{s\varphi} = b\tau_{\varphi s}.$$



b – a héj vastagsági mérete.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Írja fel és jegyezze meg az egyensúlyi egyenletet!

Igénybevétel:

Rudak: a keresztmetszetre számított eredők. (Elnevezés: igénybevételek – erők, nyomatékok).

Héjak: a héj vastagságára számított eredők. (Elnevezés: élerők, élnyomatékok).

Egyensúlyi egyenlet (forgásszimmetrikus héj, membrán állapot): $\frac{N_s}{R_s} + \frac{N_\varphi}{R_\varphi} = p_z$.

Ebben az esetben a három egyensúlyi egyenletből csak ez és a forgástengely irányú egyensúlyi egyenlet marad meg: $F_a = 0 = 2R\pi N_a - R^2\pi p_a$, ahol az a index a forgástengely irányára utal.

A forgásszimmetrikus héj membrán feszültségi állapota egyensúlyi egyenletekből határozható meg.

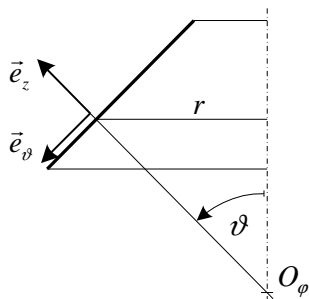
Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Tanulmányozza az ábrákat és az összefüggéseket! Jegyezze meg a bemutatott héjak geometria jellemzőit megadó összefüggéseket!

7.2. Példák héjak membrán feszültségi állapotának meghatározására

A leggyakrabban előforduló héjak geometriai jellemzői

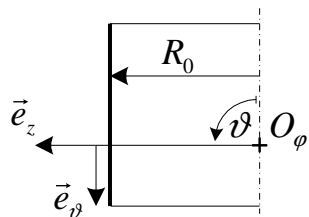
a) Kúpos héj



$$R_{\vartheta} \rightarrow \infty,$$

$$R_{\varphi} = \frac{r}{\sin \vartheta}.$$

b) Körhenger héj

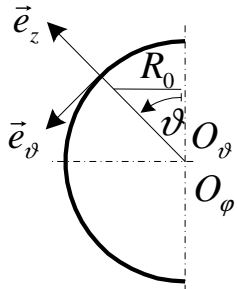


$$R_{\vartheta} \rightarrow \infty,$$

$$R_{\varphi} = R_0,$$

$$\vartheta = 90^\circ.$$

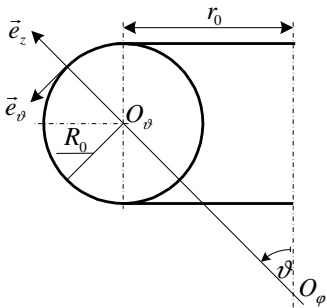
c) Gömbhéj



$$R_\vartheta = R_0,$$

$$R_\varphi = R_0.$$

d) Körgyűrű héj



$$R_\vartheta = R_0,$$

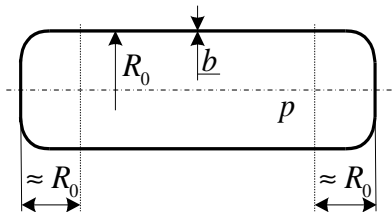
$$R_\varphi = R_0 + \frac{r_0}{\sin \vartheta}.$$

Gyakorló feladatok

Tevékenység:

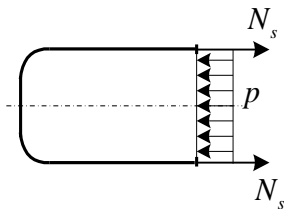
Olvassa el a bekezdést! Tanulmányozza az ábrákat és az összefüggéseket! Jegyezze meg a bemutatott körhenger héj geometriai jellemzőit megadó összefüggéseket! Írja fel és jegyezze meg a feszültségeket, a feszültségi tenzort és a redukált feszültséget megadó összefüggéseket!

1. Körhenger héj – hengeres tartály



A körhenger héj középső szakaszán, a végektől kb. R_0 távolságra, membrán állapot alakul ki.

A héjat a forgástengelyre merőleges síkkal átmetszük:



A forgástengely irányú vetületi egyensúlyi egyenlet:

$$2 R_0 \pi N_s - R_0^2 \pi p = 0,$$

$$N_s = \frac{R_0 p}{2} = \text{állandó}.$$

Egyensúlyi egyenlet: $\underbrace{\frac{N_s}{R_s}}_{=0} + \frac{N_\varphi}{R_\varphi} = p_z$

Az egyenletben: $R_s \rightarrow \infty$, $R_\varphi = R_0$, $p_z = p$, ezért $N_\varphi = p R_0 = \text{állandó}$.

Feszültségek: $\sigma_s = \frac{N_s}{b} = \frac{R_0}{2b} p = \text{állandó},$
 $\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{b} = \frac{R_0}{b} p = \text{állandó}.$

A σ_φ -re vonatkozó összefüggést szokás **kazán formulának** is hívni.

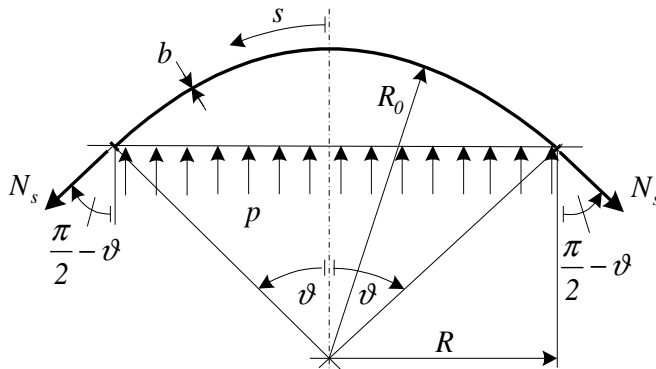
A feszültségi tenzor: $\underline{\underline{F}}_{s\varphi z} = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{állandó.}$

A *Mohr* szerint számított redukált feszültség: $\sigma_{red}(Mohr) = \sigma_\varphi = \frac{R_0}{b} p = \text{állandó.}$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Tanulmányozza az ábrákat és az összefüggéseket! Jegyezze meg a bemutatott gömbhéj geometriai jellemzőit megadó összefüggéseket! Írja fel és jegyezze meg a feszültségeket, a feszültségi tenzort és a redukált feszültséget megadó összefüggéseket!

2. Gömbhéj – gömbtartály



A függőleges tengely irányú vetületi egyensúlyi egyenlet:

$$2 R \pi N_s \sin \vartheta - R^2 \pi p = 0,$$

$$2 N_s \sin \vartheta - R p = 0,$$

$$2 N_s \frac{R}{R_0} - R p = 0,$$

$$N_s = \frac{R_0 p}{2} = \text{állandó.}$$

Egyensúlyi egyenlet: $\frac{N_s}{R_s} + \frac{N_\varphi}{R_\varphi} = p_z$

Az egyenletben: $R_s = R_\varphi = R_0$, $p_z = p$, ezért $\frac{N_s}{R_0} + \frac{N_\varphi}{R_0} = p \Rightarrow N_\varphi = R_0 p - N_s = \frac{R_0 p}{2} = \text{állandó.}$

Gömbi (pont) szimmetria: $N_s = N_\varphi = \frac{R_0 p}{2} = \text{állandó}$.

Feszültségek: $\sigma_s = \sigma_\varphi = \frac{R_0}{2b} p = \text{állandó}$.

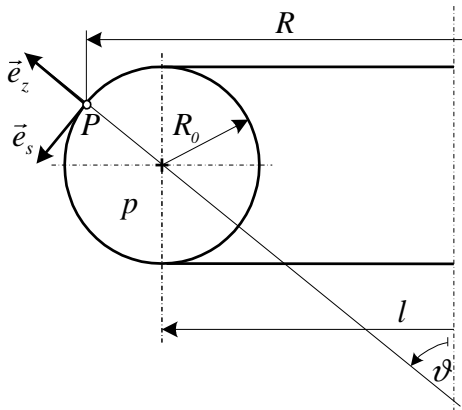
A feszültségi tenzor: $\underline{\underline{F}}_{s\varphi z} = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{állandó}$.

A Mohr szerint számított redukált feszültség: $\sigma_{red}(Mohr) = \sigma_s = \sigma_\varphi = \frac{R_0}{2b} p = \text{állandó}$.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Tanulmányozza az ábrákat és az összefüggéseket! Jegyezze meg a bemutatott körgyűrű héj geometriai jellemzőit megadó összefüggéseket! Írja fel és jegyezze meg az egyensúlyi egyenletet!

3. Körgyűrű (tórusz) héj



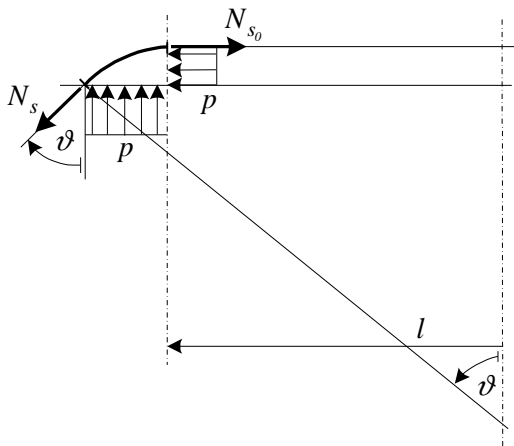
Görbületi sugarak:

$$R_s = R_0, R_\varphi = R_0 + \frac{l}{\sin \vartheta},$$

A P pont forgástengelytől mért sugara:

$$R = l + R_0 \sin \vartheta.$$

Elmetszés: - a P ponton átmenő, a tórusz forgástengelyére merőleges síkra,
- egy $R = l$ sugarú hengerrel.



Az $R = l$ sugarú hengerfelületen:

- N_{s0} önmagában is egyensúlyi erőrendszer,
- p önmagában is egyensúlyi erőrendszer.

Forgástengely irányú vetületi egyensúlyi egyenlet: $2R\pi N_s \sin \vartheta - (R^2 - l^2) \pi p = 0$.

Átalakítás: $R = l + R_0 \sin \vartheta$,

$$2(l + R_0) N_s \sin \vartheta - (l^2 + 2lR_0 \sin \vartheta + R_0^2 \sin^2 \vartheta - l^2) p = 0,$$

$$2(l + R_0) N_s \sin \vartheta - (2l + R_0 \sin \vartheta) R_0 \sin \vartheta p = 0.$$

$$N_s = \frac{R_0 p}{2} \frac{2l + R_0 \sin \vartheta}{l + R_0 \sin \vartheta}.$$

Egyensúlyi egyenlet: $\frac{N_s}{R_s} + \frac{N_\varphi}{R_\varphi} = p_z$.

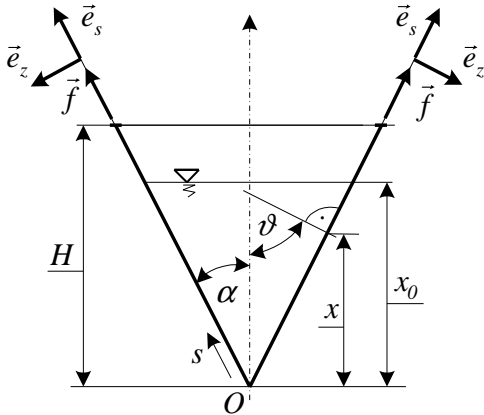
Behelyettesítve:

$$\begin{aligned}
 N_\varphi &= R_\varphi p_z - N_s \frac{R_\varphi}{R_s} = \left(R_0 + \frac{l}{\sin \vartheta} \right) p - \frac{R_0 p_z}{2} \frac{2l + R_0 \sin \vartheta}{l + R_0 \sin \vartheta} \frac{\left(R_0 + \frac{l}{\sin \vartheta} \right)}{R_0} = \\
 &= \left(R_0 + \frac{l}{\sin \vartheta} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2l + R_0 \sin \vartheta}{l + R_0 \sin \vartheta} \right) p = \frac{p}{\sin \vartheta} (R_0 \sin \vartheta + l) \left(\frac{2l + 2R_0 \sin \vartheta - 2l - R_0 \sin \vartheta}{2(l + R_0 \sin \vartheta)} \right). \\
 N_\varphi &= \frac{p R_0}{2} = \text{állandó.}
 \end{aligned}$$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Tanulmányozza az ábrákat és az összefüggéseket! Jegyezze meg a bemutatott kúp alakú héj geometriai jellemzőit megadó összefüggéseket! Írja fel és jegyezze meg az egyensúlyi egyenletet!

4. Kúp alakú héj



A megtámasztás (felfüggesztés) olyan, hogy $\vec{f} = f \vec{e}_s$.

Geometria: $\alpha = \frac{\pi}{2} - \vartheta$.

$x = s \cos \alpha = s \sin \vartheta$.

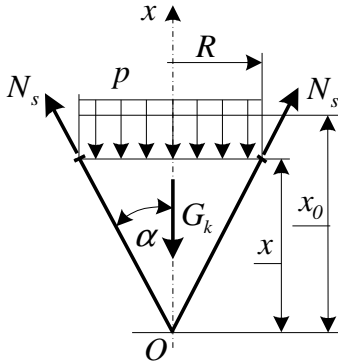
Görbületi sugarak: $R_s \rightarrow \infty$, $R_\varphi = \frac{s}{\operatorname{tg} \vartheta} = s \operatorname{tg} \alpha = x \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$,

$R = s \cos \vartheta = x \operatorname{tg} \alpha$.

A folyadéknnyomás: $p = p_z = \gamma (x_0 - x) = \rho g (x_0 - x)$.

A feszültségállapot meghatározása:

A $0 \leq x \leq x_0$ szakaszon:



A folyadék súlya: $G_k = \gamma \frac{R^2 \pi}{3} x = \gamma \frac{\pi}{3} (\operatorname{tg}^2 \alpha) x^3$.

Tengelyirányú vetületi egyenlet:

$$2 R \pi N_s \sin \vartheta - R^2 \pi p - G_k = 0,$$

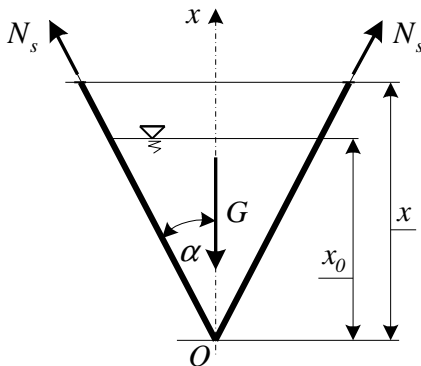
$$N_s = \frac{\gamma}{6} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} (3 x_0 x - 2 x^2).$$

Egysúlyi egyenlet: $\frac{N_s}{R_s} + \frac{N_\varphi}{R_\varphi} = p_z$.

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=0}$

$$N_\varphi = R_\varphi p_z = x \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \gamma (x_0 - x) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \gamma (x x_0 - x^2).$$

Az $x_0 \leq x \leq H$ szakaszon:



A teljes folyadék súlya: $G = \gamma \frac{\pi}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha x^3$.

Tengelyirányú vetületi egyenlet:

$$2 (H \operatorname{tg} \alpha) \pi N_s \sin \vartheta - G = 0,$$

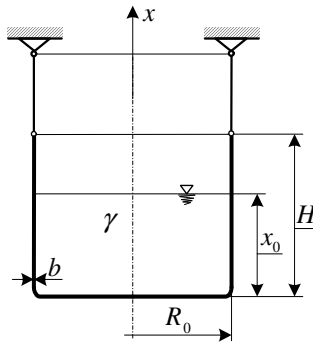
$$N_s = \frac{\gamma}{6} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} x_0^2 \frac{1}{x}.$$

Egysúlyi egyenlet: $N_\varphi = R_\varphi \underbrace{p_z}_{=0} = 0$.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Tanulmányozza az ábrákat és az összefüggéseket! Jegyezze meg a feszültségi-és az alakváltozási állapot meghatározásának lépéseit!

5. Folyadékkal töltött hengeres tartály



Adott: az ábrán látható, függőleges tengelyű, folyadékkal töltött hengeres tartály

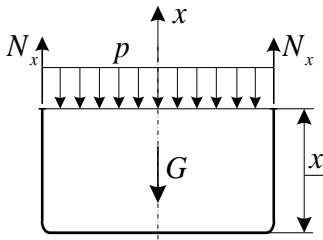
Feladat: a felületi feszültségi állapot és az alakváltozási állapot az alábbi két esetben:

- Ha $0 < x < x_0$ és $p_z = \gamma(x_0 - x)$.
- Ha $x_0 < x < H$ és $p_z = 0$.

Kidolgozás:

Henger geometria: $s_\vartheta = x$, $R_\vartheta \rightarrow \infty$, $R_\varphi = R_0$.

a) Ha $0 < x < x_0$ és $p_z = \gamma(x_0 - x)$:



A tartályrészben levő víz súlya: $G = (R_0^2 \pi x) \gamma$.

A tartályrész fölötti víz nyomása: $p(x) = \gamma(x_0 - x)$.

Tengely irányú vetületi egyenlet:

$$2R_0\pi N_x - R_0^2\pi\gamma(x_0 - x) - R_0^2\pi x\gamma = 0,$$

$$N_x = \frac{R_0\gamma(x_0 - x - x)}{2} = \frac{R_0}{2}\gamma(x_0 - 2x).$$

Egyensúlyi egyenlet: $\frac{N_\vartheta}{R_\vartheta} + \frac{N_\varphi}{R_\varphi} = p_z \Rightarrow N_\varphi = R_0 p = R_0 \gamma (x_0 - x).$

Alakváltozási jellemzők meghatározása:

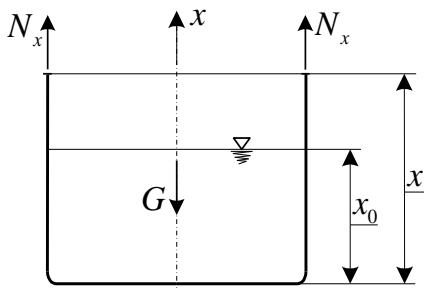
$$\varepsilon_{x0} = \frac{1}{Eb} (N_x - \nu N_\varphi) = \frac{1}{Eb} \left[\frac{R_0 \gamma}{2} (x_0 - 2x) - \nu R_0 \gamma (x_0 - x) \right] = \frac{R_0 \gamma \nu}{2Eb} \left[\frac{1}{\nu} (x_0 - 2x) - 2(x_0 - x) \right],$$

$$\varepsilon_{\varphi 0} = \frac{1}{Eb} (N_\varphi - \nu N_x) = \frac{1}{Eb} \left[\frac{R_0 \gamma}{2} (x_0 - x) - \frac{R_0 \gamma}{2} \nu (x_0 - 2x) \right] = \frac{R_0 \gamma \nu}{2Eb} \left[\frac{2}{\nu} (x_0 - x) - (x_0 - 2x) \right].$$

A sugár irányú elmozdulás-koordináta meghatározása:

$$w_0 = r \varepsilon_{\varphi 0} = r \frac{R_\varphi}{bE} \left[p_z - \left(\frac{1}{R_\vartheta} + \frac{\nu}{R_\varphi} \right) N_\vartheta \right] = \frac{R_0^2}{bE} \left[\gamma (x_0 - x) + \frac{\nu}{R_0} \frac{R_0}{2} \gamma (x_0 - 2x) \right] > 0.$$

b) Ha $x_0 < x < H$ és $p_z = 0$:



Vetületi egyenlet: $2R_0 \pi N_x - R_0^2 \pi x_0 \gamma = 0.$

$$N_x = \frac{R_0 x_0}{2} \gamma = \text{állandó}, \quad N_\varphi = p_z R_\varphi = 0.$$

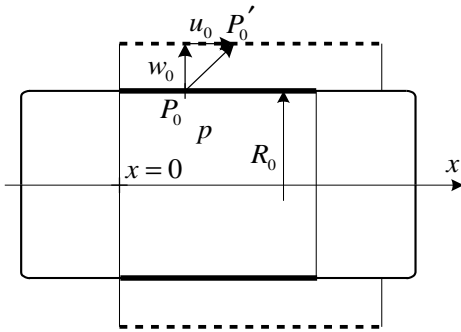
$$\varepsilon_{x0} = \frac{1}{Eb} N_x = \frac{R_0 x_0 \gamma}{2Eb}, \quad \varepsilon_{\varphi 0} = -\frac{\nu N_\varphi}{Eb} = -\frac{\nu R_0 x_0 \gamma}{2Eb}.$$

$$w_0 = r \varepsilon_{\varphi 0} = -\frac{\nu R_0^2 x_0 \gamma}{2Eb} < 0.$$

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Tanulmányozza az ábrákat és az összefüggéseket! Jegyezze meg a feszültségi állapot, a fajlagos alakváltozási jellemzők és az elmozdulás koordináták meghatározásának lépéseit!

6. Belső nyomással terhelt körhenger héj alakváltozása membrán állapotban



Adott:

A p belső nyomás, a középfelület R_0 sugara, a héj b vastagsága és anyaga (E, ν) .

A héj membránállapotban levő (záró fedeletől távol eső) részét vizsgáljuk!

Feladat:

- A felületi feszültségi állapot meghatározása.
- A fajlagos alakváltozási jellemzők meghatározása.
- Az elmozdulás-koordináták meghatározása.

Kidolgozás:

a) A felületi feszültségi állapot meghatározása:

$$N_x = \frac{pR_0}{2} = \text{állandó}, \quad N_\varphi = pR_0 = \text{állandó}.$$

b) Fajlagos alakváltozási jellemzők meghatározása:

$$\varepsilon_{x0} = \frac{1}{Eb} (N_x - \nu N_\varphi) = \frac{1}{Eb} \left(\frac{pR_0}{2} - \nu pR_0 \right) = \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{R_0}{b} \frac{p}{E}.$$

$$\varepsilon_{\varphi 0} = \frac{1}{Eb} (-\nu N_x + N_\varphi) = \frac{1}{Eb} \left(-\nu \frac{pR_0}{2} + pR_0 \right) = \frac{2 - \nu}{2} \frac{R_0}{b} \frac{p}{E}.$$

c) Az elmozdulás-koordináták meghatározása:

$$w_0 = R_0 \varepsilon_{\varphi 0} = \frac{2 - \nu}{2} \frac{R_0^2}{b} \frac{p}{E} = \text{állandó.}$$

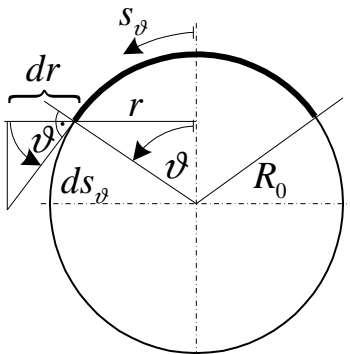
$$u_0 - \underbrace{u_0|_{x=0}}_{=0} = \int_{\xi=0}^x \varepsilon_{x0} d\xi = \varepsilon_{x0} \cdot x = \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{R_0}{b} \frac{p}{E} x$$

$w_0 = \text{állandó} \Rightarrow$ a körhenger héj membrán állapotban egyenletesen tágul $\Rightarrow \chi_x = 0$.

Tevékenység:

Olvassa el a bekezdést! Tanulmányozza az ábrákat és az összefüggéseket! Jegyezze meg a feszültségi állapot, a fajlagos alakváltozási jellemzők és az elmozdulás koordináták meghatározásának lépéseit!

7. Belső nyomással terhelt gömbhéj alakváltozása membrán állapotban



Az ábrából: $\frac{dr}{ds_{\vartheta}} = \cos \vartheta$.

Adott:

A p belső nyomás, a középfelület R_0 sugara, a héj b vastagsága és anyaga (E, ν) .

A héj membránállapotban levő (záró fedelektől távol eső) részét vizsgáljuk!

Feladat:

- A felületi feszültségi állapot meghatározása.
- A fajlagos alakváltozási jellemzők meghatározása.
- Az elmozdulás-koordináták meghatározása.

Kidolgozás:

a) A felületi feszültségi állapot meghatározása (egyensúlyi egyenletekből):

$$N_{\vartheta} = N_{\varphi} = \frac{pR_0}{2} = \text{állandó.}$$

b) A fajlagos alakváltozási jellemzők meghatározása:

$$\varepsilon_{\vartheta 0} = \frac{1}{Eb} (N_{\vartheta} - \nu N_{\varphi}), \quad \varepsilon_{\varphi 0} = \frac{1}{Eb} (-\nu N_{\vartheta} + N_{\varphi}).$$

$$\varepsilon_{\vartheta 0} = \varepsilon_{\varphi 0} = \frac{1}{Eb} \left(\frac{R_0 p}{2} - \nu \frac{R_0 p}{2} \right) = \frac{1 - \nu}{2} \frac{R_0}{b} \frac{p}{E}$$

c) Az elmozdulás-koordináták meghatározása:

$$w_0 = \varepsilon_{\varphi 0} r = \frac{1 - \nu}{2} \frac{R_0}{b} \frac{p}{E} (R_0 \sin \vartheta) = \frac{1 - \nu}{2} \frac{R_0^2}{b} \frac{p}{E} \sin \vartheta.$$

$$\frac{du_0}{ds_{\vartheta}} = \frac{\varepsilon_{\vartheta 0}}{\sin \vartheta} - ctg \vartheta \frac{d}{ds_{\vartheta}} (r \varepsilon_{\varphi 0}) = \frac{\varepsilon_{\vartheta 0}}{\sin \vartheta} - ctg \vartheta \cos \vartheta \varepsilon_{\varphi 0}.$$

Átalakítás: $\frac{dr}{ds_{\vartheta}} = \cos \vartheta$.

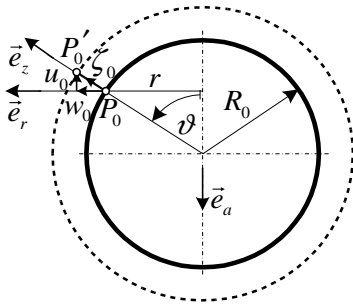
$$\frac{du_0}{ds_{\vartheta}} = \varepsilon_{\vartheta 0} \frac{1}{\sin \vartheta} - \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin \vartheta} \varepsilon_{\varphi 0} = \varepsilon_{\vartheta 0} \frac{1 - \cos^2 \vartheta}{\sin \vartheta} = \varepsilon_{\vartheta 0} \sin \vartheta,$$

Integrálás az $ds_{\vartheta} = R_0 d\vartheta$ összefüggés figyelembevételével:

$$\frac{u_0}{R_0} = \varepsilon_{\vartheta 0} \int \sin \vartheta d\vartheta = -\varepsilon_{\vartheta 0} \cos \vartheta + C.$$

Peremfeltétel: a $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ helyen $u_0 = 0 \Rightarrow C = 0$.

$$u_0 = -R_0 \varepsilon_{\vartheta 0} \cos \vartheta = -\frac{1-\nu}{2} \frac{R_0^2}{b} \frac{p}{E} \cos \vartheta.$$



Transzformáció:

$$\xi_0 = u_0 \sin \vartheta + w_0 \cos \vartheta,$$

$$\zeta_0 = -u_0 \cos \vartheta + w_0 \sin \vartheta.$$

Elmozdulás-koordináták a transzformáció után: $\xi_0 = 0$
 $\zeta_0 = \frac{1-\nu}{2} \frac{R_0^2}{b} \frac{p}{E} = \text{állandó}.$

A gömbhéj membrán állapotban egyenletesen tágul.

Önellenőrzés

1. Egészítse ki a következő mondatot a szükséges kifejezésekkel!

Héj: olyan test, amelynek egyik mérete (a vastagsága) \ll , mint a másik kettő, értelmezhető a középfelület és ez \Rightarrow .

2. Egészítse ki a következő mondatot a szükséges kifejezésekkel!

Középfelület: a \times b méret \Rightarrow pontjai által alkotott .

3. Írja le egy papírra a meridián sík meghatározását!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

4. Válassza ki a páronként a helyes megoldást!

Membrán feszültségi állapot:

a feszültségek a héj b vastagsága mentén nem változnak \Rightarrow a mechanikai mennyiségek csak az s ívkoordinátától függenek

a feszültségek a héj b vastagsága mentén változnak \Rightarrow a mechanikai mennyiségek nem függenek az s ívkoordinátától

a belső erők (feszültségek) héj vastagsága mentén vett eredő ereje (élerő) az érintősíkra merőlegesek

a belső erők (feszültségek) héj vastagsága mentén vett eredő ereje (élerő) az érintősíkba esik

a belső erők (feszültségek) héj vastagsága mentén vett eredő nyomatéka (élnyomaték) nem zérus

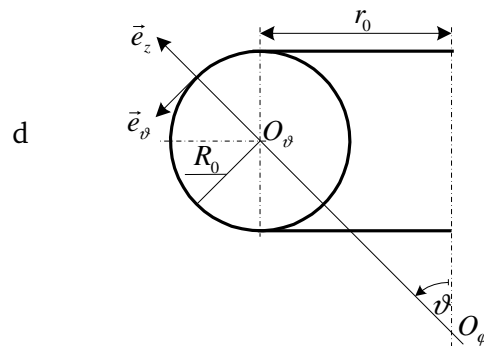
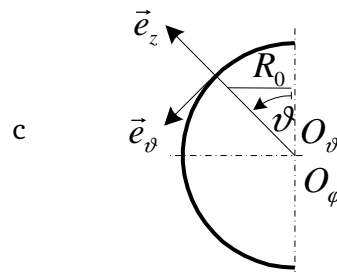
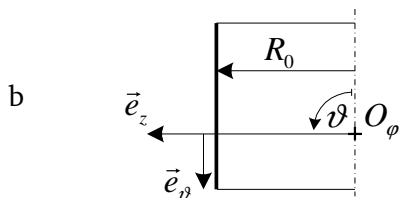
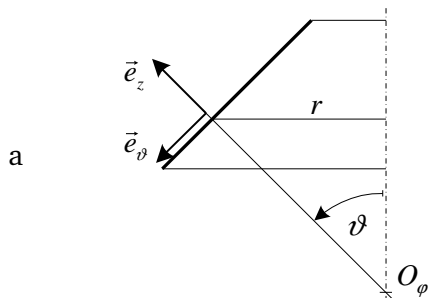
a belső erők (feszültségek) héj vastagsága mentén vett eredő nyomatéka (élnyomaték) zérus

5. Írja fel egy papírra – membrán feszültségi állapot esetén - a feszültségi tenzort!

[A megoldás megtekintéséhez kattintson ide!](#)

6. Sorolja fel/írja le egy papírra az érők két jellemzőjét!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
7. Rajzolja fel egy papírra az érőket szemléltető ábrát!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
8. Írja fel egy papírra a zérustól különböző érőket membrán állapot esetén!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)
9. Írja fel egy papírra - forgásszimmetrikus héj, membrán állapot esetén – az egyensúlyi egyenletet!
A megoldás megtekintéséhez [kattintson ide!](#)

10. Párosítsa a leggyakrabban előforduló héjak ábráit és a geometriai jellemzőiket! Írja a megfelelő kisbetűt a neki megfelelő jellemzők mellé!



Jel

Geometriai jellemzők

$$R_\vartheta = R_0, R_\varphi = R_0$$

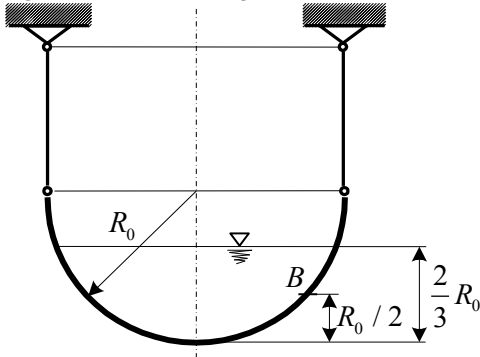
$$R_\vartheta \rightarrow \infty, R_\varphi = R_0, \vartheta = 90^\circ$$

$$R_\vartheta = R_0, R_\varphi = R_0 + \frac{r_0}{\sin \vartheta}$$

$$R_\vartheta \rightarrow \infty, R_\varphi = \frac{r}{\sin \vartheta}$$

11. Folyadékkal töltött gömbtartály

Végezze el a szükséges számításokat, majd válaszoljon a kérdésekre!



Adott: az ábrán vázolt félgömb alakú héj középfelületének meridián görbéje. A meridián görbe R_0 sugarú körív. A héj γ fajsúlyú folyadékot tárol.

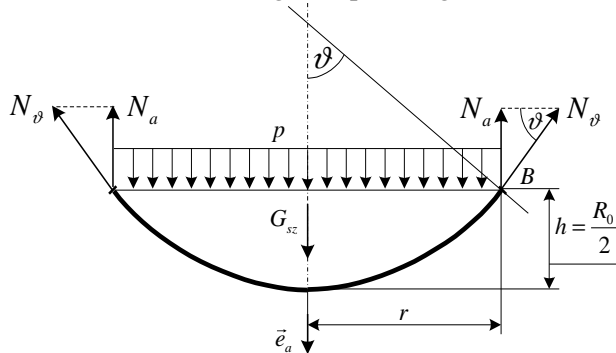
$E=2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $R_0=4 \cdot 10^3 \text{ mm}$, $\nu=0,3$,
 $b=22,5 \text{ mm}$, $\gamma=5 \cdot 10^{-2} \text{ N/mm}^3$.

Feladat:

Feltételezve, hogy a gömbhéjban membrán állapot alakul ki, meghatározni a középfelület B pontjában

- a felületi feszültségi állapot koordinátáit,
- az $\varepsilon_{\varphi 0}$ fajlagos nyúlást és a radiális irányú w_0 elmozdulást.

a) A felületi feszültségi állapot meghatározása a B pontban.



I./ Határozza meg a ϑ értékét!

Írja be a keresett egész számot!

$\vartheta =$ fok

II./ Határozza meg a megoszló terhelés sűrűségét!

Válassza ki a helyes megoldást!

$$p = \frac{0,2}{4} \text{ N/mm}^2$$

$$p = \frac{0,2}{6} \text{ N/mm}^2$$

$$p = \frac{0,1}{6} \text{ N/mm}^2$$

$$p = \frac{0,4}{8} \text{ N/mm}^2$$

$$p = \frac{0,9}{4} \text{ N/mm}^2$$

III./ Határozza meg az N_φ értékét!

Válassza ki a helyes megoldást!

$$N_\varphi = -177,36 \text{ N/mm}$$

$$N_\varphi = -133,54 \text{ N/mm}$$

$$N_\varphi = -198,21 \text{ N/mm}$$

$$N_\varphi = -164,44 \text{ N/mm}$$

$$N_\varphi = -109,63 \text{ N/mm}$$

b) Az $\varepsilon_{\varphi 0}$ fajlagos nyúlás és a radiális irányú w_0 elmozdulás meghatározása.

IV./ Határozza meg az $\varepsilon_{\varphi 0}$ értékét!

Válassza ki a helyes megoldást!

$$\varepsilon_{\varphi 0} = -1,567 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{\varphi 0} = -2,563 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{\varphi 0} = -2,124 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{\varphi 0} = -1,998 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{\varphi 0} = -2,854 \cdot 10^{-5}$$

V./ Határozza meg az w_0 értékét!

Válassza ki a helyes megoldást!

$$w_0 = -0,0098 \text{ mm}$$

$$w_0 = -0,0135 \text{ mm}$$

$$w_0 = -0,0056 \text{ mm}$$

$$w_0 = -0,0109 \text{ mm}$$

$$w_0 = -0,0210 \text{ mm}$$

VIII. MODUL

F.I. FÜGGELÉK: MATEMATIKAI
ÖSSZEFOGLALÓ

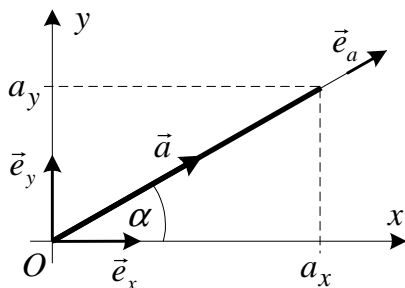
8. F.I. FÜGGELÉK: MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

8.1. Vektorok és vektorműveletek

Skaláris mennyiség: olyan geometriai, vagy fizikai mennyiség, amelyet nagyság, (előjel) és mértékegység jellemez.

Vektor mennyiség: irányított geometriai, vagy fizikai mennyiség, amelyet nagyság (előjel), irány és mértékegység jellemez.

a) Vektor megadása:



Egységvektorok: \vec{e}_x, \vec{e}_y .

Az egységvektorok hossza egységnyi:

$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1.$$

Egy tetszőleges vektor megadása egységvektorokkal: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$.

Ha ismert az \vec{a} vektor hossza és az x tengellyel bezárt szöge, akkor az előző összefüggésből:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha \vec{e}_x + |\vec{a}| \sin \alpha \vec{e}_y = |\vec{a}| (\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y) = |\vec{a}| \vec{e}_a$$

Az \vec{a} vektor hosszát a *Pitagorasz*²⁶-tétel segítségével számíthatjuk ki: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Könnyen belátható az is, hogy \vec{e}_a vektor egységvektor: $|\vec{e}_a| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$.

A vektorok közötti műveletek a vektorok támadáspontjához, vagy hatásvonalhoz kötöttségétől függetlenül érvényesek.

²⁶ Szamoszi Pitagorasz (Kr.e. 582-496) ión/görög matematikus és filozófus.

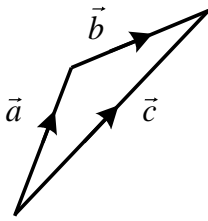
b) Vektorok összeadása:

Legyen adott két vektor: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$, $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y$.

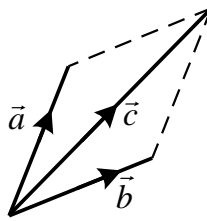
A két vektor összegének kiszámítása:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y) + (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y) = \underbrace{(a_x + b_x)}_{c_x} \vec{e}_x + \underbrace{(a_y + b_y)}_{c_y} \vec{e}_y = \vec{c}.$$

A két vektor összegének megszerkesztése:



Háromszög szabály



Paralelogramma szabály

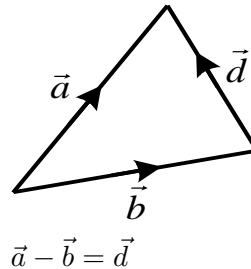
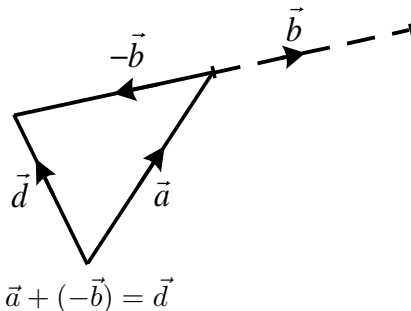
c) Vektorok kivonása:

Legyen adott két vektor: $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$, $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y$.

