Dr. Berta Miklós, Czéh Szabolcs, Dr. Giczi Ferenc
SZE-MTK, Fizika és Kémia Tanszék

# Elemi fizikai példatár

2013. március 31.

Műszaki és természettudományos alapismeretek
tananyagainak fejlesztése a mérnökképzésben
Pályázati azonosító: TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0054

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL
A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

**IMPRESSZUM**

©COPYRIGHT: Dr. Berta Miklós, Czéh Szabolcs, Dr. Giczi Ferenc
Széchenyi István Egyetem, Műszaki Tudományi Kar, Fizika és Kémia Tanszék
**Lektorok:**Szabóné dr. Házi Erzsébet, egyetemi docens, Óbudai Egetem, Gépszerkezettani és Biztonságtechnikai Intézet;
Dr. Pszota Gábor, egyetemi adjunktus, Miskolci Egyetem, Fizikai Tanszék

©Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)
A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

ISBN 978-963-7175-83-1

**Kiadó:** Széchenyi István Egyetem, Műszaki Tudományi Kar
**Támogatás:**
Készült a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0054 számú, "Műszaki és természettudományos alapismeretek tananyagainak fejlesztése a mérnökképzésben" című projekt keretében.

**Kulcsszavak:** *fizika, fizikaoktatás, fizika példatár, egyetemi példatár, elektronikus példatár, mérnöki fizika, Széchenyi Egyetem*

**Tartalmi összefoglaló:** Az Elemi fizikai példatár a Széchenyi István Egyetem alapképzési (BSc) mérnök szakjai számára íródott, a Mérnöki fizika, továbbá a két féléves Fizika villamosmérnököknek tárgyak oktatásához. Az elektronikus példatár, amelyet úgy tagoltuk fejezetekre, hogy illeszkedjen a megfelelő oktatási jegyzetek szerkezetéhez, összesen 326, kidolgozott és kidolgozatlan gyakorló feladatot tartalmaz a klasszikus és a modern fizika egyes témaköreiből.

Győr, 2013. június

## Technikai megjegyzések a jegyzet használatához.

Ez a tananyag egy *elektronikus jegyzet*.

2013-ban, a megjelenés évében annyira elterjedtek az elektronikus tartalomfogyasztásra alkalmas eszközök, hogy bátran feltételezhetjük: az egyetemisták túlnyomó többsége rendelkezik saját számítógéppel, tablet-géppel vagy elektronikus könyvolvasóval. A tananyag elektronikus formája sok előnnyel rendelkezik a nyomtatotthoz képest:

- Aktív tartalmak: az elektronikus változatban belső kereszthivatkozások, külső linkek, mozgóképek, stb. helyezhetők el. A tartalomjegyzék fejezetszámai, az egyenlet- és ábrasorszámok automatikusan belső linket jelentenek, így biztosítják a kényelmes és gyors belső hivatkozást, de a Szerző tetszőleges helyre tud akár a dokumentum belsejébe, akár egy külső webhelyre mutató linket elhelyezni, ami a szokásos klikkentéssel aktivizálható.
- Rugalmasság: a nyomtatott könyv statikus, míg az elektronikus jegyzet esetében könnyű hibajavításokat, frissítéseket alkalmazni.
- Erőforrás-takarékosság, környezetvédelem: az elektronikus formában való terjesztés sokkal kisebb terhelést jelent a környezetre, mint a nyomtatott. Különösen igaz ez, ha a tananyagban sok a színes ábra.

A használt fájlformátum: *PDF*.

A Portable Document Format az Adobe által kifejlesztett formátum, mely igen széles körben elterjedt. Sok helyről szerezhetünk be programot, mely a PDF fájok olvasására alkalmas. Ezek egy része azonban nem tartalmazza a teljes szabvány minden elemét, ezért speciális tartalmak nem, vagy nem pontosan jelenhetnek meg, ha nem az Adobe olvasóját, az AdobeReader-t használjuk. (Letölthető innen.)

A legtöbb megjelenítőprogram jól fogja kezelni az alapszöveget, ábrákat és linkeket, de gondok lehetnek a speciálisabb funkciókkal, pl. a beágyazott dokumentumok kezelésével, az aktív tesztek, kérdőívek használatával.

A jegyzet *képernyőn való megjelenítésre* lett optimalizálva.

A jelenlegi általánosan elérhető könyvolvasó hardverek mérete és felbontása kisebb, mint a nyomtatott könyveké és a számítógépek monitorai általában fektetett helyzetűek. Ehhez igazítottuk a formátumot arra optimalizálva, hogy fektetett kijelzőn teljes képernyős üzemmódban lehessen olvasni. Ehhez állítottuk be a karaktertípust és -méretet valamint azt is, hogy csak kis margót hagyunk, minél több pixelt biztosítva ezzel a tartalomnak. Azért, hogy teljes képernyős üzemmódban is lehessen navigálni, a margón kis navigáló-ikonokat helyeztünk el, melyek a megszokott módon kezelhetők:

- Lapozás előre és hátra: a függőleges oldalak közepén elhelyezett, nyújtott nyilakkal.
- Címoldalra ugrás: kis házikó szimbólum a bal felső sarokban.
- Vissza és előreugrás a dokumentumban: két kicsi szimbólum a bal felső részen. Ezek nem azonosak a lapozással, hanem a web-böngészők vissza- és előrelépéséhez hasonlóan a hiperlinkeken való navigálást szolgálják.

A jegyzet *segítséget nyújt a tanulás ütemezésében*.

A megtanulandó tanagyag a szokásos fejezet-alfejezet felosztáson túl leckékre való bontást is tartalmaz. A leckék különböző számú alfejezetből állhatnak, de közös bennük, hogy a Szerző megítélés szerint egy lecke „együltő helyben” megtanulható, azaz várhatóan 1–1,5 óra alatt feldolgozható.

A leckék elején rövid leírás található a tárgyalt témakörökről, a szükséges előismeretekről, a végén pedig önellenőrző kérdések, melyek sok esetben a PDF fájlban (AdobeReader-rel) aktív tartalomként jelennek meg feleletkiválasztós teszt, számszerű vagy képletszerű kérdés formájában. Érdemes tehát leckénként haladni a tanulásban, mert ez segít az ütemezés tervezésében illetve a leckevégi ellenőrzések segítenek annak eldöntésében, tovább szabad-e haladni vagy inkább ezt vagy az előző leckéket kell újra elővenni.

# Tartalom


1. Bevezető
2. Fontos fizikai állandók

1. lecke
3. Pillanatnyi sebesség és gyorsulás

2. lecke
4. Egyenes vonalú egyenletes és egyenletesen gyorsuló mozgás

3. lecke
5. Szabadesés és függőleges hajítás

4. lecke
6. Vízszintes és ferde hajítás

5. lecke
7. Egyenletes és egyenletesen gyorsuló körmozgás

6. lecke
8. Newton I. törvénye
9. Newton II. törvénye
10. Newton III. törvénye
11. A dinamika alaptörvénye

7. lecke

12. A lendületmegmaradás törvénye

13. Erőlökés

14. A tehetetlen tömeg

8. lecke

15. Erőtörvények

9. lecke

16. Munka, energia

10. lecke

17. Merev testek súlypontja és mozgása

11. lecke

18. Deformálható testek mechanikája

12. lecke

19. Rezgőmozgás I.

13. lecke

20. Rezgőmozgás II.

14. lecke

21. Hullámmozgás

15. lecke

**22. Hangtan**

16. lecke

**23. A fény és optikai jelenségek**

**24. A fényvisszaverődés és a fénytörés**

17. lecke

**25. Fényhullámok interferenciája**

**26. Fényelhajlás**

18. lecke

**27. Egyszerű képalkotó eszközök**

27.1. Síktükör képalkotása

27.2. Gömbtükrök képalkotása

27.3. Optikai lencsék képalkotása

**28. Optikai eszközök képalkotása**

19. lecke

**29. Hőtágulás**

**30. Ideális gázok termodinamikája**

**31. Kinetikus gázelmélet**

**32. A hőtan főtételei**

33. Hőtani folyamatok

20. lecke
34. A Coulomb-törvény és az elektromos mező

21. lecke
35. Az elektromos mező munkája. A feszültség

22. lecke
36. Kapacitás, kondenzátorok

23. lecke
37. Az egyenáram. Áramkörök

24. lecke
38. Az elektromos áram munkája. A teljesítmény

25. lecke
39. Mágneses indukció. Az indukált feszültség

26. lecke
40. Töltött részecskék mágneses mezőben. A Lorentz-erő

27. lecke
41. Váltakozó áram és feszültség

28. lecke
42. Relativitáselmélet

29. lecke
43. Fénykvantumok és anyaghullámok
30. lecke
44. Atomfizika
31. lecke
45. Molekulafizika
32. lecke
46. Anyagszerkezet
33. lecke
47. Magfizika

## 1. Bevezető

Ez a példatár a Széchenyi István Egyetem alapképzési (BSc) mérnök szakjai számára íródott, a Mérnöki fizika (FI002_1), továbbá a két féléves Fizika villamosmérnököknek (FI003_1, FI003_2) tárgyak könnyebb elsajátíthatóságát szolgálja.

A BSc képzés elindításakor elkészítettük a tárgyak oktatásához szükséges jegyzeteket, amelyek mind elektronikus, mind nyomtatott formában hozzáférhetők a hallgatók számára. A jegyzetekben az elméleti részeket rendszeresen megszakítják kidolgozott számolási példák, amelyek megkönnyítik az elmélet megértését. Az egyes fejezetek végén további kidolgozott, illetve megoldást nem tartalmazó gyakorló feladatok találhatók. Mindazonáltal jogosan merült fel az igény arra, hogy a jegyzetek mellé önálló példatár is készüljön.

A példatárat a szokásoknak megfelelően úgy tagoltuk fejezetekre, hogy illeszkedjen a jegyzetek szerkezetéhez. A példatár összesen 326, kidolgozott és kidolgozatlan gyakorló feladatot tartalmaz. Javasoljuk a példatárat használó hallgatóknak, hogy először a kidolgozott feladatokat próbálják megoldani és ellenőrizzék le a végeredményeket. Ha a végeredmények nem egyeznek, akkor nézzék át alaposan a feladatok megoldását, majd később térjenek vissza és ismét próbálják önállóan megoldani azokat a feladatokat, amelyeket elsőre nem sikerült megoldani.

A fejezeteken belül található kidolgozatlan gyakorló feladatok megoldásával a hallgatók ellenőrizhetik, hogy önállóan is képesek-e a kidolgozott feladatokhoz hasonló feladatok megoldására. A gyakorló feladatok jelentős részénél a végeredményt, (csak a számértéket, a mértékegység elhagyásával) be kell írni a világos kék színnel kiemelt téglalapba. Az "ENTER" gomb megnyomása után a számítógép azonnal értékeli a beírt végeredményt. Ha többszöri próbálkozás után sem sikerül a helyes eredményt kiszámolni, akkor a "Megold." gombra kattintva lekérdezhetjük az adott feladat helyes eredményét. A példatár úgy lett elkészítve, hogy az eredmények megadásánál a tizedespont használatát támogatja. Tizedesvessző használata esetén mindig hibásnak tekinti a végeredményt. Ahol azt külön nem jelöltük, ott a végeredményt SI-ben kell megadni. A végeredmények a számológép típusától és az elvégzett műveletek sorrendjétől függően a példatárban rögzített értékektől kissé eltérhetnek. Ezért minden gyakorló feladat esetében megadtunk egy hibahatárt, amin belül a számítógép még helyesnek értékeli a végeredményt. Javasoljuk ezért, hogy a végeredményeket legalább 3 vagy 4 értékes jegyre

pontosan adják meg. A végeredményekben történő eltérések csökkentése érdekében készítettünk egy, a feladatok megoldásához szükséges fizikai állandókat tartalmazó táblázatot.

A példatárat a pályázat kiírásban rögzített követelményeknek megfelelően, elektronikus formában tesszük közzé.

Bár a példatár írásakor törekedtünk arra, hogy ne maradjanak hibák benne, kérjük jelezze, ha ilyet tapasztal.

Minden kedves hallgatónak jó tanulást, jó gyakorlást kívánunk és mindenkit bátorítunk, hogy szükség esetén éljenek a személyes konzultációk adta lehetőségekkel is!

Győr, 2013. március 31.

Dr. Berta Miklós
Czéh Szabolcs
Dr. Giczi Ferenc
SZE, Fizika és Kémia Tanszék

## 2. Fontos fizikai állandók

| Neve | Jele | Értéke |
|---|---|---|
| a fény terjedési sebessége vákuumban | c | $2{,}998 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s}$ |
| gravitációs állandó | $\gamma$ | $6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$ |
| a gravitációs gyorsulás értéke Magyarországon | g | $9{,}81\ \frac{m}{s^2}$ |
| Planck-állandó | h | $6{,}626 \cdot 10^{-34}\ Js$ |
| Boltzmann-állandó | k | $1{,}381 \cdot 10^{-23}\ \frac{J}{K}$ |
| Rydberg-állandó | R | $1{,}0973 \cdot 10^{7}\ \frac{1}{m}$ |
| Stefan-Boltzmann-állandó | $\sigma$ | $5{,}669 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2K^4}$ |
| Avogadro-állandó | $N_A$ | $6{,}022 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{mol}$ |
| univerzális (egyetemes) gázállandó | R | $8{,}314\ \frac{J}{molK}$ |
| az ideális gáz moláris térfogata normál állapotban | $V_0$ | $22{,}41 \cdot 10^{-3}\ \frac{m^3}{mol}$ |
| a hang terjedési sebessége (normál körülmények) | c | $331{,}46\ \frac{m}{s}$ |

folytatás...

| Neve | Jele | Értéke |
|---|---|---|
| Wien-állandó | c | $2{,}897 \cdot 10^{-3}\ mK$ |
| Faraday-állandó | F | $9{,}649 \cdot 10^{4}\ \frac{C}{mol}$ |
| az elemi elektromos töltés | e | $1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C$ |
| az atomi tömegállandó (tömegegység) | u | $1{,}660 \cdot 10^{-27}\ kg$ |
| a vákuum permittivitása | $\epsilon_0$ | $8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{As}{Vm}$ |
| a vákuum permeabilitása | $\mu_0$ | $4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{Vs}{Am}$ |
| az elektron tömege | $m_e$ | $9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ kg$ |
| a proton tömege | $m_p$ | $1{,}6726 \cdot 10^{-27}\ kg$ |
| a neutron tömege | $m_n$ | $1{,}6749 \cdot 10^{-27}\ kg$ |
| a deuteron tömege | $m_d$ | $3{,}3436 \cdot 10^{-27}\ kg$ |
| az $\alpha$-részecske tömege | $m_\alpha$ | $6{,}6447 \cdot 10^{-27}\ kg$ |

# 1. LECKE

## Pillanatnyi sebesség és gyorsulás

## 3. Pillanatnyi sebesség és gyorsulás

**3.1. feladat:** Egy csillapított harmonikus rezgőmozgást végző test mozgása a következő hely-idő függvénnyel írható le:

$$x(t) = 5 \cdot e^{-4,2t} \cdot sin(3,72t + 2,23).$$

Határozzuk meg a pillanatnyi sebességét a $t = 1,2\,\mathrm{s}$ időpillanatban 3 tizedesjegy pontossággal!

**Megoldás:** A feladat többféleképpen is megoldható.

*Numerikus deriválással:*

$$\bar{v}(t; t + \Delta t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Írjuk be $x(t)$ helyére a feladatban szereplő kitérés-idő függvényt:

$$\bar{v}(t; t + \Delta t) = \frac{5 \cdot e^{-4,2(t+\Delta t)} \cdot sin(3,72(t + \Delta t) + 2,23) - 5 \cdot e^{-4,2t} \cdot sin(3,72t + 2,23)}{\Delta t}.$$

A következő lépésben helyettesítsük be a $t = 1,2\,\mathrm{s}$ értéket:

$$\bar{v}(1,2; 1,2 + \Delta t) = \frac{5 \cdot e^{-4,2(1,2+\Delta t)} \cdot sin(3,72(1,2 + \Delta t) + 2,23) - 5 \cdot e^{-4,2 \cdot 1,2} \cdot sin(3,72 \cdot 1,2 + 2,23)}{\Delta t}.$$

A feladat megoldásának harmadik, egyben legutolsó lépéseként egyre kisebb $\Delta t$ időtartamokra számítsuk ki a $\bar{v}(1,2; 1,2 + \Delta t)$ értékét. Mivel a pillanatnyi sebességet három tizedesjegy pontossággal kell kiszámolnunk, $\Delta t$

értékét addig kell csökkenteni, ameddig a további csökkentéssel a végeredmény harmadik tizedesjegye már nem változik.

A számolás eredményét az alábbi táblázat tartalmazza:

| $\Delta t$ | Érték |
|---:|---:|
| 0,1 | 0,021 |
| 0,01 | 0,052 |
| 0,001 | 0,056 |
| 0,0001 | 0,056 |
| 0,00001 | 0,056 |
| 0,000001 | 0,056 |

A keresett sebesség tehát három tizedesjegy pontossággal $0{,}056$ m/s.

*Deriválással:*

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Az $x(t)$ függvény az alábbi két elemi függvény szorzatára bontható:

$$f(t) = 5 \cdot e^{-4{,}2t} \qquad \text{és} \qquad g(t) = sin(3{,}72t + 2{,}23).$$

Írjuk fel ezeknek a függvényeknek a derivált függvényeit:

$$f'(t) = -4{,}2 \cdot 5 \cdot e^{-4{,}2t} \qquad \text{és} \qquad g'(t) = 3{,}72 \cdot cos(3{,}72t + 2{,}23).$$

Alkalmazzuk a szorzatfüggvény deriválására vonatkozó alábbi szabályt:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t),$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -4{,}2 \cdot 5 \cdot e^{-4{,}2t} \cdot sin(3{,}72t + 2{,}23) + 5 \cdot e^{-4{,}2t} \cdot 3{,}72 \cdot cos(3{,}72t + 2{,}23).$$

Összevonások után:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = e^{-4{,}2t} \cdot (18{,}6 \cdot cos(3{,}72t + 2{,}23) - 21 \cdot sin(3{,}72t + 2{,}23)).$$

Végül számítsuk ki a sebesség-idő függvény értékét a $t = 1{,}2\,\mathrm{s}$ időpontban:

$$v(t = 1{,}2) = e^{-4{,}2 \cdot 1{,}2} \cdot (18{,}6 \cdot cos(3{,}72 \cdot 1{,}2 + 2{,}23) - 21 \cdot sin(3{,}72 \cdot 1{,}2 + 2{,}23)),$$

$$v(t = 1{,}2) = 0{,}056\ m/s.$$

**3.2. feladat:** Egy test egyenes mentén mozog. Hely-idő függvénye SI-egységekben:

$$x(t) = 6t^4 + 3t^2 - 2t.$$

Adjuk meg a gyorsulás-idő függvényt!

**Megoldás:** A kitérés-idő függvény idő szerinti deriválásával megkapjuk a sebesség-idő függvényt:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 6 \cdot 4 \cdot t^3 + 3 \cdot 2 \cdot t - 2 = 24 \cdot t^3 + 6 \cdot t - 2.$$

A sebesség-idő függvény idő szerinti deriváltja adja meg a gyorsulás-idő függvényt:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 3 \cdot 24 \cdot t^2 + 6 = 72 \cdot t^2 + 6.$$

---

**3.3. feladat:** Az $xy$ síkban mozgó pontszerű test koordinátái a következőképpen változnak:

$$x(t) = 5t^2,$$

$$y(t) = 3 - 4t^2.$$

Határozzuk meg a sebesség-idő és gyorsulás-idő függvényt! Milyen pályán mozog a test?

**Megoldás:** A test $x$-irányú, illetve $y$-irányú sebesség-idő függvényét $x(t)$ és $y(t)$ idő szerinti deriválásával kapjuk:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 10 \cdot t \qquad \text{és} \qquad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -8 \cdot t.$$

A sebesség-idő függvényt Pitagorasz-tételét felhasználva adhatjuk meg:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{(10t)^2 + (-8t)^2},$$

$$v(t) = 12{,}81 \cdot t.$$

Könnyen meghatározhatjuk a pillanatnyi sebességnek az $x$-tengellyel bezárt szögét:

$$\tan\alpha = \frac{v_y(t)}{v_x(t)} = \frac{-8t}{10t} = -0{,}8,$$

$$\alpha = -38{,}66^0.$$

Mivel az $\alpha$ nem függ az időtől, a test pillanatnyi sebességének $x$-tengellyel bezárt szöge időben nem változik. A test tehát egyenes vonalú mozgást végez.

A gyorsulás-idő függvényt az előbbiekhez hasonlóan számolhatjuk ki. A test $x$-irányú, illetve $y$-irányú gyorsulás-idő függvényét $v_x(t)$ és $v_y(t)$ idő szerinti deriválásával kapjuk:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 10 \qquad \text{és} \qquad a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -8,$$

$$a(t) = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)} = \sqrt{(10)^2 + (-8)^2},$$

$$a(t) = 12{,}81.$$

Mivel a gyorsulás állandó, a vizsgált mozgás egyenletesen gyorsuló mozgás.

A mozgás pályaegyenletét úgy kaphatjuk meg, ha a test pillanatnyi helyzetének $y$-koordinátáját kifejezzük az $x$-koordináta függvényében. Ehhez az $x(t)$-ből fejezzük ki $t^2$-et és helyettesítsük be $y(t)$-be. Végeredményül a következő pályaegyenletet kapjuk:

$$y = 3 - \frac{4}{5}x.$$

**3.4. feladat:** Egy test gyorsulás-idő függvénye:

$$a(t) = 3 - 2t.$$

Tudjuk, hogy a test $t_1 = 0$ s-kor 2 m/s sebességgel mozgott. Mekkora a sebessége $t_2 = 2{,}5$ s-kor?

**Megoldás:** Ez a feladat is kétféleképpen oldható meg, grafikusan és integrálással.

*Grafikus megoldás:* A test sebességváltozását az $a(t)$ függvény grafikonja alatti, pontosabban a grafikon és a $t$-tengely által közbezárt területek előjeles összegéből kaphatjuk meg. Ábrázoljuk ezért az $a(t)$ függvényt egy derékszögű koordináta rendszerben. (Lásd 3.1. ábra.)

Egy egyenest két pontja egyértelműen meghatároz. Praktikus az egyenesnek azt a két pontját meghatározni, ahol koordinátarendszerünk tengelyeit metszi. Ezekre az adatokra a feladat megoldásához úgyis szükségünk lesz.

Ha kiszámítjuk az $a(t)$ helyettesítési értékét $t = 0$-ban, megkapjuk, hogy hol metszi az egyenes a függőleges tengelyt:

$$a(t = 0) = 3 - 2 \cdot 0 = 3.$$

Az egyenesnek és a $t$-tengelynek a metszéspontját pedig úgy kaphatjuk meg, ha kiszámítjuk, hogy milyen $t$ értékre lesz $a(t) = 0$:

$$a(t) = 3 - 2t = 0, \qquad \text{ahonnét}$$

$$t = 1{,}5.$$

Mivel mindkét háromszög derékszögű, a $T_1$ és $T_2$ területek nagysága könnyen számolható, mindössze a befogóik nagyságát kell ismerni:

$$T_1 = \frac{3 \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{4},$$

$$T_2 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

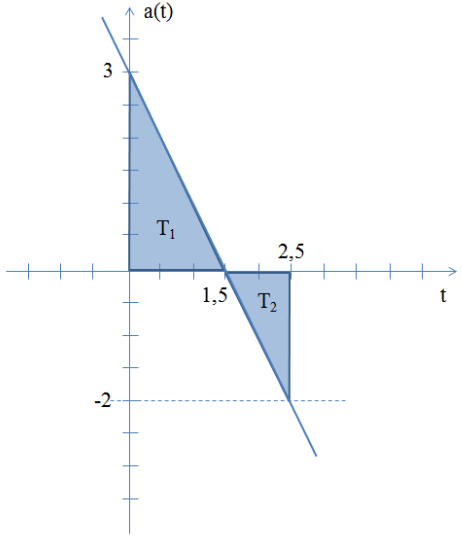
A sebességváltozás nagysága a $T_1$ és $T_2$ területek előjeles összegével egyezik meg. A $T_1$ területet, mivel a $t$-tengely fölött van, pozitív, a $T_2$ területet pedig, mivel a $t$-tengely alatt van, negatív előjellel kell figyelembe venni:

$$\Delta v = T_1 - T_2 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

Mivel $v(t_1 = 0) = 2\,\text{m/s}$, ezért

$$v(t_2) = v(t_1) + \Delta v = 2 + 1{,}25 = 3{,}25\,\text{m/s}.$$

*A feladat megoldása integrálással lényegesen egyszerűbb és gyorsabb:*




3.1. ábra. *Magyarázó ábra a 3.4. feladathoz*

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = \int_0^{2,5} (3-2t)dt = [3t - t^2]_0^{2,5} =$$

$$= (3 \cdot 2{,}5 - 2{,}5^2) - (3 \cdot 0 - 0^2) = 1{,}25.$$

Mivel $v(t_1 = 0) = 2\,\mathrm{m/s}$, ezért

$$v(t_2) = v(t_1) + \Delta v = 2 + 1{,}25 = 3{,}25\,\text{m/s}.$$

**3.5. feladat:** Egy test gyorsulás-idő függvénye:

$$a(t) = 3{,}7sin(2t) + 4{,}2cos(t).$$

Tudjuk, hogy a test $t_1 = 2\,\text{s}$-kor $6\,\text{m/s}$ sebességgel mozgott. Mekkora a sebessége $t_2 = 10\,\text{s}$-kor?

**Megoldás:** A sebességváltozás nagysága a gyorsulás-idő függvény görbéje és a $t$-tengely által közbezárt terület nagyságával egyezik meg. Az előző feladatban arra láthattunk példát, amikor a függvénygörbe alatti terület meghatározása egyszerű geometriai alakzatok (téglalapok, háromszögek, trapézok, stb.) területének meghatározására volt visszavezethető. Ilyenkor alkalmazható a grafikus megoldás.

Általános esetben azonban a grafikus megoldás egyrészt túl bonyolult, másrészt csak pontatlan eredményt ad, ezért integrálással határozzuk meg a görbe alatti terület, egyben a sebességváltozás nagyságát:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = \int_2^{10} (3{,}7sin(2t) + 4{,}2cos(t))dt = \left[-\frac{3{,}7}{2}\cos(2t) + 4{,}2\sin(t)\right]_2^{10} =$$

$$= \left(-\frac{3{,}7}{2}\cos(20) + 4{,}2\sin(10)\right) - \left(-\frac{3{,}7}{2}\cos(4) + 4{,}2\sin(2)\right) = -8{,}068.$$

Mivel $v(t_1 = 0) = 6\,\text{m/s}$, ezért

$$v(t_2) = v(t_1) + \Delta v = 6 - 8{,}068 = -2{,}068\,\text{m/s}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Egy test mozgása a következő hely-idő függvénnyel írható le:

$$x(t) = 5 \cdot \frac{e^{-0,12t}}{sin(3,72t + 2,23)}.$$

Határozzuk meg a pillanatnyi sebességét a $t = 5,5\,\text{s}$ időpillanatban 3 tizedesjegy pontossággal!
A test pillanatnyi sebessége (m/s): Megold.

2. Egy test sebességének időbeli változása a következő függvénnyel írható le:

$$v(t) = 3 \cdot ln(6,4t) \cdot sin(2t + 6,72).$$

Határozzuk meg a test gyorsulását a $t = 3,2\,\text{s}$ időpillanatban egy tizedesjegy pontossággal!
A test pillanatnyi gyorsulása (m/s$^2$): Megold.

3. Egy test egyenes mentén mozog. Gyorsulás-idő függvénye SI-egységekben:

$$a(t) = 3t^2 + 5,6t - 2,7.$$

Számítsuk ki a sebességváltozás nagyságát $t_1 = 3\,\text{s}$ és $t_2 = 4\,\text{s}$ között egy tizedesjegy pontossággal!
A sebességváltozás nagysága (m/s): Megold.

# 2. LECKE

## Egyenes vonalú egyenletes és egyenletesen gyorsuló mozgás

## 4. Egyenes vonalú egyenletes és egyenletesen gyorsuló mozgás

**4.1. feladat:** Egy teherautó építőanyagot szállít egyik városból a másikba. Oda $50$, vissza pedig $70\,\mathrm{km/h}$ sebességgel halad. A odautat 45 perccel hosszabb idő alatt teszi meg, mint a visszautat. Hány kilométerre van egymástól a két város?

**Megoldás:** Jelöljük $t$-vel a visszaút időtartamát. Ekkor a következőképpen írhatjuk fel az odaút és a visszaút hosszát:

$$s_{oda} = 50(t + 0{,}75),$$
$$s_{vissza} = 70t.$$

Mivel $s_{oda} = s_{vissza}$, ezért

$$50(t + 0{,}75) = 70t.$$

Innen kifejezhető $t$:

$$t = 1{,}875\,\mathrm{h}.$$

A két város távolsága tehát:

$$d = s_{vissza} = 70t = 70 \cdot 1{,}875 = 131{,}25\,\mathrm{km}.$$

**4.2. feladat:** Egy vonat $1{,}2\,\text{km}$ távolságon egyenletesen fékez $70\,\text{km/h}$ sebességről $40\,\text{km/h}$ sebességre. Mekkora a lassulása és mennyi időt vett igénybe a lassítás?

**Megoldás:** Induljunk ki az egyenletesen változó mozgás kinematikai alapegyenleteiből:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2,$$
$$v(t) = v_0 + at.$$

Mivel a vonat kezdősebessége $70\,\text{km/h}$, azaz $\frac{70}{3{,}6}$ m/s, továbbá $1{,}2\,\text{km}(1200\,\text{m})$ távolságot tesz meg:

$$x_0 + 1200 = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2,$$

$$1200 = \frac{70}{3{,}6}t + \frac{a}{2}t^2.$$

Helyettesítsük be $v(t)$-be is az ismert adatokat:

$$\frac{40}{3{,}6} = \frac{70}{3{,}6} + at,$$

$$-\frac{30}{3{,}6} = at.$$

Így az alábbi kétismeretlenes egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$1200 = \frac{70}{3{,}6}t + \frac{a}{2}t^2,$$

$$-\frac{30}{3{,}6} = at.$$

A második egyenletből helyettesítsük be $at$-t az első egyenletbe:

$$1200 = \frac{70}{3{,}6}t - \frac{15}{3{,}6}t,$$

$$1200 \cdot 3{,}6 = 55t,$$

$$t = 78{,}55\,\text{s}.$$

Helyettesítsük vissza $t$-t a második egyenletbe és határozzuk meg a lassulás értékét:

$$-\frac{30}{3{,}6} = a \cdot 78{,}55,$$

$$a = -0{,}106\,\text{m/s}^2.$$

**4.3. feladat:** Állandó gyorsulással haladó test pályájának egy $10\,\mathrm{m}$ hosszú szakaszát $1{,}06\,\mathrm{s}$ alatt, az ezt követő, ugyancsak $10\,\mathrm{m}$ hosszú szakaszt pedig $2{,}20\,\mathrm{s}$ alatt futja be. Számítsuk ki a test gyorsulását! Mekkora a sebessége az első szakasz kezdőpontjában?

**Megoldás:** Az állandó gyorsulással haladó test kitérés idő függvénye:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2.$$

Mivel az állandó gyorsulással haladó test pályájának egy $10\,\mathrm{m}$ hosszú szakaszát $1{,}06\,\mathrm{s}$ alatt teszi meg, mozgására felírható:

$$x_0 + 10 = x_0 + v_0 \cdot 1{,}06 + \frac{a}{2} \cdot 1{,}06^2,$$

$$10 = v_0 \cdot 1{,}06 + \frac{a}{2} \cdot 1{,}06^2.$$

Értelemszerűen, a pályájának a feladatban szereplő $10 + 10\,\mathrm{m}$ hosszú szakaszát pedig $1{,}06 + 2{,}20\,\mathrm{s}$ alatt teszi meg, ezért:

$$x_0 + 20 = x_0 + v_0 \cdot (1{,}06 + 2{,}20) + \frac{a}{2} \cdot (1{,}06 + 2{,}20)^2,$$

$$20 = v_0 \cdot 3{,}26 + \frac{a}{2} \cdot 3{,}26^2.$$

Így tehát az alábbi kétismeretlenes egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$10 = v_0 \cdot 1{,}06 + \frac{a}{2} \cdot 1{,}06^2,$$

$$20 = v_0 \cdot 3{,}26 + \frac{a}{2} \cdot 3{,}26^2.$$

A megoldások:

$$v_0 = 11{,}02\,\mathrm{m/s},$$
$$a = -2{,}999\,\mathrm{m/s^2}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Egy gépkocsi az $50\,\text{km/h}$ sebességkorlátozás végét jelző táblától kezdve $0{,}2\,\text{m/s}^2$ állandó gyorsulással gyorsít, amíg a sebessége eléri az újabb, $80\,\text{km/h}$-s sebességkorlátozás megengedte határértéket. Számítsuk ki a két sebességkorlátozás között megtett utat!
   A megtett út (m): [ ] Megold. [ ]

2. Két kerékpáros egyszerre indul el egymás felé az egymástól $150\,\text{m}$-re lévő $A$ és $B$ pontból $v_1 = 14{,}4\,\text{km/h}$ és $v_2 = 21{,}6\,\text{km/h}$ kezdősebességgel és azonos $0{,}5\,\text{m/s}^2$ gyorsulással. Hány másodperc múlva találkoznak?
   A kerékpárosok találkozásáig eltelt idő (s): [ ] Megold. [ ]

3. Két villamosmegálló között $760\,\text{m}$ a távolság. A villamos a megállóból egyenletesen gyorsul, azután $27\,\text{km/h}$ sebességgel egyenletesen mozog, majd állandó lassulással áll meg a következő megállóban. A gyorsítás ideje $30\,\text{s}$, a fékezésé pedig $20\,\text{s}$. Hány másodperc alatt ér a villamos az egyik megállóból a másikba?
   A két villamos megálló közötti menetidő (s): [ ] Megold. [ ]

# 3. LECKE

## Szabadesés és függőleges hajítás

## 5. Szabadesés és függőleges hajítás

**5.1. feladat:** Milyen magasról esett szabadon a test, ha az utolsó másodpercben egész útjának a nyolcadrészét tette meg?

**Megoldás:** A feladat képlet formájában az alábbi módon írható fel:

$$h(t) - h(t-1) = \frac{h(t)}{8}.$$

Szabadesés során:

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

Behelyettesítés után:

$$\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-1)^2 = \frac{1}{8}\frac{1}{2}gt^2.$$

$g/2$-vel egyszerűsítve és az egyenlet mindkét oldalát $8$-cal megszorozva:

$$8t^2 - 8(t-1)^2 = t^2.$$

A fenti másodfokú egyenletnek az alábbi két valós gyöke van: $t_1 = 15{,}483\,\mathrm{s}$ és $t_2 = 0{,}517\,\mathrm{s}$, ezért a feladatnak is két megoldása van.

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 15{,}483^2 = 1176\,\mathrm{m},$$

$$h_2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}517^2 = 1{,}311\,\mathrm{m}.$$

---

**5.2. feladat:** Egy $80\,\mathrm{m}$ magas kilátó tetejéről leejtenek egy követ, majd $1\,\mathrm{s}$-mal később egy másik követ hajítanak utána, függőlegesen lefelé. Mekkora kezdősebességgel kell a második követ ledobni, hogy mindkét kő ugyanabban a pillanatban érjen talajt?