A két vektor különbségének kiszámítása:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y) - (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y) = \underbrace{(a_x - b_x)}_{d_x} \vec{e}_x + \underbrace{(a_y - b_y)}_{d_y} \vec{e}_y = \vec{d}.$$

Két vektor különbségének megszerkesztése:



d) Vektorok skaláris szorzása (az eredmény skaláris mennyiség):

A skaláris szorzás értelmezése: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$.

A skaláris szorzás kiszámítása: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ jelölés kiejtése (kiolvasása): \vec{a} skalárisan szorozva \vec{b} -vel.

Egységvektorok skaláris szorzata: $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1, \quad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1, \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1,$
 $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0, \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0, \quad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0.$

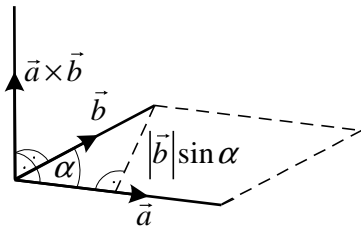
Az eredmény általánosítása: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ és $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Az $\vec{a} \perp \vec{b}$ jelölés kiejtése (kiolvasása): \vec{a} merőleges \vec{b} -re.

e) Vektorok vektoriális szorzata (az eredmény vektor):

A vektoriális szorzás értelmezése:

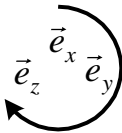
Az eredményvektor nagysága: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{b}| \sin \alpha}_{\text{a paralelogramma magassága}}.$



Az eredményvektor irányát ún. jobbkéz szabállyal kapjuk meg: ha jobb kézzel az \vec{a} vektort a \vec{b} vektorba forgatjuk, akkor a jobb kéz hüvelykujja adja meg az eredményvektor irányát.

Az eredményvektor merőleges a szorzásban szereplő mindkét vektorra.

Egységvektorok vektoriális szorzata: $\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}$, $\vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}$, $\vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$,



$$\begin{aligned} \vec{e}_x \times \vec{e}_y &= \vec{e}_z, & \vec{e}_y \times \vec{e}_z &= \vec{e}_x, & \vec{e}_z \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y, \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_x &= -\vec{e}_z, & \vec{e}_x \times \vec{e}_z &= -\vec{e}_y, & \vec{e}_z \times \vec{e}_y &= -\vec{e}_x. \end{aligned}$$

A vektoriális szorzás kiszámítása:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x(a_y b_z - b_y a_z) - \vec{e}_y(a_x b_z - b_x a_z) + \vec{e}_z(a_x b_y - b_x a_y).$$

- Szabály:**
- Ha két egységvektort az ábrán látható nyíllal megegyező sorrendben szorzunk össze vektoriálisan, akkor pozitív előjellel kapjuk a harmadik egységvektort.
 - Ha két egységvektort az ábrán látható nyíllal ellentétes sorrendben szorzunk össze vektoriálisan, akkor negatív előjellel kapjuk a harmadik egységvektort.

Az eredmény általánosítása: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.

f) Vektorok kétszeres vektoriális szorzata (az eredmény vektor):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}, \text{ vagy } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Kiszámítás kétféle úton lehetséges:

- a két vektoriális szorzásnak a kijelölt sorrendben történő elvégzésével,
- a kifejtési szabállyal:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}), \text{ ill. } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

g) Vektorok vegyes szorzata (az eredmény skalár mennyiség):

$$\text{Értelmezés: } (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

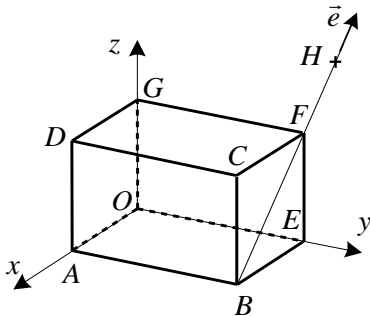
$$\text{Kiszámítás: } (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}.$$

$$\text{Tulajdonság: } (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{c} \vec{a} \vec{b}) = (\vec{b} \vec{c} \vec{a}) = -(\vec{c} \vec{b} \vec{a}) = -(\vec{a} \vec{c} \vec{b}) = -(\vec{b} \vec{a} \vec{c}).$$

Következmény: Ha $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ s $|\vec{c}| \neq 0$, továbbá $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = 0 \Rightarrow$ A három vektor egy síkban van.

8.2. Gyakorló feladatok vektorműveletekre

F.I.2.1. feladat: Helyvektorok felírása, összegzése, abszolút értékének meghatározása



Adott: egy hasáb, valamint a H pont helye:

$$\overline{AB} = 8 \text{ m}, \quad \overline{BE} = 3 \text{ m}, \\ \overline{AD} = 6 \text{ m}, \quad \overline{FH} = 0,5 \overline{BF}.$$

- Feladat: a) A H pont \vec{r}_H helyvektorának meghatározása.
b) A H -ból a B pontba mutató \vec{r}_{HB} helyvektor meghatározása.

Kidolgozás:

- a) A H pont \vec{r}_H helyvektorának meghatározása:

$$\vec{r}_H = \vec{r}_{OF} + \vec{r}_{FH}.$$

$$\vec{r}_{OF} = \vec{r}_F = (8\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}_{BF}}{|\vec{r}_{BF}|} = \frac{1}{\sqrt{45}}(-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z) \text{ m}, \vec{r}_{BF} = (-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$|\vec{r}_{BF}| = \sqrt{x_{BF}^2 + z_{BF}^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} \text{ m},$$

$$|\vec{r}_{FH}| = 0,5\sqrt{45} \text{ m},$$

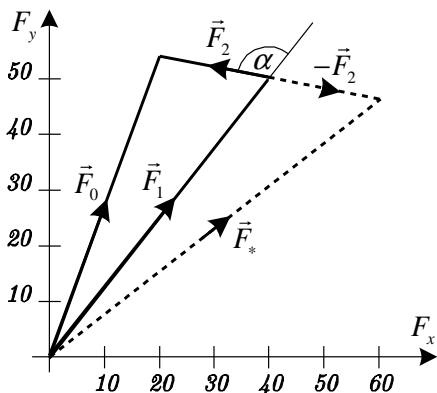
$$\vec{r}_{FH} = |\vec{r}_{FH}| \vec{e} = \frac{\sqrt{45}}{2} \frac{1}{\sqrt{45}}(-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z) = (-1,5\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) \text{ m},$$

$$\vec{r}_H = (8\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) + (-1,5\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) = (-1,5\vec{e}_x + 8\vec{e}_y + 9\vec{e}_z) \text{ m}.$$

b) A H -ból a B pontba mutató \vec{r}_{HB} helyvektor meghatározása.

$$\vec{r}_{HB} = -\frac{3}{2} |\vec{r}_{BF}| |\vec{e} = -\frac{3}{2} \sqrt{45} \frac{1}{\sqrt{45}} (-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_z) \text{ m}, \vec{r}_{HB} = (4,5\vec{e}_x - 9\vec{e}_z) \text{ m}.$$

F.I.2.2. feladat: Vektorok összege, különbsége, egymással bezárt szöge



Adott: $\vec{F}_1 = (40\vec{e}_x + 50\vec{e}_y) \text{ N}$,

$\vec{F}_2 = (-20\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \text{ N}$.

Feladat:

a) A két erő $\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ összeg vektorának meghatározása.

b) A két erő $\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ különbségvektorának meghatározása.

c) A két erővektor által bezárt α_{12} szög meghatározása.

Kidolgozás:

a) A két erő $\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ összegvektorának meghatározása:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (40\vec{e}_x + 50\vec{e}_y) + (-20\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) = (20\vec{e}_x + 54\vec{e}_y) \text{ N}.$$

b) A két erő $\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ különbségvektorának meghatározása:

$$\vec{F}_* = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = (40\vec{e}_x + 50\vec{e}_y) - (-20\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) = (60\vec{e}_x - 46\vec{e}_y) \text{ N}.$$

c) A két erővektor által bezárt α_{12} szög meghatározása:

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |\vec{F}_1| |\vec{F}_2| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2}{|\vec{F}_1| |\vec{F}_2|}.$$

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 40(-20) + 50 \cdot 4 = -800 + 200 = -600 \text{ N}^2, \quad |\vec{F}_1| = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = \sqrt{40^2 + 50^2} = 64,03$$

$$\text{N}, \quad |\vec{F}_2| = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = \sqrt{20^2 + 4^2} = 20,40 \text{ N}, \quad \cos \alpha = \frac{-600}{64,03 \cdot 20,40} = -0,45934, \quad \alpha = \arccos(-0,45934) = 117,34^\circ.$$

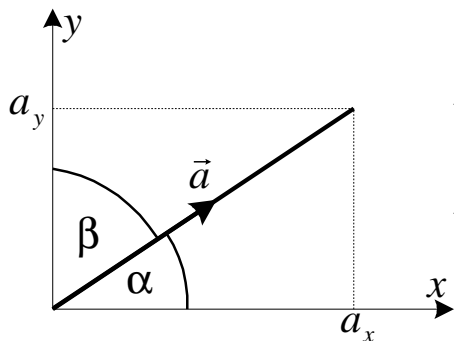
F.I.2.3. feladat: Vektor koordinátái és összetevői

Adott: $\vec{a} = (10\vec{e}_x + 5\vec{e}_y)$ m. Feladat:

- Az \vec{a} vektor x és y irányú skaláris koordinátáinak meghatározása.
- Az \vec{a} vektor x és y irányú összetevőinek meghatározása.

Kidolgozás:

a) A vektor koordinátatengely irányú koordinátáinak meghatározása (skaláris mennyiségek):



A skaláris szorzás értelmezéséből:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x = |\vec{a}| |\vec{e}_x| \cos \alpha = |\vec{a}| \cos \alpha,$$

$$a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y = |\vec{a}| |\vec{e}_y| \cos \beta = |\vec{a}| \cos \beta.$$

A skaláris koordináták kiszámítása:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x = (10\vec{e}_x + 5\vec{e}_y) \cdot \vec{e}_x = 10\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + 5\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 10 \text{ m},$$

$$a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y = (10\vec{e}_x + 5\vec{e}_y) \cdot \vec{e}_y = 10\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + 5\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 5 \text{ m}.$$

b) A vektor koordinátatengely irányú összetevői (vektor mennyiségek):

$$\vec{a}_x = a_x \vec{e}_x = (10\vec{e}_x) \text{ m}, \quad \vec{a}_y = a_y \vec{e}_y = (5\vec{e}_y) \text{ m}.$$

F.I.2.4. feladat: Vektor koordinátái és összetevői

Adott:

$$\vec{b} = (6\vec{e}_x + 6\vec{e}_y) \text{ m,}$$

$$\vec{a} = (12\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \text{ m.}$$

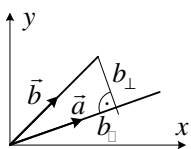
Feladat:

a) A \vec{b} vektor \vec{a} irányú b_{\parallel} és \vec{a} irányra merőleges b_{\perp} skaláris koordinátáinak meghatározása.

b) A \vec{b} vektor \vec{a} irányú \vec{b}_{\parallel} és \vec{a} irányra merőleges \vec{b}_{\perp} összetevőinek meghatározása.

Kidolgozás:

a) Adott irányú koordináták meghatározása:



A \vec{b} vektor \vec{a} irányú koordinátája (\vec{a} irányra eső vetülete):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \underbrace{|\vec{b}| \cos \alpha}_{b_{\parallel}} \Rightarrow b_{\parallel} = |\vec{b}| \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 96 \text{ m}^2,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \approx 12,65 \text{ m,}$$

$$b_{\parallel} = \frac{96}{12,65} = 7,59 \text{ m.}$$

A \vec{b} vektor \vec{a} irányra merőleges koordinátája (az \vec{a} irányra merőleges vetülete):

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{b}| \sin \alpha}_{b_{\perp}} \Rightarrow b_{\perp} = |\vec{b}| \sin \alpha = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 12 & 4 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z(72 - 24) = (48 \vec{e}_z) \text{ m}^2, |\vec{a} \times \vec{b}| = 48 \text{ m}^2,$$

$$|\vec{a}| = 12,65 \text{ m.}$$

$$b_{\perp} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{48}{12,65} = 3,79 \text{ m.}$$

b) Adott irányú összetevők meghatározása:

A \vec{b} vektor \vec{a} irányú összetevője:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{12,65}(12\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) = (0,9486\vec{e}_x + 0,3162\vec{e}_y),$$

$$\vec{b}_{\parallel} = b_{\parallel} \vec{e}_a = 7,59(0,9486\vec{e}_x + 0,3162\vec{e}_y) = (7,2\vec{e}_x + 2,4\vec{e}_y) \text{ m.}$$

A \vec{b} vektor \vec{a} irányra merőleges összetevője:

$$\vec{b}_{\perp} = \underbrace{\left(\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \times \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right)}_{\vec{e}_{\perp}} \underbrace{|\vec{b}| \sin \alpha}_{b_{\perp}} = \left(\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha} \times \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right) |\vec{b}| \sin \alpha = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2}.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} = (48\vec{e}_z) \times (12\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) = (-192\vec{e}_x + 576\vec{e}_y) \text{ m}^3,$$

$$\vec{b}_{\perp} = \frac{-192\vec{e}_x + 576\vec{e}_y}{160} = (-1,2\vec{e}_x + 3,6\vec{e}_y) \text{ m.}$$

Ellenőrzés:

$$\vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp} = (7,2\vec{e}_x + 2,4\vec{e}_y) + (-1,2\vec{e}_x + 3,6\vec{e}_y) = (6\vec{e}_x + 6\vec{e}_y) \text{ m.}$$

F.I.2.5. feladat: Vektorok skaláris szorzata

Adott: $\vec{F}_1 = (40\vec{e}_x + 18\vec{e}_y - 26\vec{e}_z) \text{ kN},$

$\vec{F}_2 = (-2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \text{ kN},$

$\vec{F}_3 = (F_{3y}\vec{e}_y).$

Kérdés:

Mekkora legyen F_{3y} , ha azt akarjuk, hogy $(\vec{F}_1 + \vec{F}_3)$ merőleges legyen \vec{F}_2 -re?

Kidolgozás:

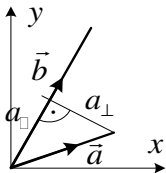
Ha $\vec{a} \perp \vec{b}$, akkor $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \underbrace{\alpha}_{90^\circ} = 0$.

Ezért teljesülnie kell az $(\vec{F}_1 + \vec{F}_3) \cdot \vec{F}_2 = 0$ összefüggésnek.

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_3) \cdot \vec{F}_2 = [40\vec{e}_x + (18 + F_{3y})\vec{e}_y - 26\vec{e}_z] \cdot (-2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) = 0,$$

$$-40 \cdot 2 + (18 + F_{3y})2 - 26 \cdot 3 = 0, \quad -80 + 36 + 2F_{3y} - 78 = 0,$$

$$2F_{3y} = 122 \quad \Rightarrow \quad F_{3y} = 61 \text{ kN}.$$

F.I.2.6. feladat: Vektor koordinátái és összetevőiAdott:

$$\vec{a} = (3\vec{e}_x + \vec{e}_y) \text{ N}, \quad \vec{b} = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ N}.$$

Feladat:

a) Az \vec{a} vektor \vec{b} irányú a_{\parallel} és a \vec{b} irányra merőleges a_{\perp} skaláris koordinátáinak meghatározása.

b) Az \vec{a} vektor \vec{b} irányú \vec{a}_{\parallel} és a \vec{b} irányra merőleges \vec{a}_{\perp} összetevőinek meghatározása.

Megoldás:

a) Az \vec{a} vektor \vec{b} irányú a_{\parallel} és a \vec{b} irányra merőleges a_{\perp} skaláris koordinátái:

$$a_{\parallel} = 2,235 \text{ N}, a_{\perp} = 2,235 \text{ N}.$$

b) Az \vec{a} vektor \vec{b} irányú \vec{a}_{\parallel} és a \vec{b} irányra merőleges \vec{a}_{\perp} összetevői:

$$\vec{a}_{\parallel} \approx (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ N}, \vec{a}_{\perp} \approx (2\vec{e}_x - \vec{e}_y) \text{ N}.$$

8.3. Mátrixalgebrai összefoglaló

a) Mátrix értelmezése, jelölése:

Mátrix: Skaláris mennyiségeknek, számoknak megadott szabály szerint táblázatba rendezett halmaza.

Mátrix jelölése: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

A mátrixokat kétszer aláhúzott betűvel, a mátrixok elemeit (koordinátáit) alsó indexes betűvel jelöljük.

Pl. $\underline{\underline{A}}$, \underline{a} és a_{13} , a_2 stb.

Az a_{13} mátrixelem az $\underline{\underline{A}}$ mátrix első sorában és harmadik oszlopában van.

Mátrix mérete: például a fenti (2x3)-as méretű $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak két sora és három oszlopa van.

Az a_{13} mátrix elem jelölés kiejtése (kiolvasása): á egy három.

Oszlopmátrix: $\underline{\underline{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, sormátrix: $\underline{\underline{a}}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3]$.

Az oszlopmátrixnak egy oszlopa, a sormátrixnak egy sora van.

A sormátrix ugyanannak az oszlopmátrixnak a transzponáltja. A sormátrixot a mátrix betűjelének felső indexébe írt T betű jelöli.

b) Mátrixműveletek:

A műveleteket (2×2) -es, (2×1) -es és (1×2) -es mátrixokra mutatjuk be.

- Mátrix transzponáltja (tükrözés a főátlóra):

A mátrix főátlóját az azonos indexű elemek alkotják.

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} \Rightarrow \underline{\underline{A^T}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)}.$$

A transzponálási művelet jele: T (a mátrix felső indexében).

A transzponálás oszlopmátrixból sormátrixot, sormátrixból pedig oszlopmátrixot hoz létre.

Az $\underline{\underline{A}}^T$ jelölés kiejtése a transzponált.

- Mátrixok összeadása, kivonása:

Csak azonos méretű mátrixok adhatók össze, vonhatók ki egymásból.

$$\underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} \pm \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11} \pm b_{11}) & (a_{12} \pm b_{12}) \\ (a_{21} \pm b_{21}) & (a_{22} \pm b_{22}) \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)}.$$

- Mátrix szorzás (sor-oszlop kombináció):

Csak olyan mátrixok szorozhatók össze, amelyek teljesítik azt a feltételt, hogy az első szorzótényező oszlopainak száma megegyezik a második szorzótényező sorainak számával.

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}) & (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}) \\ (a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}) & (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}) \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)}.$$

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{c}},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11} b_1 + a_{12} b_2) \\ (a_{21} b_1 + a_{22} b_2) \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)}.$$

$$\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{d}}^T,$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}}_{(1 \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_1 b_{11} + a_2 b_{21}) & (a_1 b_{12} + a_2 b_{22}) \end{bmatrix}}_{(1 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix}}_{(1 \times 2)}.$$

c) Különleges mátrixok:

- *Egység mátrix:* $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tulajdonsága: $\underline{\underline{E}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}$.

Az egység mátrix a főátlójában 1-es koordinátákat, a főátlóján kívül 0 elemeket tartalmaz.

Az egység mátrixszal történő szorzás nem változtatja meg a megszorzott mátrixot.

- *Szimmetrikus mátrix:* $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$

A mátrix elemei megegyeznek a főátlóra vett tükörképükkel.

Például $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ szimmetrikus mátrix.

- *Ferdeszimmetrikus mátrix:* $\underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{A}}$.

A mátrix bármelyik eleme megegyezik a főátlóra vett tükörképének mínusz egyszerűsével. Ebből az következik, hogy a főátlóban csak zérus elemek lehetnek.

Például $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ferdeszimmetrikus mátrix.

8.4. Vektorok skaláris, kétszeres vektoriális, vegyes és diadikus szorzata

Egyes vektor szorzások mátrixok szorzataként is elvégezhetők.

a) Vektorok skaláris szorzata:

A skaláris szorzás értelmezése: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$.

(α a vektorok között bezárt szög, $\alpha \leq \pi$.)

A skaláris szorzás kiszámítása mátrixszorzással:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = [a_x \quad a_y \quad a_z] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Az első szorzó tényező koordinátáit sormátrixba, a második szorzó tényező koordinátáit oszlopmátrixba rendezzük és a szorzást a mátrixszorzás szabályai szerint (sor-oszlop kombináció) végezzük el.

A szorzás eredménye egy skaláris mennyiség.

b) Vektorok kétszeres vektoriális szorzata:

($\vec{a} \times \vec{b}$) \times \vec{c} , vagy $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Kiszámítás kétféle úton lehetséges:

- a két vektoriális szorzásnak a kijelölt sorrendben történő elvégzésével,
- a kifejtési szabállyal:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}), \text{ ill. } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

c) Vektorok vegyes szorzata:

A vegyes szorzat értelmezése és jelölése: $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c})$.

A vegyes szorzat kiszámítása:

- Először elvégezzük a vektoriális szorzást, majd az eredményvektort megszorozzuk skalárisan a vegyes szorzatban szereplő harmadik vektorral.
- Kiszámítás determinánssal:

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \det \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x(b_y c_z - c_y b_z) - a_y(b_x c_z - c_x b_z) + a_z(b_x c_y - c_x b_y).$$

d) Vektorok diadikus szorzata:

Legyen adott az \vec{a} , \vec{b} és \vec{c} tetszőleges vektor.

Két vektor diadikus szorzatának jelölése: $\vec{a} \circ \vec{b}$, elnevezése: diád.

Az $\vec{a} \circ \vec{b}$ jelölés kiejtése (kiolvasása): á diád bé.

Két vektor diadikus szorzatát a szorzás tulajdonságainak megadásával értelmezzük:

- a diadikus szorzás és a skaláris szorzás *asszociatív* (csoportosítható, azaz szorzások elvégzésének sorrendje felcserélhető):

$$(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \circ (\vec{b} \cdot \vec{c}),$$

- a diád a skaláris szorzás szempontjából *nem kommutatív* (nem mindegy, hogy egy diádot jobbról, vagy balról szorzunk meg skalárisan egy vektorral, mert más eredményt kapunk):

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) \neq (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Ha a szorzás a fenti összefüggéseket kielégíti, akkor a szorzás diadikus.

Két vektor diadikus szorzatának kiszámítása jobbsodrású, derékszögű koordináta-rendszerben:

$$[\vec{a} \circ \vec{b}] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} [b_x \quad b_y \quad b_z] = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}.$$

Az első szorzó tényező koordinátáit oszlop mátrixba, a második szorzó tényező koordinátáit sormátrixba rendezzük és a szorzást a mátrix szorzás szabályai szerint (sor-oszlop kombináció) végezzük el. A szorzás eredménye egy kilenc skaláris mennyiséget tartalmazó mátrix.

Egységvektorok diadikus szorzata:

$$\begin{aligned} [\vec{e}_x \circ \vec{e}_x] &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [\vec{e}_y \circ \vec{e}_y] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\vec{e}_z \circ \vec{e}_z] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\vec{e}_x \circ \vec{e}_y] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\vec{e}_x \circ \vec{e}_z] &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [\vec{e}_y \circ \vec{e}_z] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\vec{e}_y \circ \vec{e}_x] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [\vec{e}_z \circ \vec{e}_x] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$[\vec{e}_z \circ \vec{e}_y] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ 1 \ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A skalár számmal történő szorzás mindig diadikus, vagy más szóhasználatlaltal általános szorzás.

8.5. Mátrix sajátértékei és sajátvektorai

a) A sajátérték feladat kitűzése:

Létezik-e olyan \underline{n} oszlop mátrix, amellyel az \underline{A} négyzetes mátrixot megszorozva, az \underline{n} oszlop mátrix valahányszorosát kapjuk:

$$\underline{A} \underline{n} = \lambda \underline{n},$$

ahol a λ skaláris mennyiség?

Ha létezik ilyen \underline{n} oszlop mátrix, akkor ezt az \underline{A} négyzetes mátrix sajátvektorának, a λ skaláris mennyiséget pedig az \underline{A} mátrix sajátértékének nevezzük.

b) A sajátérték feladat megoldása:

A sajátérték feladat megoldását egy (2x2)-es mátrixon mutatjuk be.

Az előző egyenletet részletesen kiírva és bal oldalra rendezve:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}, \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

és a szorzásokat elvégezve, az n_x, n_y ismeretlenre homogén lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) n_x + a_{12} n_y &= 0, \\ a_{21} n_x + (a_{22} - \lambda) n_y &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer nem triviális (nullától különböző) megoldásának feltétele az, hogy a rendszer mátrixából képezett determinánsnak el kell tűnnie:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{11} - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst kifejtve kapjuk a *karakterisztikus egyenletet*:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai a mátrix sajátértékei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}.$$

A homogén lineáris algebrai egyenletrendszernek csak $\lambda = \lambda_1$ és $\lambda = \lambda_2$ esetén van nemtriviális megoldása.

A mátrix sajátértékeit növekvő sorrendben szokás sorszámozni.

Ha az egyes λ_i ($i=1,2$) sajátértékeket behelyettesítjük a homogén lineáris algebrai egyenletrendszerbe, akkor az egyenletrendszer megoldható az n_{ix} , n_{iy} ismeretlenre:

$$\left. \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_i) n_{ix} + a_{12} n_{iy} = 0 \\ a_{21} n_{ix} + (a_{11} - \lambda_i) n_{iy} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n_{ix} = \dots \\ n_{iy} = \dots \end{array}, \text{ ahol } i=1,2.$$

Az λ_i ($i=1,2$) sajátértékek behelyettesítése esetén azonban az egyenletrendszer egyenletei egymástól nem lineárisan függetlenek, ezért az egyik egyenletet el kell hagyni és a másik egyenletből csak az n_{ix}/n_{iy} , vagy n_{iy}/n_{ix} ($i=1,2$) hányados határozható meg.

Az n_{ix} és n_{iy} értékét akkor kapjuk meg egyértelműen, ha az $\underline{n}_i^T = [n_{ix} \ n_{iy}]$ sajátvektoroktól megköveteljük, hogy egységvektorok legyenek:

$$\sqrt{n_{ix}^2 + n_{iy}^2} = 1, \quad i=1,2.$$

8.6. Tenzorok előállítása

a) Tenzor értelmezése és tulajdonságai:

Tenzor: Homogén lineáris vektor-vektor függvény által megvalósított leképezés (hozzárendelés).

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = \underline{T} \cdot \vec{v}.$$



A \underline{T} tenzor a tetszőleges \vec{v} vektorhoz a \vec{w} képvektort rendeli hozzá.

A vektor-vektor függvény olyan függvénykapcsolat, amelynek \vec{v} értelmezési tartománya és \vec{w} értékkészlete is vektor mennyiség.

A tenzor tulajdonságai:

Homogén lineáris: Ha egy vektort két másik vektor lineáris kombinációjaként állítunk elő, akkor a vektor képvektora egyenlő a lineáris kombinációban szereplő vektorok képvektorainak lineáris kombinációjával:

$$\begin{aligned} \text{Ha } \vec{v} &= \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \text{ és } \vec{w}_1 = f(\vec{v}_1), \vec{w}_2 = f(\vec{v}_2), \text{ akkor} \\ \vec{w} &= f(\vec{v}) = f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2) = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2. \end{aligned}$$

Az összefüggésekben λ_1 és λ_2 tetszőleges skaláris együtthatók.

Következmény: A zérus vektorhoz zérus vektort rendel hozzá: $\vec{0} = f(\vec{0})$.

A tenzor koordináta-rendszertől független fizikai (geometriai, mechanikai) mennyiség.

b) Tenzor előállítása jobbsodratú, derékszögű descartesi koordináta-rendszerben:

- *Tenzor megadása:*
 - a tenzor koordinátaival (mátrixával) és
 - a koordináta-rendszerrel történik.

- *Tenzor koordinátáinak jelölése mátrixba rendezve:*

$$\underline{\underline{T}}_{xyz} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

- *Tenzor előállítása derékszögű descartesi KR-ben:*

1. Tétel:
 - Térbeli esetben minden tenzor egyértelműen megadható három egymásra merőleges egységvektor és ezek képvektorai (három értékpár) ismeretében.
 - Síkbeli esetben minden tenzor egyértelműen megadható két egymásra merőleges egységvektor és ezek képvektorai (két értékpár) ismeretében.
2. Tétel:
 - Térbeli esetben minden tenzor előállítható három diád összegeként.
 - Síkbeli esetben minden tenzor előállítható két diád összegeként.

Legyen ismert három értékpár:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = f(\vec{e}_x), \vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z,$$

$$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = f(\vec{e}_y), \vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z,$$

$$\vec{e}_z \rightarrow \vec{c} = f(\vec{e}_z), \vec{c} = c_x \vec{e}_x + c_y \vec{e}_y + c_z \vec{e}_z.$$

A tenzor diadikus előállítása: $\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y + \vec{c} \circ \vec{e}_z).$

A tenzor mátrixa: $\underline{\underline{T}}_{xyz} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}.$

A tenzor mátrixát a diadikus előállításban kijelölt diadikus szorzások és az összeadások elvégzésével kapjuk.

A tenzor mátrixának oszlopai az \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} képvektorok koordinátáit tartalmazzák. A mátrix első sorában a képvektorok x koordinátái, a második sorban a képvektorok y koordinátái, a harmadik sorban a képvektorok z koordinátái állnak.

c) Tenzorok kétszeres skaláris szorzása

Legyen:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

 $\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3$

 $\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \vec{b}_3$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} &= (\vec{a}_1 \circ \vec{e}_x + \vec{a}_2 \circ \vec{e}_y + \vec{a}_3 \circ \vec{e}_z) \cdot (\vec{b}_1 \circ \vec{e}_x + \vec{b}_2 \circ \vec{e}_y + \vec{b}_3 \circ \vec{e}_z) = \\ &= (\vec{a}_1 \circ \vec{e}_x) \cdot (\vec{b}_1 \circ \vec{e}_x) + (\vec{a}_1 \circ \vec{e}_x) \cdot (\vec{b}_2 \circ \vec{e}_y) + (\vec{a}_1 \circ \vec{e}_x) \cdot (\vec{b}_3 \circ \vec{e}_z) + \\ &+ (\vec{a}_2 \circ \vec{e}_y) \cdot (\vec{b}_1 \circ \vec{e}_x) + (\vec{a}_2 \circ \vec{e}_y) \cdot (\vec{b}_2 \circ \vec{e}_y) + (\vec{a}_2 \circ \vec{e}_y) \cdot (\vec{b}_3 \circ \vec{e}_z) + \\ &+ (\vec{a}_3 \circ \vec{e}_z) \cdot (\vec{b}_1 \circ \vec{e}_x) + (\vec{a}_3 \circ \vec{e}_z) \cdot (\vec{b}_2 \circ \vec{e}_y) + (\vec{a}_3 \circ \vec{e}_z) \cdot (\vec{b}_3 \circ \vec{e}_z) . \end{aligned}$$

Diádok kétszeres skaláris szorzata:

$$(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot (\vec{c} \circ \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{d})$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} &= (\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1) \underbrace{(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x)}_1 + (\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2) \underbrace{(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y)}_0 + (\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3) \underbrace{(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z)}_0 \\
 &+ (\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1) \underbrace{(\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x)}_0 + (\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2) \underbrace{(\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y)}_1 + (\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3) \underbrace{(\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z)}_0 \\
 &+ (\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1) \underbrace{(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x)}_0 + (\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2) \underbrace{(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_y)}_0 + (\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3) \underbrace{(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)}_1 = \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 + \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3 = \\
 &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} + a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33}.
 \end{aligned}$$

8.7. Gyakorló feladatok mátrixokra, tenzorokra

F.I.7.1. feladat: Mátrix műveletek

Adott: $[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, [\underline{\underline{B}}] = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}.$

Feladat:

- Az $\underline{\underline{A}}^T$ és $\underline{\underline{B}}^T$ transzponált mátrixok meghatározása.
- Az $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ összegmátrix és az $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$ különbségmátrix meghatározása.
- Az $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$ szorzatmátrix meghatározása.

Kidolgozás:

- Az $\underline{\underline{A}}^T$ és $\underline{\underline{B}}^T$ transzponált mátrixok meghatározása:

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \underline{\underline{B}}^T = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Az $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ összegmátrix és az $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$ különbségmátrix meghatározása:

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -8 \\ 13 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Az $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$ szorzatmátrix meghatározása.

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-12) + (-4)(-6) & 2 \cdot 4 + (-4)3 \\ 7(-12) + 3(-6) & 7 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48 & -4 \\ -102 & 37 \end{bmatrix}.$$

F.I.7.2. feladat: Skaláris, diadikus és mátrix szorzás gyakorlása

Adott: $\vec{a} = (4 \vec{e}_x + 6 \vec{e}_y - \vec{e}_z)$ m,

$\vec{b} = (-3 \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z)$ m,

$\vec{c} = (-2 \vec{e}_y - 6 \vec{e}_z)$ m.

Feladat:

a) Az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ és az $\vec{a} \circ \vec{b}$ szorzatok meghatározása.

b) Az $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$ és a $\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$ szorzat meghatározása.

Kidolgozás:

a) Az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ és az $\vec{a} \circ \vec{b}$ szorzatok meghatározása:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = [4 \quad 6 \quad -1] \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4(-3) + 6 \cdot 1 + (-1)(-1) = -5 \text{ m}^2,$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= (4 \vec{e}_x + 6 \vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ (-3 \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) = \\ &= [(-12 \vec{e}_x - 18 \vec{e}_y + 3 \vec{e}_z) \circ \vec{e}_x + (4 \vec{e}_x + 6 \vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ \vec{e}_y + (-4 \vec{e}_x - 6 \vec{e}_y + \vec{e}_z) \circ \vec{e}_z] \text{ m}^2. \end{aligned}$$

A szögletes zárójelben lévő diádok első szorzó tényezőinek koordinátái a tenzor mátrixának oszlopaiban jelennek meg:

$$[\vec{a} \circ \vec{b}] = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} [-3 \quad 1 \quad -1] = \begin{bmatrix} -12 & 4 & -4 \\ -18 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{m}^2.$$

b) Az $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$ és a $\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$ szorzat meghatározása:

- Az értelmezés alapján:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \circ (\vec{b} \cdot \vec{c}) = \\ &= (4 \vec{e}_x + 6 \vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ [(-3 \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) \cdot (-2 \vec{e}_y - 5 \vec{e}_z)] = \\ &= (4 \vec{e}_x + 6 \vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ [-2 + 5] = (12 \vec{e}_x + 18 \vec{e}_y - 3 \vec{e}_z) \text{m}^3, \end{aligned}$$

- Mátrixszorzással:

$$[(\vec{a} \circ \vec{b})] [\vec{c}] = \begin{bmatrix} -12 & 4 & -4 \\ -18 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 + 20 \\ -12 + 30 \\ 2 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ -3 \end{bmatrix} \text{m}^3.$$

A kétféleképp előállított eredmény természetesen megegyezik.

- Az értelmezés alapján:

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) &= (\vec{c} \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = [(-2 \vec{e}_y - 5 \vec{e}_z) \cdot (4 \vec{e}_x + 6 \vec{e}_y - \vec{e}_z)] \circ (-3 \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) = \\ &= [-12 + 5] \circ (-3 \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) = (21 \vec{e}_x - 7 \vec{e}_y + 7 \vec{e}_z). \end{aligned}$$

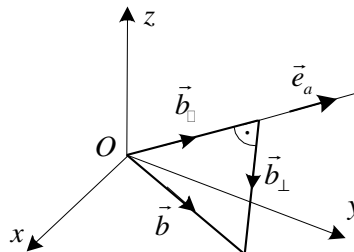
- Mátrixszorzással:

$$\begin{aligned} [\vec{c}] [(\vec{a} \circ \vec{b})] &= [0 \quad -2 \quad -5] \begin{bmatrix} -12 & 4 & -4 \\ -18 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= [(36 - 15) \quad (-12 + 5) \quad (12 - 5)] = [21 \quad -7 \quad 7] \text{ m}^3. \end{aligned}$$

A kétféleképp előállított eredmény természetesen megegyezik.

F.I.7.3. feladat: Vektor adott irányra merőleges összetevőjének meghatározása

Adott: $\vec{b} = (20\vec{e}_x + 40\vec{e}_y - 30\vec{e}_z)\text{m}$,
 $\vec{e}_a = (0,8\vec{e}_y - 0,6\vec{e}_z)$,



Feladat:

- A \vec{b} vektor \vec{e}_a egységvektorral párhuzamos \vec{b}_{\parallel} összetevőjének meghatározása.
- A \vec{b} vektor \vec{e}_a egységvektorra merőleges \vec{b}_{\perp} összetevőjének meghatározása kétszeres vektoriális szorzással.
- A \vec{b} vektor \vec{e}_a egységvektorra merőleges \vec{b}_{\perp} összetevőjének meghatározása a kifejtési szabállyal.