**Megoldás:** Az egyik test mozgása szabadesés, a másiké függőleges hajítás. Ha a koordinátarendszerünk kezdőpontját a kövek elejtésének, illetve ledobásának helyén rögzítjük, koordinátarendszerünk függőleges tengelyét pedig lefelé irányítjuk, akkor a két test mozgása az alábbi összefüggésekkel írható le:

$$z_1(t) = \frac{1}{2} g t^2,$$

$$z_2(t) = v_0(t-1) + \frac{1}{2} g (t-1)^2.$$

Mivel a földet érésig megtett utak egyenlőek és az elhajított test 1 másodperccel kevesebb ideig mozog:

$$\frac{1}{2}gt^2 = v_0(t-1) + \frac{1}{2}g(t-1)^2.$$

A fenti egyenletből $v_0$-t akkor tudjuk kifejezni, ha a gravitációs gyorsulás mellett ismert a $t$ esési idő is.
A $80\ m$ magasról szabadon eső kő esésének ideje:

$$80 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81t^2,$$

$$t = 4{,}039\,\text{s}.$$

Behelyettesítve $g$ és $t$ értékét:

$$80 = v_0 \cdot 3{,}039 + \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}039^2,$$

$$v_0 = 11{,}42\,\text{m/s}.$$

---

**5.3. feladat:** Egy hőlégballonból, amely $4\,\text{m/s}$ sebességgel emelkedik, kiejtenek egy nehezéket, amely $20\,\text{s}$ alatt ér le a talajra. Milyen magasságban esett ki a nehezék? A légellenállástól eltekinthetünk.

**Megoldás:** A nehezék mozgása egy $4\,\text{m/s}$ kezdősebességű függőleges hajításnak tekinthető. Ha a koordinátarendszerünk kezdőpontját abba a pontba helyezzük, ahol a nehezék talajt ér, a függőleges koordinátatengelyt pedig fölfelé irányítjuk, akkor mozgásának a kinematikai egyenlete a következő:

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Mivel $z(t = 20) = 0$, ezért

$$0 = z_0 + 4 \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 20^2.$$

Tehát

$$z_0 = 1882\,\mathrm{m}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. A Sástói kilátó $53\,\text{m}$ magas. Építése közben az egyik munkás a kilátó tetejéről leejtett egy villáskulcsot. Mekkora sebességgel csapódott a szerszám a talajba?
   A villáskulcs sebessége a talajba csapódáskor (m/s): Megold.
2. Egy követ $20\,\text{m/s}$ sebességgel felfelé hajítanak. $2\,\text{s}$ elteltével egy másik követ is feldobnak ugyanezzel a sebességgel és ugyancsak függőlegesen felfelé. A talajszint felett milyen magasságban találkozik a két kő?
   A kövek találkozási helyének talajszint feletti magassága (m):
   Megold.
3. Mekkora sebességgel kell egy testet $40\,\text{m}$ magasságból függőlegesen indítani ahhoz, hogy a szabadesés idejéhez képest $1\,\text{s}$-mal hamarabb érjen talajt?
   A test kezdősebessége (m/s): Megold.

# 4. LECKE

## Vízszintes és ferde hajítás

## 6. Vízszintes és ferde hajítás

**6.1. feladat:** A talajtól mérve $400\,\mathrm{m}$ magasságból szabadon ejtünk egy testet. Ezzel egyidőben ugyanabból a pontból vízszintesen is elhajítunk egy másikat. $5\,\mathrm{s}$ múlva a két test közötti távolság $40\,\mathrm{m}$. Mekkora lesz a talajra éréskor a két test közötti távolság? Mekkora a vízszintesen elhajított test sebességének nagysága és iránya a leérés pillanatában?

**Megoldás:** A vízszintesen elhajított test függőleges síkú parabola pályán mozog. Mozgása során vízszintes irányban és függőleges irányban is távolodik az elhajítási ponttól. Vízszintes irányú sebessége, mivel vízszintes irányban semmiféle erő nem hat rá, mozgása során változatlan marad. Azt szoktuk mondani, hogy a vízszintesen elhajított test vízszintes irányban egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Függőleges irányú mozgása pedig álló helyzetből induló szabad mozgás, azaz szabadesés.

A fenti megállapításokból következik, hogy a szabadon eső, és vele egyidőben ugyanabból a pontból vízszintesen elhajított test ugyanolyan ütemben esik a föld felszíne felé. A két testet összekötő szakasz a mozgásuk minden pillanatában vízszintes lesz. Ebből következik azonban, hogy a vízszintesen elhajított test vízszintes irányú sebessége:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{40\ m}{5\ s} = 8\,\mathrm{m/s}.$$

Mekkora lesz a talajra éréskor a két test közötti távolság? Előbb meghatároztuk, hogy a vízszintes irányú távolodásuk sebessége $8\,\mathrm{m/s}$. Most határozzuk meg, hogy mennyi idő telik el a két test földet éréséig, hiszen ennyi ideig távolodhatnak vízszintes irányban is.

Azt kell kiszámolnunk, hogy egy $400\,\mathrm{m}$ magasságból szabadon eső test mennyi idő alatt éri el a talajt. A szabadon eső test által megtett utat a következőképpen számíthatjuk ki:

$$h = \frac{1}{2}gt^2.$$

Ebből:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 400}{9{,}81}} = 9{,}03\,\text{s}.$$

A két test közötti távolság a talajra éréskor:

$$d = v_x \cdot t = 8 \cdot 9{,}03 = 72{,}24\,\text{m}.$$

A test vízszintes irányú sebessége a földet érés pillanatában is $v_x = 8\,\text{m/s}$. Számítsuk ki, hogy mekkora függőleges irányú sebességre tesz szert a szabadon eső test $t = 9{,}03\,\text{s}$ idejű esése után:

$$v_y = gt = 9{,}81 \cdot 9{,}03 = 88{,}58\,\text{m/s}.$$

A test sebességének nagysága és iránya a földet éréskor:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{8^2 + 88{,}58^2} = 88{,}94\,\text{m/s},$$

$$tg\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{88{,}58}{8} = 11{,}07,$$

$$\varphi = 84{,}84^0.$$

**6.2. feladat:** Mekkora sebességgel és milyen szög alatt kell egy tárgyat elhajítani a földről, hogy $d = 100\,\text{m}$ messze repüljön és az eldobás szintjétől $h = 30\,\text{m}$ magasra emelkedjék?

**Megoldás:** A ferdén elhajított tárgy függőleges irányú mozgása függőleges hajításnak, vízszintes irányú mozgása pedig egyenes vonalú egyenletes mozgásnak tekinthető.

Függőleges irányú mozgás az alábbi mozgásegyenletekkel írható le:

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2,$$

$$v_y(t) = v_{0y} - gt.$$

A második összefüggésből meghatározhatjuk az emelkedés időtartamát, hiszen a tárgy addig emelkedik, amíg a függőleges irányú sebessége, $v_y(t)$ nullára nem csökken:

$$v_y(t) = v_{0y} - gt_{em} = 0.$$

Innen:

$$t_{em} = \frac{v_{0y}}{g}.$$

Ha az első egyenletbe behelyettesítjük $t_{em}$-et, akkor $y(t)$-re az emelkedési magasságot, tehát $h$-t kell kapjuk:

$$h = v_{0y} \cdot \frac{v_{0y}}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$

Ebből a függőleges irányú kezdősebesség:

$$v_{0y} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 30} = 24{,}26\,\text{m/s}.$$

Mivel a tárgy vízszintes irányú mozgása egyenletes mozgás, felírható az alábbi kapcsolat a vízszintes irányú sebesség, a vízszintes irányú elmozdulás és a hajítás időtartama között:

$$v_{0x} = \frac{d}{t_h}.$$

Megjegyzés: Nem túl nehéz belátni, hogy függőleges és ferde hajításnál a hajítás időtartama kétszerese az emelkedés időtartamának. A hajítás időtartama alatt a tárgy az elhajítási ponton átmenő vizszintes síkba visszatér, azaz $y(t) = 0$ lesz:

$$0 = v_{0y} t_h - \frac{g}{2} t_h^2.$$

Innen:

$$t_h = \frac{2v_{0y}}{g} = 2t_{em}.$$

Mivel $t_h = 2t_{em}$, ezért

$$t_h = 2 \cdot t_{em} = 2 \cdot \frac{v_{0y}}{g} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{\frac{8h}{g}}.$$

Helyettesítsük vissza $t_h$-t $v_{0x}$-be:

$$v_{0x} = \frac{d}{\sqrt{\frac{8h}{g}}} = d\sqrt{\frac{g}{8h}},$$

$$v_{0x} = 100\sqrt{\frac{9{,}81}{8 \cdot 30}} = 20{,}22\,\text{m/s}.$$

Végül az elhajított tárgy kezdősebessége és az elhajítás szöge:

$$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{20{,}22^2 + 24{,}26^2} = 31{,}58\,\text{m/s},$$

$$tg\varphi = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{24{,}26}{20{,}22} = 1{,}20,$$

$$\varphi = 50{,}19^\circ.$$

---

**6.3. feladat:** Egy követ $v_0 = 25\,\text{m/s}$ kezdősebességgel, a vízszinteshez képest $\alpha = 30^0$-os szögben hajít el egy ember, aki egy olyan hegy tetején áll, amelynek a lejtési szöge $\varphi = 20^0$. Az elhajítás után mennyi idővel érkezik a kő a lejtőre?

**Megoldás:** Legyen koordinátarendszerünk kezdőpontja az elhajítás helye. Ebben a koordinátarendszerben a kő vízszintes és függőleges irányú mozgását az alábbi mozgásegyenletek írják le:

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2,$$

$$x(t) = v_{0x}t.$$

Ha $x(t)$-ből kifejezzük $t$-t és visszahelyettesítjük $y(t)$-be megkapjuk az elhajított kő pályaegyenletét:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2.$$

Mivel $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ és $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, ezért

$$y = \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha}x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2,$$

$$y = tg\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2,$$

$$y = tg30^0 \cdot x - \frac{9{,}81}{2 \cdot 25^2 \cos^2 30^0}x^2,$$

$$y = 0{,}577x - 0{,}010x^2.$$

Ha ezt a függvényt $x \geqq 0$ értékekre a koordinátarendszerünkben ábrázoljuk egy parabolaívet kapunk, azoknak a pontoknak a halmazát, amelyeket az elhajított kő a mozgása során bejár. Értelemszerűen ez a parabolaív csak addig a pontig írja le a kő pályáját, amíg az el nem éri a lejtőt. Ezt a $P(x_p; y_p)$ pontot kell meghatároznunk.

$P$ egyszerre van rajta a kő pályáját meghatározó parabolaíven és a lejtő síkjának és az $x - y$ síknak a metszésvonalán. Ez a metszésvonal egy egyenes, amely átmegy koordinátarendszerünk kezdőpontján és $\varphi = 20^0$-os szöget zár be a vízszintessel. Ennek az egyenesnek a pontjai az alábbi egyenlettel írhatók fel koordinátarendszerünkben:

$$y = tg340^0 \cdot x \qquad \text{azaz} \qquad y = -0{,}364x.$$

Mivel tehát $P$ egyszerre van rajta a parabolaíven és a lejtőn, az $x_p$ és $y_p$ koordinátáknak egyszerre kell kielégíteniük az alábbi két egyenletet:

$$y_p = 0{,}577x_p - 0{,}010x_p^2,$$

$$y_p = -0{,}364x_p.$$

Az egyenletek bal oldalának egyenlőségéből következik a jobb oldalak egyenlősége:

$$-0{,}364x_p = 0{,}577x_p - 0{,}010x_p^2,$$

$$0{,}010x_p^2 = 0{,}941x_p.$$

Innen

$$x_p = 94{,}1\,\text{m},$$

$$y_p = -34{,}252\,\text{m}.$$

Most már választ adhatunk a kérdésre, hogy az elhajítás után mennyi idővel érkezik a kő a lejtőre. Tudjuk ugyanis, hogy vízszintes irányban $\Delta x = 94{,}1$ m távolságot tesz meg $v_x = v_0 \cos\alpha = 25 \cos 30^0 = 21{,}651$ m/s sebességgel, ezért

$$t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{94{,}1}{21{,}651} = 4{,}346\,\text{s}.$$

## Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Milyen messze repül a lejtőről $10$ m/s kezdősebességgel vízszintesen elhajított test, ha a talaj a hajítás irányában $\alpha = 30^0$-kal lejt? (Az elhajítási és a földet érési pont távolságát keressük.)
   Az elhajított test repülési távolsága (m): Megold.
2. Határozzuk meg a $12$ m/s kezdősebességgel $30^0$-os szögben elhajított test elmozdulását az elhajítás után 3 másodperccel.
   Az elmozdulás nagysága (m): Megold.
3. Földön fekvő locsolócső végét a vízszinteshez képest $40^0$-os szögben tartjuk ferdén felfelé. A csőből kiáramló víz sebessége $20$ m/s. Milyen magasan tudjuk lelocsolni a $8$ m távolságban lévő falat?
   A keresett magasság (m): Megold.

# 5. LECKE

## Egyenletes és egyenletesen gyorsuló körmozgás

## 7. Egyenletes és egyenletesen gyorsuló körmozgás

**7.1. feladat:** Három és négy óra között mikor, azaz három óra után hány perccel fedik egymást az óra mutatói?

**Megoldás:** Az óra mutatóinak végpontja egyenletes körmozgást végez. Egyenletes körmozgás esetén a szögelfordulás időbeli változását a következő függvénnyel írhatjuk le:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t.$$

Írjuk fel a nagymutató szögelfordulás-idő függvényét. Mutasson a vonatkoztatási irány, amihez a mutatók szögelfordulását mérjük, a mutatók forgástengelyéből függőlegesen fölfelé, 12 óra irányába. Mérjük az időt attól a pillanattól, amikor óránk három órát mutat, azaz a nagymutató a vonatkoztatási irányba, a kismutató pedig ahhoz képest $90^0$-kal elfordulva, 3 óra irányába mutat. Ekkor $\varphi_N(t=0) = 0$, következésképpen $\varphi_{0N} = 0$, ezért:

$$\varphi_N(t) = \omega_N t.$$

Határozzuk meg $\omega_N$-t, a nagymutató szögsebességét. Mivel a nagymutató 1 óra,azaz 3600 másodperc alatt $360^0$-ot tesz meg:

$$\omega_N = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{3600} = \frac{\pi}{1800}.$$

Tehát a nagymutató szögelfordulás-idő függvénye:

$$\varphi_N(t) = \frac{\pi}{1800}t.$$

Hasonló módon írhatjuk fel a kismutató szögelfordulás-idő függvényét, $\varphi_K$-t is. Mivel $t = 0$-kor a kismutató 3 óra irányában áll, ezért $\varphi_{0K} = \pi/2$. Mivel a kismutató 12 óra alatt tesz meg egy teljes kört, ezért:

$$\omega_K = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{12 \cdot 3600} = \frac{\pi}{12 \cdot 1800}.$$

Tehát a kismutató szögelfordulás-idő függvénye:

$$\varphi_K(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12 \cdot 1800}t.$$

Keressük azt a pillanatot, amikor a mutatók fedik egymást, azaz $\varphi_K(t) = \varphi_N(t)$. Ekkor:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12 \cdot 1800}t = \frac{\pi}{1800}t.$$

$\pi$-vel egyszerűsíthetünk, majd rendezés után a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{2} = \frac{11}{12 \cdot 1800}t.$$

Az egyenlet megoldása:

$$t = \frac{6 \cdot 1800}{11} = 981{,}8\ s = 16{,}4\,\text{min}.$$

**7.2. feladat:** Egy test egy 10 m sugarú körön álló helyzetből indulva $2\,\mathrm{m/s^2}$ érintő irányú gyorsulással egyenletesen gyorsuló mozgást végez. Mekkora a test sebessége, gyorsulása, szögsebessége és szöggyorsulása 10 s-mal az indulás után? Mikor volt egyenlő nagyságú az érintő irányú és a centripetális gyorsulása?

**Megoldás:** Az egyenletesen gyorsuló körmozgásnál állandóan változik a test kerületi sebessége. A sebesség nagyságának változását az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgásnál megismert összefüggéssel számolhatjuk ki:

$$v(t) = v_0 + a_e t.$$

Mivel a test álló helyzetből indul:

$$v(t = 10\ s) = a_e t = 2 \cdot 10 = 20\,\mathrm{m/s}.$$

A test gyorsulásának két összetevője van. Egyik a $2\,\mathrm{m/s^2}$. nagyságú érintő irányú, úgynevezett tangenciális gyorsulás, a másik pedig a sugárirányú és a körpálya közepe felé mutató centripetális gyorsulás. Ez utóbbit az alábbiak szerint határozhatjuk meg:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{20^2}{10} = 40\,\mathrm{m/s^2}.$$

Mivel az érintő irányú és a centripetális gyorsulás egymásra merőleges, az eredő gyorsulás:

$$a = \sqrt{a_e^2 + a_{cp}^2} = \sqrt{2^2 + 40^2} = 40{,}05\,\mathrm{m/s^2}.$$

A szögsebesség és a szöggyorsulás a kerületi sebességből határozható meg:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{20}{10} = 2\ 1/\mathrm{s},$$

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2}{10} = 0{,}2\ 1/s^2.$$

Végül számítsuk ki, hogy mikor volt egyenlő nagyságú a test érintő irányú és a centripetális gyorsulása?

$$a_{cp} = a_e,$$

$$\frac{v^2}{R} = a_e,$$

$$\frac{(a_e t)^2}{R} = a_e,$$

Ebből:

$$t = \sqrt{\frac{R}{a_e}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5} = 2{,}236\,\mathrm{s}.$$

**7.3. feladat:** Egy egyenes henger alkotójának hossza $1{,}5\,\text{m}$. A hengernek papír alaplapjai vannak és tengelye körül $2{,}5\,1/\text{s}$ fordulatszámmal egyenletesen forog. A tengellyel párhuzamos irányban egyenletesen haladó lövedék a papírlapokat egy-egy pontban átfúrja. Ezekhez a pontokhoz tartozó sugarak $30^0$-os szöget zárnak be. Mekkora a lövedék sebessége?