Kidolgozás:

a) A \vec{b}_{\parallel} párhuzamos összetevő meghatározása:

$$\vec{b}_{\parallel} = (\vec{e}_a \cdot \vec{b}) \vec{e}_a = \left([0 \quad 0,8 \quad -0,6] \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ -30 \end{bmatrix} \right) \vec{e}_a = (32 + 18) \vec{e}_a = 50 \vec{e}_a$$

$$\vec{b}_{\parallel} = 50 \vec{e}_a = 50 (0,8 \vec{e}_y - 0,6 \vec{e}_z) = (4\vec{e}_y - 30\vec{e}_z)\text{m.}$$

b) A \vec{b}_{\perp} merőleges összetevő meghatározása kétszeres vektoriális szorzással:

$$\vec{b}_{\perp} = (\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a.$$

$$(\vec{e}_a \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0,8 & -0,6 \\ 20 & 40 & -30 \end{vmatrix} = \vec{e}_x(-24 + 24) - \vec{e}_y(12) + \vec{e}_z(-16),$$

$$(\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & -12 & -16 \\ 0 & 0,8 & -0,6 \end{vmatrix} = \vec{e}_x(7,2 + 12,8) - \vec{e}_y(0) + \vec{e}_z(0).$$

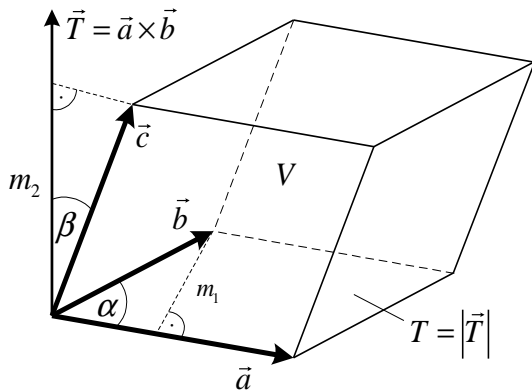
$$\vec{b}_{\perp} = (\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a = (20 \vec{e}_x)\text{m.}$$

c) A \vec{b}_{\perp} összetevő meghatározása a kifejtési szabállyal:

$$\vec{b}_{\perp} = (\vec{e}_a \times \vec{b}) \times \vec{e}_a = \vec{b}(\vec{e}_a \cdot \vec{e}_a) - \vec{e}_a(\vec{b} \cdot \vec{e}_a) = \vec{b} - \vec{b}_{\parallel}.$$

$$\vec{b}_{\perp} = \vec{b} - \vec{b}_{\parallel} = (20 \vec{e}_x + 40\vec{e}_y - 30\vec{e}_z) - (40 \vec{e}_y - 30 \vec{e}_z) = (20 \vec{e}_x)\text{m.}$$

F.I.7.4. feladat: Vektorok vegyes szorzata, paralelepipedon térfogata



Adott: Az \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} három nem komplanáris (nem egy síkba eső) vektor:

$$\vec{a} = (5\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ m,}$$

$$\vec{b} = (2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \text{ m,}$$

$$\vec{c} = (3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ m.}$$

Feladat: Az \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} vektorok által kifeszített alakzat (paralelepipedon) térfogatának meghatározása.

Kidolgozás:

Az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok által kifeszített alakzat (paralelepipedon) V térfogatát a három vektor vegyes szorzata adja meg:

$$\begin{aligned} V &= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (3 \cdot 3 - 1 \cdot 4) - 2(5 \cdot 3 - 1 \cdot 2) + 6(5 \cdot 4 - 3 \cdot 2) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 13 + 6 \cdot 14 = 15 - 26 + 84 = 73. \end{aligned}$$

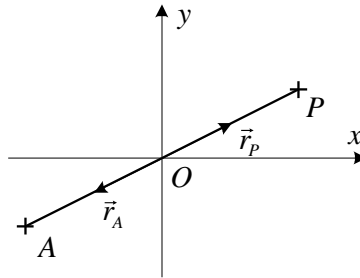
$$\text{Bizonyítás: } V = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{c}| |\vec{a} \times \vec{b}| \cos \beta = |\vec{a} \times \vec{b}| (|\vec{c}| \cos \beta) = T \cdot m_2,$$

$$T = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = |\vec{a}| m_1, \quad |\vec{T}| = T,$$

ahol T az \vec{a}, \vec{b} vektorok által kifeszített paralelogramma területe.

F.I.7.5. feladat: Tenzor előállítás

Adott: $\vec{r}_P = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)\text{m}$.



Feladat:

- Annak a \underline{T} tenzor mátrixának az előállítás, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektoroknak a koordináta-rendszer O kezdőpontjára tükrözött vektorait állítja elő.
- Meghatározni azt az \vec{r}_A vektort, amely az \vec{r}_P vektor origóra vett tükörképe.

Kidolgozás:

- A tenzor előállítás:

Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = -\vec{e}_x, \quad \vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = -\vec{e}_y.$$

A két értékpárból a tenzor: $T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y)$.

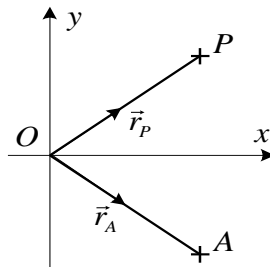
A tenzor mátrixa: $[\underline{T}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

- Az origóra tükrözött \vec{r}_A képvektor meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{T} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \vec{r}_A = (-4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y) \text{ m}.$$

F.I.7.6. feladat: Tenzor előállítás

Adott: $\vec{r}_P = (4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)\text{m}$.



Feladat:

a) Annak a \underline{T} tenzor mátrixának az előállítás, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektoroknak a koordináta-rendszer x tengelyére tükrözött vektorait állítja elő.

b) Meghatározni azt az \vec{r}_A vektort, amely az \vec{r}_P vektor x tengelyre vett tükörképe.

Kidolgozás:

a) A tenzor előállítás:

Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg: $\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = \vec{e}_x$, $\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = -\vec{e}_y$.

A két értékpárból a tenzor: $T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y)$

A tenzor mátrixa: $[\underline{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

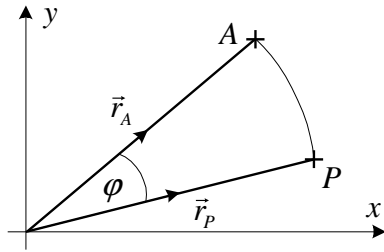
b) Az x tengelyre tükrözött \vec{r}_A képvektor meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{T} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \vec{r}_A = (4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y) \text{ m}.$$

F.I.7.7. feladat: Tenzor előállítása

Adott:

$$\varphi = 30^\circ, \vec{r}_P = (4\vec{e}_x + \vec{e}_y)\text{m.}$$

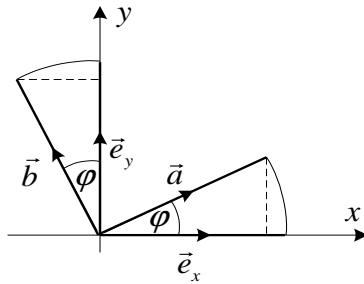


Feladat:

- Annak a \underline{T} tenzor mátrixának az előállítása, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektorok z tengely körül φ szöggel elforgatott vektorait állítja elő.
- Meghatározni azt az \vec{r}_A vektort, amelyet az \vec{r}_P vektor φ szöggel történő elforgatásával kapunk.

Kidolgozás:

a) A tenzor előállítása:



Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y),$$

$$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y).$$

A két értékpárból a tenzor: $T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y)$

A diádok kiszámítása:

$$[\vec{a} \circ \vec{e}_x] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} a_x & 0 \\ a_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{b} \circ \vec{e}_y] = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} [0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & b_x \\ 0 & b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi \\ 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

A tenzor mátrixa: $\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{bmatrix}$.

b) Az elforgatott \vec{r}_A vektor meghatározása:

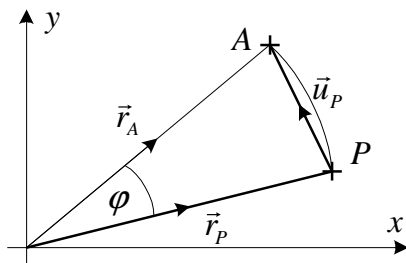
$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,964 \\ 2,866 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_A = (2,964 \vec{e}_x + 2,866 \vec{e}_y) \text{ m.}$$

F.I.7.8. feladat: Tenzor előállítás

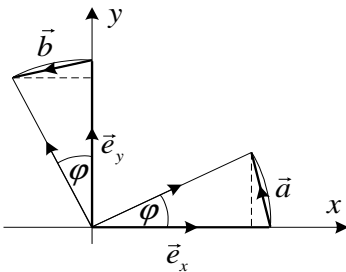
Adott:

$$\varphi = 45^\circ, \vec{r}_P = (5 \vec{e}_x + 2 \vec{e}_y) \text{ m.}$$



Feladat:

- Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítás, amely az xy sík helyvektoraihoz a helyvektorok z tengely körül φ szöggel történő elforgatásakor a helyvektorok végpontjainak elmozdulás vektorait rendeli hozzá.
- Meghatározni \vec{r}_P vektor végpontjának \vec{u}_P elmozdulás vektorát a φ szöggel történő elforgatásnál.

Kidolgozás:a) A $\underline{\underline{T}}$ tenzor előállítás:

Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = -(1 - \cos \varphi) \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = -\sin \varphi \vec{e}_x - (1 - \cos \varphi) \vec{e}_y.$$

A két értékpárból a tenzor: $T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y)$.

A tenzor mátrixa:

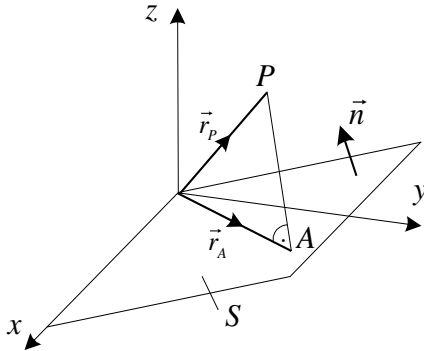
$$[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} (\cos \varphi - 1) & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & (\cos \varphi - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,293 & -0,707 \\ 0,707 & -0,293 \end{bmatrix}.$$

b) Az \vec{u}_P elmozdulásvektor meghatározása:

$$\vec{u}_P = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} -0,293 & -0,707 \\ 0,707 & -0,293 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,879 \\ 2,949 \end{bmatrix} \cdot \vec{u}_P = (-2,879 \vec{e}_x + 2,949 \vec{e}_y) \quad \text{m.}$$

F.I.7.9. feladat: Tenzor előállítása

Adott: $\vec{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_z\right)$, $\vec{r}_P = (5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 10\vec{e}_z)\text{m}$.



Feladat:

- Annak a \underline{T} tenzor mátrixának az előállítása, amely a tér minden helyvektorához a helyvektoroknak az \vec{n} normálisú S síkba eső vetületvektorát rendeli hozzá.
- Meghatározni \vec{r}_P vektornak az adott \vec{n} normálisú S síkba eső \vec{r}_A vetületvektorát.

A vetületvektort úgy kapjuk, hogy az \vec{r}_P vektor végpontját merőlegesen vetítjük az S síkra.

Kidolgozás:

a) A \underline{T} tenzor előállítása:

A tetszőleges \vec{v} vektor S síkba eső \vec{w} vetületvektora:

$$\vec{w} = \vec{n} \times (\vec{v} \times \vec{n}) = \vec{v} \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{n})}_{=1} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}) = \vec{v} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}).$$

Térbeli esetben a tenzort három értékpárja határozza meg:

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{a} = \vec{e}_x - \vec{n} \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{e}_x)}_{=0} = \vec{e}_x,$$

$$\vec{e}_y \rightarrow \vec{b} = \vec{e}_y - \vec{n} \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{e}_y)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \vec{e}_y - \frac{\vec{n}}{\sqrt{2}} = \vec{e}_y - \frac{1}{2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z = \left(\frac{1}{2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z\right),$$

$$\vec{e}_z \rightarrow \vec{c} = \vec{e}_z - \underbrace{\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{e}_z)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \vec{e}_z + \frac{\vec{n}}{\sqrt{2}} = \vec{e}_z + \frac{1}{2}\vec{e}_y - \frac{1}{2}\vec{e}_z = \left(\frac{1}{2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z\right).$$

A három értékpárból a tenzor: $T = (\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y + \vec{c} \circ \vec{e}_z)$.

A tenzor mátrixa: $\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$.

b) Az \vec{r}_P vektornak az adott \vec{n} normálisú síkba eső \vec{r}_A vetületvektorának meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ m.} \quad \vec{r}_A = (5\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ m.}$$

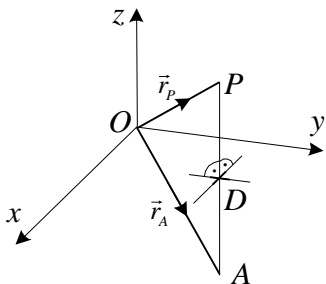
F.I.7.10. feladat: Tenzor előállítás

Adott: $\vec{r}_P = (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ m.}$

Feladat:

a) Annak a $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának az előállítás, amely a tér minden helyvektorához a helyvektoroknak az xy síkra vett tükörkép-vektorát rendeli hozzá.

b) Meghatározni \vec{r}_P vektornak az xy síkra vett \vec{r}_A tükörkép-vektorát.



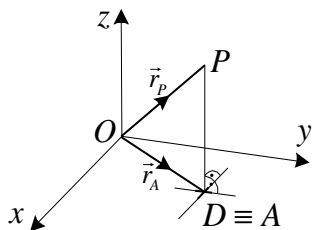
A tükörkép-vektort a következőképpen kapjuk: Az \vec{r}_P vektor végpontját merőlegesen vetítjük az xy síkra. A D pont a vetítő egyenes dőléspontja az xy síkon.

Megoldás:

a) A hozzárendelést megvalósító tenzor mátrixa: $[\underline{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Az \vec{r}_A tükörkép-vektor: $\vec{r}_A = (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 6\vec{e}_z)$ m.

F.I.7.11. feladat: Tenzor előállítás



Adott: $\vec{r}_P = (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 8\vec{e}_z)$ m.

Feladat:

a) Annak a \underline{T} tenzor mátrixának az előállítás, amely a tér minden helyvektorához a helyvektoroknak az xy síkba eső vetületvektorát rendeli hozzá.

b) Meghatározni \vec{r}_P vektornak az xy síkba eső \vec{r}_A vetületvektorát.

A vetületvektort úgy kapjuk, hogy az \vec{r}_P vektor végpontját merőlegesen vetítjük az xy síkra. A D pont a vetítő egyenes dőféspontja az xy síkon. A vetületvektor a D pontba mutató vektor.

Megoldás:

a) A hozzárendelést megvalósító tenzor mátrixa: $[\underline{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Az \vec{r}_A vetületvektor: $\vec{r}_A = (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y)$ m.

F.I.7.12. feladat: Tenzor (mátrix) sajátértékeinek és sajátvektorainak előállítása

Adott: az $\underline{\underline{A}}$ tenzor az xyz Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerbeli mátrixával:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Feladat: az $\underline{\underline{A}}$ tenzor λ_1, λ_2 sajátértékei és a hozzájuk tartozó \vec{n}_1, \vec{n}_2 sajátvektorok meghatározása és szemléltetése

Kidolgozás:

A feladatban szereplő mátrix szimmetrikus, ezért két valós sajátértéket és két, egymásra merőleges sajátvektort várunk.

A karakterisztikus egyenlet felírása:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{n} = \lambda \vec{n} = \lambda \underline{\underline{E}} \cdot \vec{n} \quad \Rightarrow \quad (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{n} = \vec{0}.$$

Ez egy homogén, lineáris egyenletrendszer az \vec{n} vektor n_x, n_y koordinátáira, melynek csak akkor van a triviális (vagyis a zérus) megoldása, ha az egyenletrendszer együtthatóiból képzett mátrix determinánsa nullával egyenlő:

$$\det |\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}| = 0.$$

A fenti mátrix elemeit behelyettesítve és a determinánst kifejtve:

$$\det \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{3}{4} = 0.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve, kapjuk a karakterisztikus egyenletet: $4\lambda^2 - 4 = 0$.

A karakterisztikus egyenlet két megoldása, vagyis a keresett sajátértékek: $\lambda_1 = 1,$
 $\lambda_2 = -1.$

A sajátvektorok meghatározása:

- A $\lambda_1 = 1$ -hez tartozó \vec{n}_1 sajátvektor meghatározása:

A $\lambda_1 = 1$ -et visszahelyettesítjük a lineáris algebrai egyenlet-rendszerbe:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - 1\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrixszorzást elvégezve két ismeretlenes egyenletrendszert kapunk:
$$\begin{aligned} -n_x + \sqrt{3}n_y &= 0 \\ \sqrt{3}n_x - 3n_y &= 0 \end{aligned}.$$

A két egyenlet azonban nem független egymástól (az elsőt $-\sqrt{3}$ -mal szorozva éppen a másodikat kapjuk), így ez az egyenletrendszer csak a sajátvektor koordinátáinak arányát, vagyis a sajátvektor irányát határozza meg.

Ezért még felírunk egy független egyenletet: az egységnyi abszolút értékű sajátvektort határozzuk meg:

$$1 = |\vec{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = \sqrt{3n_y^2 + n_y^2} = 2|n_y|.$$

Látható, hogy ezzel a pótlólagos feltétellel a sajátvektor már csak egy előjel erejéig határozatlan.

Ha az $n_y = +\frac{1}{2}$ értéket választjuk, akkor $\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y$.

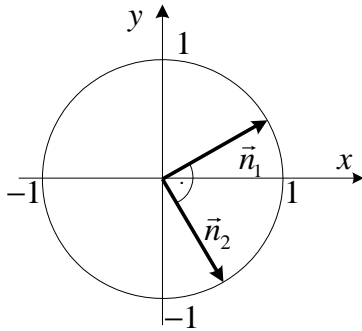
- A $\lambda_2 = -1$ -hez tartozó \vec{n}_2 sajátvektor meghatározása:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + 1\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \left(-\frac{1}{2} + 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrixszorzást elvégezve két ismeretlenes egyenletrendszert kapunk:
$$\begin{aligned} 3n_x + \sqrt{3}n_y &= 0 \\ \sqrt{3}n_x + n_y &= 0 \end{aligned}.$$

Az egyenletek ebben az esetben sem függetlenek egymástól (itt a szorzó $\sqrt{3}$).

A már alkalmazott normálást ismét elvégezve kapjuk: $\vec{n}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y$.



A megoldás szemléltetése:

Az ábrán látható két sajátvektor merőleges egymásra, amiről a szükséges skaláris szorzás elvégzésével is meggyőződhetünk: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

Általában is igaz, hogy egy szimmetrikus tenzor különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok mindig merőlegesek egymásra.

Ennek bizonyításához a sajátvektorokat definiáló egyenletet szorozzuk be balról egy másik sajátvektorral: $\vec{n}_2 \underline{\underline{A}} \vec{n}_1 = \vec{n}_2 \lambda_1 \vec{n}_1$. Kihasználva a tenzor szimmetriáját, azt kapjuk, hogy: $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = \lambda_2 \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = \lambda_1 \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1$.

Átrendezve: $(\lambda_2 - \lambda_1) \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = 0$, amiből következik a két sajátvektor merőlegessége, hiszen mindkettő nagysága különbözik nullától, a két sajátérték pedig a feltétel szerint különböző.

8.8. Tenzorok kétszeres skaláris szorzata

Minden tenzor előállítható három diád összegeként, ezért tenzorok kétszeres skaláris szorzatát diádon értelmezzük:

$$(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot (\vec{c} \circ \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{d}),$$

$$(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot (\vec{c} \circ \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{d}) (\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Két tenzor (vagy diád) kétszeres skaláris szorzatának eredménye skalár mennyiség.

A kétszeres skaláris szorzás két tenzor (vagy diád) között többféleképpen is elvégezhető és általános esetben különböző eredményt szolgáltat. Szimmetrikus tenzorok bármilyen kétszeres skaláris szorzásának eredménye ugyanaz az skalár szám.

Példa: a fajlagos alakváltozási energia előállítása kétszeres skaláris szorzással:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot (\vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\vec{\rho}_x \cdot \vec{\alpha}_x \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_{=1} + \vec{\rho}_x \cdot \vec{\alpha}_y \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y}_{=0} + \vec{\rho}_x \cdot \vec{\alpha}_z \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z}_{=0} + \vec{\rho}_y \cdot \vec{\alpha}_x \underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x}_{=0} + \vec{\rho}_y \cdot \vec{\alpha}_y \underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y}_{=1} + \right. \\
 &\quad \left. + \vec{\rho}_y \cdot \vec{\alpha}_z \underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z}_{=0} + \vec{\rho}_z \cdot \vec{\alpha}_x \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x}_{=0} + \vec{\rho}_z \cdot \vec{\alpha}_y \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_y}_{=0} + \vec{\rho}_z \cdot \vec{\alpha}_z \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z}_{=1} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} (\vec{\rho}_x \cdot \vec{\alpha}_x + \vec{\rho}_y \cdot \vec{\alpha}_y + \vec{\rho}_z \cdot \vec{\alpha}_z) = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}).
 \end{aligned}$$

A fajlagos alakváltozási energiára a feszültségi és az alakváltozási tenzor szimmetriája miatt minden kétszeres skaláris szorzat változat esetén ugyanazt az eredményt kapjuk.

8.9. Differenciálegyenletek

Differenciálegyenlet: olyan matematikai egyenlet, amely egy vagy több változós ismeretlen függvény és deriváltjai közötti kapcsolatot írja le.

Fontosabb típusok: közönséges differenciálegyenletek, parciális differenciálegyenletek, (sztochasztikus differenciálegyenletek, késleltetett differenciál-egyenletek).

Közönséges differenciálegyenlet: olyan matematikai egyenlet, amely egy független változójú függvény és deriváltjai közötti összefüggést adja meg.
Pl. $m \frac{d^2x}{dt^2} = F$, ahol $x = x(t)$ (Newton II. törvénye).

Parciális differenciálegyenlet: olyan matematikai egyenlet, amely az ismeretlen többváltozós függvény és a parciális deriváltjai közötti kapcsolatot írja le.
Pl. $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0$; és a megoldás $u(x,y) = f(y)$.

Az Euler típusú közönséges differenciálegyenlet A változó együtthatójú n -edrendű lineáris differenciálegyenletek közül viszonylag egyszerűen megoldható az *Euler* típusú, amelynél az együtthatók a következő hatványfüggvények:

$$A_i(x) = a_i x^i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n; \text{ s } a_i = \text{állandó}).$$

Így az *Euler* típusú differenciálegyenlet általános alakja:

$$e_n(y) = a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = R(x).$$

a) A homogén differenciálegyenletet megoldása:

Az alaprendszerhez az $y = x^r$ feltételezéssel jutunk.

Ugyanis $y^{(p)} = (x^r)^p = r(r-1)\dots[r-(p-1)]x^{(r-p)}$ révén azt kapjuk, hogy $e_n(x^r) = g_n(r)x^r = 0$,

ahol $g_n(r) = a_n r(r-1)\dots[r-(n-1)] + \dots + a_1 r + a_0$ az *Euler*-féle differenciálegyenlet ún. karakterisztikus polinomja.

Az $x = 0$ eset kizárásával a $g_n(r) = 0$ egyenlet (az ún. karakterisztikus egyenlet) alapján kapunk alaprendszert az alább részletezendő módon.

Ha a karakterisztikus egyenletnek *egyszeres* gyökei vannak – jelölje ezeket r_1, r_2, \dots, r_n , akkor az $y = x^1, y = x^2, \dots, y = x^n$ függvények alkotják a differenciálegyenlet alaprendszerét.

Ha azonban *többszörös* gyökök is vannak, akkor alaprendszert a következő előírás szerint kapunk:

Legyen pl. az $r = r_k$ s_k -szoros gyök, akkor az $r = r_k$ gyöknek az alaprendszerben a következő függvények fognak megfelelni: $y = x^{r_k}$, $y = x^{r_k} \ln x$, \dots , $y = x^{r_k} (\ln x)^{s_k-1}$.

Természetesen, mind az egyszeres, mind a többszörös gyöknél előfordulhat, hogy ezek között komplex számok is vannak. Ekkor is lehet azonban mindig valós alaprendszert találni. A fenti eljárásnál a *Wronski-féle* determináns segítségével lehet megmutatni, hogy a megadott függvények valóban alaprendszert alkotnak.

b) Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

A korábban már részletezett módon nyerhető.

c) Példák homogén Euler típusú differenciálegyenlet megoldására:

1. példa:

Adott: $x^2 y'' - 3xy' - 5y = 0$.

Megoldás: Itt az $y = x^r$ feltételezéssel azt kapjuk, hogy a karakterisztikus polinom: $g_2(r) = r^2 - 4r - 5 = 0$.

A $g_2(r) = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei: $r_1 = 5$, $r_2 = -1$.

Így alaprendszert az $y = x^5$, $y = x^{-1}$ függvények alkotnak, és az adott homogén differenciálegyenlet általános megoldása: $y = C_1 x^5 + C_2 x^{-1}$.

A C_1 , C_2 együtthatók peremfeltételekből határozhatók meg.

2. példa:

Adott: $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$.

Megoldás: Itt az $y = x^r$ feltételezéssel azt kapjuk, hogy a karakterisztikus polinom: $g_2(r) = r^2 - 4r + 4 = 0$.

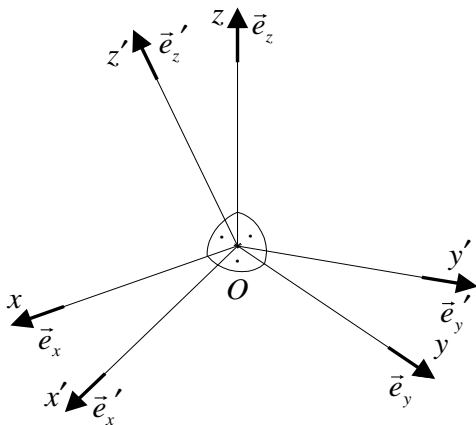
A $g_2(r) = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei: $r_1 = 2$, $r_2 = 2$.

Így alapszisztem az $y = x^2$, $y = x^2 \ln x$ függvények alkotnak, és az adott homogén differenciálegyenlet általános megoldása: $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$.

A C_1 , C_2 együtthatók peremfeltételekből határozhatók meg.

8.10. Koordináta-transzformáció

a) Általános, térbeli eset:



Legyen x, y, z és x', y', z' két közös kezdőpontú egymáshoz képest elforgatott derékszögű descartesi koordináta-rendszer.

Koordináta-transzformáció:

Az az összefüggés, amely kapcsolatot teremt az x, y, z és x', y', z' koordináta-rendszerben felírt adott mennyiség (vektor, tenzor) koordinátái között.

$$\underset{(x'y'z')}{[\vec{v}]} = [\underline{K}] \cdot \underset{(xyz)}{[\vec{v}]},$$

$\underset{(xyz)}{[\vec{v}]}$ - az adott vektor koordinátáit tartalmazó mátrix az x, y, z koordináta-rendszerben felírva,

$\underset{(x'y'z')}{[\vec{v}]}$ - az adott vektor koordinátáit tartalmazó mátrix az x', y', z' koordináta-rendszerben felírva,

$$\underline{[K]} = \begin{bmatrix} \left(\vec{e}'_x \cdot \vec{e}_x \right) & \left(\vec{e}'_x \cdot \vec{e}_y \right) & \left(\vec{e}'_x \cdot \vec{e}_z \right) \\ \left(\vec{e}'_y \cdot \vec{e}_x \right) & \left(\vec{e}'_y \cdot \vec{e}_y \right) & \left(\vec{e}'_y \cdot \vec{e}_z \right) \\ \left(\vec{e}'_z \cdot \vec{e}_x \right) & \left(\vec{e}'_z \cdot \vec{e}_y \right) & \left(\vec{e}'_z \cdot \vec{e}_z \right) \end{bmatrix} - \text{a transzformációs mátrix.}$$

A transzformációs mátrix másik alakja: $\underline{[K]} = \begin{bmatrix} \cos(x'x) & \cos(x'y) & \cos(x'z) \\ \cos(y'x) & \cos(y'y) & \cos(y'z) \\ \cos(z'x) & \cos(z'y) & \cos(z'z) \end{bmatrix}.$

A transzformációs mátrix tulajdonsága: $\underset{(xyz)}{[\vec{v}]} = \underline{[K]}^{-1} \cdot \underset{(x'y'z')}{[\vec{v}]} = \underline{[K]}^T \cdot \underset{(x'y'z')}{[\vec{v}]}.$

$$\underline{[K]}^{-1} = \underline{[K]}^T - \text{ortogonális mátrix.}$$

$$\underline{[K]}^{-1} \cdot \underline{[K]} = \underline{[K]} \cdot \underline{[K]}^{-1} = \underline{[K]}^T \cdot \underline{[K]} = \underline{[K]} \cdot \underline{[K]}^T = \underline{[E]}.$$

- *Tenzorok transzformációja*

Kapcsolat két tetszőleges vektor között az x, y, z koordináta-rendszerben:

$$\underset{(xyz)}{[\vec{w}]} = \underline{[T]} \cdot \underset{(xyz)}{[\vec{v}]}.$$

Kapcsolat a két tetszőleges vektor között az x', y', z' koordináta-rendszerben:

$$\underset{(x'y'z')}{[\vec{w}]} = \underline{[T]} \cdot \underset{(x'y'z')}{[\vec{v}]}.$$

Transzformáció: a $\underset{(xyz)}{[\underline{T}]}$ és $\underset{(x'y'z')}{[\underline{T}]}$ tenzorok közötti kapcsolatot akarjuk felírni.

Helyettesítsük be a vektorokra felírt transzformációs összefüggést az első egyenletbe és szorozzuk meg az így kapott egyenletet balról a $\underline{[K]}$ transzformációs mátrixszal:

$$\underline{[K]} \cdot / \underline{[K]}^T \cdot \begin{matrix} [\vec{w}] \\ (x'y'z') \end{matrix} = \underline{[T]} \cdot \underline{[K]}^T \cdot \begin{matrix} [\vec{v}] \\ (x'y'z') \end{matrix} .$$

A kijelölt műveleteket elvégezve:

$$\begin{matrix} [\vec{w}] \\ (x'y'z') \end{matrix} = \underbrace{\underline{[K]} \underline{[T]} \underline{[K]}^T}_{\underline{[T]}_{(x'y'z')}} \cdot \begin{matrix} [\vec{v}] \\ (x'y'z') \end{matrix} .$$

Tenzor transzformációja: $\underline{[T]}_{(x'y'z')} = \underline{[K]} \underline{[T]}_{(xyz)} \underline{[K]}^T .$

Tenzor: csak egy olyan számkilences (pl.: 3×3 -as mátrix) alkothat valamely koordinátarendszerben tenzort, amely egy másik koordinátarendszerbe való áttérésnél a fenti szabály szerint transzformálódik.

b) Síkbeli eset

Legyen x, y és x', y' két közös kezdőpontú egymáshoz képest α szöggel elforgatott derékszögű descartesi koordináta-rendszer.

Koordináta-transzformáció:

Az az összefüggés, amely kapcsolatot teremt az x, y és x', y' koordináta-rendszerben felírt adott mennyiség (vektor, tenzor) koordinátái között.

IX. MODUL

F.II. FÜGGELÉK: RUDAK EGYSZERŰ IGÉNYBEVÉTELEI

9. F.II. FÜGGELÉK: RUDAK EGYSZERŰ IGÉNYBEVÉTELEI

9.1. Alapfogalmak

Rúd: olyan test (alkatrész), amelynek egyik mérete lényegesen nagyobb, mint a másik kettő.

Keresztmetszet: a rúd legnagyobb méretére merőleges metszet.

Középvonal (súlyponti szál): a rúdkeresztmetszetek súlypontjai által alkotott vonal.

Mechanikai rúdmodell: a rudat egy vonallal, a középvonalával helyettesítjük és a mechanikai viselkedését jellemző mennyiségeket ehhez a vonalhoz kötjük.

Mechanikai rúdmodell \equiv a rúd középvonala.

Prizmatikus rúd: olyan egyenes középvonalú rúd, amelynek keresztmetszetei állandók és a rúd középvonala menti párhuzamos eltolással egymásba tolhatók.

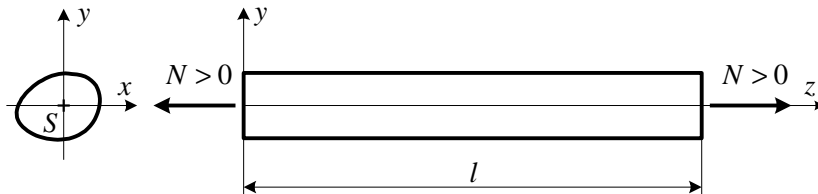
Igénybevétel: a rúd keresztmetszetén megoszló belső erőrendszernek (a feszültségeknek) a keresztmetszet S súlypontjába redukált vektorkettőse, illetve ennek a vektorkettősnek a skaláris koordinátái.

9.2. Prizmatikus rúd húzása, zömök rudak nyomása

Zömök rúd: a rúd keresztmetszete elég nagy a hosszhoz képest \Rightarrow nem következik be kihajlás.

Húzás: $N > 0$, nyomás: $N < 0$.

Tapasztalat: a rúdban homogén szilárdságtani állapotok alakulnak ki. (homogén \equiv minden pontban azonos)



Feltételezés: a terhelés átadási helytől (a rúd két végétől) eléggé távol vagyunk.

a) Alakváltozási állapot:
$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

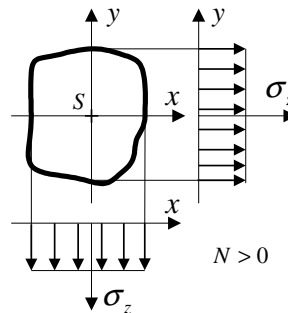
$\varepsilon_z = \frac{l' - l}{l} = \text{állandó.}$ l' - a terhelés hatására megváltozott hossz.

$\varepsilon_k = \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z$ - keresztirányú nyúlás,

ν - Poisson (poasszon) tényező (anyagjellemző).

b) Feszültségi állapot:
$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \frac{N}{A} = \text{állandó.}$$

Feszültségeloszlás a keresztmetszet x és y tengelye mentén:



c) Anyagtörvény: az egyszerű Hooke (huk)-törvény.

$\sigma_z = E\varepsilon_z$, E – a Young-féle (jang-féle) rugalmassági modulus.

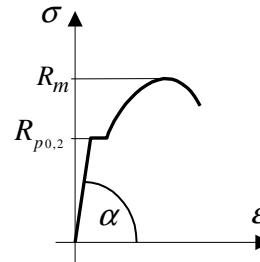
$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$$

Szakító diagram:

Alakítható szerkezetű anyagokra, szabványos próbatestek húzásával kapjuk.

$R_{p0,2}$ - folyáshatár, R_m - szakítószilárdság.

A rugalmassági modulus a szakító diagram lineáris szakaszának iránytangense: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$



d) Energia állapot:

Fajlagos alakváltozási energia: $u = \frac{1}{2}\varepsilon_z\sigma_z = \frac{1}{2}\frac{\sigma_z^2}{E}$.

A tisztán húzott-nyomott rúd alakváltozási energiája: $U = \frac{1}{2}\frac{N^2}{AE}l$.

9.3. Húzott - nyomott rudak tönkremenetele

Tönkremenetel: az alkatrész nem alkalmas normál üzemelésre.

a) Szilárdsági ellenőrzés

Adott: a rúd anyaga, igénybevétele és a keresztmetszet méretei.

Kérdés: a rúd az adott igénybevételt kellő biztonsággal el tudja-e viselni.

b) Szilárdsági méretezés

Adott: a rúd anyaga és igénybevételei.

Feladat: úgy meghatározni a keresztmetszet méreteit, hogy a rúd az adott igénybevételt kellő biztonsággal el tudja viselni

c) Tönkremeneteli jellemző: σ_{jell} lehet pl. az R_m , vagy az $R_{p0,2}$.

d) Biztonsági tényező: $\sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}$, $n > 1$, szabvány, vagy egyéni megfontolás alapján vesszük fel.

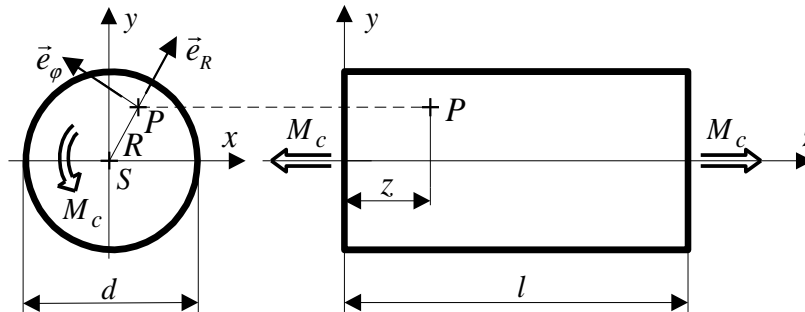
e) Ellenőrzés, méretezés húzás-nyomás esetén:

Ellenőrzés: a rúd megfelel, ha teljesül $\sigma_z \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}$.

Méretezés: $\sigma_z \leq \sigma_{meg} \Rightarrow \frac{N}{A} \leq \sigma_{meg} \Rightarrow A \geq \frac{N}{\sigma_{meg}}$.

Az utolsó összefüggés megadja, hogy legalább mekkora legyen a keresztmetszet.

9.4. Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarása



Henger koordináta-rendszer (HKR): $\vec{e}_R, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$.

Megfigyelés (mérés): $l' = l$ $d' = d$

A z helyen levő keresztmetszet szögelfordulása: $\Phi = \vartheta z$, $\vartheta = \text{áll.} - \text{fajlagos szögelfordulás.}$

a) Elmozdulási állapot:

A P pont elmozdulása (HKR-ben): $\vec{u} = u\vec{e}_R + v\vec{e}_\varphi + w\vec{e}_z$, $u \equiv w \equiv 0$, $v = R\vartheta = z\gamma_{z\varphi}$.

$$Rz\vartheta = z\gamma_{z\varphi},$$

$$\gamma_{z\varphi} = \gamma_{\varphi z} = R\vartheta.$$

b) Alakváltozási állapot (HKR-ben):
$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ R\varphi z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix},$$

$\gamma_{z\varphi} = \gamma_{\varphi z} = \vartheta R \Rightarrow$ az $\underline{\underline{A}}$ nem homogén, az R helykoordináta függvénye.

c) Feszültségi állapot (HKR-ben):

A tiszta csavarásra vonatkozó Hooke (huk)-törvény skaláris alakja $\tau_{\varphi z} = G\gamma_{\varphi z}$.

A tiszta csavarásra vonatkozó Hooke-törvény tenzor alakja: $\underline{\underline{F}} = 2G\underline{\underline{A}}$.

G – csúsztató rugalmassági modulus (anyagjellemző).