**Megoldás:** Amíg a lövedék a henger alaplapjai közötti $1{,}5\,\text{m}$ távolságot megteszi, a henger $30^0$-os szöggel fordul el a tengelye körül. Számítsuk ki, hogy mennyi idő telik el ezalatt. Mivel a henger fordulatszáma $2{,}5\,1/\text{s}$, ezért másodpercenként $2{,}5 \cdot 2\pi$ szöggel fordul el. Ebből kiszámolható a $30^0$-os szögelfordulás időtartama:

$$\Delta t = \frac{\frac{\pi}{6}}{2{,}5 \cdot 2\pi} = \frac{1}{30}\,\text{s}.$$

Tehát a lövedék sebessége:

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{1{,}5}{\frac{1}{30}} = 45\,\text{m/s}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. 12 óra után hány perccel lesz először merőleges egymásra az óra kis és nagymutatója?
   A keresett időtartam (perc): Megold.
2. Motorkerékpár álló helyzetből indulva egyenletesen növekvő sebességgel $20\,\mathrm{m}$ sugarú vízszintes körpályán halad. Érintő irányú gyorsulásának nagysága $2\,\mathrm{m/s^2}$. Mennyi idő múlva lesz a gyorsulás nagysága kétszerese a kezdőértéknek?
   A keresett időtartam (s): Megold.
3. Egy test körpályán egyenletesen lassulva mozog. Félkörnyi út megtétele során sebességének 2/3-át elveszíti. A körpálya hány százalékát fogja összesen befutni a megállásig?
   A körpálya kerületének százaléka (%): Megold.

# 6. LECKE

## A dinamika alapjai, Newton törvények

## 8. Newton I. törvénye

**8.1. feladat:** Az $50$ km/h állandó sebességgel haladó autóbuszon egy utas kapaszkodás nélkül utazik. Mekkora sebességgel mozog a talajhoz képest, ha az autóbusz hirtelen fékez?

**Megoldás:** Newton I. törvénye szerint az utas mozgásállapota nem változik, azaz $50$ km/h sebességgel mozog tovább.

---

**8.2. feladat:** Egy $90$ km/h állandó sebességgel, egyenes vonalban haladó motorcsónak orrán egy kaszkadőr egyensúlyoz. A csónak hirtelen balra kanyarodik, $50$ m sugarú körívet leírva. Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódik a vízbe, ha a csónak orra a víz felszínétől $2$ m-re van?

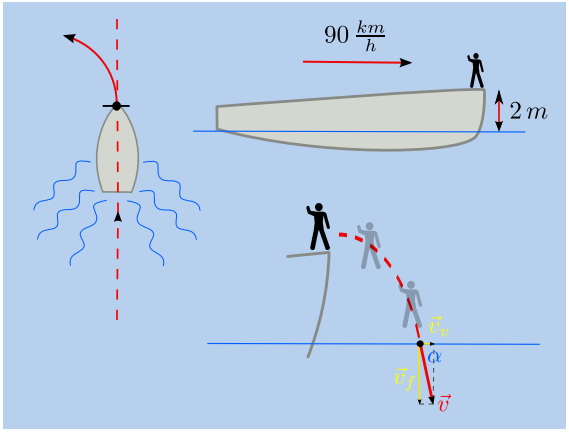
**Megoldás:** Newton I. törvénye alapján a kaszkadőr az eredeti irányban halad tovább $90$ km/h sebességgel. Miután elhagyta a csónakot, mozgása vízszintes hajításnak megfelelően tárgyalható. A kaszkadőr vízszintes irányban egyenletes mozgást végez $v_v = 90\,\text{km/h} = 25\,\text{m/s}$ sebességgel. Függőleges irányú mozgása kezdősebesség nélküli szabadesés. $2$ m út megtétele után a sebességét a következő egyenletek segítségével határozhatjuk meg:

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}}.$$

$$v_f = g \cdot t = g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} = \sqrt{2 \cdot s \cdot g} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 9{,}81} = 6{,}26\,\text{m/s}.$$

A kaszkadőr sebességének nagyságát a Pitagorasz-tétel segítségével kapjuk meg:

$$v = \sqrt{v_v^2 + v_f^2} = \sqrt{(25)^2 + (6{,}26)^2} = 25{,}77\,\text{m/s}.$$




8.1. ábra. *Magyarázó ábra a 8-2. feladathoz.*

Megjegyzés: A kaszkadőr eredő sebessége a becsapódás pillanatában a vízszintes irányú, illetve a függőleges irányú sebességvektorok vektoriális összege (mozgások függetlenségének elve alapján). A paralelogramma módszer szerint ennek nagysága esetünkben egy téglalap átlója lesz.

A sebesség irányát szögfüggvénnyel határozhatjuk meg:

$$\tan \alpha = \frac{6{,}26}{25} \Rightarrow \alpha = 14{,}07°.$$

## 9. Newton II. törvénye

**9.1. feladat:** A Trabant személygépkocsi $0\,\text{km/h}$-ról $100\,\text{km/h}$-ra $29$ másodperc alatt egyenletesen gyorsul. Mekkora erő gyorsítja, ha a kocsi tömege $350\,\text{kg}$?

**Megoldás:** A Trabant gyorsulása:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{27{,}78}{29} = 0{,}958\,\text{m/s}^2.$$

Az erő Newton II. törvénye alapján:

$$F = m \cdot a = 350 \cdot 0{,}958 = 335{,}3\,\text{N}.$$

**9.2. feladat:** $160\,\text{kg}$ tömegű motorkerékpárt $5$ s-ig $700\,\text{N}$ nagyságú erőhatás gyorsít. Mekkora sebességre tesz szert a motor?

**Megoldás:** A sebesség változás nagysága a gyorsulás definíciójából adható meg:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = a \cdot \Delta t.$$

A motorkerékpár gyorsulása:

$$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{700}{160} = 4{,}375\,\text{m/s}^2.$$

A sebesség változás tehát:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t = 4{,}375 \cdot 5 = 21{,}875\,\text{m/s}.$$

**9.3. feladat:** Egy 2 g tömegű lövedék 700 m/s sebességgel mozog. Mekkora a fékezőerő, ha a céltárgyba való becsapódás után 10 cm-rel áll meg?

**Megoldás:** A fékezőerő nagysága Newton II. törvényéből határozható meg:

$$F_f = m \cdot a.$$

A gyorsulás ismeretében az erő nagysága tehát számolható. A gyorsulás a négyzetes úttörvényből kapható meg:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Megjegyzés: Mivel a lövedék egyenletesen lassuló mozgást végez, ezért a gyorsulása negatív.

A lassuló mozgás idejét a lövedék megállásának pillanatában számított sebességből határozhatjuk meg. A sebesség nagysága ekkor természetesen nulla:

$$v_{pill} = v_0 - a \cdot t, \qquad \text{ezért} \qquad 0 = v_0 - a \cdot t \Rightarrow t = \frac{v_0}{a}.$$

Írjuk be ezt a négyzetes úttörvénybe:

$$s = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{v_0}{a}\right)^2,$$

$$s = \frac{v_0^2}{a} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}.$$

Ebből a gyorsulás nagysága:

$$a = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{s} = \frac{1}{2}\frac{700^2}{0{,}1} = 2{,}45 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s^2}.$$

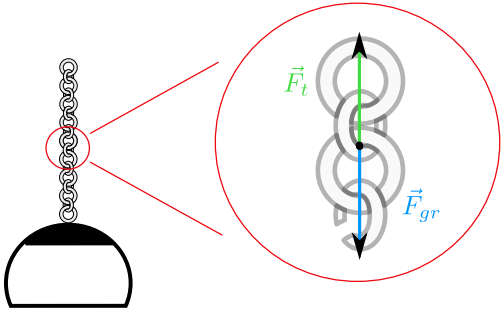
A keresett erő nagysága tehát:

$$F_f = m \cdot a = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}45 \cdot 10^6 = 4900\ \mathrm{N}.$$

## 10. Newton III. törvénye

**10.1. feladat:** 5 kg tömegű csillárt rövid lánccal a mennyezetre erősítve mekkora erő feszíti az egyes láncszemeket?

**Megoldás:** A csillárra ható gravitációs erő nagysága: $F_{gr} = m \cdot g = 5 \cdot 9{,}81 = 49{,}05\,\mathrm{N}$.
Mivel a láncszemek nyugalomban vannak, ezért a láncszemekre ható tartóerő, s ebből adódóan a feszítő erő nagysága is $49{,}05\,\mathrm{N}$.




10.1. ábra. *Magyarázó ábra a 10-1. feladathoz.*

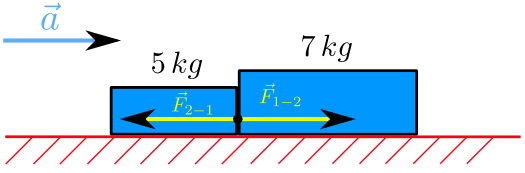
**10.2. feladat:** Egy fiú, akinek súlya $300\,\mathrm{N}$, fürdőszobai mérlegen állva hirtelen felugrik. Eközben a mérleg mutatója $400\,\mathrm{N}$ nagyságú erőt mutat. Határozzuk meg a fiú kezdeti gyorsulását.

**Megoldás:** A fiú a mérlegre $400\,\mathrm{N}$ nagyságú, függőlegesen lefelé mutató erőt gyakorolt. Newton III. törvénye szerint a mérleg által a fiúra kifejtett erő is $400\,\mathrm{N}$ nagyságú, de felfelé mutató erő.
A fiúra ható erők eredője tehát:

$$F_e = 400 - 300 = 100\,\mathrm{N}.$$

Mivel a fiú tömege $m = G/9{,}81 = 300/9{,}81 = 30{,}58\,\mathrm{kg}$, a gyorsulás:

$$a = \frac{F_e}{m} = \frac{100}{30{,}58} = 3{,}27\,\mathrm{m/s^2}.$$




10.2. ábra. *Ábra a 10-3. feladathoz.*

**10.3. feladat:** Az ábra szerint két érintkező hasáb fekszik a vízszintes, súrlódásmentes asztalon. Mekkora erővel hat a $7\,\mathrm{kg}$ tömegű test az $5\,\mathrm{kg}$ tömegűre, ha az $5\,\mathrm{kg}$-os testet úgy toljuk, hogy a rendszer gyorsulása $2\,\mathrm{m/s^2}$?

**Megoldás:** A $7\,\text{kg}$ tömegű testet csak az érintkezésnél fellépő erő gyorsítja. Newton II. törvénye alapján írhatjuk:

$$F_{1-2} = m_2 \cdot a = 7 \cdot 2 = 14\,\text{N}.$$

Ezt az erőt az $5\,\text{kg}$ tömegű test fejti ki a $7\,\text{kg}$ tömegű testre. A feladat az ellenerő nagyságát kérdezi, így a válasz: $F_{2-1} = 14\,\text{N}$.

---

**10.4. feladat:** Egy rakéta hajtóművéből másodpercenként $50\,\text{kg}$ tömegű gáz áramlik ki $4500\,\text{km/h}$ sebességgel. Mekkora a tolóerő nagysága?

**Megoldás:** A rakétát a kiáramló gáz által kifejtett ellenerő gyorsítja. Ennek nagysága:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta(m \cdot v)}{\Delta t} = \frac{50 \cdot 1250}{1} = 62500\,\text{N}.$$

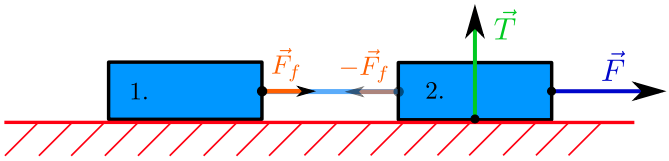
---

## 11. A dinamika alaptörvénye

**11.1. feladat:** Kötélhúzó versenyen az egyik csapat $480\,\text{N}$, a másik $510\,\text{N}$ erővel húzza a kötél két végét. Mekkora gyorsulással mozog a kötélen elhelyezett jelzőszalag, ha a kötél tömege $2\,\text{kg}$?

**Megoldás:** A kötél a nagyobb erő irányába fog gyorsulni. A dinamika alapegyenletét felírva a gyorsulás nagysága meghatározható:

$$F_1 - F_2 = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F_1 - F_2}{m} = \frac{510 - 480}{2} = 15\,\text{m/s}^2.$$




11.1. ábra. *Ábra a 11-2. feladathoz.*

11.2. feladat: Két egyforma, fonállal összekötött test az ábrán látható módon vízszintesen, súrlódásmentes sík talajon mozog. Mekkora a testek gyorsulása, ha $F = T = 2{,}4\,\mathrm{N}$? Mekkora erő feszíti a fonalat?

**Megoldás:** $T$ a talaj által a testre ható tartóerő, melynek nagysága: $T = F_{gr} = m \cdot g$. Ebből a test tömege meghatározható:

$$m = \frac{T}{g} = \frac{2{,}4}{9{,}81} = 0{,}24\,\text{kg}.$$

Az 1. számú testet csak a fonál által kifejtett $F_f$ erő gyorsítja. Ennek nagyságára írhatjuk:

$$F_f = m \cdot a.$$

A 2. számú test esetén a dinamika alapegyenlete alapján a következő összefüggés lesz érvényes:

$$F - F_f = m \cdot a.$$

A két egyenletből a gyorsulás:

$$F - m \cdot a = m \cdot a,$$

$$F = 2 \cdot m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{2 \cdot m} = \frac{2{,}4}{2 \cdot 0{,}24} = 5\,\text{m/s}^2.$$

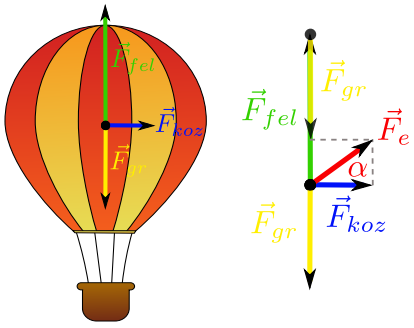
---

**11.3. feladat:** Egy lebegő hőlégballonra függőlegesen felfelé mutató, $6000\,\text{N}$ nagyságú felhajtóerő hat. A kelet felől fújó szél által kifejtett (közegellenállási) erő nagysága $1500\,\text{N}$. Mekkora a hőlégballon gyorsulása, ha a tömege utasokkal együtt $500\,\text{kg}$? Milyen irányban mozog?

**Megoldás:** Az eredő erő:

$$\underline{F}_e = \underline{F}_{fel} + \underline{F}_{koz} + \underline{F}_{gr},$$

tehát az eredő erő az egyes erők vektori eredője.
Az ábra alapján az eredő erő nagysága (Pitagorasz-tétel alapján):




11.2. ábra. *Magyarázó ábra a 11-3. feladathoz.*

$$F_e = \sqrt{(1095)^2 + (1500)^2} = 1857{,}16\,\text{N}.$$

A gyorsulás:

$$a = \frac{F_e}{m} = \frac{1857{,}16}{500} = 3{,}71\,\text{m/s}^2.$$

A mozgás iránya:

$$\tan\alpha = \frac{1095}{1500} \Rightarrow \alpha = 36{,}13°,$$

tehát a vízszintessel $36{,}13°$-os szöget bezárva, keleti irányban mozog.

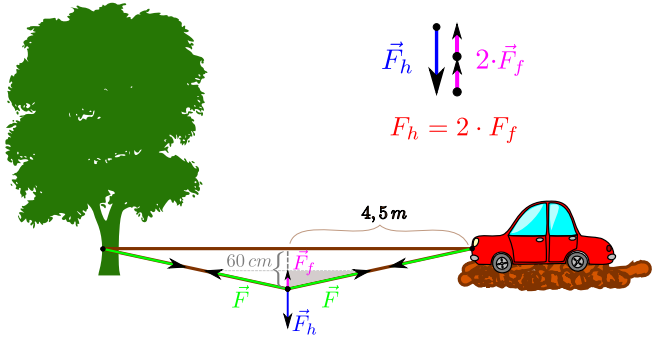
**11.4. feladat:** Egy $9\,\mathrm{m}$-es kötél egyik végét egy fához, másikat egy sárba ragadt gépkocsihoz kötöttünk. A sofőr a kötél közepét $360\,\mathrm{N}$ erővel, $60\,\mathrm{cm}$ távolságban oldalra húzza. Mekkora erőt fejt ki a kötél a gépkocsira?

**Megoldás:** A rendszer egyensúlyban van (nyugalomban van a földhöz képest), ezért a kötél gyorsulása nulla. Ebből következik, hogy a rá ható erők eredője (vektori eredő!) is nulla. Ebből következik:

$$\underline{F}_e = \underline{F}_h + \underline{F} + \underline{F} = 0.$$

A fát és a kocsit összekötő szakaszra merőleges komponenseket figyelembe véve:

$$F_h = 2 \cdot F_f.$$




11.3. ábra. *Magyarázó ábra a 11-4. feladathoz.*

A rajzon látható, hasonló háromszögek alapján írhatjuk:

$$\frac{F_f}{F} = \frac{0{,}6}{\sqrt{4{,}5^2 + 0{,}6^2}} = \frac{0{,}6}{4{,}54}.$$

A két egyenletből adódik:

$$F = F_f \cdot \frac{4{,}54}{0{,}6} = \frac{F_h}{2} \cdot \frac{4{,}54}{0{,}6} = \frac{360}{2} \cdot \frac{4{,}54}{0{,}6} = 1362\,\mathrm{N}.$$

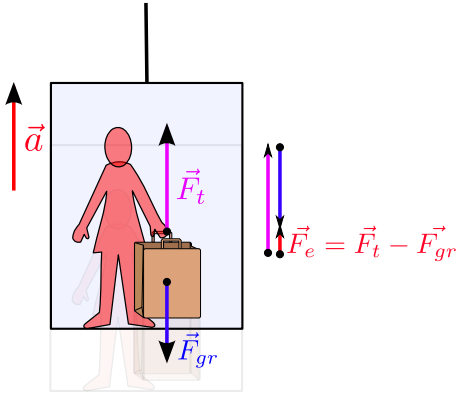
---

**11.5. feladat:** A bevásárlóközpontokban papírtáskába teszik a megvásárolt árut. A táska fülei $51\,\mathrm{N}$-nál nagyobb erőhatás esetén elszakadnak. Mekkora tömegű árut pakolhatunk a táskába anélkül, hogy leszakadnának a fülei, ha a táskával együtt egy felfelé $1\,\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással induló liftbe szállunk a vásárlás után?