A feszültségi tenzor:
$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{F}} \\ R\varphi z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\gamma_{\varphi z} \\ 0 & G\gamma_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}.$$

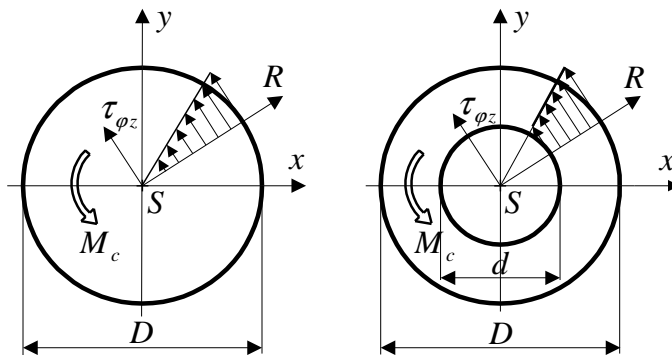
$\tau_{z\varphi} = \tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} R$, A $\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi}$ feszültség az R lineáris függvénye.

A keresztmetszetek poláris másodrendű nyomatéka: $I_p = \int_{(A)} R^2 dA$.

Az integrálást elvégezve: kör keresztmetszetre: $I_p = \frac{d^4\pi}{32}$,

körgyűrű keresztmetszetre: $I_p = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{32}$.

Feszültségeloszlás a keresztmetszet sugárirányú egyenes mentén:



Fajlagos szögelfordulás:

$$\tau_{\varphi z} = G\gamma_{\varphi z} = G\vartheta R = \frac{M_c}{I_p} R \Rightarrow \vartheta = \frac{M_c}{I_p G}.$$

d) Energia állapot:

Fajlagos alakváltozási energia: $u = \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z}\tau_{\varphi z} = \frac{1}{2}\frac{\tau_{\varphi z}^2}{G}$.

A tisztán csavart rúd alakváltozási energiája: $U = \frac{1}{2}\frac{M_c^2}{I_p G}l$.

e) Szilárdságtani ellenőrzés:

$$|\tau_{\varphi z}|_{\max} = \tau_{\max} = \frac{M_c}{I_p} \frac{D}{2} = \frac{M_c}{K_p}, \quad K_p = \frac{2I_p}{D} - \text{a keresztmetszet poláris keresztmetszeti tényezője.}$$

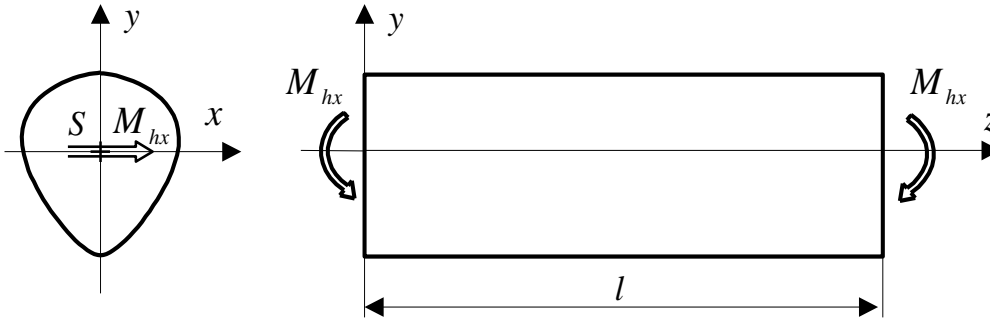
Ha $\tau_{\max} \leq \tau_{\text{meg}} = \frac{\tau_{\text{ell}}}{n}$, akkor a rúd csavarásra szilárdságtanilag megfelel.

n – előírt biztonsági tényező. (Szabványból, vagy egyéni megfontolás alapján vesszük fel.)

f) Szilárdságtani méretezés:

$$\tau_{\max} = \frac{M_c}{K_p} \leq \tau_{\text{meg}} \quad \Rightarrow \quad K_p \geq \frac{M_c}{\tau_{\text{meg}}} \quad \Rightarrow \quad D \geq \dots$$

9.5. Prizmatikus rudak egyenes hajlítása



Feltételezés: y a keresztmetszet szimmetriatengelye.

Bernoulli (bernulli) hipotézis: Hajlítás esetén a rúd keresztmetszeti síkok maradnak és merőlegesek maradnak a rúd alakváltozott S ponti szálára, továbbá a keresztmetszet síkjában sem lép fel szögtorzulás.

a) Alakváltozási állapot:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_z = \frac{y}{\rho} = \kappa y,$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z.$$

ρ - az S ponti szál görbületi sugara,

κ - az S ponti szál görbülete,

y - annak a P pontnak az y helykoordinátája, ahol az alakváltozást meghatározzuk.

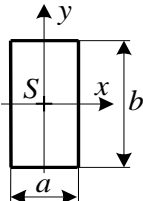
b) Feszültségi állapot:

Egyszerű Hooke-törvény: $\sigma_z = E\varepsilon_z$ (ugyanaz, mint húzás-nyomásnál).

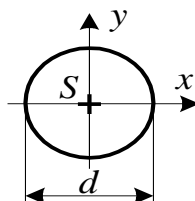
A feszültségi tenzor: $[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \sigma_z = E\kappa y = \frac{M_{hx}}{I_x} y,$

I_x – a keresztmetszet x tengelyére számított másodrendű nyomaték.

Téglalap és kör keresztmetszet tengelyre számított másodrendű nyomatéka:

$$I_x = \frac{ab^3}{12}.$$


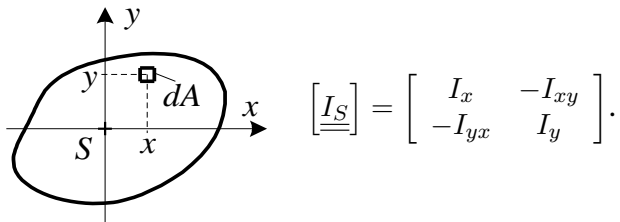
$$I_x = \frac{d^4\pi}{64}.$$



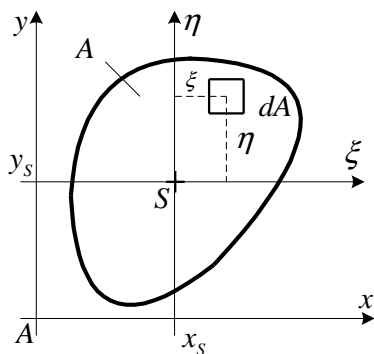
Tengelyre és tengelypárra számított másodrendű nyomatékok értelmezése:

$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA, \quad I_y = \int_{(A)} x^2 dA, \quad I_{xy} = \int_{(A)} xy dA.$$

c) A keresztmetszet S ponti tehetetlenségi tenzora:



Steiner (stejner) tétel: összefüggés az S ponti és azzal párhuzamos tengelyekre számított tehetetlenségi nyomatékok között.



Skaláris alak:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_\xi + Ay_S^2, \\ I_y &= I_\eta + Ax_S^2, \\ I_{xy} &= I_{\xi\eta} + Ax_S y_S. \end{aligned} \right\}$$

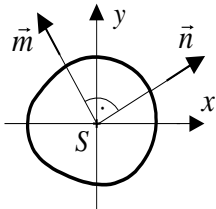
Tenzoriális alak:

$$\underline{\underline{I_A}} = \underline{\underline{I_S}} + \underline{\underline{I_{AS}}},$$

$$\underline{\underline{I_{AS}}} = A \begin{bmatrix} y_S^2 & -x_S y_S \\ -x_S y_S & x_S^2 \end{bmatrix}.$$

Párhuzamos tengelyek közül mindig az S ponti tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték a legkisebb.

Más S ponti tengelyekre számított nyomatékok:



$$|\vec{n}| = |\vec{m}| = 1, \vec{n} \cdot \vec{m} = 0.$$

$$I_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{n}, I_m = \vec{m} \cdot \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{m},$$

$$I_{mn} = I_{nm} = -\vec{m} \cdot \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{n} = -\vec{n} \cdot \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{m}.$$

d) Tehetetlenségi főtengelyek, fő tehetetlenségi nyomatékok:

Értelmezés: Ha $I_{mn} = I_{nm} = 0$, akkor n, m tehetetlenségi főtengely / irány, I_n, I_m fő tehetetlenségi nyomatékok.

Főtengelyprobléma \equiv sajátérték feladat.

Van-e olyan \vec{e}_1, \vec{e}_2 irány ($\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$, $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$), amelyre teljesül:

$$\underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{e}_1 = \lambda \vec{e}_1, \quad \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{e}_2 = \lambda \vec{e}_2 \quad \text{és} \quad \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{e}_1 = 0.$$

Átalakítás: $\underline{\underline{I}}_S \cdot \vec{e}_1 - \lambda \vec{e}_1 = \vec{0}$

A vektor egyenletet részletesen kiírva: $\left\{ \left[\begin{array}{cc} I_x & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y \end{array} \right] - \lambda \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \right\} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

A mátrixszorzást elvégezve és skaláris alakban felírva:

$$\left. \begin{array}{l} (I_x - \lambda) e_{1x} - I_{xy} e_{1y} = 0 \\ -I_{yx} + (I_y - \lambda) e_{1y} = 0 \end{array} \right\}.$$

Ez egy homogén lineáris algebrai egyenletrendszer az e_{1x}, e_{1y} ismeretlenekre.

A nem triviális (nem azonosan nulla) megoldás feltétele:

$$\det \begin{vmatrix} (I_x - \lambda) & -I_{xy} \\ -I_{yx} & (I_y - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst kifejtve kapjuk a karakterisztikus egyenletet:

$$\lambda^2 - (I_x + I_y) \lambda + (I_x I_y - I_{xy}^2) = 0.$$

Fő tehetetlenségi nyomatékok: a karakterisztikus egyenlet megoldása.

$$\lambda_{1,2} = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Megállapodás a jelölésre: $I_1 > I_2$

Főirányok:

I_1 -et visszahelyettesítve a lineáris algebrai egyenletrendszerbe:

$$\frac{e_{1y}}{e_{1x}} = \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{I_x - I_1}{I_{xy}}, |\vec{e}_1| = 1 = \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2}.$$

I_2 -t visszahelyettesítve: $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$.

Tételek:

- Minden keresztmetszetre van legalább egy ilyen tengelypár és ezek a tengelyek egymásra merőlegesek
- A keresztmetszet S ponti szimmetria tengelye S ponti tehetetlenségi főtengely.
- A keresztmetszet S ponti szimmetriatengelyére merőleges S ponti tengely is tehetetlenségi főtengely

e) Egyenes hajlítás:

Értelmezés: ha az M_{hx} hajlító nyomaték párhuzamos valamelyik S ponti tehetetlenségi főtengellyel.

Maximális feszültség: $\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y \Rightarrow \sigma_z \max = \frac{|M_{hx}|}{I_x} e_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x}, \sigma_z \max = |\sigma_z \max|$.

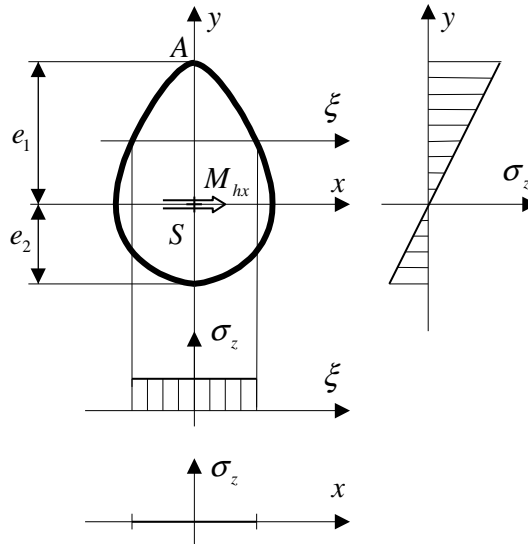
$K_x = \frac{I_x}{e_{\max}}$ - az x tengelyre számított keresztmetszeti tényező,

$e_{\max} = \max(e_1, e_2)$, a vizsgált esetben: $e_{\max} = e_1$.

Veszélyes pont: a keresztmetszetnek az a pontja, ahol $\sigma_{z \max}$ fellép.

Ebben az esetben a veszélyes pont az A.

Feszültségeloszlás:



f) Szilárdságtani ellenőrzés:

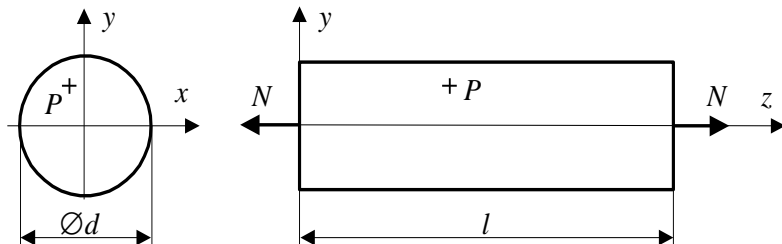
Ha $\sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x} \leq \sigma_{\text{meg}} = \frac{\sigma_{\text{jell}}}{n}$, akkor a rúd egyenes hajlításra szilárdságtanilag megfelel.
 n - előírt biztonsági tényező.

g) Szilárdságtani méretezés:

$\sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow K_x \geq \frac{|M_{hx}|}{\sigma_{\text{meg}}} \Rightarrow$ a keresztmetszet jellemző mérete.

9.6. Gyakorló feladatok rudak egyszerű igénybevételeire

F.II.6.1. feladat: Prizmatikus rúd húzás-nyomása



Adott:

$$l = 350 \text{ mm},$$

$$d = 10 \text{ mm},$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa},$$

$$\nu = 0,3,$$

$$N = 50 \text{ kN}.$$

Feladat:

- A feszültségi tenzor $\left[\underline{\underline{F}}_P \right]$ mátrixának meghatározása a P pontban.
- A rúd Δl hosszváltozásának meghatározása.
- A rúdátmérő Δd megváltozásának kiszámítása.

Kidolgozás:

- A feszültségi tenzor $\left[\underline{\underline{F}}_P \right]$ mátrixának meghatározása a P pontban:

Húzás esetén $\left[\underline{\underline{F}}_P \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$, ahol $\sigma_z = \frac{N}{A}$, és $A = \frac{d^2 \pi}{4}$.

Kiszámítva: $A = \frac{10^2 \pi}{4} = 78,54 \text{ mm}^2$, $\sigma_z = \frac{50 \cdot 10^3}{78,54} = 636,62 \text{ MPa}$.

A feszültségi tenzor a P pontban: $\left[\underline{\underline{F}}_P \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 636,62 \end{bmatrix} \text{ MPa}$.

b) A rúd Δl hosszváltozásának meghatározása:

$$\Delta l = l \varepsilon_z, \text{ ahol } \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{636,62}{2,1 \cdot 10^5} = 3,03 \cdot 10^{-3},$$

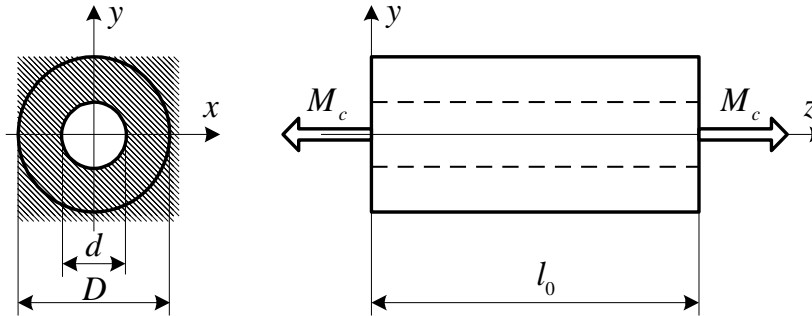
$$\Delta l = l \varepsilon_z = 350 \cdot 3,03 \cdot 10^{-3} = 1,061 \text{ mm.}$$

c) A rúdátmérő Δd megváltozásának kiszámítása:

$$\Delta d = d \varepsilon_k, \text{ ahol } \varepsilon_k = \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z = -0,3 \cdot 3,03 \cdot 10^{-3} = -0,909 \cdot 10^{-3}.$$

$$\Delta d = d \varepsilon_k = 10 (-0,909 \cdot 10^{-3}) = -0,909 \cdot 10^{-2} \text{ mm.}$$

F.II.6.2. feladat: Körgyűrű keresztmetszetű prizmatikus rúd csavarása



Adott: $M_c = 2 \text{ kNm}$, $\frac{D}{d} = 2$, $G = 80 \text{ GPa}$, $\tau_{\text{meg}} = 60 \text{ MPa}$, $\psi_{\text{meg}} = 0,04 \text{ rad}$

Feladat:

a) A rúd méretezése (A szükséges D és d méretek meghatározása.).

b) A rúd l hosszának a meghatározása azzal a feltétellel, hogy a rúd hossza mentén az elcsavarodás szöge kisebb legyen ψ_{meg} értéknél.

Kidolgozás:

a) A rúd méretezése (A szükséges D és d méretek meghatározása):

A rúd megfelel, ha $\tau_{\max} = \frac{M_c}{I_p} \frac{D}{2} \leq \tau_{\text{meg}} \Rightarrow \frac{I_p}{D} \geq \frac{M_c}{2 \tau_{\text{meg}}}$.

$$I_p = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32} = \frac{D^4(1 - 1/16) \pi}{32} = \frac{D^4 15 \pi}{512} \text{ és } \frac{I_p}{D} = \frac{D^3 15 \pi}{512}.$$

Ezzel $\frac{I_p}{D} = \frac{D^3 15 \pi}{512} = 0,092 D^3 \geq \frac{M_c}{2 \tau_{\text{meg}}}$, amiből $D \geq \sqrt[3]{\frac{M_c}{2 \tau_{\text{meg}} 0,092}}$.

Behelyettesítve $D \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^6}{2 \cdot 60 \cdot 0,092}} = 56,58 \text{ mm}$.

Szabványos külső átmérőt választva $D = 60 \text{ mm}$, és ezzel $d = 30 \text{ mm}$.

Ezekkel a méretekkel: $I_p = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32} = \frac{(60^4 - 30^4) \pi}{32} = 1193 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$

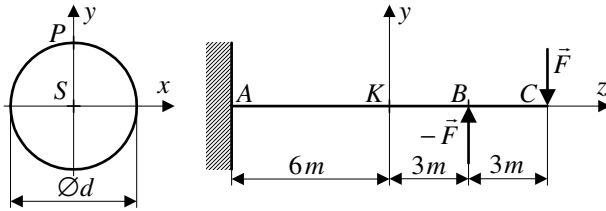
b) A rúd l hosszának a meghatározása azzal a feltétellel, hogy a rúd hossza mentén az elcsavarodás szöge kisebb legyen ψ_{meg} értéknél:

Az elcsavarodás szöge $\psi = \frac{M_c l}{I_p G}$, és $\psi \leq \psi_{\text{meg}}$, vagyis $\frac{M_c l}{I_p G} \leq \psi_{\text{meg}}$.

Ebből $l_{\max} = \frac{I_p G \psi_{\text{meg}}}{M_c} = \frac{1193 \cdot 10^3 \cdot 80 \cdot 10^3 \cdot 0,04}{2 \cdot 10^6} = 1\,908,8 \text{ mm}$.

A rúd hossza tehát legfeljebb $1\,908,8 \text{ mm}$ lehet.

F.II.6.3. feladat: Tiszta egyenes hajlítás



Adott:

$$|\vec{F}| = 20 \text{ kN},$$

$$P(0; 80; 0) \text{ mm},$$

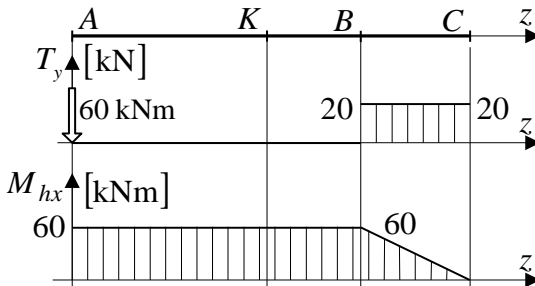
$$d = 160 \text{ mm}.$$

Feladat:

- A rúd igénybevételi ábráinak a megrajzolása és a veszélyes keresztmetszetek meghatározása.
- Feszültségeloszlás megrajzolása a K keresztmetszet x és y tengelyei mentén.
- Feszültségállapot meghatározása és szemléltetése a K keresztmetszet P pontjában.

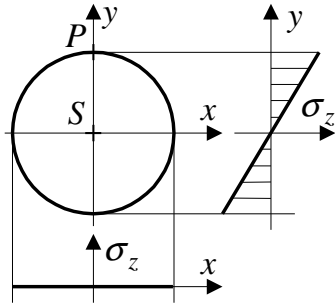
Kidolgozás:

- A rúd igénybevételi ábráinak a megrajzolása és a veszélyes keresztmetszetek meghatározása:



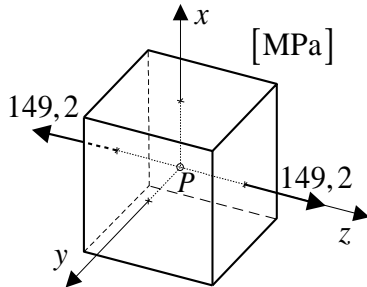
Veszélyes keresztmetszetek:
az AB rúdszakasz valamennyi keresztmetszete.

b) Feszültségeloszlás megrajzolása a K keresztmetszet x és y tengelyei mentén:



$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y.$$

c) Feszültségállapot meghatározása és szemléltetése a K keresztmetszet P pontjában:



$$I_x = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{160^4 \pi}{64} = 32,17 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

$$\sigma_z(P) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_P = \frac{60 \cdot 10^6}{32,17 \cdot 10^6} 80 = 149,2 \text{ MPa}.$$

$$\underline{\underline{F}}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 149,2 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

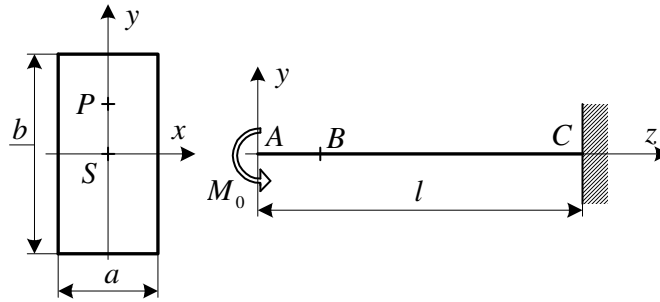
F.II.6.4. feladat: Tiszta egyenes hajlítás

Adott:

$$M_0 = 80 \text{ Nm}, P(0; 5; 100) \text{ mm},$$

$$l = 10 \text{ m}, a = 10 \text{ mm}, b = 20 \text{ mm},$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

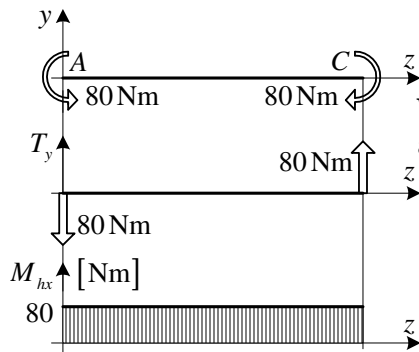


Feladat:

- A rúd igénybevételi ábráinak a megrajzolása.
- A feszültségeloszlás megrajzolása a B jelű keresztmetszeten.
- A keresztmetszet másodrendű nyomatékainak meghatározása.
- Feszültségi állapot meghatározása a B jelű keresztmetszet P pontjában.
- A feszültség maximumának meghatározása.
- Az alakváltozási energia meghatározása.

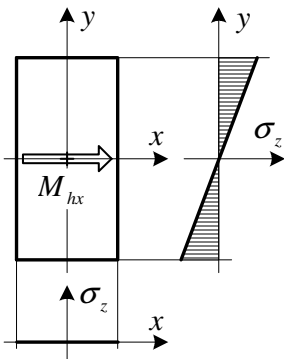
Kidolgozás:

a) A rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása és a veszélyes keresztmetszetek meghatározása:



Veszélyes keresztmetszetek:
az A-C rúdszakasz valamennyi keresztmetszete.

b) A feszültségeloszlás a B keresztmetszeten:



$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y.$$

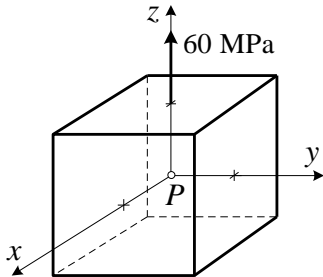
c) A keresztmetszet másodrendű nyomatékainak meghatározása:

$$I_x = \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 dx dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{a b^3}{12},$$

$$I_y = \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx dy = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [y]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{a^3 b}{12},$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y x dx dy = \left[\frac{y^2 x^2}{4} \right]_{y=-\frac{b}{2}, x=-\frac{a}{2}}^{y=\frac{b}{2}, x=\frac{a}{2}} = 0.$$

d) Feszültségi állapot meghatározása és szemléltetése a B keresztmetszet P pontjában:



$$I_x = \frac{a b^3}{12} = \frac{10 \cdot 20^3}{12} = \frac{2}{3} 10^4 \text{ mm}^4 = \frac{2}{3} 10^{-8} \text{ m}^4,$$

$$\sigma_z(P) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_P = \frac{80}{\frac{2}{3} 10^{-8}} 5 \cdot 10^{-3} = 60 \text{ MPa}.$$

$$\begin{bmatrix} F \\ \underline{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

e) A feszültség maximumának meghatározása:

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{hx}}{I_x} y_{\max} = \frac{80}{\frac{2}{3} 10^{-8}} 10 \cdot 10^{-3} = 120 \text{ MPa}.$$

Az x tengelyre számított K_x keresztmetszeti tényező felhasználásával:

$$K_x = \frac{I_x}{b/2} = \frac{2I_x}{b} = \frac{ab^2}{6} = \frac{10 \cdot 20^2}{6} = \frac{2}{3}10^3 \text{ mm}^3,$$

$$\sigma_{z \text{ max}} = \frac{M_{hx}}{K_x} = \frac{80}{\frac{2}{3}10^3 \cdot 10^{-9}} = 120 \text{ MPa}.$$

f) Az alakváltozási energia meghatározása:

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_{hx}^2}{I_x E} l = \frac{1}{2} \frac{80^2}{\frac{2}{3}10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{11}} 10 = 24 \text{ Nm} = 24 \text{ J}.$$

X. MODUL

F.III. FÜGGELÉK RUDAK ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEI

10. F.III. FÜGGELÉK RUDAK ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEI

10.1. Tönkremeneteli elméletek

a) Speciális feszültségi állapot: az \underline{F} feszültségi tenzornak csak egy eleme nem nulla (pl. rudak egyszerű igénybevételeinél).

$$\sigma_z \leq \sigma_{meg}, \quad \tau_{\varphi z} \leq \tau_{meg}.$$

Itt nincs probléma, mert az anyagjellemzők ezekre az egyszerű esetekre rendelkezésre állnak.

b) Általános feszültségi állapot:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Probléma: Nem tudom, hogy melyik feszültségkoordinátát hasonlítsam össze a σ_{meg} megengedett feszültséggel!

Redukált feszültség: Olyan feszültség, amely a pontbeli feszültségi állapotot tönkremenetel szempontjából egyértelműen jellemzi.

Redukált feszültség \equiv *egyenértékű feszültség* \equiv *összehasonlító feszültség*.

A redukált feszültség bevezetésével az általános térbeli feszültségállapotot visszavezetjük a speciális egyszerű esetre.

A redukált feszültség meghatározására különböző elméletek vannak.

- *Coulomb* elmélet: (kijtése: kulomb)

Egy feszültségi állapot akkor nem okoz károsodást, ha a feszültségi állapothoz tartozó legnagyobb normál feszültség kisebb az anyag szakítószilárdságánál.

Redukált feszültség: $\sigma_{red}(\text{Coulomb}) = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|)$,
ahol σ_1 a legnagyobb, σ_3 a legkisebb főfeszültség.

- *Mohr* elmélet: (kiejtése: mór)

Egy feszültségi állapot akkor nem okoz károsodást, ha a feszültségi állapotához tartozó legnagyobb és legkisebb főfeszültség különbsége kisebb, mint az anyag folyáshatára / szakítószilárdsága

Redukált feszültség: $\sigma_{red}(\text{Mohr}) = (\sigma_1 - \sigma_3)$,
ahol σ_1 a legnagyobb, σ_3 a legkisebb főfeszültség.

- *Huber - Mises - Hencky* elmélet: (kiejtése huber-mizesz-henki)

Két feszültségi állapot akkor egyformán veszélyes, ha a hozzájuk tartozó torzulási energia azonos.

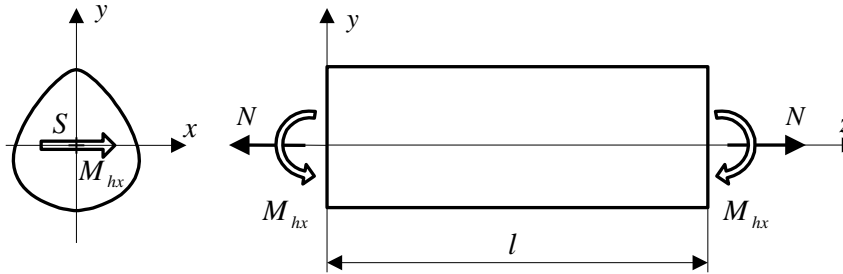
Redukált feszültség (a σ_{red} négyzete arányos a fajlagos torzulási energiával):

$$\sigma_{red}(\text{HMH}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]},$$

ahol $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ főfeszültségek, vagy

$$\sigma_{red}(\text{HMH}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right]}.$$

10.2. Húzás – nyomás és egyenes hajlítás

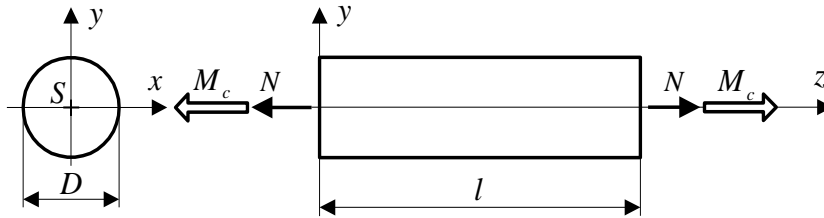


Az y tengely a keresztmetszet szimmetria tengelye \Rightarrow az x és y tengelyek a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi főtengelyei.

Feszültségi állapot:
$$\begin{bmatrix} \underline{F} \\ xyz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_z &= \sigma'_z + \sigma''_z, \\ \sigma_z &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y. \end{aligned}$$

Veszélyes pont: ahol a σ_z a maximális (ez általában a keresztmetszetnek az x tengelytől legtávolabb levő pontja, ahol a σ''_z s σ'_z azonos előjelű).

10.3. Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak húzás – nyomása és csavarása



A rúd keresztmetszete kör, vagy körgyűrű lehet.

Feszültségi állapot:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{F}} \\ R\varphi z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \frac{N}{A}, \quad \tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} R.$$

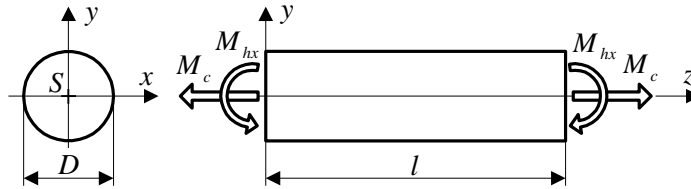
Veszélyes pontok: a keresztmetszet kerületén lévő pontok ($R = D/2$).

Redukált feszültség:

$$-\sigma_{red} (Coulomb) = \frac{|\sigma_z|}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi z}^2},$$

$$-\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{\varphi z}^2}, \quad \begin{cases} \beta = 3 & \text{Huber - Mises - Hencky (HMH),} \\ \beta = 4 & \text{Mohr.} \end{cases}$$

10.4. Kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak hajlítása és csavarása

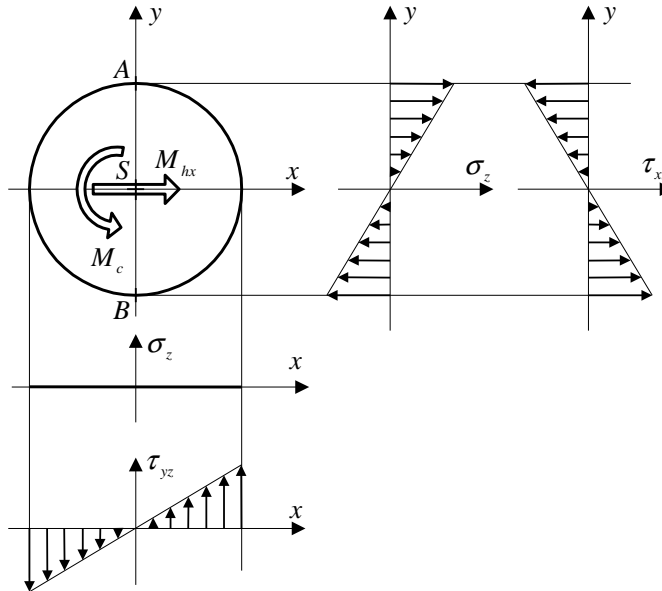


A rúd keresztmetszete kör, vagy körgyűrű lehet. (Egyenes hajlítás)

Feszültségi állapot:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{F}} \\ R\varphi z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_P} R, \quad \sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y.$$

Feszültségeloszlás:



Veszélyes pontok: A, B

Maximális feszültségek: $|\sigma_z \max| = \frac{|M_{hx}|}{I_x} \frac{D}{2} = \frac{|M_{hx}|}{K_x}$, $|\tau_{\varphi z \max}| = \frac{|M_c|}{I_p} \frac{D}{2} = \frac{|M_c|}{K_p}$.

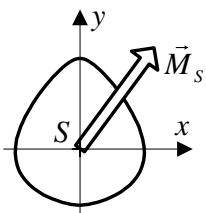
Kör és körgyűrű keresztmetszet esetén: $I_p = 2I_x \Rightarrow K_p = 2K_x$.

Redukált feszültség: $\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{\varphi z}^2}$, $\begin{cases} \beta = 3 & \text{HMH,} \\ \beta = 4 & \text{Mohr.} \end{cases}$

$$\sigma_{\text{red max}} = \sigma_{\text{red}}(A) = \sigma_{\text{red}}(B).$$

$$\sigma_{\text{red max}} = \sqrt{\sigma_z^2 \max + \beta \tau_{\varphi z}^2 \max} = \sqrt{\frac{M_{hx}^2}{K_x^2} + \frac{\beta}{4} \frac{M_c^2}{K_x^2}} = \frac{M_{\text{red}}}{K_x}, \quad M_{\text{red}} = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}.$$

10.5. Ferde hajlítás



Ferde hajlítás esetén az \vec{M}_S nyomatékvektor nem párhuzamos egyik S ponti tehetetlenségi főtengellyel sem.

$$\vec{M}_S = (M_{hx} \vec{e}_x - M_{hy} \vec{e}_y).$$

Az x, y tengelyek a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi főtengelyei.

Tehetlenségi főtengely: $I_{xy} = I_{yx} = 0$.

Ferde hajlítás \equiv két egyenes hajlítás szuperpozíciója (összege).

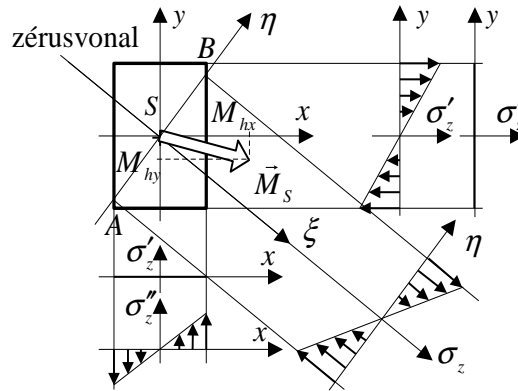
$$\text{Feszültségi állapot: } \underline{[F]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_z &= \sigma'_z + \sigma''_z, \\ \sigma_z &= \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x \end{aligned}$$

Zérusvonal: $\sigma_z = 0 = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x$, $\Rightarrow y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{I_x}{I_y} x$ - a zérusvonal nem párhuzamos a nyomatékvektorral.

Feszültségeloszlás:

Veszélyes pontok:

A, B (a keresztmetszetben zérusvonaltól legtávolabb lévő pontok).



10.6. Nyírás és hajlítás

A nyírás rúdszerkezeteknél általában hajlítással együtt lép fel.

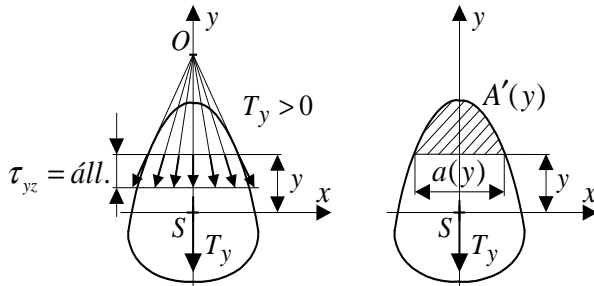
A nyírás és hajlítás kapcsolata:

$$\frac{d M_{hx}(z)}{dz} = -T_y(z) \quad , \quad M_{hx}(z) - M_{hx}(z=0) = - \int_{\zeta=0}^z T_y(\zeta) d\zeta$$

Közelítő megoldás:

- σ_z úgy számítható, mint tiszta hajlításnál.
- x, y a keresztmetszet S ponti tehetetlenségi főtengelyei.
- a $\vec{\tau}_z$ feszültségek az y tengelyen egy pontban metsződnek.
- az x tengellyel párhuzamos egyenes mentén a τ_{yz} állandó.

A feszültségek kiszámítása:



$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y,$$

$$\tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(A')}{I_x a(y)}.$$

τ_{xz} a $\vec{\tau}_z$ irányából határozható meg.

Közepes nyírőfeszültség: $\tau_{\text{köz}} = \frac{|T_y|}{A}$.

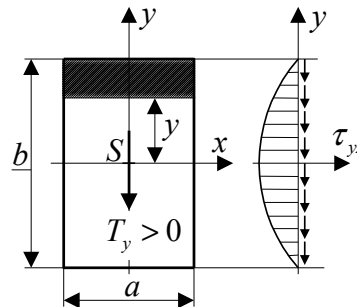
A feszültségi tenzor: $[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$.