**Megoldás:** A lift függőlegesen felfelé gyorsul, ezért a táska is ebbe az irányba mozog, ugyanekkora gyorsulással. A táskára ható eredő erő is ebbe az irányba mutat, és a nagysága:

$$F_e = F_t - F_{gr}.$$

A dinamika alaptörvénye alapján:




11.4. ábra. *Magyarázó ábra a 11-5. feladathoz.*

$$F_e = F_t - F_{gr} = m \cdot a,$$

Átrendezve:

$$F_t = F_{gr} + m \cdot a = m \cdot g + m \cdot a = m \cdot (g + a).$$

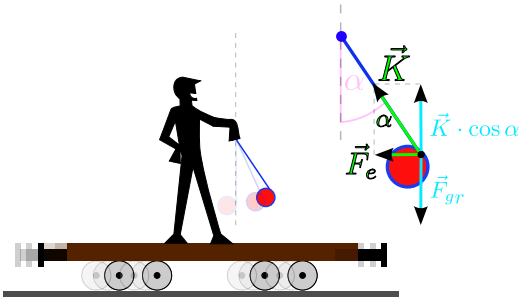
Ebből $m$-et kifejezve:

$$m = \frac{F_t}{g + a} = \frac{51}{1 + 9{,}81} = 4{,}72\,\mathrm{kg}.$$

---

**11.6. feladat:** Egy $15\,\mathrm{t}$ tömegű vasúti szerelvény hirtelen fékez. Egy utas, aki jojó játékot tart a kezében azt tapasztalja, hogy a fékezés következtében a jojó zsinórja a függőlegeshez képest $10°$-os szögben tér ki. Az utas fizikus, így könnyen ki tudja számolni a szerelvényre ható fékezőerőt. Határozzuk ezt meg mi is!

**Megoldás:** A jojóra ható erőket a földhöz rögzített koordináta-rendszerből nézve írjuk fel. Az ábra alapján a szerelvény jobbra mozogva fékez, így a jojó is jobbra haladva, egyenes vonalú, egyenletesen lassuló mozgást végez. Lassuló mozgásnál a testek gyorsulása negatív. Ebben az esetben tehát balra mutat a gyorsulás vektor. Newton II. törvénye szerint a testre ható erők eredője is ebbe az irányba kell, hogy mutasson.




11.5. ábra. *Magyarázó ábra a 11-6. feladathoz.*

Az ábra alapján a vízszintes eredő erőre a következőt írhatjuk:

$$F_e = K \cdot \sin\alpha.$$

A testre ható erők függőleges komponensei nullára összegződnek:

$$F_{gr} = K \cdot \cos\alpha \Rightarrow K = \frac{F_{gr}}{\cos\alpha} = \frac{m \cdot g}{\cos\alpha}.$$

A jojóra ható eredő erő nagysága tehát:

$$F_e = K \cdot \sin\alpha = \frac{m \cdot g}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \tan\alpha.$$

Ebből a jojó gyorsulásának nagysága:

$$a = \frac{F_e}{m} = \frac{m \cdot g \cdot \tan \alpha}{m} = g \cdot \tan \alpha.$$

A fékezőerő tehát:

$$F_f = M \cdot a = M \cdot g \cdot \tan \alpha = 15000 \cdot 9{,}81 \cdot \tan 10^\circ = 25946{,}5\,\mathrm{N}.$$

# Önellenőrzés

1. Egy $15000\,\text{kg}$ tömegű helikopter egy $4500\,\text{kg}$ tömegű teherautót emel $1{,}4\,\text{m/s}^2$-es felfelé irányuló gyorsulással.
   a) Mekkora erőt fejt ki a levegő a helikopter propellerére?
   b) Mekkora erő feszíti a helikoptert és a teherkocsit összekötő kábelt?

   A propellerre ható erő (N): Megold.

   A kábelre ható erő (N): Megold.

2. Egy vízszintes lapon nyugvó $10\,\text{kg}$ tömegű testet $110\,\text{N}$ nagyságú erővel felemelünk. Milyen magasan lesz a test $2\,\text{s}$ múlva? Mekkora lesz ekkor a sebessége?

   A keresett magasság (m): Megold.

   A sebesség (m/s): Megold.

3. Egy lift mennyezetéről lámpa lóg egy kábelen. A lift lefelé haladt, de már fékez $2{,}4\,\text{m/s}^2$ gyorsulással.
   a) Mekkora a lámpa tömege, ha a kábelt feszítő erő $89\,\text{N}$?
   b) Mekkora a kábelt feszítő erő, ha lift ugyanilyen gyorsulással lefelé gyorsít?

   A lámpa tömege (kg): Megold.

   A feszítő erő (N): Megold.

4. Egy csatornán egy felfelé haladó uszályt a csatorna melletti úton haladó ló vontatja. A ló $7900\,\text{N}$ erővel húzza a kötelet a csatorna irányával $18°$-ot bezáró irányban. Az uszály tömege $9500\,\text{kg}$, gyorsulása $0{,}12\,\text{m/s}^2$ a csatorna irányában. Milyen nagyságú erőt fejt ki a víz az uszályra?

   A víz által kifejtett erő (N): Megold.

# 7. LECKE

## A lendület és a lendületmegmaradás törvénye

## 12. A lendületmegmaradás törvénye

**12.1. feladat:** Egy $40\,\text{kg}$-os gyerek egy befagyott pocsolya közepén áll. A gyerek kelet felé, a földhöz képest $5\,\text{m/s}$ sebességgel, vízszintesen elhajít egy $0{,}5\,\text{kg}$ tömegű hógolyót. Mekkora a gyerek visszalökődési sebessége, ha a súrlódás elhanyagolható?

**Megoldás:** Kezdetben a gyerekből és a hógolyóból álló rendszer összes lendülete nulla:

$$I_{össz,1} = 0.$$

A hógolyó elhajítása után az összes lendület:

$$I_{össz,2} = m_h \cdot v_h - m_{gy} \cdot v_{gy}.$$

A lendületmegmaradás szerint:

$$I_{össz,1} = I_{össz,2},$$

$$0 = m_h \cdot v_h - m_{gy} \cdot v_{gy}.$$

Ebből a gyerek sebessége:

$$v_{gy} = \frac{m_h \cdot v_h}{m_{gy}} = \frac{0{,}5 \cdot 5}{40} = 0{,}0625\,\text{m/s}.$$

---

**12.2. feladat:** Egy $45\,\text{kg}$ tömegű gyerek egy $225\,\text{kg}$-os pallón áll. A palló egy befagyott tavon, vízszintes, súrlódásmentes felületen fekszik. A gyerek nekiindul, és végigsétál a pallón, ahhoz képest $1{,}5\,\text{m/s}$ sebességgel. Mekkora a sebessége a jéghez képest? Mekkora a palló sebessége a jéghez képest?

Megoldás: A pallóból és a gyerekből álló rendszer kezdeti összes lendület nulla. Amikor a gyerek elindul, a palló szükségképpen az ellenkező irányba kell, hogy mozogjon. A lendületmegmaradás törvénye szerint a rendszer összes lendülete csak így maradhat nulla:

$$I_{össz,1} = 0,$$

$$I_{össz,2} = m_{gy} \cdot v_{gy} - m_p \cdot v_p.$$

Itt $v_{gy}$ a gyerek földhöz viszonyított sebességét jelenti. A pallóhoz viszonyított sebességre írhatjuk:

$$v_p^* = v_{gy} + v_p.$$

Ebből $v_p$-t kifejezve, majd beíva a második egyenletbe, továbbá a lendületmegmaradás törvényét alkalmazva a következőt kapjuk:

$$m_{gy} \cdot v_{gy} = m_p \cdot v_p,$$

$$m_{gy} \cdot v_{gy} = m_p \cdot (v_p^* - v_{gy}).$$

Számadatokkal:

$$45 \cdot v_{gy} = 225 \cdot (1{,}5 - v_{gy}).$$

Ebből $v_{gy}$-t kifejezve:

$$v_{gy} = 1{,}25\,\mathrm{m/s}.$$

A palló sebessége pedig:

$$v_p = v_p^* - v_{gy} = 1{,}5 - 1{,}25 = 0{,}25\,\mathrm{m/s}.$$

**12.3. feladat:** Vízszintes drótkötélpályán $0{,}2\,\mathrm{m/s}$ sebességgel haladó $300\,\mathrm{kg}$ tömegű csillét felülről $150\,\mathrm{kg}$ tömegű kaviccsal töltöttek meg. Mennyivel változott eközben a csille sebessége?

**Megoldás:** A csille kezdeti lendülete:

$$I_1 = m_1 \cdot v_1 = 300 \cdot 0{,}2 = 60\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A kavics betöltése után a lendület:

$$I_2 = (m_1 + m_2) \cdot v_2.$$

A lendületmegmaradás törvényét alkalmazva írhatjuk:

$$I_1 = I_2,$$

$$I_1 = (m_1 + m_2) \cdot v_2,$$

$$60 = (300 + 150) \cdot v_2.$$

Ebből a keresett sebesség:

$$v_2 = \frac{60}{300 + 150} = 0{,}133\,\mathrm{m/s}.$$

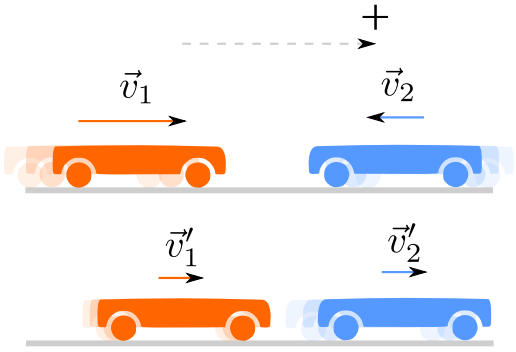
---

**12.4. feladat:** Rugalmasan és centrálisan ütközik vízszintes pályán két egymással szemben haladó $20\,\mathrm{g}$ és $30\,\mathrm{g}$ tömegű kiskocsi. Az elsőnek $10\,\mathrm{m/s}$, a másodiknak $5\,\mathrm{m/s}$ a kölcsönhatás előtti sebességének nagysága. Mekkora sebessége lesz a $30\,\mathrm{g}$-os kiskocsinak ütközés után, ha az $20\,\mathrm{g}$-os kiskocsi $0{,}5\,\mathrm{m/s}$ sebességgel halad tovább az eredeti irányban?

**Megoldás:** Határozzuk meg a rendszer ütközés előtti teljes lendületét. Mivel a két test mozgása egy egyenesbe esik, a lendületek előjelesen adódnak össze. Pozitív iránynak a jobbra mutató irányt vesszük.

$$I_{össz} = m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = 0{,}02 \cdot 10 - 0{,}03 \cdot 5 = 0{,}05 \, \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

.




12.1. ábra. *Magyarázó ábra a 12-4. feladathoz.*

Az ütközés utáni teljes lendület:

$$I'_{össz} = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2.$$

A lendületmegmaradás törvénye szerint:

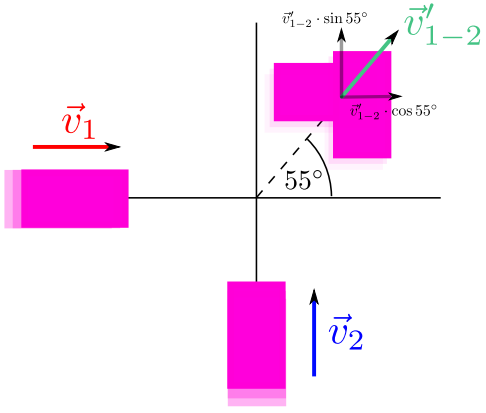
$$I_{össz} = I'_{össz},$$

$$0{,}05 = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2,$$

$$v'_2 = \frac{0{,}05 - m_1 \cdot v'_1}{m_2} = \frac{0{,}05 - 0{,}02 \cdot 0{,}5}{0{,}03} = 1{,}33 \, \text{m/s}.$$

**12.5. feladat:** Két, egyforma tömegű gépkocsi egyszerre ér egy kereszteződésbe. Az egyik $13\,\mathrm{m/s}$ sebességgel halad kelet felé, a másik délről érkezik ismeretlen sebességgel. A két jármű összeütközik, és az összeragadt roncs féknyoma a keleti iránytól $55°$-kal észak felé húzódik. Mekkora volt a dél felől érkező autó sebessége?

**Megoldás:** Az ábra alapján írjuk fel a lendületmegmaradás törvényét K-Ny, illetve D-É irányokban:




12.2. ábra. *Magyarázó ábra a 12-5. feladathoz.*

*Nyugat-Kelet irány:*

$$m\cdot v_1 = 2\cdot m\cdot v'_{1-2}\cdot\cos 55°,$$

*Dél-Észak irány:*

$$m \cdot v_2 = 2 \cdot m \cdot v'_{1-2} \cdot \sin 55^\circ.$$

Osszuk el a második egyenletet az elsővel:

$$\frac{v_2}{v_1} = \tan 55^\circ.$$

Ebből a keresett $v_2$ sebesség:

$$v_2 = v_1 \cdot \tan 55^\circ = 13 \cdot \tan 55^\circ = 18{,}57\,\text{m/s} = 66{,}84\,\text{km/h}.$$

## 13. Erőlökés

**13.1. feladat:** Egy golfjátékos $80$ m/s sebességgel üti el az $51$ g tömegű golflabdát. Feltételezve, hogy a labda és az ütő $0{,}006$ s-ig érintkeztek, határozzuk meg a labda elütés utáni lendületét és az ütő által rá kifejtett erő átlagos nagyságát!

**Megoldás:** A labda lendülete:

$$I = m \cdot v = 0{,}051 \cdot 80 = 4{,}08\,\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Az erő nagyságának meghatározásához írjuk fel Newton II. törvényét abban az alakjában, amelyben a lendületváltozás szerepel:

$$\underline{F} = \frac{\Delta \underline{I}}{\Delta t}.$$

Esetünkben:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta(m \cdot v)}{\Delta t}.$$

Mivel kezdetben a test sebessége nulla volt, ezért a kezdeti lendületének nagysága is nulla. Írhatjuk tehát:

$$F = \frac{\Delta(m \cdot v)}{\Delta t} = \frac{m \cdot v - 0}{\Delta t} = \frac{0{,}051 \cdot 80}{0{,}006} = 680\,\mathrm{N}.$$

## 14. A tehetetlen tömeg

**14.1. feladat:** Egy $m_1$ tömegű golyót $5\,\mathrm{m/s}$ sebességgel nekilökünk egy $m_2$ tömegű, nyugvó golyónak. Mekkora legyen az $m_2$ tömeg, hogy az első golyó sebessége $1\,\mathrm{m/s}$, a másodiké $2\,\mathrm{m/s}$ legyen?

**Megoldás:** A két test kölcsönhatása közben az egyik testre ható erő nagysága megegyezik a másik testre ható erő nagyságával. A két erő iránya azonban ellentétes (Newton III. törvénye). Ezért a következőt írhatjuk:

$$\underline{F}_1 = -\underline{F}_2.$$

Newton II. törvényét felhasználva, illetve figyelembe véve, hogy az erők hatásvonala egy egyenesen van:

$$\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta I_2}{\Delta t}.$$

$\Delta t$-vel egyszerűsítve:

$$\Delta I_1 = -\Delta I_2,$$

$$\Delta(m_1 \cdot v_1) = -\Delta(m_2 \cdot v_2),$$

$$m_1 \cdot \Delta v_1 = -m_2 \cdot \Delta v_2,$$

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{-1-(-5)}{2-0} = \frac{4}{2} = 2.$$

A két test tömegének aránya tehát $2$. Ebben az esetben az $1$. test az eredeti irányba halad tovább $1\,\mathrm{m/s}$ nagyságú sebességgel.
A második megoldásban az $1$. test visszapattan a $2$. testről, tehát az eredeti irányhoz képest ellentétes irányban halad tovább $1\,\mathrm{m/s}$ nagyságú sebességgel. Ez akkor teljesül, ha:

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{1-(-5)}{2-0} = \frac{6}{2} = 3.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Egy $240\,\text{kg}$ tömegű álló csónakba egy $60\,\text{kg}$-os ember ugrik be, $5\,\text{m/s}$ sebességgel. Mekkora sebességgel indul el a csónak? Mekkora az erőlökés a csónak és az ember között?

   A csónak sebessége (m/s): Megold.

   Az erőlökés $(\text{kg} \cdot \text{m/s})$: Megold.

2. Egy $24\,\text{kg}$ tömegű, $500\,\text{m/s}$ sebességű ágyúlövedéket $0{,}05\,\text{s}$ alatt állít meg egy akadály. Mekkora a fékezőerő nagysága? Mennyivel változik meg a lövedék impulzusa a megállásig?

   A fékezőerő nagysága (N): Megold.

   Az impulzusváltozás $(\text{kg} \cdot \text{m/s})$: Megold.

3. Egy íjász olyan $0{,}3\,\text{kg}$ tömegű céltáblára lő, mely légpárnás sínen mozog felé $2{,}5\,\text{m/s}$ sebességgel. A $2{,}25\,\text{dkg}$ tömegű nyilat $35\,\text{m/s}$ sebességgel lövi ki. A céltáblát megállítja a becsapódás. A nyíl keresztülhatol a céltáblán. Mekkora a sebessége ezután?

   A nyíl sebessége (m/s): Megold.

# 8. LECKE

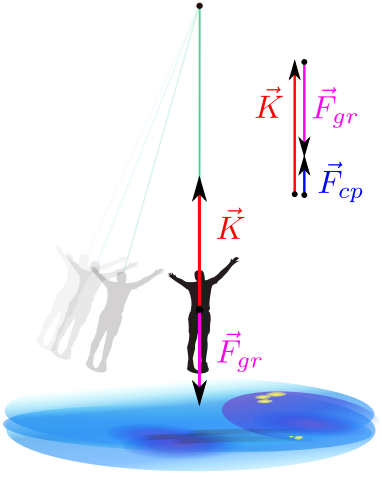
## Erőtörvények

## 15. Erőtörvények

**15.1. feladat:** Tarzan egy $10\,\mathrm{m}$ hosszú liánon készül átlendülni egy tó fölött. Tömege $80\,\mathrm{kg}$, sebessége a pálya legalsó pontjában $8\,\mathrm{m/s}$. Mekkora erővel feszül a lián?

**Megoldás:** Tarzan körmozgást végez, és a pálya legalsó pontjában a lián által kifejtett kényszererő tartja körpályán. A centripetális erőre írhatjuk:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$




15.1. ábra. *Magyarázó ábra a 15-1. feladathoz.*

A rajz alapján:

$$F_{cp} = K - F_{gr},$$

$$K - F_{gr} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

$$K = F_{gr} + m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} = 80 \cdot 9{,}81 + 80 \cdot \frac{8^2}{10} = 1296{,}8\,\mathrm{N}.$$

---

**15.2. feladat:** A $350\,\mathrm{kg}$ tömegű gépkocsi dombvidéken halad, $75\,\mathrm{km/h}$ sebességgel. Egy $100\,\mathrm{m}$ sugarú simulókörrel leírható domb előtt mekkora sebességre gyorsítson, hogy a dombtetőn a nyomóerő nulla legyen?

**Megoldás:** A dombon a gépkocsi körmozgást végez.

$$F_{cp} = F_{gr} - F_{ny},$$

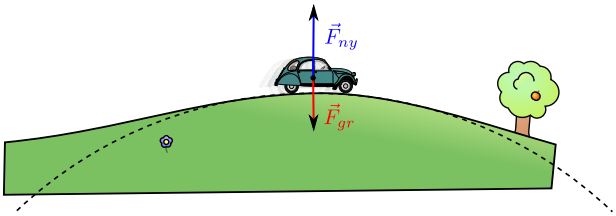
$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

$$F_{gr} - F_{ny} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

A nyomóerő nulla, ha:

$$F_{ny} = 0 \Rightarrow F_{ny} = F_{gr} - m \cdot \frac{v^2}{r} = 0,$$

azaz




15.2. ábra. *Magyarázó ábra a 15-2. feladathoz.*

$$F_{gr} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Ebből a keresett sebesség:

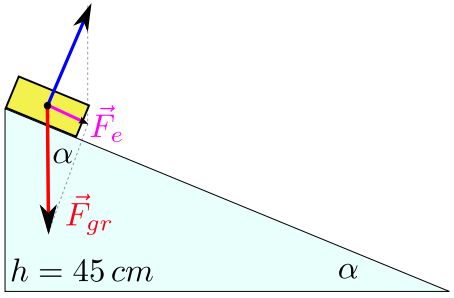
$$v = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{9{,}81 \cdot 100} = 31{,}32\,\text{m/s}.$$

---

**15.3. feladat:** Egy $45\,\text{cm}$ magas, $30°$-os hajlásszögű lejtőről súrlódás nélkül csúszik le egy test. Mekkora sebességgel ér a lejtő aljára? Mennyi ideig csúszik a lejtőn?

**Megoldás:** A rajz alapján a testre ható erők eredőjére írhatjuk:

$$F_e = m \cdot g \cdot \sin\alpha.$$




15.3. ábra. *Magyarázó ábra a 15-3. feladathoz.*

Newton II. törvényét felhasználva a test gyorsulásának nagyságát kiszámíthatjuk:

$$F_e = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F_e}{m} = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha}{m} = g \cdot \sin\alpha = 9{,}81 \cdot \sin 30^\circ = 4{,}905\,\mathrm{m/s^2}.$$

Mivel a test egyenletesen gyorsuló mozgást végez, a test által megtett utat a négyzetes úttörvényből számíthatjuk:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}.$$

A test által megtett út a lejtő hossza, mely az ábra alapján könnyen meghatározható:

$$s = \frac{0{,}45}{\sin 30^\circ} = 0{,}90\,\mathrm{m}.$$

A keresett idő tehát:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}90}{4{,}9}} = 0{,}61\,\text{s}.$$

A test sebessége a lejtő alján:

$$v = a \cdot t = 4{,}9 \cdot 0{,}61 = 2{,}97\,\text{m/s}.$$

---

**15.4. feladat:** A $70\,\text{kg}$ tömegű festő egy épület oldalán függő "kötélszéken" ülve dolgozik. Egyszer csak, gyorsan helyet akar változtatni, és olyan erővel rántja meg a kötelet, hogy a széket csak $400\,\text{N}$ erővel nyomja. Mekkora a festő és a szék gyorsulása, ha a szék $10\,\text{kg}$ tömegű?

**Megoldás:** A kötél megrántásának pillanatában írjuk fel a festőre ható erők alapján Newton II. törvényét:

$$F_{e-f} = m_f \cdot a,$$

$$F_{e-f} = F_1' + F_{ny} - F_{gr-f},$$

$$(1) \quad m_f \cdot a = F_1' + F_{ny} - F_{gr-f}.$$

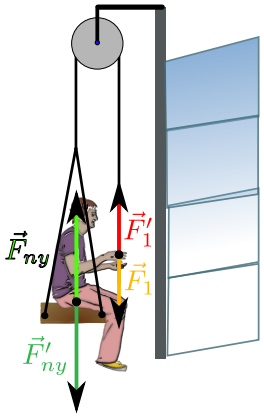
Ugyanezt felírva a szék esetében:

$$F_{e-sz} = m_{sz} \cdot a,$$

$$F_{e-sz} = F_1 - F_{ny}' - F_{gr-sz},$$

$$(2) \quad m_{sz} \cdot a = F_1 - F_{ny}' - F_{gr-sz}.$$

Az (1) egyenletből vonjuk ki (2)-t. Használjuk ki, hogy $F_1 = F_1'$:




15.4. ábra. *Magyarázó ábra a 15-4. feladathoz.*

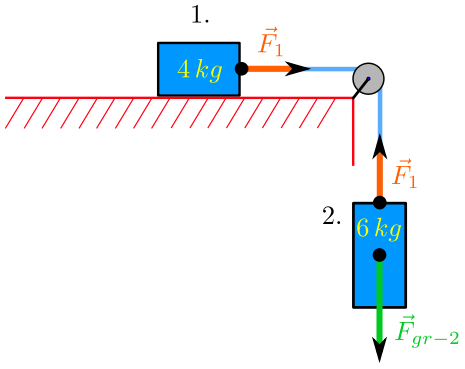
$$m_f \cdot a - m_{sz} \cdot a = F_{ny} - F_{gr-f} - (-F_{ny}^{'} - F_{gr-sz}).$$

Mivel $F_{ny} = F_{ny}^{'}$, írhatjuk:

$$a \cdot (m_f - m_{sz}) = 2 \cdot F_{ny} - F_{gr-f} + F_{gr-sz}.$$

Ebből a keresett gyorsulás:

$$a = \frac{2 \cdot F_{ny} - F_{gr-f} + F_{gr-sz}}{m_f - m_{sz}} = \frac{2 \cdot 400 - 686{,}7 + 98{,}1}{60} = 3{,}52\,\mathrm{m/s^2}.$$




15.5. ábra. *Ábra a 15-5. feladathoz.*

**15.5. feladat:** Határozzuk meg a $4\,\mathrm{kg}$ tömegű test gyorsulását (a súrlódástól eltekintünk)!

**Megoldás:** Az 1. test esetén írjuk fel a dinamika alaptörvényét, ahol $F_1$ az eredő erő:

$$F_{e-1} = F_1 = m_1 \cdot a.$$

Írjuk fel ugyanezt a 2. testre vonatkozóan:

$$F_{e-2} = m_2 \cdot a,$$
$$F_{e-2} = F_{gr-2} - F_{e-1}.$$

$F_{e-2}$-t behelyettesítve:

$$F_{gr-2} - F_{e-1} = m_2 \cdot a.$$

Az első egyenletből $F_{e-1}$-t beírva kapjuk:

$$F_{gr-2} - m_1 \cdot a = m_2 \cdot a.$$

Ebből a gyorsulás meghatározható:

$$a = \frac{F_{gr-2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \cdot g}{m_1 + m_2} = \frac{6 \cdot 9{,}81}{4 + 6} = 5{,}886\,\mathrm{m/s^2}.$$

---

**15.6. feladat:** Egy $2\,\mathrm{m}$ széles asztalon egy tányér van úgy, hogy középpontja $0{,}3\,\mathrm{m}$-re van az asztal szélétől. Mekkora vízszintes gyorsulással kell az asztalterítőt mozgatni ahhoz, hogy a tányér az asztal másik szélétől $0{,}5\,\mathrm{m}$-re kerüljön? A terítő az asztalt éppen befedi, és a csúszási súrlódási együttható $0{,}75$.

**Megoldás:** Nézzük először a tányér mozgását. A tányér vízszintes gyorsulását a csúszási súrlódási erő eredményezi. A mozgásegyenlet a következő:

$$F_{cs,s} = m_1 \cdot a_1.$$

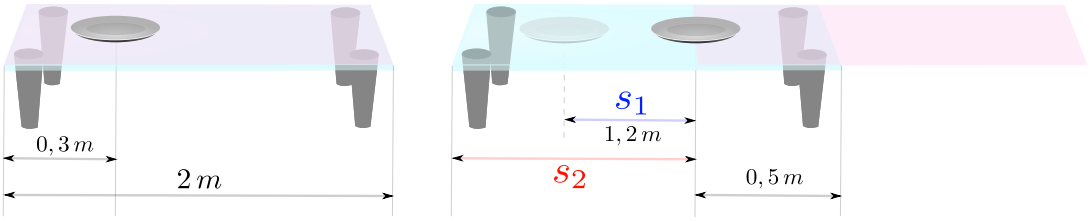
A csúszási súrlódási erőre írhatjuk:

$$F_{cs,s} = \mu \cdot F_{ny} = \mu \cdot m_1 \cdot g.$$

A két egyenletet összehasonlítva a tányér gyorsulását meghatározhatjuk:

$$m_1 \cdot a_1 = \mu \cdot m_1 \cdot g \Rightarrow a_1 = \mu \cdot g = 0{,}75 \cdot 9{,}81 = 7{,}36\,\mathrm{m/s^2}.$$

Számoljuk ki a mozgás idejét a négyzetes úttörvényből. A test által megtett út nagysága az ábra alapján $s_1 = 1{,}5\,\mathrm{m} - 0{,}3\,\mathrm{m} = 1{,}2\,\mathrm{m}$.




15.6. ábra. *Magyarázó ábra a 15-6. feladathoz.*

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}2}{7{,}36}} = 0{,}57\,\text{s}.$$

Az ábra alapján jól látható, hogy a terítő széle $s_2 = 1{,}5\,\text{m}$ utat tesz meg. A mozgás ideje megegyezik a tányér mozgásának idejével. Ezeket felhasználva a terítő által megtett útra írhatjuk:

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2.$$

Ebből a terítő gyorsulását meghatározhatjuk:

$$a_2 = \frac{2 \cdot s_2}{t^2} = \frac{2 \cdot 1{,}5}{0{,}57^2} = 9{,}23\,\text{m/s}^2.$$

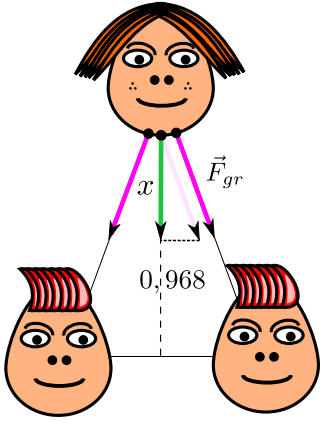
**15.7. feladat:** Két, egymástól $0{,}5\,\mathrm{m}$ távolságban lévő pontban egy-egy ember áll. Mindegyik tömege $80\,\mathrm{kg}$. Egy harmadik, $55\,\mathrm{kg}$ tömegű ember lép hozzájuk, a két embert összekötő szakasz felezőmerőlegesének irányából. Ha tőlük $1\,\mathrm{m}$ távolságban áll meg, mekkora gravitációs vonzóerő hat rá?

**Megoldás:** A harmadik emberre az első ember által kifejtett gravitációs vonzóerő nagyságát a gravitációs erőtörvényből számíthatjuk ki:

$$F_{gr,1-3} = f \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{r^2},$$

$$F_{gr,1-3} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{80 \cdot 55}{1^2} = 2{,}935 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}.$$

A második ember által kifejtett erő ugyanekkora nagyságú, hiszen a tömege ugyanúgy $80\,\mathrm{kg}$, és szintén $1\,\mathrm{m}$ a köztük lévő távolság.




15.7. ábra. *Magyarázó ábra a 15-7. feladathoz.*

A rajz alapján az eredő gravitációs erő nagyságát a következőképpen kaphatjuk meg:

$$\frac{x}{2{,}93 \cdot 10^{-7}} = \frac{0{,}968}{1} \Rightarrow x = 2{,}836 \cdot 10^{-7}.$$

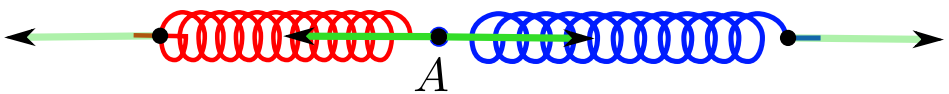
Ebből a keresett erő nagysága:

$$F_e = 2 \cdot x = 2 \cdot 2{,}836 \cdot 10^{-7} = 5{,}672 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}.$$

---

**15.8. feladat:** $25\,\mathrm{N/m}$ és $40\,\mathrm{N/m}$ rugóállandójú rugóból készítettünk két erőmérőt. Ezeket összeakasztjuk, majd széthúzzuk. A nagyobb rugóállandójú rugó ekkor $5\,\mathrm{N}$ nagyságú erőt jelez. Mekkora erőt mutat a másik? Mekkora az egyes rugók megnyúlása?

**Megoldás:** Az ábrán az $A$ jelű pont egyensúlyban van, így a másik rugó is $5\,\mathrm{N}$ nagyságú erőt jelez.




15.8. ábra. *Magyarázó ábra a 15-8. feladathoz.*

A megnyúlásokat a rugóerőből számolhatjuk:

$$F_r = D \cdot \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{F_r}{D}.$$

Vagyis:

$$\Delta l_1 = \frac{F_r}{D_1} = \frac{5}{25} = 0{,}2\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{cm},$$

$$\Delta l_2 = \frac{F_r}{D_2} = \frac{5}{40} = 0{,}125\,\mathrm{m} = 12{,}5\,\mathrm{cm}.$$

---

**15.9. feladat:** Vízszintes talajon $10\,\mathrm{m/s}$ sebességgel ellökött test a súrlódás következtében $6\,\mathrm{m}$ út megtétele után megáll. Mekkora a talaj és a test közötti súrlódási együttható?

**Megoldás:** A testet a csúszási súrlódási erő fékezi, mely a mozgás irányával ellentétes irányban hat:

$$F_{cs,s} = \mu \cdot F_{nyom}.$$

A nyomóerő a test súlya:

$$F_{cs,s} = \mu \cdot F_{gr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

A test gyorsulását (lassulás) a dinamika alaptörvényéből számolhatjuk:

$$F_e = m \cdot a.$$

Az eredő erő a csúszási súrlódási erő:

$$F_{cs,s} = m \cdot a,$$

$$\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow a = \mu \cdot g.$$

A gyorsulás vektor a mozgás irányával ellentétes irányú, ezért a gyorsulás negatív előjelű.

Mivel ismerjük a test által megtett utat, írjuk fel a négyzetes úttörvényt:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Esetünkben:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

A test megállásáig eltelt idő azonban ismeretlen. A megállás pillanatában azonban a test sebessége nulla, ezért írhatjuk:

$$v_p = v_0 - a \cdot t,$$

$$0 = v_0 - a \cdot t \Rightarrow t = \frac{v_0}{a}.$$

Ezt beírva az úttörvény egyenletébe:

$$s = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{a}.$$

A gyorsulás helyére írjuk be a korábban kapott összefüggést:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{\mu \cdot g} \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{s \cdot g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{6 \cdot 9{,}81} = 0{,}85\,\mathrm{m}.$$

---

**15.10. feladat:** Egy $2\,\mathrm{m}$ hosszú sima deszkalap végére $200\,\mathrm{g}$ tömegű fahasábot helyezünk. A deszka azon végét, ahol a fahasáb van lassan emelve azt tapasztaljuk, hogy a hasáb akkor kezd el csúszni, amikor a deszkalap a vízszintessel $20°$-os szöget zár be. Mekkora a hasáb és a deszka közötti tapadási súrlódási együttható? Határozzuk meg a csúszási súrlódási együtthatót is, ha tudjuk, hogy a test a $2\,\mathrm{m}$-es utat $5\,\mathrm{s}$ alatt tette meg!