A τ_{yz} számítása téglalap keresztmetszetű rúdnál:

$$\tau_{yz}(y) = -\frac{6T_y}{A} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad \text{— parabola,}$$

$$A = a b,$$

$$\tau_{yz \text{ max}} = \frac{3}{2} \tau_{\text{köz}}.$$

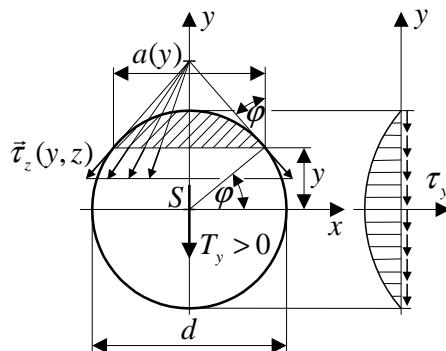


A τ_{yz} számítása kör keresztmetű rúdnál:

$$\tau_{yz}(y) = -\frac{4}{3} \frac{T_y}{A} \frac{4}{d^2} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right) \text{ - parabola,}$$

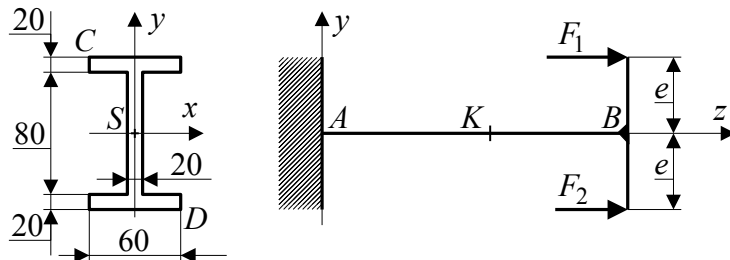
$$A = \frac{d^2 \pi}{4},$$

$$\tau_{yz \text{ max}} = \frac{4}{3} \tau_{kz}.$$



10.7. Gyakorló feladatok rudak összetett igénybevételeire

F.III.7.1. feladat: Húzás-nyomás és egyenes hajlítás



Adott:

$$F_1 = 80 \text{ kN}, F_2 = 120 \text{ kN},$$

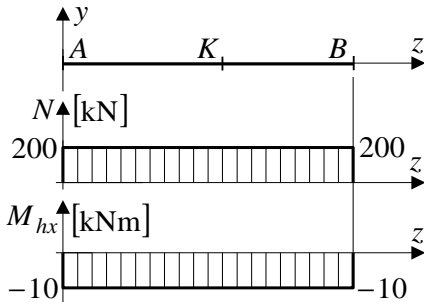
$$e = 250 \text{ mm},$$

$$\sigma_{\text{meg}} = 100 \text{ MPa}$$

- Feladat:
- Az AB rúdszakasz igénybevételei ábráinak megrajzolása.
 - Feszültségeloszlás megrajzolása a K keresztmetszeten.
 - A σ_z feszültség meghatározása a C , S és a D pontokban.
 - A tartó ellenőrzése feszültségcsúcsra.

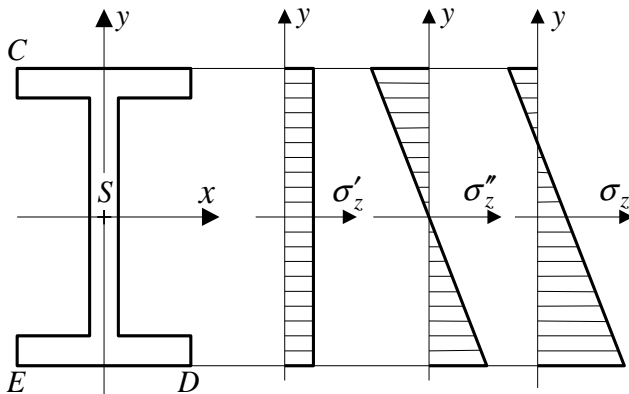
Kidolgozás:

a) Az AB rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása:



Veszélyes keresztmetszet: a rúd AB szakasza azonos mértékben veszélyes.

b) Feszültségeloszlás megrajzolása a K keresztmetszeten:



$$\sigma_z(y) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y = \sigma'_z + \sigma''_z,$$

$$N = 200 \text{ kN}, M_{hx} = -10 \text{ kNm}.$$

Veszélyes pontok: az ED szakasz minden pontja azonos mértékben veszélyes

c) A σ_z feszültség meghatározása a C , S és a D pontokban:

A keresztmetszeti jellemzők:

$$A = 60 \cdot 120 - 80 \cdot 40 = 4000 \text{ mm}^2, \quad I_x = \frac{60 \cdot 120^3}{12} - 2 \frac{20 \cdot 80^3}{12} = 6,933 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

A feszültségek:

$$\begin{aligned} \sigma_z(S) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{h,x}}{I_x} y_S = \frac{200 \cdot 10^3}{4000} = 50 \text{ MPa}, \\ \sigma_z(C) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{h,x}}{I_x} y_C = \frac{200 \cdot 10^3}{4000} + \frac{-10^7}{6,933 \cdot 10^6} 60 = \\ &= 50 - 86,54 = -36,54 \text{ MPa}, \\ \sigma_z(D) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{h,x}}{I_x} y_D = \frac{200 \cdot 10^3}{4000} + \frac{-10^7}{6,933 \cdot 10^6} (-60) = \\ &= 50 + 86,54 = 136,54 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

d) A tartó ellenőrzése feszültségcsúcsra:

A tartó szilárdsági szempontból megfelel, ha a veszélyes keresztmetszet veszélyes pontjában $\sigma_{z \max} \leq \sigma_{\text{meg}}$.

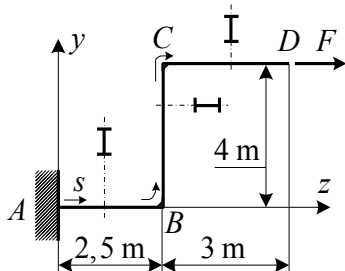
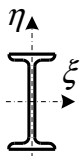
A veszélyes pontokban a feszültség: $\sigma_{z \max} = \sigma_z(D) = \sigma_z(E) = 136,54 \text{ MPa}$.

A tartó nem felel meg, mert a $\sigma_{z \max} \leq \sigma_{\text{meg}}$ egyenlőtlenség nem teljesül.

Itt $\sigma_{z \max} = 136,54 \text{ MPa} > \sigma_{\text{meg}} = 100 \text{ MPa}$, tehát a tartó szilárdsági szempontból nem felel meg.

F.III.7.2. feladat: Húzás-nyomás és egyenes hajlítás

I 400
MSz 325-51



Adott:

$$F = 20 \text{ kN}, \sigma_F = R_{p0,2} = 160 \text{ MPa}, n_F = 2,5.$$

Az I 400-as szelvény keresztmetszeti jellemzői szabványból:

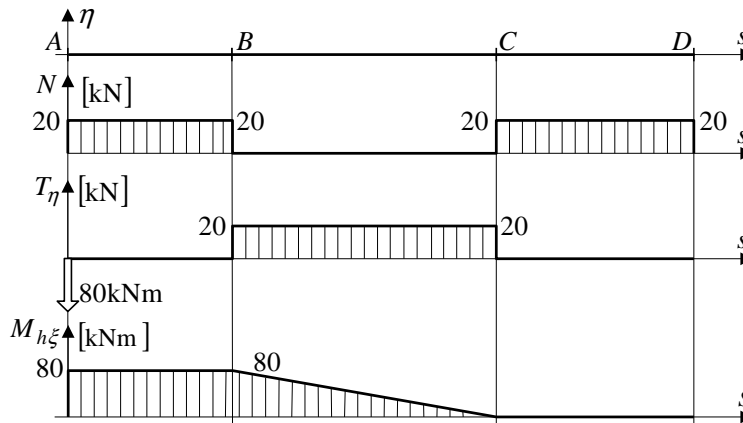
$$A = 118 \text{ cm}^2, I_\xi = 29\,210 \text{ cm}^4, K_\xi = 1\,460 \text{ cm}^3.$$

Feladat:

- Az ABCD rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása, a veszélyes keresztmetszet meghatározása.
- Feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszeten, a veszélyes pont meghatározása.
- A tartó ellenőrzése feszültségcsúcsra.

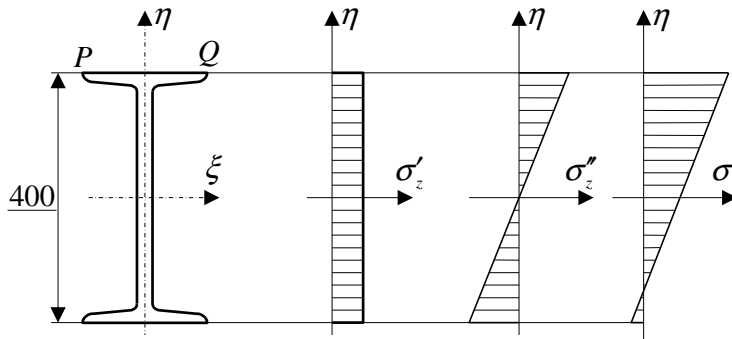
Kidolgozás:

a) Az $ABCD$ rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása, a veszélyes keresztmetszet meghatározása:



Veszélyes keresztmetszet: az AB rúdszakasz minden keresztmetszete.

b) Feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszeten:



Veszélyes pontok: a PQ vonalszakasz minden pontja

c) A tartó ellenőrzése feszültségcsúcsra:

Megfelel a tartó, ha a veszélyes keresztmetszet veszélyes pontjaiban:

$$\sigma_{z \max} \leq \frac{R_{p0,2}}{n_F} .$$

A veszélyes pontban a feszültség: $\sigma_{z \max} = \sigma'_{z \max} + \sigma''_{z \max}$,

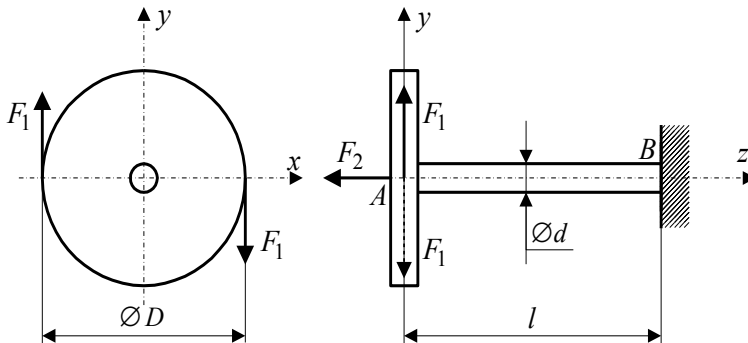
$$\sigma'_{z \max} = \frac{N}{A}, \text{ illetve } \sigma''_{z \max} = \frac{M_{h\xi}}{K_\xi} .$$

$$\text{Behelyettesítve: } \sigma_{z \max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{h\xi}}{K_\xi} = \frac{20 \cdot 10^3}{118 \cdot 10^2} + \frac{80 \cdot 10^6}{1460 \cdot 10^3} = 1,69 + 54,79 = 56,48 \text{ MPa.}$$

A megengedett legnagyobb feszültség: $\sigma_{\text{meg}} = \frac{R_{p0,2}}{n_F} = 64 \text{ MPa.}$

A tartó megfelel, mert $\sigma_{z \max} \leq \sigma_{\text{meg}}$, vagyis $56,48 < 64$.

F.III.7.3. feladat: Húzás-nyomás és csavarás



Adott:

$$F_1 = 5 \text{ kN}, F_2 = 20 \text{ kN},$$

$$d = 80 \text{ mm}, D = 1,2 \text{ m},$$

$$R_{p0,2} = 180 \text{ MPa},$$

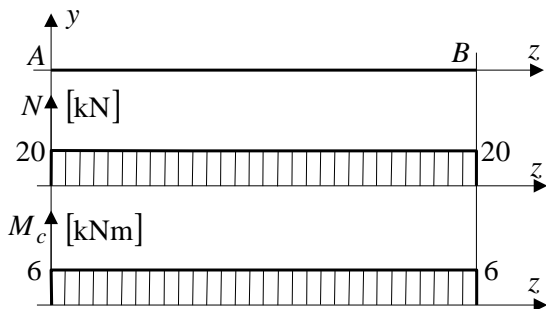
$$n_F = 1,5.$$

Feladat:

- Az igénybevételi ábrák megrajzolása, a veszélyes keresztmetszet meghatározása.
- A feszültségeloszlás megrajzolása a $z = l/2$ helyen, a veszélyes pontok meghatározása.
- A tartó ellenőrzése feszültségcsúcsra.

Kidolgozás:

- Az igénybevételi ábrák megrajzolása, a veszélyes keresztmetszet meghatározása:

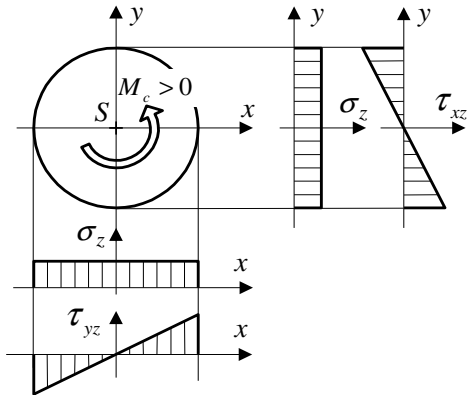


A M_c csavaró nyomaték nagysága:

$$M_c = D F_1 = 1,2 \cdot 5 = 6 \text{ kNm.}$$

Veszélyes keresztmetszet: a tartó minden keresztmetszete azonos mértékben veszélyes.

b) A feszültségeloszlás megrajzolása a $z = l/2$ helyen, a veszélyes pontok meghatározása:



Veszélyes pontok: a palást pontjai ($R = \frac{d}{2}$).

c) A tartó ellenőrzése feszültségcsúcsra:

Megfelel a tartó, ha a veszélyes keresztmetszet veszélyes pontjaiban:

$$\sigma_{\text{red max}} \sigma_{\text{meg}} = \frac{\sigma_F}{n_F} = \frac{180}{1,5} = 120 \text{ MPa.}$$

$$\begin{aligned} \text{Keresztmetszeti jellemzők: } A &= \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{80^2 \pi}{4} = 5026,5 \text{ mm}^2, \\ K_p &= \frac{d^3 \pi}{16} = \frac{80^3 \pi}{16} = 100,53 \cdot 10^3 \text{ mm}^3. \end{aligned}$$

A feszültségi koordináták a palást pontjaiban ($R = D/2$):

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{20 \cdot 10^3}{5026,5} = 3,98 \text{ MPa}, \quad \tau_{zy \text{ max}} = \frac{M_c}{K_p} = \frac{6 \cdot 10^6}{100,53 \cdot 10^3} = 59,68 \text{ MPa.}$$

A $\sigma_{\text{red max}}$ Mohr szerint:

$$\sigma_{\text{red max}} = \sigma_{\text{red}}(P) = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{yz \text{ max}}^2} = \sqrt{3,98^2 + 4 \cdot 59,68^2} = 119,43 \text{ MPa.}$$

A tartó *Mohr* elmélet szerint megfelel, mert

$$\sigma_{\text{red max}} = 119,43 \text{ MPa} < \sigma_{\text{meg}} = 120 \text{ MPa} \text{ teljesül.}$$

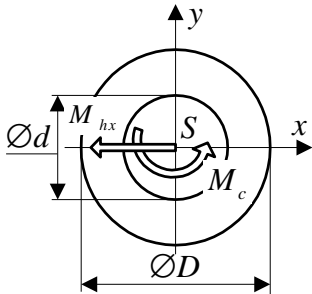
A $\sigma_{\text{red max}}$ *Huber-Mises-Hencky* szerint:

$$\sigma_{\text{red max}} = \sigma_{\text{red}}(P) = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{yz \text{ max}}^2} = \sqrt{3,98^2 + 3 \cdot 59,68^2} = 103,45 \text{ MPa}$$

A tartó *Huber-Mises-Hencky* szerint megfelel, mert

$$\sigma_{\text{red max}} = 103,45 \text{ MPa} < \sigma_{\text{meg}} = 120 \text{ MPa} \text{ teljesül.}$$

F.III.7.4. feladat: Csavarás és egyenes hajlítás



Adott: egy körgyűrű keresztmetszetű tartó veszélyes keresztmetszetének igénybevétele:

$$\vec{M}_S = (M_c \vec{e}_z + M_{hx} \vec{e}_x) = (800 \vec{e}_z - 600 \vec{e}_x) \text{ Nm, valamint}$$

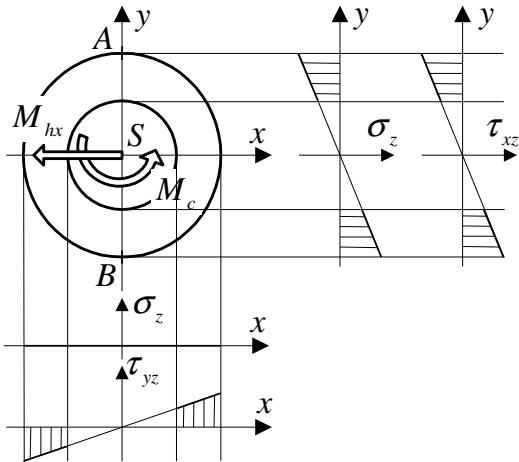
$$D = 2d, \sigma_{\text{meg}} = 80 \text{ MPa.}$$

Feladat:

- Feszültségeloszlások rajzolása a keresztmetszet x és y tengelye mentén, valamint a veszélyes pont(ok) meghatározása.
- Az M_{red} redukált nyomaték meghatározása.
- A keresztmetszet méretezése *Mohr* elmélet szerint.

Kidolgozás:

a) Feszültségeloszlások rajzolása a keresztmetszet x és y tengelye mentén, valamint a veszélyes pont(ok) meghatározása:



$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y,$$

$$\tau_{xz} = \frac{M_c}{I_p} y, \quad \tau_{zy} = \frac{-M_c}{I_p} x$$

Veszélyes pontok:

- hajlításból az A és B pont,
- csavarásból a palást valamennyi pontja,
- hajlításból és csavarásból együttesen az A és B pont veszélyes.

Tehát a keresztmetszet méretezését az A , vagy B pontbeli redukált feszültségek figyelembevételével kell elvégezni.

b) Az M_{red} redukált nyomaték meghatározása:

$$\sigma_{red \max} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{K_x}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}}{K_x} = \frac{M_{red}}{K_x}.$$

Mohr szerint $\beta = 4$: $M_{red} = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2} = \sqrt{\left(60^2 + \frac{4}{4} 80^2\right)} 10^4 = 1000 \text{ Nm}.$

Huber-Mises-Hencky szerint $\beta = 3$:

$$M_{red} = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2} = \sqrt{\left(60^2 + \frac{3}{4} 80^2\right)} 10^4 = 916,5 \text{ Nm}.$$

c) A keresztmetszet méretezése *Mohr* szerint:

A tartó megfelel, ha $\sigma_{\text{red max}} \leq \sigma_{\text{meg}}$, $\Rightarrow \frac{M_{\text{red}}}{K_x} \leq \sigma_{\text{meg}}$.

Ebből $K_x \geq \frac{M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{meg}}}$.

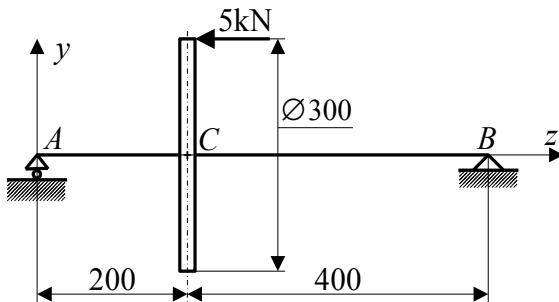
Mivel $D = 2d$, ezért $K_x = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{64} \frac{2}{D} = \frac{(16-1) d^4 \pi}{64 d} = \frac{15}{64} d^3 \pi$

A méretezési egyenlőtlenségből: $d \geq \sqrt[3]{\frac{64}{15 \pi} \frac{M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{meg}}}} = \sqrt[3]{\frac{64}{15 \pi} \frac{10^6}{80}} = 25,7 \text{ mm}$,

$$\Rightarrow D = 51,4 \text{ mm}.$$

Szabványos külső átmérőt választva (MSz 4337-64): $D = 60 \text{ mm}$ és $d = 30 \text{ mm}$.

F.III.7.5. feladat: Húzás-nyomás és egyenes hajlítás



Adott:

A kör keresztmetszetű kéttámaszú tartó méretei és $\sigma_{\text{meg}} = R_{p0,2} = 160 \text{ MPa}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Feladat:

a) Az *ACB* rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása, a veszélyes keresztmetszet meghatározása.

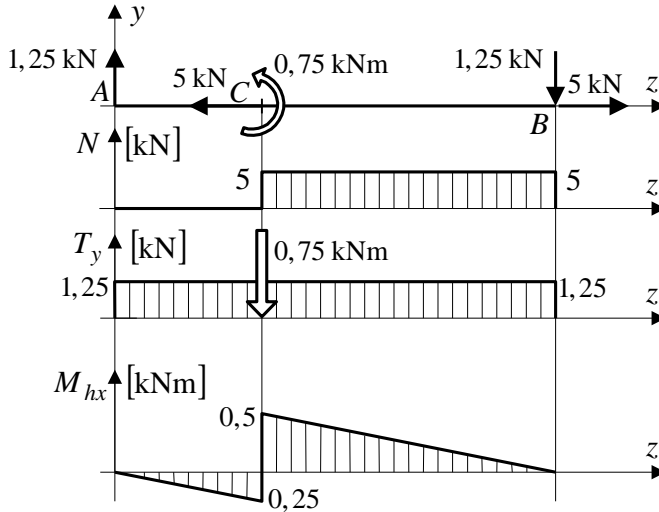
b) A feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszeten.

c) A tartó méretezése feszültségcsúcsra.

d) A rúdban felhalmozott alakváltozási energia meghatározása.

Kidolgozás:

a) Az ACB rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása, a veszélyes keresztmetszet meghatározása:



$$M_c = -5 \cdot 0,15 = -0,75 \text{ kNm}$$

$$M_a = 0 = -0,75 - F_{By} \cdot 0,6,$$

$$F_{By} = -1,25 \text{ kN},$$

$$M_b = 0 = F_{Ay} \cdot 0,6 - 0,75,$$

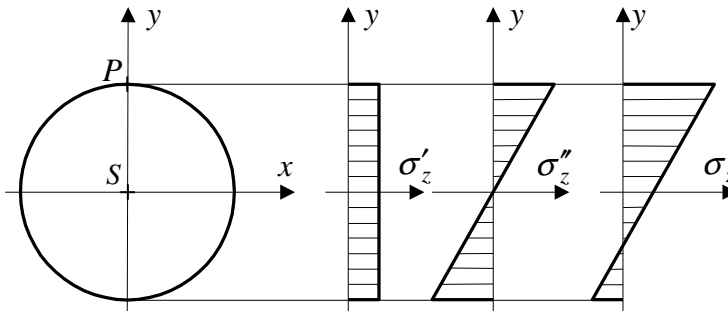
$$F_{Ay} = 1,25 \text{ kN},$$

$$\sum F_x = 0 = -5 + F_{Bx},$$

$$F_{Bx} = 5 \text{ kN}.$$

Veszélyes keresztmetszet a C^+ .

b) Feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszeten:



Veszélyes pont: P .

c) A tartó méretezése feszültségcsúcsra:

A tartó megfelel, ha a veszélyes keresztmetszet veszélyes pontjaiban $\sigma_{z \max} \leq \sigma_{\text{meg}}$.

$$\sigma_{z \max} = \sigma'_{z \max} + \sigma''_{z \max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{K_x},$$

a keresztmetszeti jellemzők: $A = \frac{d^2 \pi}{4}$, $K_x = \frac{d^3 \pi}{32}$.

A keresztmetszeti jellemzőket a méretezési egyenlőtlenségbe behelyettesítve:

$\frac{4 N}{d^2 \pi} + \frac{32 M_{hx}}{d^3 \pi} \leq \sigma_{\text{meg}}$. Ez a d ismeretlenre nézve harmadfokú egyenlet.

A harmadfokú egyenlet megoldása helyett a tartót először csak hajlításra méretezzük, majd a kapott méretet növelve hajlításra és húzásra ellenőrizzük:

$$\frac{32 M_{hx}}{d^3 \pi} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{hx}}{\sigma_{\text{meg}} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,5 \cdot 10^6}{160 \pi}} = 33,96 \text{ mm}.$$

Az átmérőre egy ennél nagyobb szabványos d értéket (MSz 4337-64) választva, legyen: $d = 36 \text{ mm}$.

Ezzel az átmérővel a keresztmetszeti jellemzők: $A = \frac{36^2 \pi}{4} = 1\,017,88 \text{ mm}^2$,

$$K_x = \frac{36^3 \pi}{32} = 4\,580,44 \text{ mm}^3, \quad I_x = \frac{36^4 \pi}{64} = 82\,447,96 \text{ mm}^4.$$

A rúd ellenőrzése húzásra és hajlításra:

$$\sigma_{z \max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{K_x} = \frac{5 \cdot 10^3}{1017,88} + \frac{0,5 \cdot 10^6}{4580,44} = 4,91 + 109,16 = 114,07 \text{ MPa}.$$

A rúd megfelel, mivel $\sigma_{z \max} \leq \sigma_{\text{meg}}$, vagyis $114,07 < 130$.

d) A rúdban felhalmozott alakváltozási energia meghatározása: $U = U_{hz.} + U_{hajl.} + U_{nyr.}$

A nyírásból származó alakváltozási energiát elhanyagolva:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{N^2}{A E} dz + \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{M_{hx}^2}{I_x E} dz = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{N^2 l_{CB}}{A E} + \frac{1}{2} \frac{l_{AC}}{I_x E} \frac{1}{6} \{0 + 4 [M_{hx}(0,1)]^2 + [M_{hx}(0,2)]^2\} + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{l_{CB}}{I_x E} \frac{1}{6} \{[M_{hx}(0,2)]^2 + 4 [M_{hx}(0,4)]^2 + 0\} = \frac{(5 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 1017,88 \cdot 2 \cdot 10^5} + \\
 &+ \frac{1}{2 \cdot 82447,96 \cdot 2 \cdot 10^5} \frac{0,2 \cdot 10^3}{6} [0 + 4 \cdot (-0,125 \cdot 10^6)^2 + (-0,25 \cdot 10^6)^2] + \\
 &+ \frac{1}{2 \cdot 82447,96 \cdot 2 \cdot 10^5} \frac{0,4 \cdot 10^3}{6} [(0,5 \cdot 10^6)^2 + 4 \cdot (0,25 \cdot 10^6)^2 + 0] = \\
 &= 24,56 + 63,17 + 505,37 = 593,1 \text{ Nmm} = 0,5931 \text{ J.}
 \end{aligned}$$

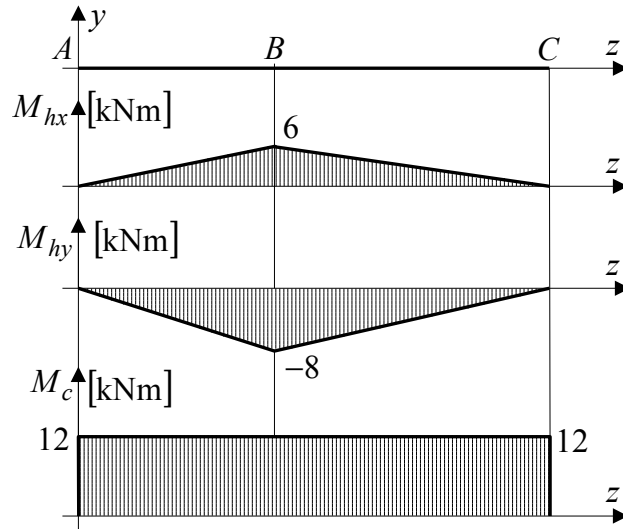
F.III.7.6. feladat: Csavarás és egyenes hajlítás

Adott:

A d átmérőjű rúd igénybevételi ábrái és a rúd anyagának $\sigma_{\text{meg}} = 120$ MPa megengedett feszültsége.

Feladat:

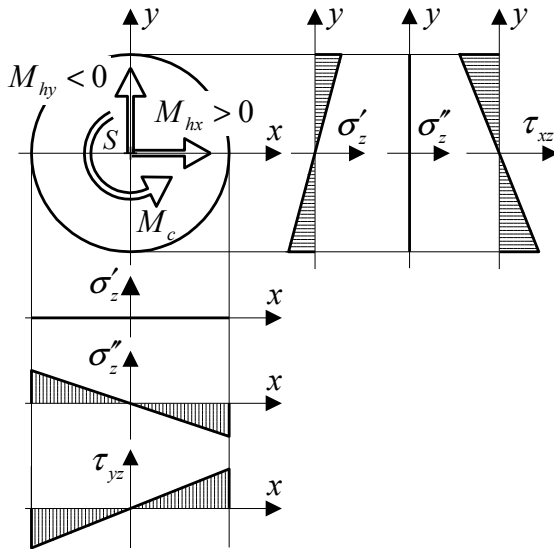
- A veszélyes keresztmetszet meghatározása és a feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszeten.
- A Mohr-szerinti redukált nyomaték meghatározása a veszélyes keresztmetszeten.
- A rúd méretezése Mohr-szerint.



Kidolgozás:

- A veszélyes keresztmetszet meghatározása és a feszültségeloszlás megrajzolása a veszélyes keresztmetszeten:

A veszélyes keresztmetszet: B .



A $\sigma_z(x,y)$ feszültségeloszlás zérus-vonala:

$$\sigma_z(x,y) = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x = 0.$$

Mivel $I_x = I_y$, ezért a zérusvonal egyenlete:

$$y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} x.$$

A keresztmetszet veszélyes pontjai:

- csavarásból az $R = d/2$ pontok,
- hajlításból a zérusvontól legtávolabb levő két pont.

A zérusvonal párhuzamos az $\vec{M}_h = M_{hx}\vec{e}_x - M_{hy}\vec{e}_y$ nyomatékvektorral \Rightarrow egyenes hajlítás.

b) A Mohr szerinti redukált nyomaték meghatározása a veszélyes keresztmetszeten:

$$M_{\text{red}} = \sqrt{(M_{hx}^2 + M_{hy}^2) + \frac{\beta}{4} M_c^2} = \sqrt{6^2 + 8^2 + 12^2} = 15,62 \text{ kNm}.$$

c) A rúd méretezése a Mohr elmélet szerint:

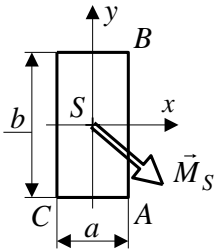
A tartó megfelel, ha: $\sigma_{\text{red max}} \leq \sigma_{\text{meg}}$.

A veszélyes pontban a feszültség: $\sigma_{\text{red max}} = \frac{M_{\text{red}}}{K_x}$, $K_x = \frac{d^3 \pi}{32}$.

$$\frac{32 M_{\text{red}}}{d^3 \pi} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow d \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{meg}} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 15,62 \cdot 10^6}{120 \pi}} = 109,86 \text{ mm}.$$

Szabványos (MSz 4337-64) d értéket választva, a rúd átmérője: $d = 110 \text{ mm}$.

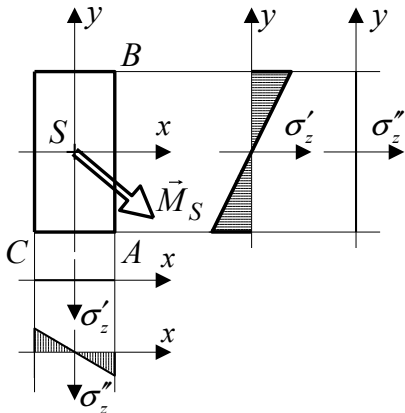
F.III.7.7. feladat: Ferde hajlítás

Adott:A rúd K keresztmetszetének méretei és igénybevétele: $\vec{M}_S = (160 \vec{e}_x - 100 \vec{e}_y)$ kNm, $a = 25$ mm, $b = 50$ mm.Feladat:

- A feszültségeloszlás megrajzolása és a veszélyes pontok meghatározása.
- A feszültségállapot meghatározása az A , B és C pontokban.
- A zérusvonal egyenletének meghatározása.

Kidolgozás:

- A feszültségeloszlás megrajzolása és a veszélyes pontok meghatározása:



Feszültségeloszlás:

$$\sigma_z(x, y) = \sigma'_z + \sigma''_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x.$$

Veszélyes pontok a B és C .

- A feszültségállapot meghatározása az A , B és C pontokban:

Keresztmetszeti jellemzők:

$$K_x = \frac{2 I_x}{b} = \frac{25 \cdot 50^2}{6} = 10417 \text{ mm}^3 \quad K_y = \frac{2 I_y}{a} = \frac{50 \cdot 25^2}{6} = 5208 \text{ mm}^3.$$

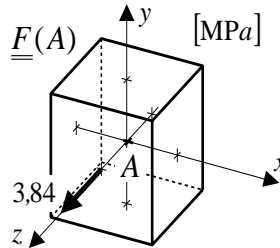
A keresztmetszet igénybevétele ferde hajlítás: $M_{hx} = 160 \text{ Nm}$, $M_{hy} = 100 \text{ Nm}$.

A σ_z feszültség a keresztmetszet tetszőleges P pontjában: $\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y_P + \frac{M_{hy}}{I_y} x_P$.

Feszültségállapot az A , B és C pontokban:

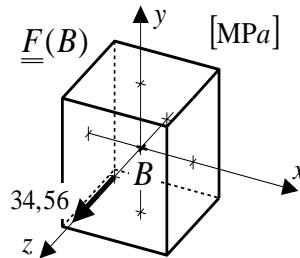
$$\sigma_z(A) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_A + \frac{M_{hy}}{I_y} x_A = -\frac{M_{hx}}{K_x} + \frac{M_{hy}}{K_y} = -\frac{160 \cdot 10^3}{10417} + \frac{100 \cdot 10^3}{5208} = 3,84 \text{ MPa},$$

$$\underline{\underline{F}}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,84 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$



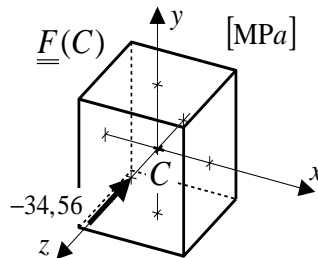
$$\sigma_z(B) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_B + \frac{M_{hy}}{I_y} x_B = \frac{M_{hx}}{K_x} + \frac{M_{hy}}{K_y} = \frac{160 \cdot 10^3}{10417} + \frac{100 \cdot 10^3}{5208} = 34,56 \text{ MPa},$$

$$\underline{\underline{F}}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 34,56 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$



$$\sigma_z(C) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_C + \frac{M_{hy}}{I_y} x_C = -\frac{M_{hx}}{K_x} - \frac{M_{hy}}{K_y} = -\frac{160 \cdot 10^3}{10417} - \frac{100 \cdot 10^3}{5208} = -34,56 \text{ MPa}$$

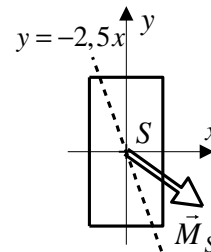
$$\underline{\underline{F}}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -34,56 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



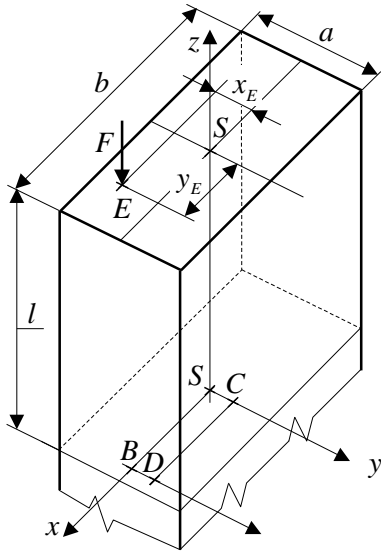
c) A zérusvonal egyenletének meghatározása:

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x = 0.$$

$$y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{I_x}{I_y} x = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{K_x}{K_y} \frac{b}{a} x = -\frac{100}{160} \frac{10417}{5208} \frac{50}{25} x = -2,5 x.$$



F.III.7.8. feladat: Excentrikus húzás-nyomás



Adott:

$F = 6 \text{ MN} = 6 \cdot 10^6 \text{ N}$, $a = 1,2 \text{ m}$, $b = 2,5 \text{ m}$,
 $E = (0,8; -0,4;l) \text{ m}$, $B = (1,2; 0; 0) \text{ m}$, $l = 3 \text{ m}$,
 $C = (0; 0,5; 0) \text{ m}$, $D = (1,2; 0,5; 0) \text{ m}$.

Feladat:

- A $z = 0$ keresztmetszeten a rúd igénybevételének, a keresztmetszet jellemzőinek, illetve az S , B , C és a D pontokban a feszültségeknek a meghatározása.
- A zérusvonal egyenletének a felírása és a veszélyes pont meghatározása.
- Feszültségeloszlás megrajzolása az x és az y tengelyek mentén.

d) A keresztmetszeten fellépő legnagyobb feszültség meghatározása.

e) Az önsúlyt figyelembe véve az a) és d) feladat megoldása, ha $\rho = 8600 \text{ kg/m}^3$.