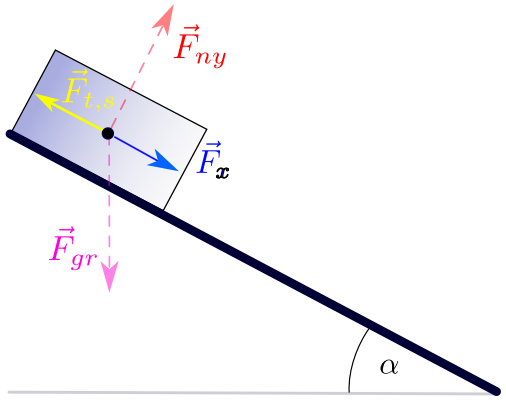
Megoldás: Amikor a test a lejtőn éppen elindul, a testre ható erőket figyelembe véve írhatjuk:

$$F_x = F_{t,s-max},$$

$$F_x = F_{gr} \cdot \sin\alpha,$$

$$F_{t,s-max} = \mu_0 \cdot F_{ny}.$$

A nyomóerő nagysága:




15.9. ábra. *Magyarázó ábra a 15-10. feladathoz.*

$$F_{ny} = F_{gr} \cdot \cos\alpha.$$

A fentieket figyelembe véve írhatjuk:

$$F_{gr} \cdot \sin\alpha = \mu_0 \cdot F_{gr} \cdot \cos\alpha.$$

Ebből a tapadási súrlódási együttható értéke:

$$\mu_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \tan 20^\circ = 0{,}364.$$

A csúszási súrlódási együttható meghatározása a dinamika alapegyenlete és a négyzetes úttörvény segítségével történik. Először a test gyorsulását fejezzük ki:

$$F_x - F_{cs,s} = m \cdot a,$$
$$F_x = F_{gr} \cdot \sin\alpha,$$
$$F_{cs,s} = \mu \cdot F_{ny} = \mu \cdot F_{gr} \cdot \cos\alpha,$$
$$F_{gr} \cdot \sin\alpha - \mu \cdot F_{gr} \cdot \cos\alpha = m \cdot a,$$
$$m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot a,$$
$$g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot g \cdot \cos\alpha = a.$$

A gyorsulás tehát:

$$a = g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha).$$

A test által megtett út nagyságára írhatjuk:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) \cdot t^2.$$

A keresett együttható:

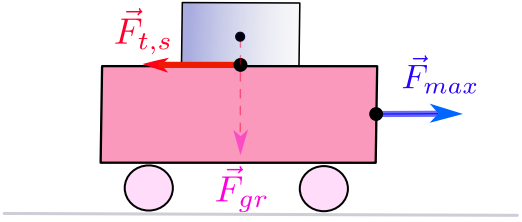
$$\mu = \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \cdot \sin\alpha - s}{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \cdot \cos\alpha},$$
$$\mu = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 5^2 \cdot \sin 20^\circ - 2}{\frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 5^2 \cdot \cos 20^\circ} = 0{,}347.$$

**15.11. feladat:** Vízszintes talajon mozgatható $2\,\mathrm{kg}$ tömegű kiskocsin $0{,}5\,\mathrm{kg}$ tömegű tégla nyugszik. A kocsi és a tégla közötti tapadási súrlódási együttható $0{,}2$. A kocsi és a talaj között a súrlódás elhanyagolható. Mekkora az a maximális vízszintes erő, amivel a kocsit mozgatva a tégla még éppen nyugalomban marad rajta?

**Megoldás:** Írjuk fel a kocsi mozgásegyenletét:

$$F_e = m_k \cdot a.$$

Az eredő erő nagysága:




15.10. ábra. *Magyarázó ábra a 15-11. feladathoz.*

$$F_e = F_{max} - F_{t,s-max},$$
$$F_{max} - F_{t,s-max} = m_k \cdot a.$$

A tégla mozgásegyenlete:

$$F_{t,s-max} = m_t \cdot a.$$

Ebből a kocsi és a test gyorsulása:

$$a = \frac{F_{t,s-max}}{m_t} = \frac{\mu_0 \cdot F_{ny}}{m_t} = \frac{\mu_0 \cdot F_{gr}}{m_t} = \frac{\mu_0 \cdot m_t \cdot g}{m_t} = \mu_0 \cdot g = 0{,}2 \cdot 9{,}81 = 1{,}962\,\mathrm{m/s^2}.$$

A keresett maximális erő nagysága tehát:

$$F_{max} = F_{t,s-max} + m_k \cdot a = m_t \cdot a + m_k \cdot a = a \cdot (m_t + m_k) = 1{,}962 \cdot (2 + 0{,}5) = 4{,}905\,\mathrm{N}.$$

---

**15.12. feladat:** Egy $90\,\mathrm{km/h}$ sebességgel haladó autóra ható közegellenállási erőt az $F = C \cdot v^2$ összefüggés alapján számíthatjuk ki, ahol az úgynevezett közegellenállási tényező értéke $C = 0{,}3\,\mathrm{Ns^2/m^2}$. Határozzuk meg a $90\,\mathrm{km/h}$ sebességgel egyenletesen haladó járműre ható közegellenállási erőt! Hány százalékkal lesz nagyobb ez az erő, ha a jármű sebessége $108\,\mathrm{km/h}$-ra nő?

**Megoldás:** Az erő nagyságát könnyen kiszámíthatjuk:

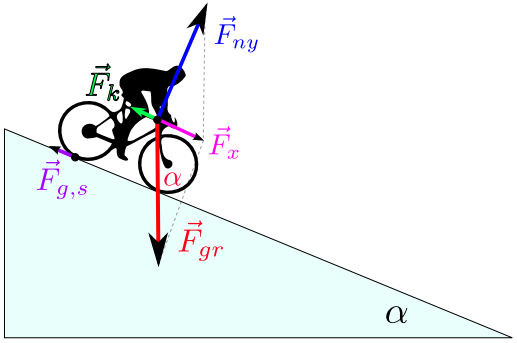
$$F_k = C \cdot v_1^2 = 0{,}3 \cdot 25^2 = 187{,}5\,\mathrm{N}.$$

$108\,km/h$ esetén a közegellenállási erő nagysága:

$$F_k' = C \cdot v_2^2 = 0{,}3 \cdot 30^2 = 270\,\mathrm{N}.$$

Ez $44\,\%$-os növekedést jelent.

---




15.11. ábra. *Magyarázó ábra a 15-13. feladathoz.*

**15.13. feladat:** Egy $80\,\mathrm{kg}$ tömegű kerékpáros $20\%$-os lejtőhöz érkezik. Mekkora maximális sebességre tud felgyorsulni tekerés nélkül? A levegő sűrűsége $1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$, a kerékpáros homlokfelületének nagysága $A = 0{,}55\,\mathrm{m^2}$, a közegellenállási tényező értéke $C = 1{,}15$, a gördülési súrlódási együttható pedig $\mu_g = 0{,}16$.

**Megoldás:** A maximális sebesség elérésekor a kerékpárosra ható, lejtő irányú erők eredője nulla. Az erőket a magyarázó ábra szemlélteti. A következő igaz tehát:

$$\vec{F}_e = 0.$$

Az erők lejtő irányú komponenseit tekintve:

$$F_x - F_k - F_{g,s} = 0,$$

$$F_x = F_{gr} \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha,$$

$$F_k = C \cdot \rho_{lev} \cdot A \cdot v^2,$$

$$F_{g,s} = \mu_g \cdot F_{ny}.$$

A nyomóerő pedig:

$$F_{ny} = F_{gr} \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha.$$

Ezek alapján írhatjuk:

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha - C \cdot \rho_{lev} \cdot A \cdot v^2 - \mu_g \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha) = 0$$

Ebből a keresett sebesség meghatározható, ha az $\alpha$ szög ismert. Ezt azonban könnyen meghatározhatjuk:

$$20\% \Rightarrow \tan\alpha = 0{,}2 \Rightarrow \alpha = 11{,}31^\circ,$$

$$v = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu_g \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha)}{C \cdot \rho_{lev} \cdot A}} =$$

$$= \sqrt{\frac{80 \cdot 9{,}81 \cdot \sin 11{,}31^\circ - 0{,}16 \cdot (80 \cdot 9{,}81 \cdot \cos 11{,}31^\circ)}{1{,}15 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}55}} = 6{,}368\,\text{m/s} = 22{,}93\,\text{km/h}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Legfeljebb hány km/h sebességgel haladhat a kicsúszás veszélye nélkül a $300\,\mathrm{m}$ sugarú, vízszintes síkú körpályán a gépkocsi, ha a tapadási súrlódási együttható értéke $0{,}2$?

   A sebessége (km/h):

   Megold.

2. Egy $30°$-os lejtőre fel akarunk juttatni egy $400\,\mathrm{N}$ súlyú testet. Mekkora erőt kell alkalmazni, ha a csúszási súrlódás együtthatója $0{,}1$, és az erő hatásvonala vízszintes irányú?

   Az erő nagysága (N):

   Megold.

# 9. LECKE

## Munka, energia

## 16. Munka, energia

**16.1. feladat:** Egy vásárló $35\,\mathrm{N}$ állandó nagyságú, a vízszintessel $25°$-os szöget bezáró erővel tolja a bevásárlókocsiját. Mekkora munkát végez, amíg állandó sebességgel végigmegy egy $50\,\mathrm{m}$ hosszú polcsor mellett?

**Megoldás:** A vásárló által végzett munka:

$$W = F \cdot \cos\alpha \cdot s,$$

$$W = 35 \cdot \cos 25° \cdot 50 = 1586{,}04\,\mathrm{J}.$$

---

**16.2. feladat:** Egy $7\,\mathrm{kg}$ tömegű tekegolyó $3\,\mathrm{m/s}$ sebességgel mozog. Mekkora sebességgel mozogjon egy $2{,}45\,\mathrm{g}$-os pingponglabda, hogy ugyanannyi mozgási energiája legyen, mint a tekegolyónak?

**Megoldás:** A tekegolyó mozgási energiája:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m_t \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3^2 = 31{,}5\,\mathrm{J}.$$

A pingponglabda sebessége:

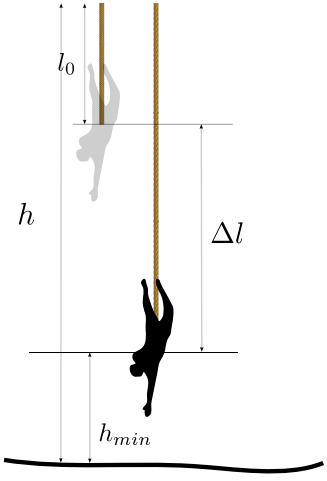
$$v_p = \sqrt{\frac{2 \cdot E_m}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 31{,}5}{0{,}00245}} = 160{,}36\,\mathrm{m/s}.$$

---

**16.3. feladat:** Egy bungee-jumping ugrás a $36\,\mathrm{m}$ magasan daru kosarából történik úgy, hogy az ugró derekára egy rugalmas kötél van rögzítve. A kötél nyújtatlan hossza $25\,\mathrm{m}$, az ugró ember súlya $700\,\mathrm{N}$. Mekkora legyen a kötél rugóállandója, hogy biztonságos, $4\,\mathrm{m}$ magasságban fogja meg az embert?

**Megoldás:** Az ugrás elején az összes mechanikai energia:

$$E_{o,1} = E_{grav.helyzeti} = m \cdot g \cdot h.$$




16.1. ábra. *Magyarázó ábra a 16-3. feladathoz.*

Az ugrás legalsó pontjában az összes mechanikai energia:

$$E_{o,2} = E_{grav.helyzeti} + E_{rugalmas} = m \cdot g \cdot h_{min} + \frac{1}{2} \cdot D \cdot (\Delta l)^2.$$

A mechanika energia megmaradás tétele miatt:

$$E_{o,1} = E_{o,2},$$

$$m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot h_{min} + \frac{1}{2} \cdot D \cdot (\Delta l)^2.$$

ahol a rajz alapján írhatjuk, hogy $\Delta l = h - (l_0 + h_{min})$. $D$ ezek után meghatározható:

$$D = \frac{2 \cdot (m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot h_{min})}{[h - (l_0 + h_{min})]^2} = \frac{2 \cdot (700 \cdot 36 - 700 \cdot 4)}{[36 - (25 + 4)]^2} = 914{,}3\,\text{N/m}.$$

---

**16.4. feladat:** Egy gyereknek és a szánkójának együttes tömege $50\,\text{kg}$. Egy elhanyagolható súrlódású lejtőn csúsznak le álló helyzetből indulva, és a lejtő alján sebességük $3\,\text{m/s}$. Milyen magas a lejtő?

**Megoldás:** A feladat a mechanikai energia megmaradás tétele alapján könnyen megoldható. Tekintsük először a lejtő tetején a rendszer összes energiáját:

$$E_{o,1} = E_{helyzeti} = m \cdot g \cdot h.$$

Ugyanez a lejtő alján:

$$E_{o,2} = E_{mozg} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

A mechanikai energia megmaradás tételét felhasználva:

$$E_{o,1} = E_{o,2},$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Ebből a lejtő magassága kifejezhető:

$$h = \frac{\frac{1}{2} \cdot v^2}{g} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3^2}{9{,}81} = 0{,}46\,\text{m}.$$

---

**16.5. feladat:** Egy $5\,\text{kg}$-os acélgolyót $10\,\text{m}$ magasról leejtünk egy rézlemezre. A golyó $3{,}2\,\text{mm}$ mély nyomot hagy a lemezen. Mekkora erővel fékezte a rézlemez anyaga az acélgolyót?

**Megoldás:** Először számoljuk ki, mekkora sebességgel csapódott az acélgolyó a lemezbe. Ehhez a mechanikai energia megmaradás tételét használjuk.
A kiindulási állapotban a golyó összes mechanikai energiája:

$$E_{o,1} = E_{helyzeti} = m \cdot g \cdot h.$$

A becsapódáskor az összes energia:

$$E_{o,2} = E_{mozg} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2,$$

$$E_{o,1} = E_{o,2},$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 10} = 14{,}00714\,\text{m/s}.$$

Ezután a becsapódást szemlélve, használjuk a munkatételt:

$$W_{er} = \Delta E_{mozg}.$$

$W_{er}$ az eredő erő munkája. Ebben az esetben ez megegyezik a fékező erő $(F_f)$ munkájával:

$$F_f \cdot s = \Delta E_{mozg} = E_{mozg,2} - E_{mozg,1}.$$

A gravitációs erő munkáját most elhanyagolhatjuk.

Mivel $E_{mozg,2} = 0$, továbbá a fékező erő iránya a mozgás irányával ellentétes, a következő egyenletet írhatjuk:

$$-F_f \cdot s = -E_{mozg,1}.$$

Ebből a fékező erő nagysága:

$$F_f = \frac{E_{mozg,1}}{s} = \frac{E_{mozg}}{s} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{s} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 14^2}{3{,}2 \cdot 10^{-3}} = 153281\,\mathrm{N}.$$

---

16.6. feladat: Tarzan, akinek tömege $80\,\mathrm{kg}$, egy faágon áll, és egy vízszintes, $3\,\mathrm{m}$ hosszú liánt tart a kezében. Leugorva az ágról, egy körívet ír le, melynek alsó pontján magával ragadja Jane-t, akinek tömege $60\,\mathrm{kg}$. Milyen magasra jutnak fel a liánon továbblendülve?

**Megoldás:** Elsőként határozzuk meg Tarzan sebességét a pálya legalsó pontjában. A kiinduláskor az összes mechanikai energia gravitációs helyzeti energia:

$$E_{o,1} = E_{helyzeti} = m \cdot g \cdot h.$$

A pálya alsó pontján csak mozgási energiája van:

$$E_{o,2} = E_{mozg} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

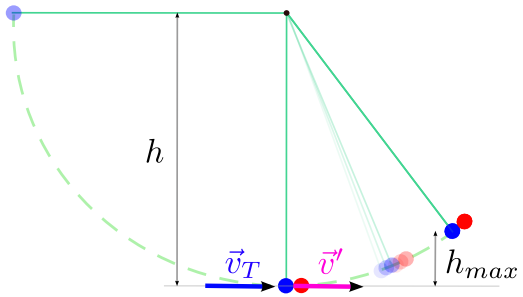
A mechanikai energia megmaradás tétele alapján:

$$E_{o,1} = E_{o,2}.$$

A sebesség nagysága ebből meghatározható:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_T^2 \Rightarrow v_T = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 3} = 7{,}67\,\text{m/s}.$$

A feladat szerint Tarzan magával ragadja Jane-t. Ez fizikai szempontból tökéletesen rugalmatlan ütközésnek számít. Használjuk a lendületmegmaradás törvényét.




16.2. ábra. *Magyarázó ábra a 16-6. feladathoz.*

Az ütközés előtti összes lendület:

$$I_1 = m_T \cdot v_T.$$

Az ütközés utáni összes lendület:

$$I_2 = m_T \cdot v' + m_J \cdot v' = (m_T + m_J) \cdot v'.$$

A lendületmegmaradás törvénye szerint:

$$I_1 = I_2,$$

$$m_T \cdot v_T = (m_T + m_J) \cdot v'.$$

Ebből a továbblendülés sebessége:

$$v' = \frac{m_T \cdot v_T}{m_T + m_J} = \frac{80 \cdot 7{,}67}{80 + 60} = 4{,}38\,\text{m/s}.$$

Alkalmazzuk ismét a mechanikai energia megmaradás tételét. A kiindulási állapotban (legalsó pont) a rendszer (Tarzan és Jane) csak mozgási energiával rendelkezik.

$$E'_{o,1} = E_{mozg} = \frac{1}{2} \cdot (m_T + m_J) \cdot (v')^2.$$

Továbblendülve, a pálya legmagasabb pontján csak gravitációs helyzeti energiájuk lesz.

$$E'_{o,2} = E_{helyzeti} = (m_T + m_J) \cdot g \cdot h_{max},$$

$$E'_{o,1} = E'_{o,2},$$

$$\frac{1}{2} \cdot (m_T + m_J) \cdot (v')^2 = (m_T + m_J) \cdot g \cdot h_{max}.$$

Ebből a maximális magasság:

$$h_{max} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (v')^2}{g} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4{,}38^2}{9{,}81} = 0{,}98\,\text{m}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Mekkora munkát végzünk, ha állandó nagyságú vízszintes irányú erővel egy $4$ kg tömegű kockát nyugalomból $3$ m/s sebességre gyorsítunk a vízszintes talajon $2$ m-es úton? A talaj és a kocka közötti súrlódási együttható $0{,}3$.