Kidolgozás:

a) A $z = 0$ keresztmetszeten a rúd igénybevételének, a keresztmetszet jellemzőinek, illetve az S , B , C és a D pontokban a feszültségeknek a meghatározása:

A keresztmetszet igénybevétele:

$$N = -F = -6 \cdot 10^6 \text{ N}, M_{hx} = -F y_E = -6 \cdot 10^6 (-0,4) = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Nm},$$

$$M_{hy} = -F x_E = -6 \cdot 10^6 \cdot 0,8 = -4,8 \cdot 10^6 \text{ Nm}.$$

A keresztmetszet geometriai jellemzői: $A = a b = 1,2 \cdot 2,5 = 3 \text{ m}^2$,

$$I_x = \frac{b a^3}{12} = \frac{2,5 \cdot 1,2^3}{12} = 0,36 \text{ m}^4, \quad I_y = \frac{a b^3}{12} = \frac{1,2 \cdot 2,5^3}{12} = 1,5625 \text{ m}^4.$$

Feszültség számítás: $\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z + \sigma'''_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x$,

$$\sigma_z(S) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_S + \frac{M_{hy}}{I_y} x_S = \frac{-6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} = -2 \text{ MPa},$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(B) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_B + \frac{M_{hy}}{I_y} x_B = \frac{-6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} + \frac{-4,8 \cdot 10^9}{1,5625 \cdot 10^{12}} 1,2 \cdot 10^3 = \\ &= -2 - 3,69 = -5,69 \text{ MPa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(C) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_C + \frac{M_{hy}}{I_y} x_C = \frac{-6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} + \frac{2,4 \cdot 10^9}{0,36 \cdot 10^{12}} 0,5 \cdot 10^3 = \\ &= -2 + 3,33 = 1,33 \text{ MPa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(D) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_D + \frac{M_{hy}}{I_y} x_D = \frac{-6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} + \frac{-4,8 \cdot 10^9}{1,5625 \cdot 10^{12}} 1,2 \cdot 10^3 + \frac{2,4 \cdot 10^9}{0,36 \cdot 10^{12}} 0,5 \cdot 10^3 = \\ &= -2 - 3,69 + 3,33 = -2,36 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

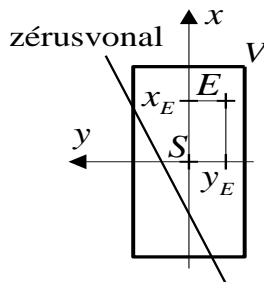
b) A zérusvonal egyenletének a felírása és a veszélyes pont meghatározása:

$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z + \sigma'''_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x = 0,$$

$$y = -\frac{N}{M_{hx}} \frac{I_x}{A} - \frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{I_x}{I_y} x = -\frac{1}{y_E} \frac{I_x}{A} - \frac{x_E}{y_E} \frac{I_x}{I_y} x,$$

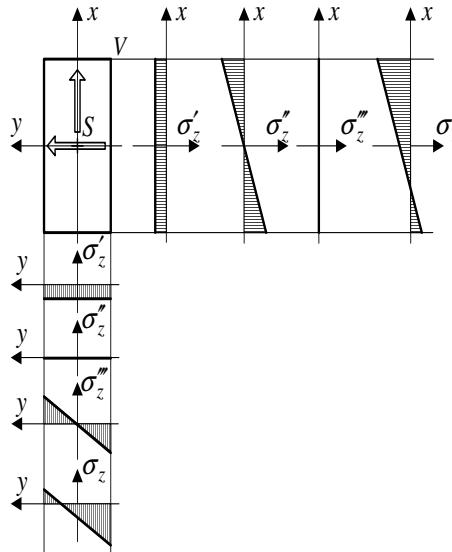
$$y = -\frac{1}{-0,4} \frac{0,36}{3} - \frac{0,8}{-0,4} \frac{0,36}{1,5625} x,$$

$$\text{Zérusvonal egyenlete: } y = 0,3 + 0,4608 x.$$



Veszélyes pont: V – a keresztmetszet zérusvonalától legtávolabb lévő pontja.

c) Feszültségeloszlás megrajzolása az x és az y tengelyek mentén:



d) A keresztmetszeten fellépő legnagyobb feszültség meghatározása:

$$\sigma_{z \max} = \sigma_z(V) = \sigma'_z(V) + \sigma''_z(V) + \sigma'''_z(V) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_V + \frac{M_{hy}}{I_y} x_V,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z \max} &= \frac{-6 \cdot 10^6}{3} + \frac{-4,8 \cdot 10^6}{1,5625} 1,25 + \frac{2,4 \cdot 10^6}{0,36} (-0,6) = \\ &= -2 \cdot 10^6 - 3,84 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^6 = -9,84 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -9,84 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

e) Az önsúlyt figyelembevéve az *a)* és *d)* feladat megoldása:

Terhelés az önsúlyból: $N_g = -G = -\rho g l a b = -8600 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 1,2 \cdot 2,5 = -774000 \text{ N}$.

Az igénybevételek: $N = -F + N_g = -6 \cdot 10^6 - 774000 = -6,774 \cdot 10^6 \text{ N}$.

Az M_{hx} -et és az M_{hy} -t nem változtatja meg az önsúly figyelembevétele.

A feszültségek:

$$\sigma_z(S) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_S + \frac{M_{hy}}{I_y} x_S = \frac{-6,774 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} = -2,258 \text{ MPa},$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(B) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_B + \frac{M_{hy}}{I_y} x_B = \frac{-6,774 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} + \frac{-4,8 \cdot 10^9}{1,5625 \cdot 10^{12}} 1,2 \cdot 10^3 = \\ &= -2,258 - 3,69 = -5,948 \text{ MPa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(C) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_C + \frac{M_{hy}}{I_y} x_C = \frac{-6,774 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} + \frac{2,4 \cdot 10^9}{0,36 \cdot 10^{12}} 0,5 \cdot 10^3 = \\ &= -2,258 + 3,33 = 1,072 \text{ MPa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(D) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_D + \frac{M_{hy}}{I_y} x_D = \\ &= \frac{-6,774 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} + \frac{-4,8 \cdot 10^9}{1,5625 \cdot 10^{12}} 1,2 \cdot 10^3 + \frac{2,4 \cdot 10^9}{0,36 \cdot 10^{12}} 0,5 \cdot 10^3 = \\ &= -2,258 - 3,69 + 3,33 = -2,618 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

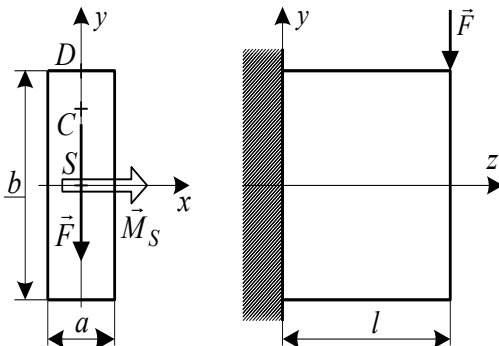
Veszélyes pont: változatlanul a *V*.

A keresztmetszeten fellépő legnagyobb feszültség meghatározása:

$$\sigma_{z \max} = \sigma_z(V) = \sigma'_z(V) + \sigma''_z(V) + \sigma'''_z(V) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_V + \frac{M_{hy}}{I_y} x_V,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{z \max} &= \frac{-6,774 \cdot 10^6}{3} + \frac{-4,8 \cdot 10^6}{1,5625} \cdot 1,25 + \frac{2,4 \cdot 10^6}{0,36} \cdot (-0,6) = \\ &= -2,258 \cdot 10^6 - 3,84 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^6 = -10,098 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -10,098 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

F.III.7.9. feladat: Nyírás és hajlítás



Adott:

$$\vec{F} = (-30 \vec{e}_y) \text{ kN}, a = 20 \text{ mm},$$

$$b = 60 \text{ mm}, l = 50 \text{ mm}, y_C = 20 \text{ mm}.$$

Feladat:

a) A rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása és a veszélyes keresztmetszet meghatározása.

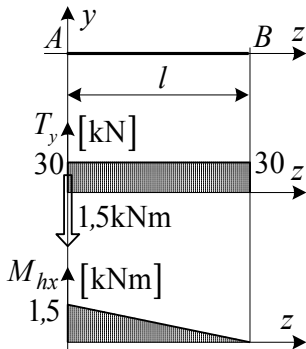
b) A feszültségeloszlások megrajzolása és a veszélyes pont(ok) meghatározása a veszélyes keresztmetszeten.

c) A feszültségállapot meghatározása a veszélyes keresztmetszeten a D , C és az S pontokban.

d) A Mohr szerinti σ_{red} redukált feszültség meghatározása a veszélyes pontokban.

Kidolgozás:

a) A rúd igénybevételi ábráinak megrajzolása és a veszélyes keresztmetszet meghatározása:



Veszélyes keresztmetszet a befalazás helye: A.

A veszélyes keresztmetszet igénybevétele:

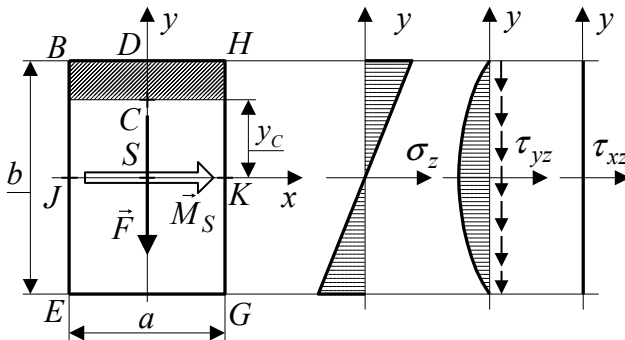
- x tengely körüli hajlítás: $M_{hx} = 1,5 \text{ kNm}$,

- y irányú nyírás: $T_y = 30 \text{ kN}$.

A keresztmetszet x tengelyre számított másodrendű nyomatéka:

$$I_x = \frac{a b^3}{12} = \frac{20 \cdot 60^3}{12} = 0,36 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

b) A feszültségeloszlások megrajzolása és a veszélyes pont(ok) meghatározása a veszélyes keresztmetszeten:



$$\sigma_x = \frac{M_{hz}}{I_z} y,$$

$$\tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(y)}{I_x a(y)} = -\frac{T_y}{2 I_x} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right).$$

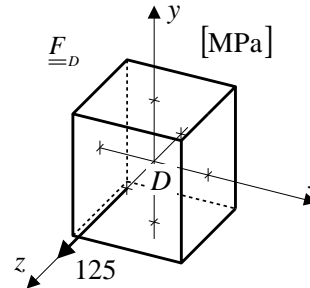
Veszélyes pontok:

Hajlításból a BDH és EG egyenes pontjai,
nyírásból az x tengely, azaz a JSK
egyenes pontjai.

c) A feszültségállapot meghatározása a veszélyes keresztmetszeten a D , C és az S pontokban:

A D pontban: $\tau_{yz}(D) = 0, \sigma_z(D) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_D,$
 $\sigma_z(D) = \frac{1,5 \cdot 10^6}{0,36 \cdot 10^6} 30 = 125 \text{ MPa.}$

$$\underline{\underline{F}}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$



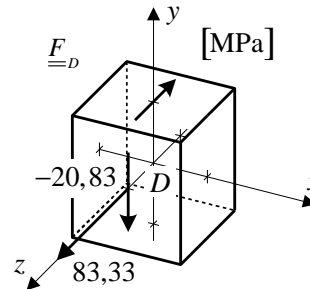
A C pontban:

$$\tau_{yz}(C) = -\frac{3 T_y}{2 A} \left(1 - \frac{4 y_C^2}{b^2} \right) =$$

$$= -\frac{3 \cdot 30 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 60} \left(1 - \frac{4 \cdot 20^2}{60^2} \right) = -20,83 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_z(C) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_C = \frac{1,5 \cdot 10^6}{0,36 \cdot 10^6} 20 = 83,33 \text{ MPa.}$$

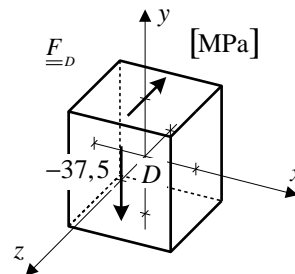
$$\underline{\underline{F}}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20,83 \\ 0 & -20,83 & 83,33 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$



Az S pontban: $\sigma_z(S) = 0,$

$$\tau_{yz}(S) = -\frac{3 T_y}{2 A} = -\frac{3 \cdot 30 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 60} = -37,5 \text{ MPa,}$$

$$\underline{\underline{F}}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -37,5 \\ 0 & -37,5 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$



d) A *Mohr* szerinti σ_{red} redukált feszültség meghatározása a veszélyes pontokban.

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{yz}^2} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \tau_{yz}^2}.$$

A *BDH* és *EG* egyenes mentén csak hajlításból származó feszültség ébred:

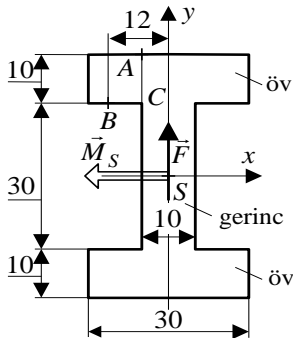
$$\tau_{yz}(y = \pm b/2) = 0. \quad \Rightarrow \quad \sigma_{red} = \sigma_{z \max} = \sigma_z(D) = 125 \text{ MPa}.$$

A *JSK* egyenes mentén csak nyírásból származó feszültség ébred:

$$\sigma_z(y = 0) = 0. \quad \Rightarrow \quad \sigma_{red} = 2 |\tau_{yz \max}| = 2 |\tau_{yz}(S)| = 2 \cdot 37,5 = 75 \text{ MPa}.$$

A keresztmetszeten a redukált feszültség maximuma: $\sigma_{red \max} = 125 \text{ MPa}$.

F.III.7.10. feladat: Nyírás és hajlítás



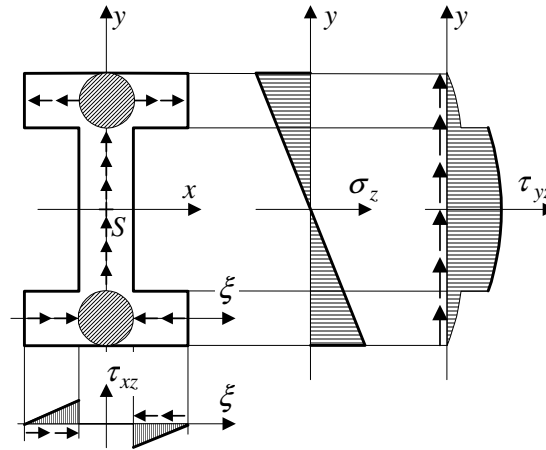
Adott: a keresztmetszet méretei és $\vec{F} = (25 \vec{e}_y)$ kN,
 $\vec{M}_S = (-\vec{e}_x)$ kNm.

Feladat:

- A feszültségeloszlások megrajzolása.
- A feszültségállapot, valamint a *Mohr* szerinti redukált feszültség meghatározása a keresztmetszet *A*, *B*, *C* és *S* pontjában.

Kidolgozás:

a) A feszültségeloszlások megrajzolása:



$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y, \quad \tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(y)}{I_x a(y)}, \quad \tau_{xz} = -\frac{T_y S_x(x)}{I_x a(x)}.$$

Ebben az esetben $M_{hx} < 0$ és $T_y < 0$.

A τ feszültség nyírfolyama a szelvény középvonala mentén folytonos \Rightarrow ebből adódik ki a τ_{xz} feszültség előjele.

A τ_{yz} eloszlásban a szakadás abból adódik, hogy a gerincben $a = 10$ mm, az övben pedig $a = 30$ mm.

A keresztmetszet sraffozott tartományaiban a τ feszültségek nagysága bizonytalan.

b) A feszültségállapot, valamint a Mohr szerinti redukált feszültség meghatározása a keresztmetszet A , B , C és S pontjában:

Az I_x másodrendű nyomaték: $I_x = \frac{30 \cdot 50^3}{12} - \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 267,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$.

- Az A pontban:

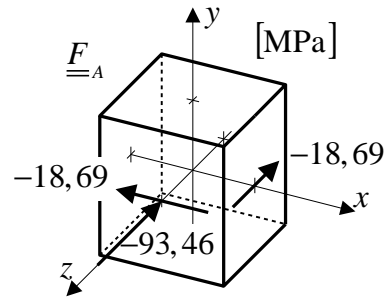
$$\tau_{yz}(A) = 0, \sigma_z(A) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_A = \frac{-10^6}{267,5 \cdot 10^3} 25 = -93,46 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xz}(A) = -\frac{T_y S_x(x_A)}{I_x v}, \quad S_x(x_A) = 10 \cdot 10 \cdot 20 = 2000 \text{ mm}^3, \quad v = 10 \text{ mm},$$

$$\tau_{xz}(A) = -\frac{25 \cdot 10^3 \cdot 2000}{267,5 \cdot 10^3 \cdot 10} = -18,69 \text{ MPa},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ \underline{\underline{=}} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -18,69 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18,69 & 0 & -93,46 \end{bmatrix} \text{ MPa},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{red}(A) &= \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \tau_{xz}^2} = \\ &= \sqrt{93,46^2 + 4 \cdot 18,69^2} = 100,65 \text{ MPa}. \end{aligned}$$



- A B pontban:

$$\tau_{yz}(B) = 0, \quad \sigma_z(B) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_B = \frac{-10^6}{267,5 \cdot 10^3} 15 = -56,07 \text{ MPa},$$

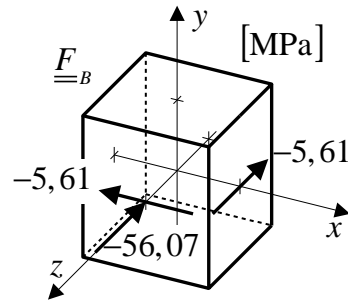
$$\tau_{xz}(B) = \frac{T_y S_x(x_B)}{I_x v}, \quad S_x(x_B) = 10 \cdot 3 \cdot 20 = 600 \text{ mm}^3, \quad v = 10 \text{ mm},$$

$$\tau_{xz}(B) = -\frac{25 \cdot 10^3 \cdot 600}{267,5 \cdot 10^3 \cdot 10} = -5,61 \text{ MPa},$$

$$\underline{\underline{F}}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5,61 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5,61 & 0 & -56,07 \end{bmatrix} \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{red}(B) = \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \tau_{xz}^2} =$$

$$= \sqrt{56,07^2 + 4 \cdot 5,69^2} = 57,19 \text{ MPa.}$$



- A C pontban:

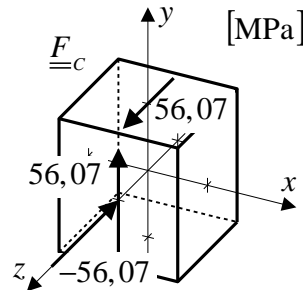
$$\tau_{xz}(C) = 0. \quad \tau_{yz}(C) = -\frac{T_y S_x(y_C)}{I_x a} = -\frac{-25 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 20}{267,5 \cdot 10^3 \cdot 10} = 56,07 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_z(C) = \sigma_z(B) = -56,07 \text{ MPa,}$$

$$\underline{\underline{F}}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 56,07 \\ 0 & 56,07 & -56,07 \end{bmatrix} \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{red}(C) = \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \tau_{yz}^2} =$$

$$= \sqrt{56,07^2 + 4 \cdot 56,07^2} = 125,38 \text{ MPa.}$$



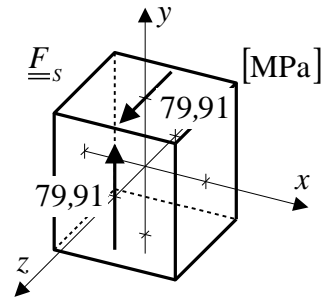
- Az S pontban: $\sigma_z(S) = 0, \quad \tau_{xz}(S) = 0, \quad \tau_{yz}(S) = -\frac{T_y S_x(y_S)}{I_x a}.$

$$S_x(y_S) = 10 \cdot 30 \cdot 20 + 15 \cdot 10 \cdot 7,5 = 7125 \text{ mm}^3,$$

$$\tau_{yz}(S) = -\frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 7125}{267,5 \cdot 10^3 \cdot 10} = 79,91 \text{ MPa},$$

$$\underline{\underline{F}}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 79,91 \\ 0 & 79,91 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{red}(S) &= \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \tau_{yz}^2} = 2 \tau_{yz} = \\ &= 2 \cdot 79,91 = 159,82 \text{ MPa} \end{aligned}$$



A keresztmetszet veszélyes pontjai az x tengelyen vannak.

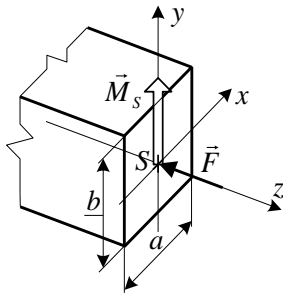
F.III.7.11. feladat: Nyomás és egyenes hajlítás

Adott:

$$a = 40 \text{ mm}, b = 60 \text{ mm},$$

$$\vec{F} = (-120 \vec{e}_z) \text{ kN}, \vec{M}_S = (4 \vec{e}_y) \text{ kNm},$$

$$R_{p0,2} = \sigma_F = 390 \text{ MPa}.$$



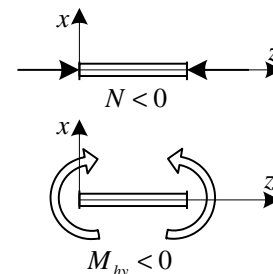
- Feladat:
- A rúd igénybevételeinek meghatározása.
 - A zérusvonal egyenletének felírása.
 - Feszültségeloszlás megrajzolása az y és a z tengelyek mentén, illetve a veszélyes pontok meghatározása.
 - A legnagyobb feszültségek meghatározása.
 - A tényleges biztonsági tényező meghatározása.

Megoldás:

- a) A rúd igénybevételei:

A rúd nyomott: $N = -120$ kN.

A rúd y tengely körül hajlított: $M_{hy} = -4$ kNm.



- b) A zérusvonal egyenlete:

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{hy}}{I_y} x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{N}{A} \frac{I_y}{M_{hy}} \quad \Rightarrow \quad x = -4 \text{ mm.}$$

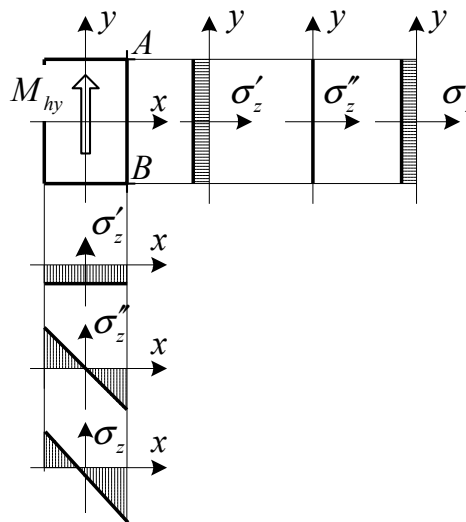
c) Feszültségeloszlás az x, y tengelyek mentén:
Veszélyes pontok: az AB oldalon lévő pontok.

d) A legnagyobb feszültségek:

$$\sigma'_z = \frac{N}{A} = -50 \text{ MPa},$$

$$\sigma''_z(x = a/2) = \frac{M_{hy}}{I_y} \left(\frac{a}{2}\right) = -250 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{z \max} = |\sigma_z(x = a/2)| = 50 + 250 = 300 \text{ MPa}.$$

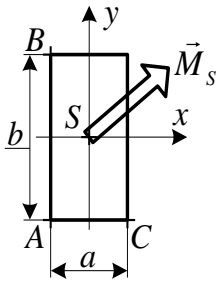


e) A tényleges biztonsági tényező:

$$\sigma_{z \max} \leq \frac{\sigma_{jell}}{n} = \frac{R_{p 0,2}}{n}$$

$$\Rightarrow n_t = \frac{R_{p 0,2}}{\sigma_{z \max}} = \frac{390}{300} = 1,3.$$

F.III.7.12. feladat: Ferde hajlítás

Adott:A rúd K keresztmetszetének méretei és igénybevétele:

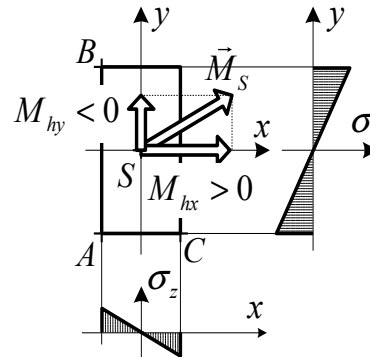
$$\vec{M}_S = (160 \vec{e}_x + 100 \vec{e}_y) \text{ Nm}, \quad a = 25 \text{ mm}, \quad b = 50 \text{ mm}.$$

- Feladat:
- A feszültségeloszlás megrajzolása és a veszélyes pontok megkeresése.
 - A feszültségállapot meghatározása az A , B és C pontokban.
 - A zérusvonal egyenletének meghatározása.

Megoldás:

- a) Feszültségeloszlás és a veszélyes pontok:

Veszélyes pontok a B és C .



b) Feszültségállapot az A , B és C pontokban:

$$\sigma_z(A) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_A + \frac{M_{hy}}{I_y} x_A = -\frac{M_{hx}}{K_x} + \frac{M_{hy}}{K_y} = 3,84 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z(B) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_B + \frac{M_{hy}}{I_y} x_B = \frac{M_{hz}}{K_z} + \frac{M_{hy}}{K_y} = 34,56 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z(C) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_C + \frac{M_{hy}}{I_y} z_C = -\frac{M_{hz}}{K_z} - \frac{M_{hy}}{K_y} = -34,56 \text{ MPa},$$

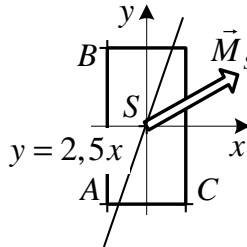
$$\underline{\underline{F}}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,84 \end{bmatrix} \text{ MPa}, \quad \underline{\underline{F}}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 34,56 \end{bmatrix} \text{ MPa}, \quad \underline{\underline{F}}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -34,56 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

c) A zérusvonal egyenlete:

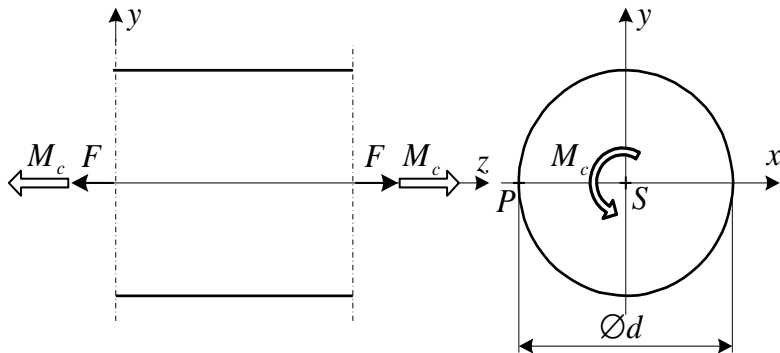
$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x = 0.$$

$$y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{I_x}{I_y} x = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{K_x}{K_y} \frac{b}{a} x,$$

$$y = 2,5x.$$



F.III.7.13. feladat: Húzás-nyomás, csavarás

Adott:

$$F = 117,8 \text{ kN},$$

$$M_c = 0,9818 \text{ kNm},$$

$$d = 50 \text{ mm},$$

$$G = 80 \text{ GPa},$$

$$\nu = 0,3.$$

Feladat:

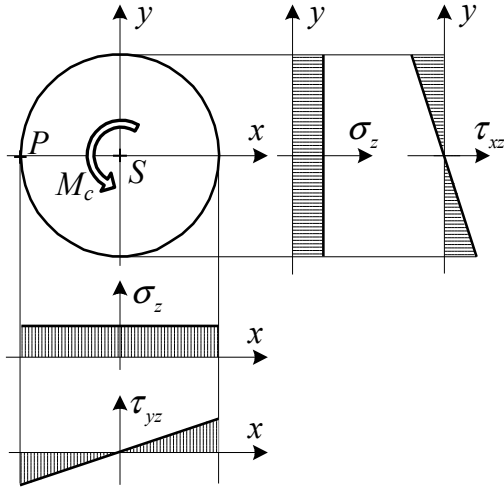
- A keresztmetszet területének és poláris másodrendű nyomatékának a meghatározása.
- A feszültségeloszlás ábrázolása és a veszélyes pont(ok) meghatározása.
- A P pontbeli feszültségi állapot meghatározása és szemléltetése az elemi kockán.
- A főfeszültségek és a redukált feszültségek meghatározása a P pontban.
- Az alakváltozási állapot meghatározása a P pontban.

Megoldás:

- A keresztmetszet területe és poláris másodrendű nyomatéka:

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 1963,5 \text{ mm}^2, \quad I_p = \frac{d^4 \pi}{32} = 613,6 \cdot 10^3 \text{ mm}^4.$$

b) A feszültségeloszlás ábrázolása és a veszélyes pont(ok) meghatározása:



Veszélyes pontok:

Húzásból veszélyes a keresztmetszet valamennyi pontja.

$$\sigma_z = \frac{N}{A}.$$

Csavarásból veszélyesek a keresztmetszet paláston lévő pontjai.

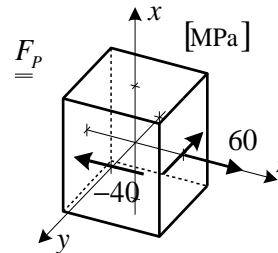
$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} R.$$

Együttesen *húzásból* és *csavarásból* veszélyesek a keresztmetszet paláston lévő pontjai.

c) A P pontbeli feszültségi állapot meghatározása és szemléltetése az elemi kockán:

$$\underline{\underline{F}}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \\ 0 & -40 & 60 \end{bmatrix} \text{ MPa,}$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = 60 \text{ MPa, } \tau_{yz} = \frac{M_c}{I_p} x_P = -40 \text{ MPa.}$$



d) A főfeszültségek és a redukált feszültségek meghatározása a P pontban:

$$\det \begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & -40 \\ 0 & -40 & (60 - \sigma) \end{vmatrix} = (-\sigma) [-60\sigma + \sigma^2 - 1600] = 0$$

$$\sigma^2 - 60\sigma - 1600 = 0, \quad \sigma_{1,3} = \frac{60 \pm \sqrt{3600 + 6400}}{2} = \frac{60 \pm 100}{2}.$$

A főfeszültségek: $\sigma_1 = 80$ MPa, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -20$ MPa.

Redukált feszültség *Coulomb* szerint: $\sigma_{red} = \sigma_1 = 80$ MPa.

Redukált feszültség *Mohr* szerint: $\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = 100$ MPa, vagy

$$\sigma_{red} = \sqrt{(\sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 100 \text{ MPa.}$$

Redukált feszültség *Huber-Mises-Hencky* szerint:

$$\sigma_{red} = \sqrt{(\sigma_x)^2 + 3\tau_{xy}^2} = 91,65 \text{ MPa.}$$

e) Az alakváltozási állapot meghatározása a *P* pontban:

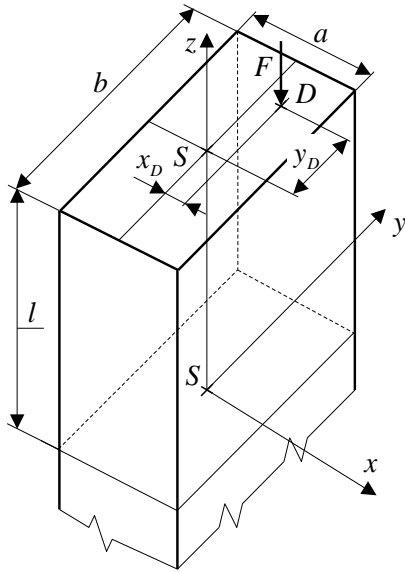
$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \frac{1}{2G} \left[\underline{\underline{F}}_P - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}} \right], \quad F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 60 \text{ MPa,}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right] = 2,88 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right] = -0,86 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right] = -0,86 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2G} \left[\tau_{yz} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \cdot 0 \right] = \frac{\tau_{xy}}{2G} = -2,5 \cdot 10^{-4},$$

$$\left[\underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,86 & 0 & 0 \\ 0 & -0,86 & -2,5 \\ 0 & -2,5 & 2,88 \end{bmatrix} 10^{-4}.$$

F.III.7.14. feladat: Excentrikus húzás-nyomás



Adott:

$$F = 10 \text{ MN} = 10^7 \text{ N}, D(0,3; 0,6; l) \text{ m},$$

$$a = 1 \text{ m}, \quad b = 2 \text{ m}$$

Feladat:

- A rúd igénybevételeinek és a keresztmetszet jellemzőinek meghatározása a $z = 0$ keresztmetszeten.
- A zérusvonal egyenletének felírása és a veszélyes pont meghatározása.
- Feszültségeloszlás az x és a y tengelyek mentén.
- A keresztmetszeten fellépő legnagyobb feszültség meghatározása.

Megoldás:

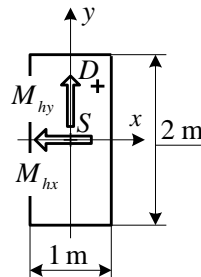
- a) A rúd igénybevételei a $z = 0$ keresztmetszeten és a keresztmetszet jellemzők:

A D pontban támadó erőt redukáljuk a keresztmetszet súlypontjába:
a keresztmetszet igénybevétele nyomás és ferde hajlítás:

$$N = -F = -10^7 \text{ N},$$

$$M_{hx} = -F y_D = -6 \cdot 10^6 \text{ Nm},$$

$$M_{hy} = -F x_D = -3 \cdot 10^6 \text{ Nm}.$$



A keresztmetszet geometriai jellemzői: $A = a b = 2 \text{ m}^2$,

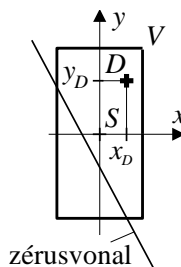
$$I_y = \frac{b a^3}{12} = 0,1667 \text{ m}^4, \quad I_x = \frac{a b^3}{12} = 0,6667 \text{ m}^4 .$$

b) A zérusvonal egyenlete és a veszélyes pont:

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x + \sigma'''_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x = 0,$$

$$y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{I_x}{I_y} x - \frac{N}{M_{hx}} \frac{I_x}{A}, \quad y = -2 x - 0,5556.$$

Veszélyes pont: V – a keresztmetszet zérusvonalától legtávolabb lévő pontja.

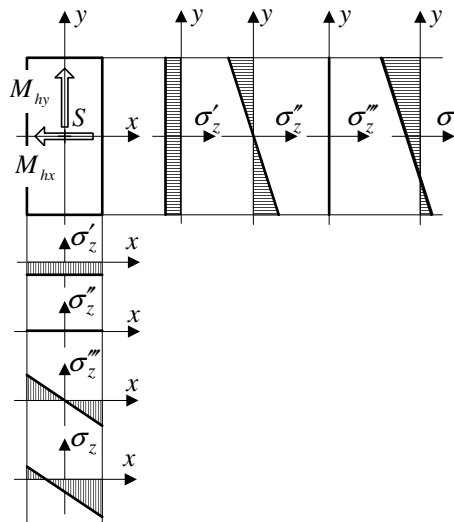


c) Feszültségeloszlás az x és az y tengelyek mentén:

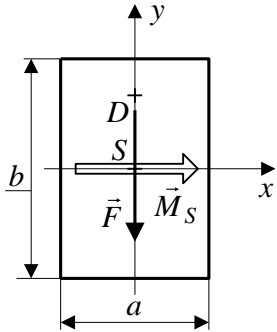
d) A keresztmetszeten fellépő legnagyobb feszültség:

$$\begin{aligned} \sigma_z \max &= \sigma_z(V) = \sigma'_z(V) + \sigma''_z(V) + \sigma'''_z(V) = \\ &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y_V + \frac{M_{hy}}{I_y} x_V. \end{aligned}$$

$$\sigma_z \max = -23 \text{ MPa}.$$



F.III.7.15. feladat: Nyírás és hajlítás

Adott:

A rúd egy keresztmetszetének méretei és igénybevételei:

$$\vec{M}_S = (0,72\vec{e}_x) \text{ kNm}, \vec{F} = (-24\vec{e}_y) \text{ kN}, a = 40 \text{ mm}, b = 60 \text{ mm}.$$

Feladat:

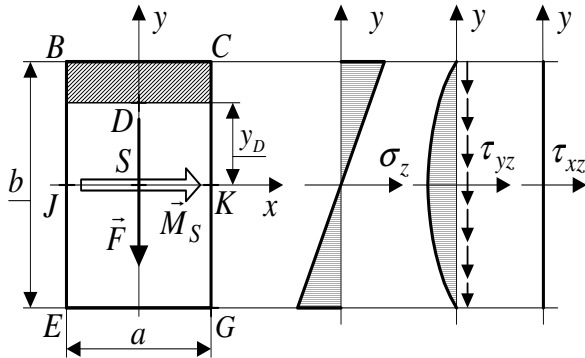
- A feszültségeloszlások megrajzolása és a veszélyes pont(ok) meghatározása.
- A feszültségkoordináták felírása a D pontban az y_D függvényében.

- A σ_{red} redukált feszültség meghatározása *Mohr* szerint a veszélyes pontokban.
- A σ_{red} redukált feszültség meghatározása *Huber-Mises-Hencky* szerint a veszélyes pontokban.

Megoldás:

- A feszültségeloszlások és a veszélyes pont(ok):

A keresztmetszet igénybevétele: $M_{hx} = 0,72 \text{ kNm}$ és $T_y = 24 \text{ kN}$.



$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y,$$

$$\tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(y)}{I_x a(y)} = -\frac{T_y}{2 I_x} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right)$$

Veszélyes pontok:

hajlításból a BC és EG egyenes szakasz pontjai,
nyírásból az x tengely.

b) A feszültségkoordináták a D pontban az y_D függvényében:

$$\sigma_z(D) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_D, I_x = \frac{a b^3}{12}, \sigma_z(D) = \frac{12 M_{hx}}{a b^3} y_D.$$

$$\tau_{yz}(D) = -\frac{T_y S_x(y_D)}{I_x a}, S_x(y_D) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} + y_D \right) a \left(\frac{b}{2} - y_D \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{4} - y_D^2 \right) a.$$

$$\tau_{yz}(D) = -\frac{12 T_y \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{4} - y_D^2 \right) a}{a b^3 a} = -\frac{3 T_y}{2 A} \left(1 - \frac{4 y_D^2}{b^2} \right).$$

c) A σ_{red} redukált feszültség Mohr szerint a veszélyes pontokban:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{yz}^2} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \tau_{yz}^2}.$$

A BC és EG egyenes mentén csak hajlításból származó feszültség ébred: $\tau_{yz} = 0$, $\sigma_{red} = \sigma_{z \max} = \frac{12 |M_{hx}|}{a b^3} |y_{\max}| = 30 \text{ MPa}$.

A JK egyenes mentén csak nyírásból származó feszültség ébred: $\sigma_z = 0$.

$$\sigma_{red} = 2 |\tau_{yz \max}| = 2 \frac{3 T_y}{2 A} = 30 \text{ MPa}.$$

d) A σ_{red} redukált feszültség *Huber-Mises-Hencky* szerint a veszélyes pontokban.

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{yz}^2} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3 \tau_{yz}^2}.$$

A BC és EG egyenes mentén csak hajlításból származó feszültség ébred: $\tau_{yz} = 0$, $\sigma_{red} = \sigma_{z \max} = \frac{12 |M_{hx}|}{a b^3} |y_{\max}| = 30 \text{ MPa}$.

A JK egyenes mentén csak nyírásból származó feszültség ébred: $\sigma_z = 0$.

$$\sigma_{red} = \sqrt{3} |\tau_{yz \max}| = \sqrt{3} \frac{3 T_y}{2 A} = 25,98 \text{ MPa}.$$

F.III.7.16. feladat: Pontbeli feszültségi állapot - Redukált feszültségek meghatározása

Adott: A szilárd test P pontjában a feszültségi tenzor zérustól különböző elemei:

$$\sigma_x = -30 \text{ MPa}, \sigma_y = 30 \text{ MPa}, \sigma_z = 90 \text{ MPa}, \tau_{zy} = \tau_{yz} = -40 \text{ MPa}.$$

- Feladat:
- A P pontbeli feszültségi tenzor mátrixának felírása.
 - A főfeszültségek meghatározása.
 - A Huber-Mises-Hencky-féle, a Coulomb-féle és a Mohr-féle redukált feszültség kiszámítása.

Kidolgozás:

a) A P pontbeli feszültségi tenzor mátrixa:

$$\underline{\underline{F}}_P = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

b) A főfeszültségek meghatározása:

Főfeszültségek meghatározása \Rightarrow sajátérték feladat: $(\underline{\underline{F}} - \sigma \underline{\underline{E}}) \vec{e} = 0$.

$$\begin{bmatrix} (-30 - \sigma) & 0 & 0 \\ 0 & (30 - \sigma) & -40 \\ 0 & -40 & (90 - \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A nemtriviális megoldás létezésének feltétele: $\det |\underline{\underline{F}} - \sigma \underline{\underline{E}}| = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Karakterisztikus egyenlet: } & (-30 - \sigma) [(30 - \sigma)(90 - \sigma) - 1600] = 0. \\ & (-30 - \sigma)(\sigma^2 - 120\sigma + 1100) = 0. \end{aligned}$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai:

$$\begin{aligned} (-30 - \sigma) = 0 & \quad \Rightarrow \quad \sigma = -30 \text{ MPa}, \\ [\sigma^2 - 120\sigma - 1100] = 0 & \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{120 \pm \sqrt{14400 - 4400}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 110 \text{ MPa} \\ 10 \text{ MPa} \end{array} \right. \end{aligned}$$

A főfeszültségek: $\sigma_1 = 110$ MPa, $\sigma_2 = 10$ MPa, $\sigma_3 = -30$ MPa.

c) A *Huber-Mises-Hencky-féle*, a *Coulomb-féle* és a *Mohr-féle* redukált feszültség:

A *Huber-Mises-Hencky-féle* redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]},$$

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2} (100^2 + 140^2 + 40^2)} = 124,9 \text{ MPa.}$$

A *Coulomb-féle* redukált feszültség: $\sigma_{red}(Coulomb) = \sigma_1 = 110$ MPa.

A *Mohr-féle* redukált feszültség: $\sigma_{red}(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = 110 - (-30) = 140$ MPa.

F.III.7.17. feladat: Pontbeli feszültségi állapot - Redukált feszültségek meghatározása

Adott: A szilárd test P pontjában a feszültségi tenzor zérustól különböző elemei:

$$\sigma_x = 70 \text{ MPa}, \sigma_y = 50 \text{ MPa}, \sigma_z = 10 \text{ MPa}, \tau_{zx} = \tau_{xz} = 40 \text{ MPa}.$$

- Feladat:
- A P pontbeli feszültségi tenzor mátrixának felírása.
 - A főfeszültségek és a feszültségi főirányok meghatározása.
 - A Huber-Mises-Hencky-féle, a Coulomb-féle és a Mohr-féle redukált feszültség kiszámítása.

Kidolgozás:

- a) A P pontbeli feszültségi tenzor mátrixának felírása:

$$\underline{\underline{F}}_P = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 40 \\ 0 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

- b) A főfeszültségek és a feszültségi főirányok meghatározása:

Főfeszültségek meghatározása \Rightarrow sajátérték feladat: $(\underline{\underline{F}} - \sigma \underline{\underline{E}}) \vec{e} = \vec{0}$.

$$\begin{bmatrix} (70 - \sigma) & 0 & 40 \\ 0 & (50 - \sigma) & 0 \\ 40 & 0 & (10 - \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A nemtriviális megoldás létezésének feltétele: $\det |\underline{\underline{F}} - \sigma \underline{\underline{E}}| = 0$.

A karakterisztikus egyenlet: $(50 - \sigma)(\sigma^2 - 80\sigma - 900) = 0$.

A karakterisztikus egyenlet megoldásai:

$$(50 - \sigma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 50 \text{ MPa},$$

$$[\sigma^2 - 80\sigma - 900] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{80 \pm \sqrt{6400 + 3600}}{2} = \langle \begin{matrix} 90 \text{ MPa} \\ -10 \text{ MPa} \end{matrix} \rangle.$$

A főfeszültségek: $\sigma_1 = 90$ MPa, $\sigma_2 = \sigma_y = 50$ MPa, $\sigma_3 = -10$ MPa.

A főfeszültségi irányok meghatározása – visszahelyettesítés a lineáris algebrai egyenletrendszerbe:

- A $\sigma_1 = 90$ MPa főfeszültséghez tartozó \vec{e}_1 főirány meghatározása:

$$\begin{bmatrix} (70 - \sigma_1) & 0 & 40 \\ 0 & (50 - \sigma_1) & 0 \\ 40 & 0 & (10 - \sigma_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -20 & 0 & 40 \\ 0 & -40 & 0 \\ 40 & 0 & -80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $-20e_x + 40e_z = 0, \Rightarrow e_x = 2e_z.$

$$-40e_y = 0, \Rightarrow e_y = 0.$$

$$40e_x - 80e_z = 0, \Rightarrow e_x = 2e_z.$$

Az egyenletek nem függetlenek egymástól, így az egyik változót szabadon megválaszthatjuk. Legyen $e_x = 1$, ekkor $e_y = 0, e_z = 0,5$.

Az irányvektor : $\vec{e}_1 = (\vec{e}_x + 0,5\vec{e}_z).$

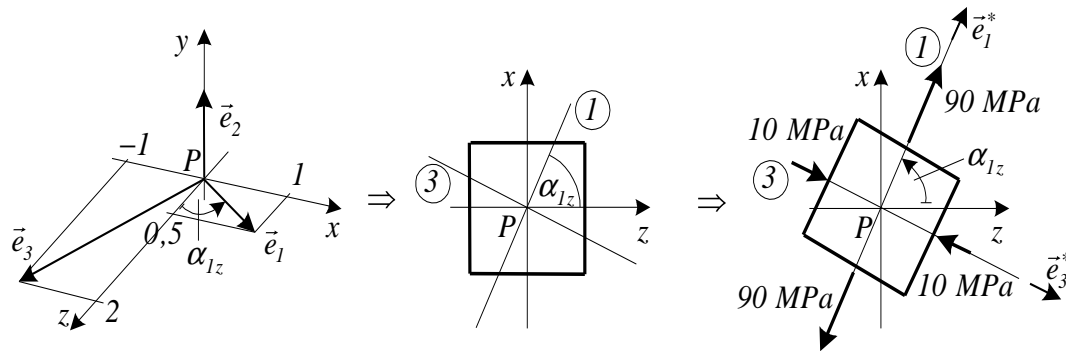
Az irány egységvektor: $\vec{e}_1^* = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|} = \frac{(\vec{e}_x + 0,5\vec{e}_z)}{\sqrt{1^2 + 0,5^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_z \right) = (0,894\vec{e}_x + 0,447\vec{e}_z).$

Hasonló gondolatmenet alapján:

$$\sigma_2 = 50 \text{ MPa}, \vec{e}_2 = (\vec{e}_y), \vec{e}_2^* = (\vec{e}_y),$$

$$\sigma_3 = -10 \text{ MPa}, \vec{e}_3 = (-\vec{e}_x + 2\vec{e}_z), \vec{e}_3^* = (-0,447\vec{e}_x + 0,894\vec{e}_z).$$

A sajátvektorok (feszültségi főirányok) szemléltetése:



$$\operatorname{tg} \alpha_{1z} = \frac{1}{0,5} = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1z} = 63,43^\circ.$$

Megjegyzés: Az \vec{e}_i^* , ($i=1, 2, 3$) és a $-\vec{e}_i^*$ egyaránt főfeszültségi irányok.

Az \vec{e}_1^* és \vec{e}_2^* főirány meghatározása után az \vec{e}_i^* főirányt úgy vettük fel, hogy az $\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*$ vektorhármass jobbsodrású rendszert alkosson. $\vec{e}_3^* = \vec{e}_1^* \times \vec{e}_2^*$.

c) A redukált feszültségek meghatározása:

A Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]},$$

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(90 - 50)^2 + [50 - (-10)]^2 + (-10 - 90)^2 \right]} = 87,18 \text{ MPa}.$$

A Coulomb-féle redukált feszültség: $\sigma_{red}(Coulomb) = \sigma_1 = 90 \text{ MPa}$.

A Mohr-féle redukált feszültség: $\sigma_{red}(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = 90 - (-10) = 100 \text{ MPa}$.

Megoldások

I. modul 1. fejezet - 1. kérdés:

Terhelés: az általunk vizsgált rendszerhez (testekhez) nem tartozó testekről származó ismert nagyságú hatás. Ez a hatás szilárd halmazállapotú testeknél általában felületi érintkezéssel valósul meg.

Terhelés \equiv ismert külső erőrendszer (ER).

[Vissza a kérdésekhez!](#)

I. modul 1. fejezet - 2. kérdés:

Szilárdságtan: a terhelés előtt és után is tartós nyugalomban lévő, alakváltozásra képes testek kinematikája, dinamikája és anyagszerkezeti viselkedése.

[Vissza a kérdésekhez!](#)

I. modul 1. fejezet - 3. kérdés:

- a test pontjai terhelés hatására egymáshoz képest elmozdulnak és ezért - anyagi, geometriai alakzatai (hossz, szög, felület, térfogat) megváltoznak

[Vissza a kérdésekhez!](#)



I. modul 1. fejezet - 4. kérdés:

Test modell: Olyan idealizált tulajdonságokkal rendelkező test, amely a valóságos test vizsgálata szempontjából leglényegesebb tulajdonságait tükrözi. A valóságos test lényegesnek tartott tulajdonságait megtartjuk, a lényegtelennek ítélt tulajdonságokat pedig elhanyagoljuk.

[Vissza a kérdésekhez!](#)



I. modul 1. fejezet - 5. kérdés:

Merev test: Bármely két pontjának távolsága állandó, a távolság terhelés hatására nem változik meg. A test pontjai (részei) egymáshoz képest terhelés hatására sem mozdulnak el.

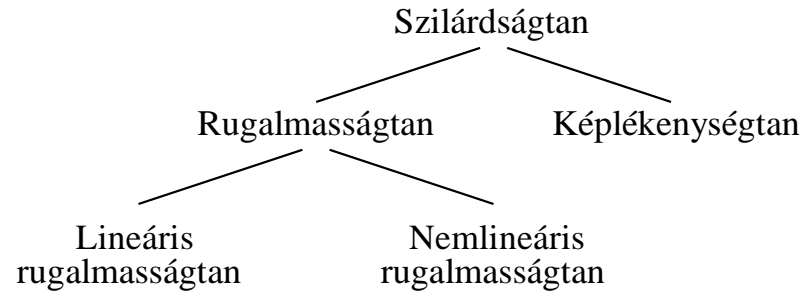
[Vissza a kérdésekhez!](#)

I. modul 1. fejezet - 6. kérdés:

Szilárd test: Alakváltozásra képes test. A test pontjainak távolsága, egyeneseinek egymással bezárt szöge terhelés hatására megváltozik. A test felületeinek és térfogatainak alakja és nagysága is megváltozik.

[Vissza a kérdésekhez!](#)

I. modul 1. fejezet - 7. kérdés:



[Vissza a kérdésekhez!](#)

I. modul 1. fejezet - 9. kérdés:

Két erőrendszer statikailag egyenértékű, ha azonos nyomatéki vektorteret hoznak létre.

[Vissza a kérdésekhez!](#)

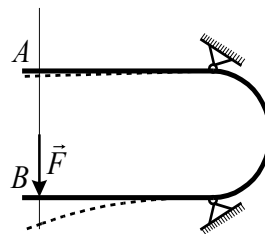
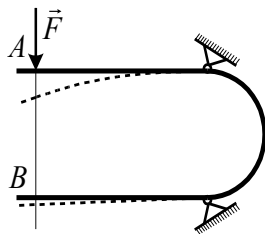


I. modul 1. fejezet - 10. kérdés:

Két, ugyanazon testre ható erőrendszer szilárdságtanilag egyenértékű, ha azok – a test egy kis részétől eltekintve – a testnek ugyanazt az alakváltozási állapotát hozzák létre.

[Vissza a kérdésekhez!](#)

I. modul 1. fejezet - 11. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

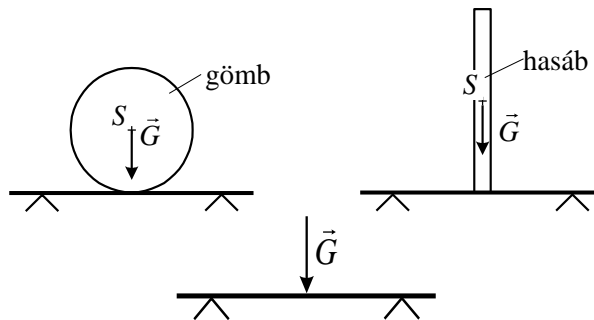


I. modul 1. fejezet - 12. kérdés:

Szilárd test alakváltozásakor a test valamely ugyanazon kis felületén ható, nyomatóki terük vonatkozásában egyenértékű erőrendszerek - a kis felület közvetlen környezetének kivételével – jó közelítéssel ugyanazt az alakváltozási állapotot állítják elő.

[Vissza a kérdésekhez!](#)

I. modul 1. fejezet - 13. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

I. modul 1. fejezet - 14. kérdés:

- elmozdulási állapot,
- alakváltozási állapot,
- feszültségi állapot,
- energia állapot.

[Vissza a kérdésekhez!](#)

II. modul 1. fejezet - 1. kérdés:

A P pont elmozdulásvektora: $\vec{u}_P = u_P \vec{e}_x + v_P \vec{e}_y + w_P \vec{e}_z$.

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 1. fejezet - 2. kérdés:

A test elmozdulásmezője: $\vec{u}(x,y,z) = u(x,y,z) \vec{e}_x + v(x,y,z) \vec{e}_y + w(x,y,z) \vec{e}_z$.

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 1. fejezet - 3. kérdés:

Diadikus előállítás: $\underline{\underline{D}}_P = \vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z$.

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 1. fejezet - 4. kérdés:

Mátrixos előállítás: $\left[\underline{\underline{D}}_P \right] = \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \end{matrix}$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 1. fejezet - 5. kérdés:

A derivált tenzor felbontása: $\underline{\underline{D}}_P = \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\underline{D}}_P + \underline{\underline{D}}_P^T)}_{\underline{\underline{A}}_P} + \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\underline{D}}_P - \underline{\underline{D}}_P^T)}_{\underline{\underline{\Psi}}_P}$.

szimmetrikus rész ferdeszimmetrikus rész

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 1. fejezet - 6/a/I. kérdés:

Szimbolikus alak: $\underline{\underline{D}}_P = \vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z,$

$$\underline{\underline{D}}_P = [(3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \circ \vec{e}_x + (-4\vec{e}_x - 6\vec{e}_z) \circ \vec{e}_y + (2\vec{e}_x + 4\vec{e}_z) \circ \vec{e}_z] \cdot 10^{-3}.$$

[Vissza a kérdésekhez!](#)

II. modul 1. fejezet - 6/a/II. kérdés:

Mátrixos alak: $\left[\underline{\underline{D}}_P \right] =$

3	-4	2	
2	0	0	10^{-3}
0	-6	4	

[Vissza a kérdésekhez!](#)

II. modul 1. fejezet - 6/b/III. kérdés:

Szimbolikus alak: $\underline{\underline{\Psi}}_P = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}}_P - \underline{\underline{D}}_P^T),$

$$\underline{\underline{\Psi}}_P = [(3\vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ \vec{e}_x + (-3\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) \circ \vec{e}_y + (\vec{e}_x - 3\vec{e}_y) \circ \vec{e}_z] \cdot 10^{-3}$$

[Vissza a kérdésekhez!](#)

II. modul 1. fejezet - 6/b/IV. kérdés:

Mátrixos alak: $\begin{bmatrix} \Psi \\ \underline{P} \end{bmatrix} =$

0	-3	1	
3	0	3	10^{-3}
-1	-3	0	

[Vissza a kérdésekhez!](#)

II. modul 2. fejezet - 4. kérdés:

Az alakváltozási vektorok:

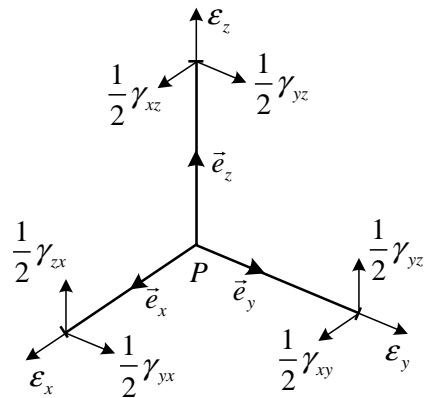
$$\vec{\alpha}_x = \varepsilon_x \vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yx} \vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zx} \vec{e}_z,$$

$$\vec{\alpha}_y = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \vec{e}_x + \varepsilon_y \vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zy} \vec{e}_z,$$

$$\vec{\alpha}_z = \frac{1}{2}\gamma_{xz} \vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yz} \vec{e}_y + \varepsilon_z \vec{e}_z.$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 2. fejezet - 5. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!



II. modul 2. fejezet - 6/a/I. kérdés:

Szimbolikus alak: $\underline{\underline{A}}_P = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}}_P + \underline{\underline{D}}_P^T)$,

$$\underline{\underline{A}}_P = [(3\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z) \circ \vec{e}_x + (-\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \circ \vec{e}_y + (\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) \circ \vec{e}_z] \cdot 10^{-3}.$$

[Vissza a kérdésekhez!](#)

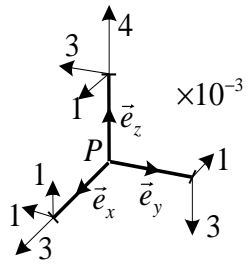
II. modul 2. fejezet - 6/a/II. kérdés:

Mátrixos alak: $\begin{bmatrix} A \\ \underline{=} P \end{bmatrix} =$

3	-1	1	
-1	0	-3	10^{-3}
1	-3	4	

[Vissza a kérdésekhez!](#)

II. modul 2. fejezet - 6/a/III. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

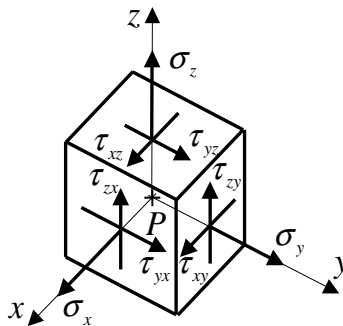
II. modul 3. fejezet - 3. kérdés:

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\rho}_x \quad \vec{\rho}_y \quad \vec{\rho}_z$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 3. fejezet - 4. kérdés:



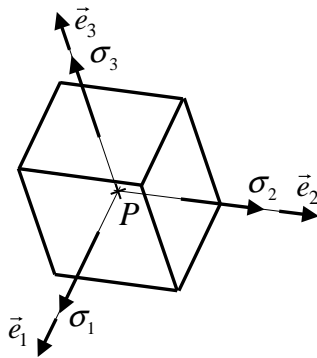
Vissza a kérdésekhez!

II. modul 3. fejezet - 5. kérdés:

$$\underset{(1,2,3)}{\underline{\underline{F}}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 3. fejezet - 6. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

II. modul 3. fejezet - 7/a/I. kérdés:

$$\begin{bmatrix} \underline{F}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 & \tau_{xy} & 60 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 60 & 0 & 60 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

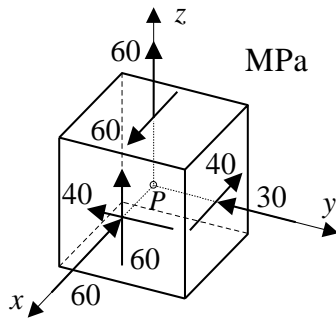
Vissza a kérdésekhez!

II. modul 3. fejezet - 7/a/II. kérdés:

$$\begin{bmatrix} F \\ \underline{=}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 3. fejezet - 7/a/III. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

II. modul 4. fejezet - 1. kérdés:

$$\sigma_e^3 - F_I \sigma_e^2 + F_{II} \sigma_e - F_{III} = 0$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 4. fejezet - 2. kérdés:

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ főfeszültségek

[Vissza a kérdésekhez!](#)

II. modul 4. fejezet - 3. kérdés:

a: $F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ - az első skalár invariáns,

b: $F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix}$ - a második skalár invariáns,

c: $F_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$ - a harmadik skalár invariáns.

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 4. fejezet - 4/II. kérdés:

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_x$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 4. fejezet - 4/IV. kérdés:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{e}_y - 2\vec{e}_z)$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 4. fejezet - 4/V. kérdés:

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 5. fejezet - 1. kérdés:

$$\underline{\underline{F}}_d = \underline{\underline{F}} - \sigma_k \underline{\underline{E}}.$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 5. fejezet - 2. kérdés:

$$\underline{\underline{A}}_d = \underline{\underline{A}} - \varepsilon_k \underline{\underline{E}}.$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 5. fejezet - 3. kérdés:

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{F_I}{3}.$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 5. fejezet - 4. kérdés:

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{A_I}{3}.$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 6. fejezet - 1. kérdés:

A *Mohr*-féle feszültségi kördiagram a P pontbeli feszültségi állapotot szemlélteti a $\sigma_n, |\tau_n|$ síkon.

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 6. fejezet - 2. kérdés:

- Felvesszük az X, Y pontokat.
- Meghatározzuk a félkör O_2 középpontját : $O_2 \rightarrow \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$.
- Megrajzoljuk a félkört $\rightarrow \sigma_1, \sigma_3$.
- A $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ főfeszültségek ismeretében megrajzoljuk a másik két félkört.

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 6. fejezet - 3. kérdés:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \sigma_2 = \sigma_z, \sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

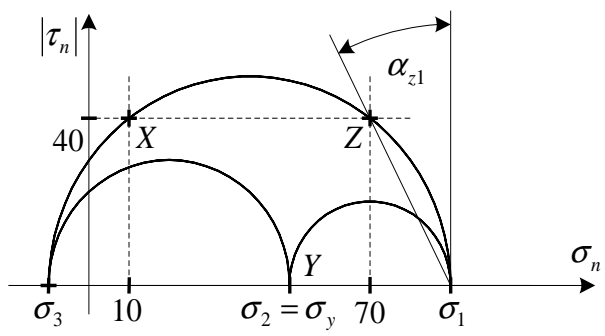
Vissza a kérdésekhez!

II. modul 6. fejezet - 4. kérdés:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{x1} = \frac{2|\tau_{xy}|}{|\sigma_x - \sigma_y|}$$

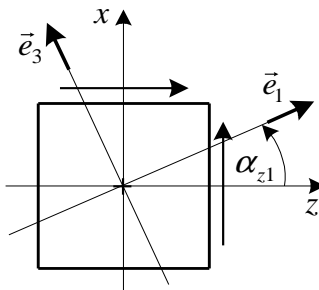
Vissza a kérdésekhez!

II. modul 6. fejezet - 6/a/I. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

II. modul 6. fejezet - 6/b/VI. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

II. modul 6. fejezet - 7. kérdés:

$$u_T = \frac{1}{12G} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)].$$

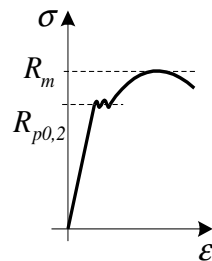
Vissza a kérdésekhez!

II. modul 6. fejezet - 8. kérdés:

$$u_V = \frac{1}{6} A_I F_I = \frac{1}{12G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} F_I^2.$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 7. fejezet - 1. kérdés:



[Vissza a kérdésekhez!](#)

II. modul 7. fejezet - 5. kérdés:

$$\alpha) \text{ alak: } \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu F_I}{1 + \nu} \underline{\underline{E}} \right)$$

$$\beta) \text{ alak: } \underline{\underline{F}} = 2G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1 - 2\nu} \underline{\underline{E}} \right).$$

[Vissza a kérdésekhez!](#)

II. modul 7. fejezet - 6. kérdés:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{yx}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}.\end{aligned}$$

Vissza a kérdésekhez!

II. modul 7. fejezet - 7. kérdés:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] , & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} , \\ \sigma_y &= 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] , & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} , \\ \sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] , & \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} .\end{aligned}$$

Vissza a kérdésekhez!



III. modul 1. fejezet - 1. kérdés:

Annak elérése, hogy a szerkezet rendeltetésszerű használat esetén előírt ideig és előírt biztonsággal elviselje az adott terhelést anélkül, hogy benne károsodás lépne fel.

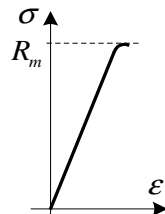
[Vissza a kérdésekhez!](#)

III. modul 1. fejezet - 2. kérdés:

- folyáshatár,
- szakítószilárdság.

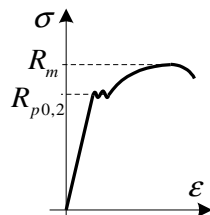
[Vissza a kérdésekhez!](#)

III. modul 1. fejezet - 3. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

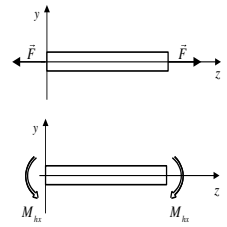
III. modul 1. fejezet - 4. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!



III. modul 1. fejezet - 5. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

III. modul 1. fejezet - 6. kérdés:

$\sigma_z \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}$, ahol n a biztonsági tényező,
 σ_{jell} a károsodáshoz tartozó szilárdsági jellemző.

Vissza a kérdésekhez!



III. modul 1. fejezet - 9. kérdés:

Egy feszültségi állapot akkor nem okoz károsodást, ha a feszültségi állapothoz tartozó legnagyobb normál feszültség kisebb az anyag szakítószilárdságánál.

[Vissza a kérdésekhez!](#)



III. modul 1. fejezet - 10. kérdés:

Egy pontbeli feszültségi állapot akkor nem okoz károsodást, ha a feszültségi állapothoz tartozó legnagyobb *Mohr*-kör átmérője kisebb, mint a megengedett feszültség.

[Vissza a kérdésekhez!](#)



III. modul 1. fejezet - 11. kérdés:

Két feszültségi állapot a károsodás szempontjából akkor azonosan veszélyes, ha a torzulási alakváltozási energiájuk megegyezik.

[Vissza a kérdésekhez!](#)

III. modul 1. fejezet - 12. kérdés:

$$\sigma_{red}(Coulomb) = \sigma_{max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) .$$

Vissza a kérdésekhez!

III. modul 1. fejezet - 13. kérdés:

$$\sigma_{red}(Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3$$

Vissza a kérdésekhez!

III. modul 1. fejezet - 14. kérdés:

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{6 G u_T} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]},$$

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right]}$$

Vissza a kérdésekhez!

III. modul 1. fejezet - 15. kérdés:

- A rúdszerkezet veszélyes keresztmetszetének megkeresése, meghatározása. A veszélyes keresztmetszet az, ahol legnagyobbak az igénybevételek.
- A veszélyes keresztmetszeten a veszélyes pontok megkeresése, meghatározása. A veszélyes pontok azok, ahol legnagyobb a σ_{red} redukált feszültség.
- A veszélyes pontokban a méretezés, ellenőrzés elvégzése: $\sigma_{red\ max} \leq \sigma_{meg}$.

[Vissza a kérdésekhez!](#)

III. modul 2. fejezet - 1. kérdés:

Feltételezés:

- az anyag jól alakítható, - az anyag lineárisan rugalmas, ideálisan képlékeny.

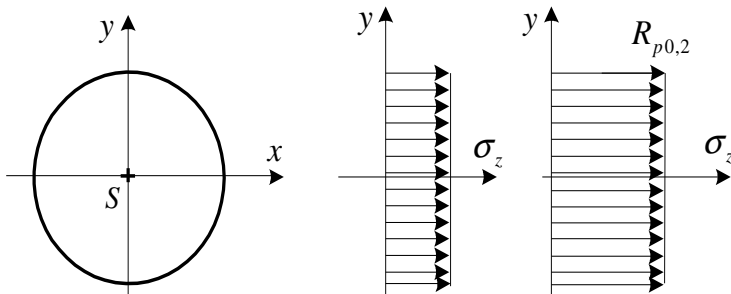
Vissza a kérdésekhez!

III. modul 2. fejezet - 2. kérdés:

$$N_{\max} \leq N_{meg} = \frac{N_K}{n_K}, \quad n_K - \text{elrt biztonsági tényez.}$$

Vissza a kérdésekhez!

III. modul 2. fejezet - 3. kérdés:



[Vissza a kérdésekhez!](#)

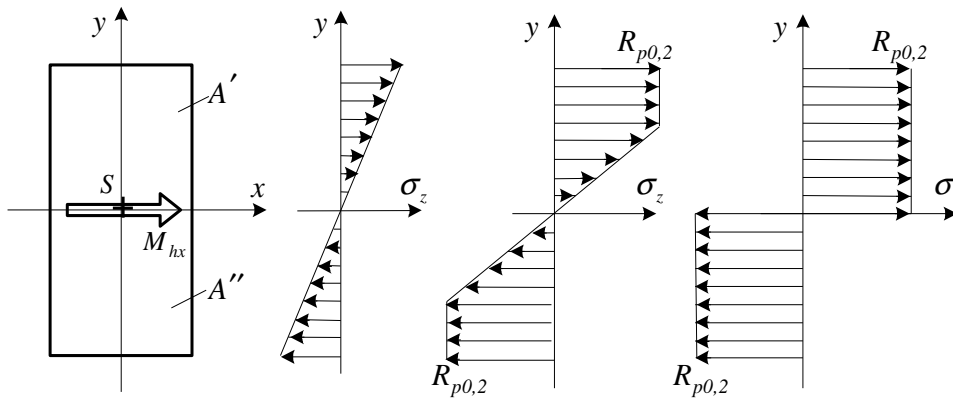


III. modul 2. fejezet - 4. kérdés:

$$M_{hx \max} \leq M_{hmeq} = \frac{M_K}{n_K}, \quad n_K - \text{elrt biztonsági tényez.}$$

Vissza a kérdésekhez!

III. modul 2. fejezet - 5. kérdés:



[Vissza a kérdésekhez!](#)

III. modul 2. fejezet - 6. kérdés:

$$M_{c\max} \leq M_{cmeg} = \frac{M_{cK}}{n_K}, \quad n_K - \text{előírt biztonsági tényező.}$$

Vissza a kérdésekhez!

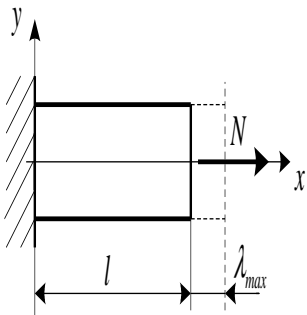
III. modul 2. fejezet - 7. kérdés:

megmunkáló gépeket, hidakat, zsilipeket, nagyméretű csőelzárókat, stb.

[Vissza a kérdésekhez!](#)

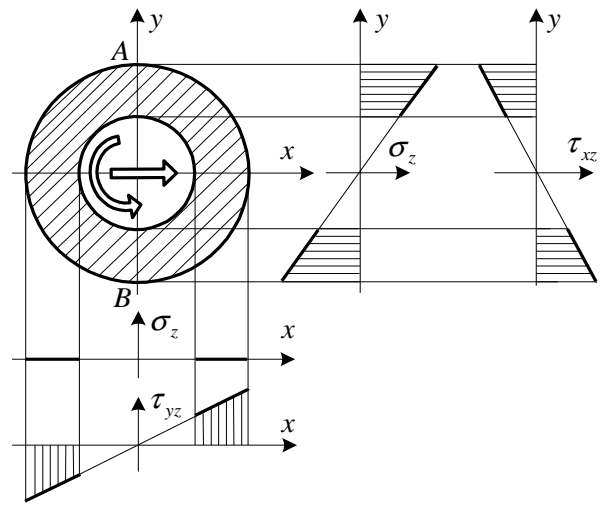
III. modul 2. fejezet - 8. kérdés:

$$\lambda_{\max} = \frac{N}{A E} l, \lambda_{\max} \leq \lambda_{\text{meg}}.$$



Vissza a kérdésekhez!

III. modul 2. fejezet - 9/a/I. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 1. fejezet - 3. kérdés:

Adott: - a test alakja és méretei,

- a test anyagi viselkedését jellemző mennyiségek,

-terhelés és megtámasztás.

Keresett: \vec{u} , \underline{F} , \underline{A} , u .

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 1. fejezet - 4. kérdés:

$$d\vec{F} = \vec{q} dV$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 1. fejezet - 5. kérdés:

$$d\vec{F} = \vec{\rho} dA = \underline{\underline{F}} \cdot \underbrace{\vec{n} dA}_{d\vec{A}}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 1. fejezet - 6. kérdés:

$$\vec{F} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 1. fejezet - 8. kérdés:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z &= 0.\end{aligned}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 2. fejezet - 1. kérdés:

$$\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla - \nabla \circ \vec{u})$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 2. fejezet - 2. kérdés:

$$\underline{\underline{[\Psi]}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 2. fejezet - 3. kérdés:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 2. fejezet - 4. kérdés:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 2. fejezet - 5. kérdés:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} , & \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} , & \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} , & \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 2. fejezet - 6. kérdés:

$$\vec{u}_x = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_y + \frac{\partial w}{\partial x} \vec{e}_z,$$

$$\vec{u}_y = \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial w}{\partial y} \vec{e}_z,$$

$$\vec{u}_z = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{e}_y + \frac{\partial w}{\partial z} \vec{e}_z.$$

[Vissza a kérdésekhez!](#)

IV. modul 2. fejezet - 7. kérdés:

A derivált tenzor felbontása: $\underline{\underline{D}} = \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T)}_{\text{szimmetrikus rész}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T)}_{\text{ferdeszimmetrikus rész}} .$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 3. fejezet - 3. kérdés:

$$\alpha) \text{ alak: } \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu F_I}{1 + \nu} \underline{\underline{E}} \right)$$

$$\beta) \text{ alak: } \underline{\underline{F}} = 2G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1 - 2\nu} \underline{\underline{E}} \right).$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 3. fejezet - 4. kérdés:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] , & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{yx}}{G} , \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] , & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} , \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] , & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} .\end{aligned}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 3. fejezet - 5. kérdés:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] , & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} , \\ \sigma_y &= 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] , & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} , \\ \sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] , & \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} .\end{aligned}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 3. fejezet - 6. kérdés:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z .$$

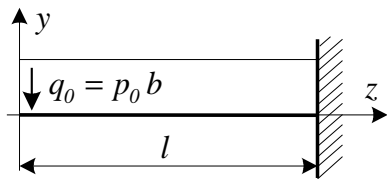
Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 3. fejezet - 11. kérdés:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & & & \\ & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 3. fejezet - 12/I. kérdés:



A feszültségi tenzor:

$$[\underline{F}(x, y, z)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Vissza a kérdésekhez!

 terhelés: $q_0 = p_0 b$,

 nyíróerő: $T_y(z) = -\int_0^z q_0 d\zeta = -p_0 b z$,

 hajlító nyomaték: $M_{hx} = -\int T_y dz = \frac{1}{2} p_0 b z^2$.

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y = \frac{3p_0}{4h^3} z^2 y, \quad I_x = \frac{b(2h)^3}{12} = \frac{2bh^3}{3}.$$

$$\tau_{yz} = -\frac{T_y S_x(y)}{I_x b} = \frac{3p_0}{4h^3} (h^2 - y^2) z,$$

$$S_x(y) = b(h - y) \frac{h+y}{2} = \frac{b}{2} (h^2 - y^2).$$

IV. modul 3. fejezet - 12/II. kérdés:

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \underbrace{\vec{q}}_{=\vec{0}} = \vec{0} .$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0 + 0 + 0 + 0 \equiv 0 ,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0 + 0 + \frac{3p_0}{4h^3} (h^2 - y^2) + 0 = 0 .$$

Ez a skalár egyenlet csak az $y = \pm h$ egyenletű felületeken teljesül.

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0 - \frac{3p_0 y z}{2h^3} + \frac{3p_0 y z}{2h^3} + 0 \equiv 0 .$$

[Vissza a kérdésekhez!](#)

IV. modul 3. fejezet - 12/III. kérdés:

Az $x = \pm \frac{b}{2}$ felületen $\underline{\underline{F}} \cdot (\pm \vec{e}_x)|_{x=\pm \frac{b}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, - a felületek terheletlen volta éppen ezt jelenti.

A $z = 0$ felületen $\underline{\underline{F}} \cdot (-\vec{e}_z)|_{z=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{z=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{yz}(z=0) \\ -\sigma_z(z=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, - a felület terheletlen volta éppen ezt jelenti.

Az $y = \pm h$ felületeken: $\underline{\underline{F}} \cdot (\pm \vec{e}_y)|_{y=\pm h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \pm \tau_{zy}|_{y=\pm h} \vec{e}_z = \vec{0}$.

Ez csak $y = -h$ esetén teljesíti a dinamikai peremfeltételt, amennyiben a tartó alsó felülete valóban terheletlen. A felső felület esetén ($y = +h$) ugyanis $\underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_y|_{y=h} = -p_0 \vec{e}_y$ esetén teljesülne a dinamikai peremfeltétel.

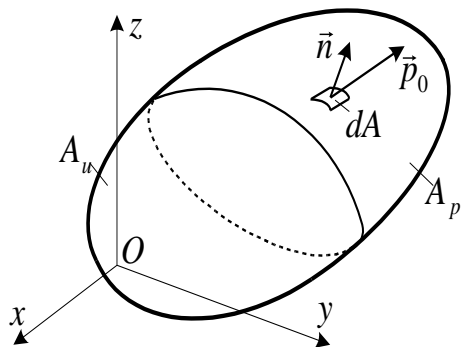
Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 3. fejezet - 12/IV. kérdés:

Egy skaláris egyensúlyi egyenlet és egy skaláris dinamikai peremfeltételi egyenlet nem teljesül.

[Vissza a kérdésekhez!](#)

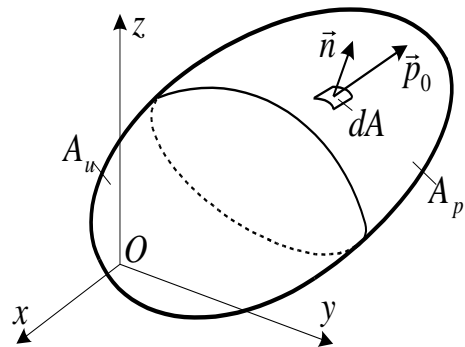
IV. modul 4. fejezet - 2. kérdés:



$$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0 \quad \text{az } A_p \text{ - n.}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 4. fejezet - 3. kérdés:



$$\vec{u} = \vec{u}_0 \text{ az } A_u\text{-n}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 4. fejezet - 4. kérdés:

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0} \text{ egyensúlyi egyenlet (3 db)}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 4. fejezet - 5. kérdés:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}) \quad \text{kompatibilitási egyenlet (6 db)}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 4. fejezet - 6. kérdés:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{anyagegyenlet (6db)}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 4. fejezet - 9/a/I. kérdés:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}),$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 4. fejezet - 9/c/V. kérdés:

$$\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_x - \vec{e}_z)$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 4. fejezet - 9/c/VI. kérdés:

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_y$$

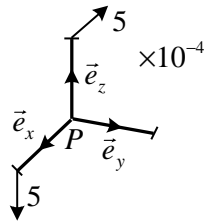
Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 4. fejezet - 9/c/VII. kérdés:

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_x - \vec{e}_z) \times \vec{e}_y = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_x + \vec{e}_z)$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 4. fejezet - 9/c/VIII. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 4. fejezet - 10/I. kérdés:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 4. fejezet - 10/II. kérdés:

$$\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_R \circ \vec{e}_R + \vec{\rho}_\varphi \circ \vec{e}_\varphi + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 4. fejezet - 10/III. kérdés:

$$\vec{e}_R = \vec{e}_R(\varphi), \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi), \vec{e}_z = \text{állandó}.$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 4. fejezet - 10/IV. kérdés:

$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \left[\sigma_R + \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} - \sigma_\varphi \right] + \frac{\partial \tau_{Rz}}{\partial z} + q_R = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{\varphi R}}{\partial R} + \frac{1}{R} \left[\tau_{\varphi R} + \tau_{R\varphi} + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + q_\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \left[\tau_{zR} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0.$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 5. fejezet - 1. kérdés:

$$\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla = \underline{\underline{0}}$$

Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 5. fejezet - 2. kérdés:

$$\Delta \underline{\underline{F}} + \frac{1}{1+\nu} F_I \nabla \circ \nabla + \nabla \circ \vec{q} + \vec{q} \circ \nabla + \frac{\nu}{1-\nu} (\vec{q} \cdot \nabla) \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$$

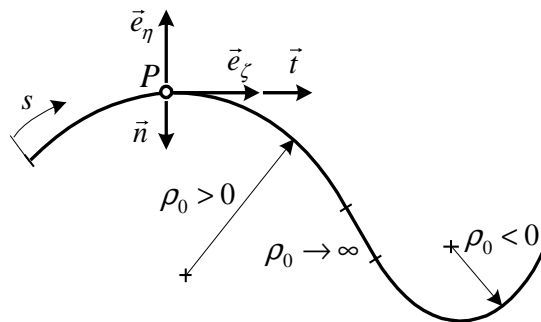
Vissza a kérdésekhez!

IV. modul 5. fejezet - 3. kérdés:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 1. fejezet - 1. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

V. modul 1. fejezet - 3. kérdés:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{ds} - \frac{T_\eta}{\rho_0} + f_t &= 0, \\ \frac{N}{\rho_0} + \frac{dT_\eta}{ds} - f_n &= 0, \\ \frac{dM_{hx}}{ds} + T_\eta &= 0.\end{aligned}$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 1. fejezet - 5. kérdés:

- a rúd középvonala terhelés előtt ρ_0 sugarú körív,
- a rúd prizmatikus, továbbá keresztmetszetei az η tengelyre szimmetrikusak
- a rúd igénybevétele tiszta hajlítás,
- a rúdban egytengelyű feszültségi állapot lép fel.

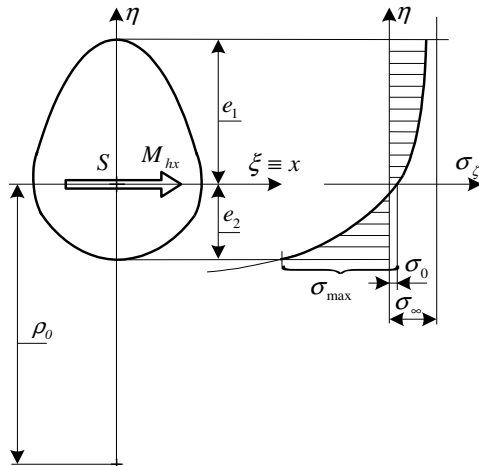
[Vissza a kérdésekhez!](#)

V. modul 1. fejezet - 6. kérdés:

- alakváltozás után a keresztmetszetek síkok maradnak és merőlegesek maradnak a deformálódott középvonalra,
- az alakváltozás során a ρ_0 sugarú középvonal ρ sugarú körívvé görbül az M_{hx} nyomaték hatására.

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 1. fejezet - 7. kérdés:



[Vissza a kérdésekhez!](#)

V. modul 1. fejezet - 8. kérdés:

$$\vec{F}_S = \int_{(A)} \vec{\rho}_\zeta dA = \vec{e}_\zeta \int_{(A)} \sigma_\zeta dA = \vec{0}.$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 1. fejezet - 9. kérdés:

$$\vec{M}_S = \int_{(A)} \vec{R} \times \vec{\rho}_\zeta dA = \int_{(A)} (\xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta) \times \sigma_\zeta \vec{e}_\zeta dA = M_{hx} \vec{e}_\xi.$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 1. fejezet - 11. kérdés:

$$\sigma_{\zeta} = \frac{M_{hx}}{\rho_0 A} + \frac{M_{hx}}{I_r} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta.$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 1. fejezet - 12. kérdés:

$$I_r = \int_{(A)} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta^2 dA$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 1. fejezet - 15. kérdés:

$$\psi = \Phi - \Phi_0 = \frac{M_{hx}}{I_r E} \rho_0 \Phi_0 = \frac{M_{hx} l}{I_r E}$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 1. fejezet - 16. kérdés:

- a síkgörbe rúd igénybevétele tetszőleges síkbeli igénybevétel: N, T_η, M_{hx} ,
- a középvonal nem körív, de feltételezzük hogy a görbületi sugár csak kismértékben és lassan változik a rúd középvonala mentén,
- a rúd nem prizmatikus, de feltételezzük, hogy a keresztmetszet alakja, vagy geometriai elhelyezkedése csak kismértékben és lassan változik a rúd középvonala mentén.

[Vissza a kérdésekhez!](#)

V. modul 1. fejezet - 17. kérdés:

$$\text{Hajlítás: } \sigma'_{\zeta} = \frac{M_{hx}}{A \rho_0} + \frac{M_{hx}}{I_r} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta} \eta,$$

$$\text{Húzás/nyomás : } \sigma''_{\zeta} = \frac{N}{A}$$

$$\text{Nyírás : } \tau_{\eta\zeta} = - \frac{T_{\eta}}{I_{\xi}} \frac{S_{\xi}(\eta)}{a(\eta)}$$

} egyenes rudakra vonatkozó összefüggés.

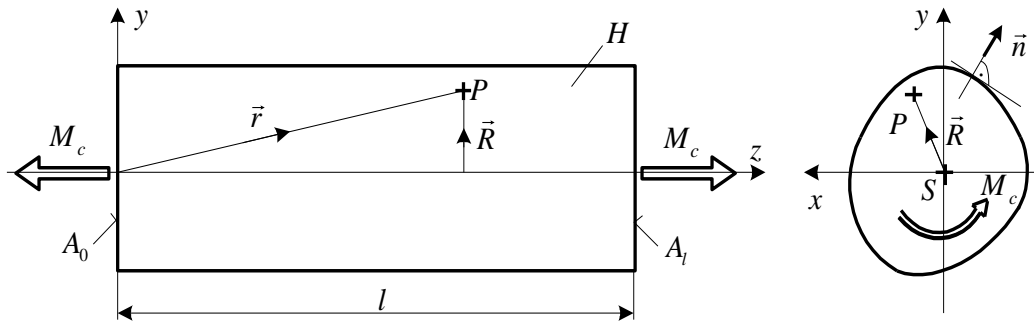
Vissza a kérdésekhez!

V. modul 1. fejezet - 18. kérdés:

$$U \approx U_{hajl} \cdot U \approx \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{M_{hx}}{I_r E} ds.$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 2. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 3. kérdés:

$$-\vec{q} = \vec{0},$$

- a H palást terheletlen: ($\underline{\underline{\vec{\rho}_n}} = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{0}$),

$$-\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0,$$

$$-\int_{(A)} \vec{\rho}_z dA = \vec{0}, \int_{(A)} \vec{R} \times \vec{\rho}_z dA = M_c \vec{e}_z.$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 4. kérdés:

- a (H) palást terheletlen $\Rightarrow \vec{\rho}_n = \vec{0}$.

- az (A_l) -en a rúd igénybevétele csavarás:

$$\int_{(A)} \vec{\rho}_z dA = \vec{0}, \int_{(A)} \vec{R} \times \vec{\rho}_z dA = M_c \vec{e}_z.$$

- (A_0) A rúd igénybevétele csavarás \Rightarrow ugyanaz, mint az (A_l) -en.

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 5. kérdés:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ahol} \quad \begin{aligned} \tau_{xz} &= \tau_{xz}(x,y), \\ \tau_{yz} &= \tau_{yz}(x,y). \end{aligned}$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 6. kérdés:

$$\begin{aligned}0 + 0 + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\0 + 0 + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + 0 &= 0.\end{aligned}$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 7. kérdés:

Prizmatikus rudak szabad csavarási feladata visszavezethető egy $U(x,y)$ feszültségfüggvény meghatározására.

$U(x,y)$ – a Prandtl-féle feszültségfüggvény nem tetszőleges.

1) Ki kell elégítenie:

a $\Delta U = -2 G \vartheta$ Poisson-féle differenciál egyenletet és az $U|_{g_0} = 0$ peremfeltételt.

2) Az igénybevétel és a feszültség származtatása a feszültségfüggvényből:

$$M_C = 2 \int_{(A)} U(x,y) dA, \quad \tau_z = (\nabla U) \times \vec{e}_z.$$

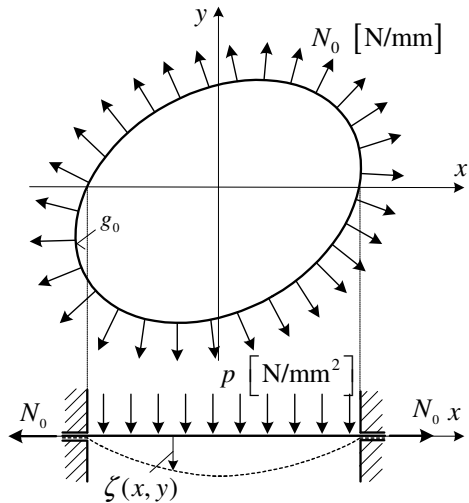
Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 8. kérdés:

Az analógia alapja: $\left. \begin{array}{l} - \text{ a differenciál egyenlet} \\ - \text{ a peremfeltétel} \end{array} \right\} \text{ azonossága.}$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 9. kérdés:



A membránt a keresztmetszet alakjának megfelelő furatra (lyukra) feszítjük rá.

A keresztmetszet alakja tetszőleges.

N_0 - a membrán síkjába eső feszítőerő-sűrűség,
 p - a membrán síkjára merőleges nyomás.

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 10. kérdés:

$$\Delta\zeta = -\frac{p(x,y)}{N_0}$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 12. kérdés:

$$U = G \vartheta \left(\frac{v^2}{4} - x^2 \right).$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 13. kérdés:

$$x = \pm \frac{v}{2} \quad U = 0 \quad \text{teljesül,}$$

$$y = \pm \frac{b}{2} \quad U \neq 0 \quad \text{nem teljesül.}$$

[Vissza a kérdésekhez!](#)

V. modul 2. fejezet - 14. kérdés:

$$M_c = 2 \int_{(A)} U dA \cong 2 G \vartheta b \int_{x=-\frac{v}{2}}^{\frac{v}{2}} \left(\frac{v^2}{4} - x^2 \right) dx = G \vartheta \underbrace{\frac{bv^3}{3}}_{I_c},$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 15. kérdés:

$$G \vartheta = \frac{M_c}{I_c} \text{ helyettesítés után: } \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = \frac{M_c}{I_c} 2x$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 16. kérdés:

$$I_c = \frac{bv^3}{3}$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 17. kérdés:

$$\tau_{sz} = \frac{M_c}{I_c} 2\xi,$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 18. kérdés:

$$M_c = G \vartheta I_c.$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 19. kérdés:

$$I_c = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i v_i^3}{3},$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 20. kérdés:

$$I_c = \frac{1}{3} \int_{(b)} v^3 ds.$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 21. kérdés:

$$\tau_{sz} = \frac{U_1}{v} = \frac{M_c}{2 A_k v} \text{ Bredt-formula.}$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 22. kérdés:

$$M_c = 2 \int_{(A)} U dA \cong 2 A_k U_1 .$$

Vissza a kérdésekhez!

V. modul 2. fejezet - 23. kérdés:

$$I_c = \frac{4 A_k^2}{\oint \frac{1}{v} ds}$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 2. kérdés:

$$\begin{aligned}u &= u(x,y) , \\v &= v(x,y) , \\w &\equiv 0 .\end{aligned}$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 3. kérdés:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x,y).$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 4. kérdés:

$$[\underline{\underline{F}}] = [\underline{\underline{F}}(x,y)] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} .$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 5. kérdés:

DDKR

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_x = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + q_y = 0,$$

Vissza a kérdésekhez!



VI. modul 1. fejezet - 6. kérdés:

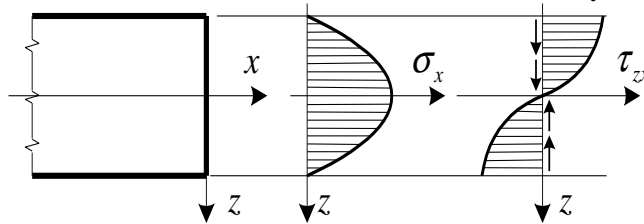
HKR

$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{\sigma_R - \sigma_\varphi}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} + q_R = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{\varphi R}}{\partial R} + 2 \frac{\tau_{\varphi R}}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + q_\varphi = 0.$$

[Vissza a kérdésekhez!](#)

VI. modul 1. fejezet - 8. kérdés:

- a $z = \pm b/2$ felületek terheetlenek $\Rightarrow \sigma_z|_{z=\pm b/2} = 0$,
- ha a b méret kicsi, akkor $\sigma_z \approx 0$ nemcsak a felületeken, hanem a többi helyen is fennáll.



- a $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ a z helykoordináta páros függvényei,
- a τ_{zx}, τ_{zy} a z helykoordináta páratlan függvényei.

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 9. kérdés:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_x dz \quad , \quad \bar{\sigma}_y = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_y dz \quad , \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{xy} dz \quad ,$$
$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_z dz = 0 \quad , \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{xz} dz = 0 \quad , \quad \bar{\tau}_{yz} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{yz} dz = 0 \quad .$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 10. kérdés:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{xy} & 0 \\ \bar{\tau}_{yx} & \bar{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

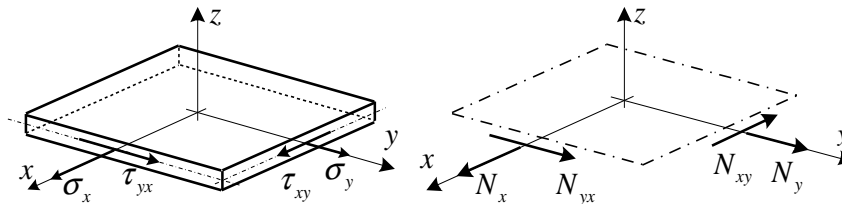
Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 11. kérdés:

$$[\underline{N}] = [\underline{N}(x,y)] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} & 0 \\ N_{yx} & N_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 12. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 13. kérdés:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{b} \int_{(b)} \varepsilon_x dz \quad , \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{b} \int_{(b)} \varepsilon_y dz \quad , \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \gamma_{xy} dz \quad , \quad \bar{\varepsilon}_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y) .$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 14. kérdés:

$$[\underline{\underline{A}}] = [\underline{\underline{A}}(x,y)] = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x & \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{yx} & \bar{\varepsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_z \end{bmatrix}$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 15. kérdés:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \bar{q}_x &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \bar{q}_y &= 0.\end{aligned}$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 16. kérdés:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}.$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 20. kérdés:

$$\bar{u} = u \vec{e}_R + v \vec{e}_z + w \vec{e}_\varphi, u = u(R, z), \quad v = \nu(R, z), \quad w \equiv 0.$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 21. kérdés:

$$\begin{aligned}\varepsilon_R(R, z) &= \frac{\partial u}{\partial R}, & \varepsilon_z(R, z) &= \frac{\partial v}{\partial z}, & \varepsilon_\varphi(R, z) &= \frac{u}{R}, \\ \gamma_{Rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial R}, & \gamma_{\varphi z} &= \gamma_{R\varphi} = 0.\end{aligned}$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 22. kérdés:

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ Rz\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}(R,z) \\ Rz\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{Rz} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zR} & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{bmatrix}$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 23. kérdés:

$$\sigma_R(R,z) = 2G \left[\varepsilon_R + \frac{\nu}{1-2\nu} \right] A_I, \sigma_z(R,z) = 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} \right] A_I,$$

$$\sigma_\varphi(R,z) = 2G \left[\varepsilon_\varphi + \frac{\nu}{1-2\nu} \right] A_I, \tau_{Rz} = G \gamma_{Rz} \quad , \quad \tau_{\varphi z} = \tau_{R\varphi} = 0,$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 24. kérdés:

$$\begin{bmatrix} \underline{F} \\ Rz\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ Rz\varphi \end{bmatrix} (R,z) = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{Rz} & 0 \\ \tau_{zR} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{bmatrix}$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 27. kérdés:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 29. kérdés:

$$\varepsilon_R = \frac{du}{dR}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{R}, \quad \gamma_{R\varphi} = 0.$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 30. kérdés:

$$[\underline{A}] = [\underline{A}(R)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 31. kérdés:

$$[\underline{\underline{A}}] = [\underline{\underline{A}}(R)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_R + \varepsilon_\varphi)$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 1. fejezet - 32. kérdés:

$$\varepsilon_R = \frac{1}{2G} [\sigma_R - \nu (\sigma_R + \sigma_\varphi)],$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{2G} [\sigma_\varphi - \nu (\sigma_R + \sigma_\varphi)],$$

$$\varepsilon_z = 0.$$

[Vissza a kérdésekhez!](#)

VI. modul 1. fejezet - 33. kérdés:

$$\varepsilon_R = \frac{1}{E} (\sigma_R - \nu \sigma_\varphi),$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \nu \sigma_R),$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_\varphi + \sigma_R)$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 2. fejezet - 2. kérdés:

$$\begin{matrix} \underline{F} \\ R\varphi z \end{matrix} = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma'_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_z \end{bmatrix}}_{\text{SA}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma''_z \end{bmatrix}}_{\text{húzás-nyomás}}$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 2. fejezet - 3. kérdés:

$$\sigma_R = \sigma'_R = A + \frac{B}{R^2},$$

$$\sigma_\varphi = \sigma'_\varphi = A - \frac{B}{R^2},$$

$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z.$$

Vissza a kérdésekhez!

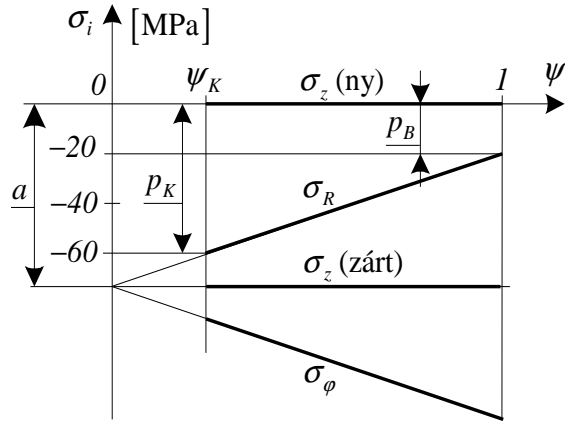
VI. modul 2. fejezet - 4. kérdés:

- nyitott cső esetén: $\sigma_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z'' = -\sigma_z' = -2A\nu,$

- zárt cső esetén: $\sigma_z'' = \sigma_z - \sigma_z' = \text{állandó}.$

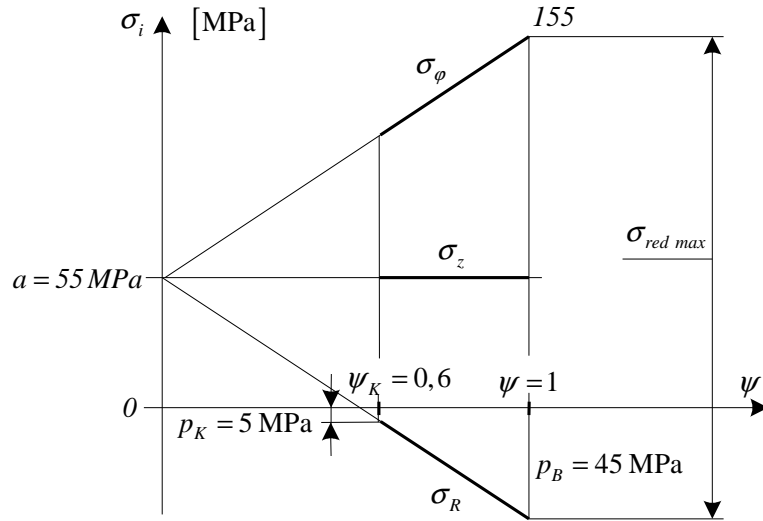
Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 2. fejezet - 6/A/I. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 2. fejezet - 7/A/1. kérdés:



[Vissza a kérdésekhez!](#)

VI. modul 2. fejezet - 9. kérdés:

Túlfedés: $\delta = \rho_B - \rho_K$.

[Vissza a kérdésekhez!](#)

VI. modul 2. fejezet - 11. kérdés:

$$\frac{\sigma_{red \max B}}{2} = \frac{p_B - p'}{1 - \bar{\psi}_K} \cdot \frac{\sigma_{red \max K}}{2} = \frac{p' - p_K}{\bar{\psi}_K - \psi_K} \bar{\psi}_K.$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 2. fejezet - 12. kérdés:

$$\delta = \rho_B \frac{1}{2G} [\sigma_{\varphi K} - \sigma_{\varphi B} - \nu (\sigma_{\varphi K} - \sigma_{\varphi B})] \Big|_{R=\rho_B}$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 2. fejezet - 13. kérdés:

$$\rho_B \approx \rho_K = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{meg K}}{\sigma_{meg B}}\right)^{\frac{1}{2}} R_B R_K}$$

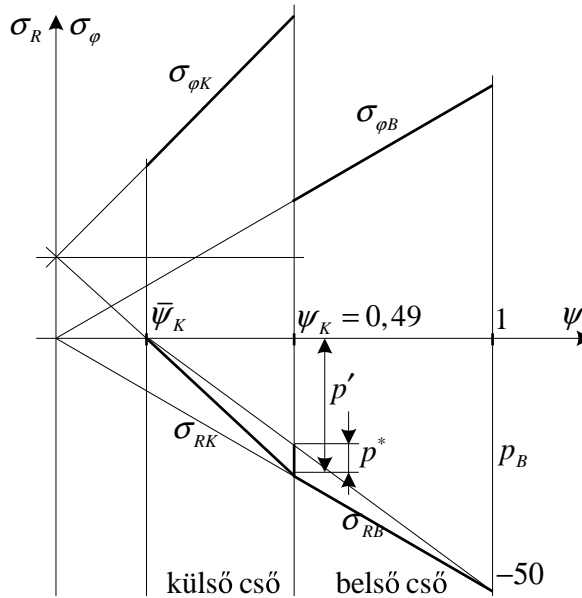
Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 2. fejezet - 14. kérdés:

$$\rho_K \approx \rho_B = \sqrt{R_B R_K}$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 2. fejezet - 15/B. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 3. fejezet - 1. kérdés:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma'_\varphi &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda \\ \sigma'_z &= \nu (\sigma'_R + \sigma'_\varphi) \end{aligned} \right\}$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 3. fejezet - 3. kérdés:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \sigma'_R = a - \frac{b}{\lambda} - \sigma_{\omega 0} \lambda, \\ \sigma_\varphi &= \sigma'_\varphi = a + \frac{b}{\lambda} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda, \\ \sigma_z &= \sigma'_z + \sigma''_z = \mu_2 \sigma_{\omega 0} (1 + \lambda_B - 2\lambda). \end{aligned} \right\}$$

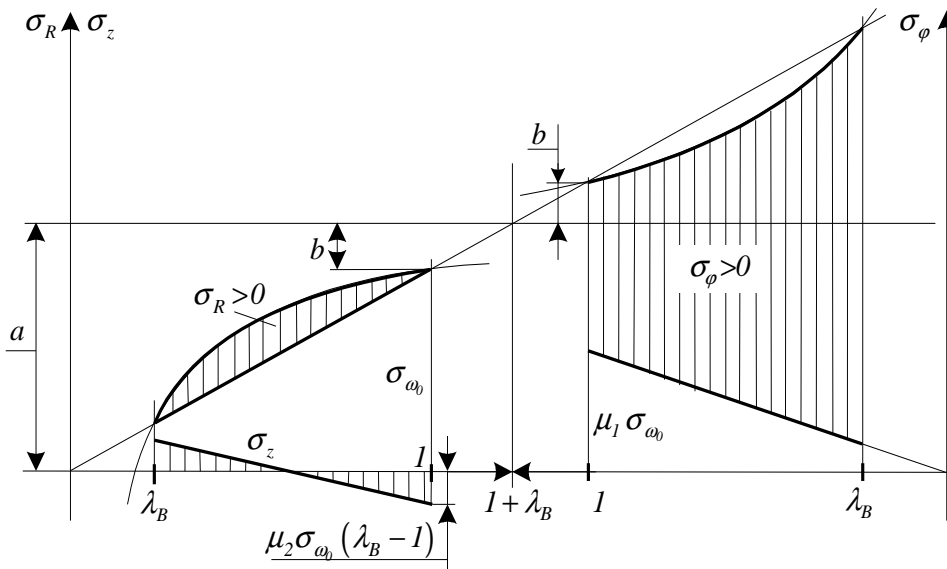
Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 3. fejezet - 5. kérdés:

$$\sigma_{red \max}(Mohr) = (\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_\varphi(\lambda_B) = a + \frac{b}{\lambda_B} - \mu_1 \sigma_{\omega 0} \lambda_B.$$

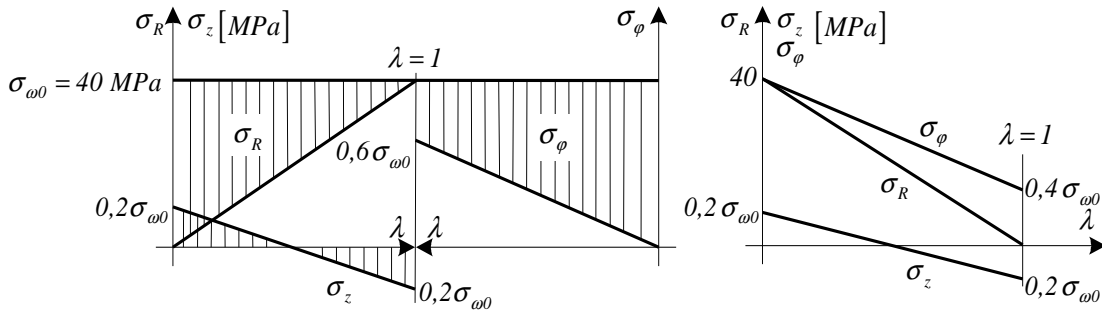
Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 3. fejezet - 6/A/I. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 3. fejezet - 7/A/I. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 4. fejezet - 1. kérdés:

Változó: $\psi = \frac{R_B^2}{R^2}$.

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 4. fejezet - 2. kérdés:

$$\bar{\sigma}_R(\psi = 1) = a - b = -p_B, \bar{\sigma}_R(\psi = \psi_K) = a - b\psi_K = -p_K.$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 4. fejezet - 3. kérdés:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - b\psi \\ \bar{\sigma}_\varphi &= a + b\psi \end{aligned} \right\} \text{A tengelyszimmetria miatt: } \bar{\tau}_{R\varphi} = 0. \bar{\sigma}_z = 0.$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 4. fejezet - 4. kérdés:

$$\text{Változó: } \psi = \frac{R_B^2}{R^2} \cdot \bar{\psi}_K = \frac{R_B^2}{\rho_B^2} = \frac{R_B^2}{\rho_K^2}, \psi_K = \frac{R_B^2}{R_K^2}.$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 4. fejezet - 5. kérdés:

Feltételezés: $\delta \ll \rho_B, \rho_K \Rightarrow \rho_B \approx \rho_K$.

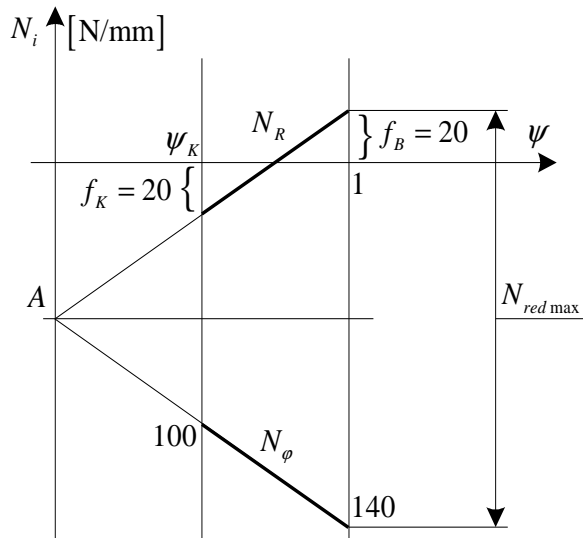
Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 4. fejezet - 6. kérdés:

Túlfedés: $\delta = \rho_B - \rho_K$.

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 4. fejezet - 7/A/I. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 5. fejezet - 1. kérdés:

Feltételezés: - $\omega =$ állandó, A p_b és p_k a tárcsához kapcsolódó más alkatrész hatását modellezi.

– súlyerő ≈ 0 .

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 5. fejezet - 2. kérdés:

Peremfeltételek: $R = R_B, \quad (\lambda = \lambda_B), \quad \bar{\sigma}_R = p_B,$
 $R = R_K, \quad (\lambda = 1), \quad \bar{\sigma}_R = p_K.$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 5. fejezet - 3. kérdés:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= a - \frac{b}{\lambda} - \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda \\ \bar{\sigma}_{\varphi} &= a + \frac{b}{\lambda} - \mu_3 \bar{\sigma}_{\omega 0} \lambda \end{aligned} \right\},$$
$$\bar{\sigma}_{\omega 0} = \frac{(3 + \nu) \rho}{\nu} \frac{1}{8} (R_K \omega)^2, \mu_3 = \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu}.$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 5. fejezet - 4. kérdés:

$$\bar{\sigma}_{red \max}(Mohr) = \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda_B) = \sigma_{\omega_0}(2 + \lambda_B) - \mu_3 \sigma_{\omega_0} \lambda_B.$$

Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 5. fejezet - 5. kérdés:

Peremfeltétel: $\sigma_R (\lambda = 1) = p_K$.

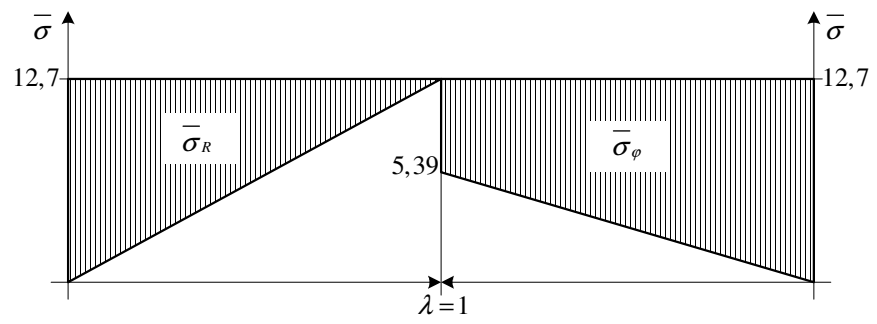
Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 5. fejezet - 6. kérdés:

$$\bar{\sigma}_{red \max}(Mohr) = \bar{\sigma}_{\varphi}(\lambda = 0) = a = \bar{\sigma}_{\omega 0} + p_K.$$

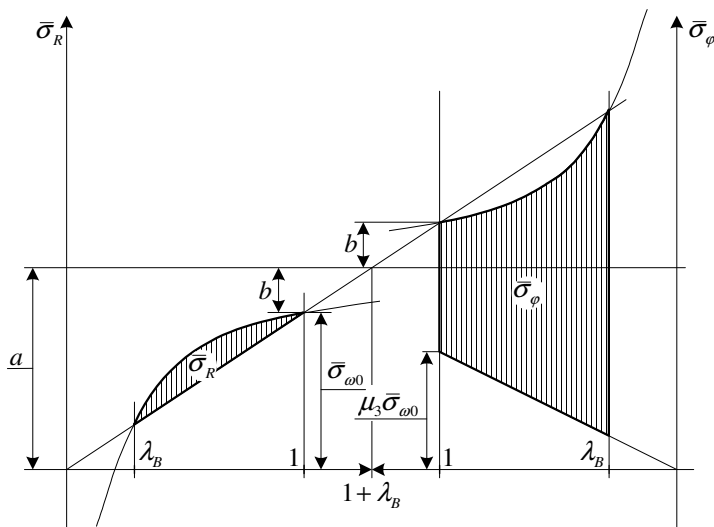
Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 5. fejezet - 8/A/I. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

VI. modul 5. fejezet - 9/A/I. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

VII. modul - 3. kérdés:

a forgástengelyre illeszkedő sík

[Vissza a kérdésekhez!](#)

VII. modul - 5. kérdés:

$$\underline{\underline{F}}_{s\varphi z} = \underline{\underline{F}}_{s\varphi z}(s) = \begin{bmatrix} \sigma_s & \tau_{s\varphi} & 0 \\ \tau_{\varphi s} & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

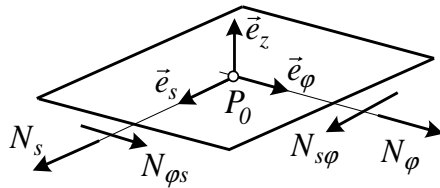
Vissza a kérdésekhez!

VII. modul - 6. kérdés:

- a héj vastagsága mentén vett feszültségi eredő,
- vonal mentén megoszló belső erő [N/mm].

Vissza a kérdésekhez!

VII. modul - 7. kérdés:



Vissza a kérdésekhez!

VII. modul - 8. kérdés:

$$N_s = b\sigma_s, N_\varphi = b\sigma_\varphi, N_{s\varphi} = N_{\varphi s} = b\tau_{s\varphi} = b\tau_{\varphi s}.$$

Vissza a kérdésekhez!

VII. modul - 9. kérdés:

$$\frac{N_s}{R_s} + \frac{N_\varphi}{R_\varphi} = p_z$$

Vissza a kérdésekhez!

11. SZAKIRODALOM

- [1] M. Csizmadia B. – Nándori E. (szerk): Mechanika mérnököknek Szilárdságtan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
- [2] Kozák I.: Szilárdságtan III., Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
- [3] Kozák I.: Szilárdságtan V., Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- [4] Budinas, R.G.: Advanced Strength and Applied Stress Analysis, McGraw-Hill International Edition, 1999.
- [5] Jenkins, C.H.M – Khanna, S.K.: Mechanics of Materials, Elsevier Academic Press, 2005.
- [6] NME Mechanikai Tanszék Munkaközössége: Mechanika Példatár II., Tankönyvkiadó Budapest, 1981.
- [7] NME Mechanikai Tanszék Munkaközössége: Mechanika Példatár III., Tankönyvkiadó Budapest, 1985.
- [8] Hibbeler, R. C.: Mechanics of Materials (Seventh SI Editions), Prentice Hall, 2008.
- [9] Göldner, H. (ed): Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 1 Grundlagen der Elastizitätstheorie, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1984.
- [10] Göldner, H. (ed): Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 2, Fachbuchverlag Leipzig-Köln, 1992.
- [11] Weinberg, K.: Höhere Festigkeitslehre, Unterlagen zur Lehrveranstaltungen, 2012.
- [12] Kienzler, R., Schröder, R.: Einführung in die Höhere Festigkeitslehre, Springer Verlag Berlin-Heidelberg, 2009.