   A munka (J): [ ] Megold. [ ]

2. Egy $200$ N súlyú ládát $150$ N nagyságú erővel húzunk fel egy $30°$-os lejtőn. Mennyi munkát végzünk $100$ m út megtétele esetén, ha az erő hatásvonala $25°$-os szöget zár be a lejtővel?

   A munka (J): [ ] Megold. [ ]

3. Egy $40$ kg-os dobozt vízszintes padlón $130$ N-os állandó vízszintes erővel $3$ m-rel odébb tolunk. A doboz és a padló között a csúszási súrlódási együttható $0{,}2$. Mennyivel változott meg a doboz mozgási energiája? Mekkora a doboz végső sebessége?

   A mozgási energia megváltozása (J): [ ] Megold. [ ]

   A keresett sebesség (m/s): [ ] Megold. [ ]

4. Egy $1000$ N/m rugóállandójú, függőlegesen álló, könnyű rugót nyújtatlan hosszához képest összenyomunk $2$ cm-rel, és ráhelyezünk egy $0{,}1$ kg tömegű testet, majd magára hagyjuk őket. Milyen magasra repül fel a $0{,}1$ kg tömegű test a rugó eredeti magasságához képest?

   A keresett magasság (m): [ ] Megold. [ ]

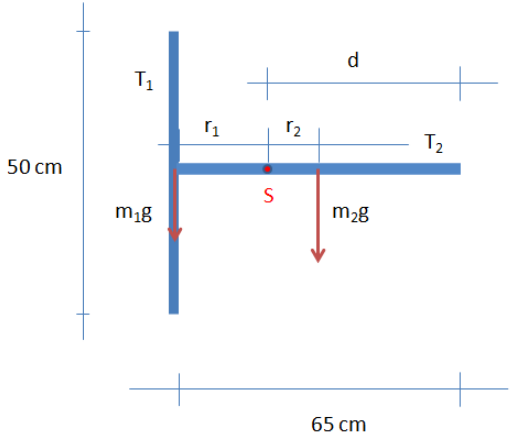
# 10. LECKE

## Merev testek súlypontja és mozgása

## 17. Merev testek súlypontja és mozgása

**17.1. feladat:** Hány centiméterre van a homogén anyageloszlású, állandó keresztmetszetű $50\,\text{cm}$ és $65\,\text{cm}$ hosszú rudakból készült $T$ betű súlypontja a talppontjától?

**Megoldás:** Használjuk ki, hogy egy merev test súlyának súlypontra vonatkozó forgatónyomatéka a test bármely helyzetében nulla. Helyezzük el a $T$ betűt az ábrán látható helyzetben.




17.1. ábra. *Magyarázó ábra a 17.1. feladathoz*

Ekkor

$$m_1 g \cdot r_1 = m_2 g \cdot r_2,$$

$$m_1 g \cdot (65 - d) = m_2 g \cdot (d - \frac{65}{2}).$$

$m_1$ és $m_2$ kifejezhető a $T_1$ és $T_2$ térfogatával és sűrűségével:

$$m_1 = 50A \cdot \rho, \qquad m_2 = 65A \cdot \rho,$$

ahol $A$-val jelöltük $T_1$ és $T_2$ keresztmetszetét.

Helyettesítsünk be, majd egyszerűsítsük egyenletünket:

$$50A \cdot \rho g \cdot (65 - d) = 65A \cdot \rho g \cdot (d - \frac{65}{2}),$$

$$50 \cdot (65 - d) = 65 \cdot (d - \frac{65}{2}).$$

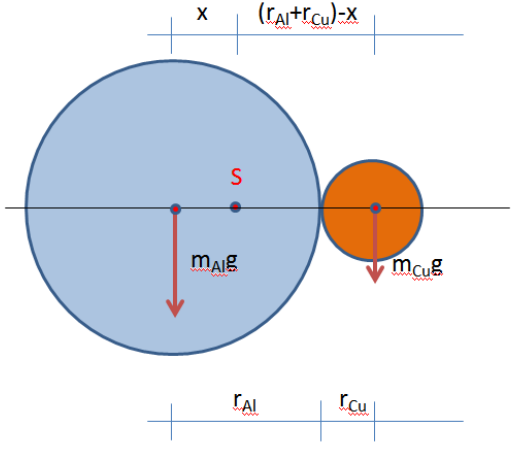
Végül oldjuk meg az egyenletet:

$$d = 46{,}63\,\text{cm}.$$

Tehát a $T$ betű súlypontja $46{,}63\,\text{cm}$ távolságra van a talppontjától.

**17.2. feladat:** Határozzuk meg az egymást érintő tömör homogén alumínium és rézgömbök közös súlypontját, ha az alumíniumgömb sugara 7,5 cm, a rézgömbbé pedig 2,5 cm! ($\rho_{Al} = 2{,}7\,\mathrm{kg/dm^3}$, $\rho_{Cu} = 8{,}96\,\mathrm{kg/dm^3}$)

**Megoldás:** Kövessük a 17.1. feladat megoldásának lépéseit. Használjuk ki ismét, hogy egy merev test súlyának súlypontra vonatkozó forgatónyomatéka a test bármely helyzetében nulla. Helyezzük el az érintkező gömböket az ábrán látható helyzetben.




17.2. ábra. *Magyarázó ábra a 17.2. feladathoz*

Ekkor

$$m_{Al} \cdot g \cdot x = m_{Cu} \cdot g \cdot (r_{Al} + r_{Cu} - x).$$

$m_{Al}$ és $m_{Cu}$ kifejezhető a gömbök térfogatával és sűrűségével:

$$m_{Al} = \frac{4}{3}\pi r_{Al}^3 \cdot \rho_{Al}, \qquad m_{Cu} = \frac{4}{3}\pi r_{Cu}^3 \cdot \rho_{Cu}.$$

Helyettesítsünk be, majd egyszerűsítsük egyenletünket:

$$\frac{4}{3}\pi r_{Al}^3 \cdot \rho_{Al} \cdot g \cdot x = \frac{4}{3}\pi r_{Cu}^3 \cdot \rho_{Cu} \cdot g \cdot (r_{Al} + r_{Cu} - x),$$

$$r_{Al}^3 \cdot \rho_{Al} \cdot x = r_{Cu}^3 \cdot \rho_{Cu} \cdot (r_{Al} + r_{Cu} - x),$$

$$\frac{r_{Al}^3 \cdot \rho_{Al}}{r_{Cu}^3 \cdot \rho_{Cu}} \cdot x = r_{Al} + r_{Cu} - x.$$

Helyettesítsünk be és oldjuk meg az egyenletet:

$$\frac{7{,}5^3 \cdot 2{,}7}{2{,}5^3 \cdot 8{,}96} \cdot x = 7{,}5 + 2{,}5 - x,$$

$$8{,}136 \cdot x = 7{,}5 + 2{,}5 - x,$$

$$x = 1{,}09\,\text{cm}.$$

Tehát az alakzat súlypontja $1{,}09$ cm távolságra van az aluminium gömb középpontjától.

**17.3. feladat:** Vízsintes tengely körül forgatható korong kerületén átvetett fonál egyik végére $m_1 = 4\,\text{kg}$, a másik végére $m_2 = 6\,\text{kg}$ tömegű testet függesztünk. Mekkora szöggyorsulással forog a korong, ha a korong tömege $M = 10\,\text{kg}$, sugara pedig $R = 15\,\text{cm}$? A fonál nem nyúlik és a korong kerületén nem csúszik meg. A fonál végére függesztett testek szintkülönbsége indításkor $50\,\text{cm}$. Mekkora a korong szögsebessége akkor, amikor a két test azonos szintbe kerül?

**Megoldás:** A fonál végeire akasztott testek tömegviszonyából következik, hogy az $m_1$ tömegű test fölfelé, az $m_2$ tömegű test pedig lefelé mozog. A 17.3. ábra mutatja a testekre ható erőket. Írjuk fel Newton II. törvényét a két test, illetve a forgomozgás dinamikai alapegyenletét a korong mozgására:

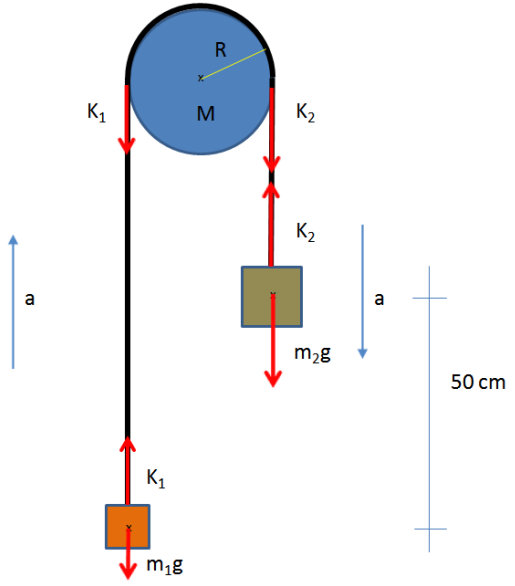
$$K_1 - m_1 g = m_1 a_1,$$
$$m_2 g - K_2 = m_2 a_2,$$
$$M = \Theta\beta.$$

Megjegyzés: Gyakran előforduló hiba, hogy a korong két oldalán, a fonál két ágában fellépő fonálerőket egyenlő nagyságúnak feltételezik és mindkét test dinamikai alapegyenletébe $K_1$, illetve $K_2$ helyett $K$-t írnak. Ez nyílvánvalóan hibás, hiszen $K_1$ és a $K_2$ erők forgató hatása következtében forog a korong. Ha $K_1$ és $K_2$ egyenlő lenne, a korong nem tudna forogni.

Nagyon fontos következményei vannak annak, hogy a fonál nem nyúlik. Ekkor ugyanis a fonál végeire rögzített testeknek ugyanakkora a gyorsulása, tehát $a_1 = a_2 = a$. Mivel a fonál a korong kerületén nem csúszik meg, a korong kerületi pontjainak a gyorsulása ugyanakkora lesz, mint a testek gyorsulása: $a_k = a$. Mivel azonban forgó mozgás esetén a kerületi gyorsulás és a szöggyorsulás egymással összefüggnek: $a_k = \beta \cdot R$, az alábbi összefüggés írható fel a testek $a$ gyorsulása és a korong szöggyorsulása, $\beta$ között:

$$a = \beta \cdot R.$$

A fentieket figyelembe véve az egyenleteinket a következőképpen írhatjuk át:




17.3. ábra. *Magyarázó ábra a 17.3. feladathoz*

$$K_1 - m_1 g = m_1 a,$$
$$m_2 g - K_2 = m_2 a,$$
$$M = \Theta \cdot \frac{a}{R}.$$

Mivel a korongra ható erők forgatónyomatéka és a korong tehetetlenségi nyomatéka

$$M = K_2 R - K_1 R,$$

$$\Theta = \frac{1}{2} M R^2,$$

ezért tovább alakíthatjuk utolsó egyenletünket:

$$K_1 - m_1 g = m_1 a,$$
$$m_2 g - K_2 = m_2 a,$$
$$K_2 R - K_1 R = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \frac{a}{R}.$$

Egyszerűsítés után:

$$K_1 - m_1 g = m_1 a,$$
$$m_2 g - K_2 = m_2 a,$$
$$K_2 - K_1 = \frac{1}{2} M a.$$

Az első egyenletből fejezzük ki $K_1$-et, a másodikból pedig $K_2$-t és mindkettőt helyettesítsük be a harmadik egyenletbe:

$$(m_2 g - m_2 a) - (m_1 g + m_1 a) = \frac{1}{2} M a.$$

Rendezés után fejezzük ki $a$-t:

$$(m_2 - m_1)g = (\frac{1}{2}M + m_1 + m_2)a,$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{\frac{1}{2}M + m_1 + m_2}g.$$

Helyettesítsük be a paraméterek értékeit és számítsuk ki $a$-t:

$$a = \frac{6-4}{\frac{1}{2}\cdot 10 + 4 + 6}\cdot 9{,}81 = 1{,}308\,\mathrm{m/s^2}.$$

A szöggyorsulás:

$$\beta = \frac{a}{R} = \frac{1{,}308}{0{,}15} = 8{,}72\,\mathrm{1/s^2}.$$

A fonál végére akasztott testek álló helyzetből indulva, egyenletesen gyorsuló mozgást végeznek. Az általuk megtett utat a korábbiakban tanultak szerint tudjuk kiszámolni:

$$s = \frac{1}{2}at^2.$$

Mivel találkozásukig, azaz amikor azonos szintbe kerülnek $25 - 25\,\mathrm{cm}$ utat tesznek meg, meg tudjuk határozni az indulástól a találkozásukig eltelt időt:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}25}{1{,}308}} = 0{,}6183\,\mathrm{s}.$$

A korong ezalatt az idő alatt álló helyzetből indulva egyenletesen gyorsuló forgó mozgást végez. Az elért szögsebesség:

$$\omega = \beta \cdot t = 8{,}72 \cdot 0{,}62 = 5{,}391\ 1/\mathrm{s}.$$

---

**17.4. feladat:** Egy $L = 2\,\mathrm{m}$ hosszúságú homogén, állandó keresztmetszetű vékony rúd vízszintes talajon függőleges helyzetben áll. A rúd úgy dől el, hogy eközben a rúd alsó vége a talajon nem csúszik meg. Mekkora sebességgel csapódik a talajhoz a rúd felső vége?

**Megoldás:** A rúd a dőlése során rögzített tengely körül forgómozgást végez, miközben a kezdeti helyzeti energiája forgási energiává alakul:

$$mgh = \frac{1}{2}\Theta\omega^2.$$

Mivel a rúd homogén és állandó keresztmetszetű, ezért tömegközéppontja $L/2$ távolságban van a végpontoktól. Ezért

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2.$$

A rúd tehetetlenségi nyomatéka az egyik végén átmenő tengelyre vonatkoztatva:

$$\Theta = \frac{1}{3}mL^2,$$

ezért

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega^2.$$

Egyszerűsítsünk és fejezzük ki $\omega$-t:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}.$$

Mivel az eldőlő rúd körmozgást végez, a szögsebesség ismeretében meghatározható a forgástengelytől adott távolságra lévő tömegpontjának kerületi sebessége. Mivel a rúd felső vége $L$ távolságban van a forgástengelytől:

$$v = \omega \cdot L = \sqrt{\frac{3g}{L}} \cdot L = \sqrt{3gL},$$

$$v = \sqrt{3gL} = \sqrt{3 \cdot 9{,}81 \cdot 2} = 7{,}67\,\text{m/s}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Hány centiméterre van az egymással érintkező alumínium és rézlemezek közös súlypontja az alumínium lemez középpontjától? Az alumínium lemez sugara $7{,}5$ cm, a rézlemezé pedig $2{,}5$ cm és vastagságuk azonos!
   A súlypont távolsága az alumínium lemez középpontjától (cm): ____
   Megold.
2. Vízszintes tengely körül forgatható $10$ kg tömegű és $15$ cm sugarú korong kerületére csavart fonál végére $1{,}5$ kg tömegű testet függesztünk. Mekkora a korong szöggyorsulása?
   A korong szöggyorsulása ($1/s^2$): ____ Megold.
3. Egy 30 fokos hajlásszögű lejtőn $50$ kg tömegű és $75$ cm sugarú korong csúszás nélkül gördül. Mekkora sebességgel éri el a lejtő alját $5$ m út megtétele után?
   A korong sebessége a lejtő alján (m/s): ____ Megold.

# 11. LECKE

## Deformálható testek mechanikája

## 18. Deformálható testek mechanikája

**18.1. feladat:** Mekkora erő nyújtja meg a $18{,}93\,\mathrm{m}$ hosszú, $5\,\mathrm{mm}$ átmérőjű acéldrótot $13\,\mathrm{mm}$-rel? Mennyivel nyújtható meg a drót anélkül, hogy maradandó alakváltozást szenvedne, ha a rugalmasság határa $230\,\mathrm{N/mm^2}$? ($E = 200000\,\mathrm{N/mm^2}$)

**Megoldás:** A Hook-törvény értelmében az acéldrót $\Delta l$ megnyúlása arányos $F$-fel, a nyújtó erővel, ha $\Delta l$ elég kicsi:

$$\Delta l = l_0 \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A}.$$

Fejezzük ki a keresett nyújtóerőt:

$$F = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot EA,$$

ahol az $5\ mm$ átmérőjű acéldrót keresztmetszete

$$A = r^2\pi = 2{,}5^2\pi = 19{,}635\,\mathrm{mm^2}.$$

Behelyettesítve:

$$F = \frac{13 \cdot 10^{-3}}{18{,}93} \cdot 200000 \cdot 19{,}635 = 2697\,\mathrm{N}.$$

Mivel a rugalmasság határa

$$\frac{F}{A} = 230\,\mathrm{N/mm^2},$$

ezért

$$\Delta l = 18{,}93 \cdot \frac{1}{200000} \cdot 230 = 0{,}022\,\mathrm{m} = 22\,\mathrm{mm}.$$

---

**18.2. feladat:** Mennyivel nyúlik meg a csupán a részecskéire ható nehézségi erő következtében az $l = 100\,\mathrm{m}$ hosszúságú, felső végén rögzített függőlegesen lefelé lógó rézhuzal? ($E = 120000\,\mathrm{N/mm^2}$)

**Megoldás:** Képzeletben daraboljuk fel a rézhuzalt $n$ egyenlő részre és az egyes részeket kössük össze valamilyen nyújthatatlan fonállal. Ekkor az egyes részek hossza $l/n$, tömege pedig $l/n \cdot A \cdot \rho$ lesz, ahol $A$ a rézdrót keresztmetszete, $\rho$ pedig a sűrűsége. Ha kiszámítjuk a rézhuzal egyes darabjainak a megnyúlását, majd azokat összeadjuk, megkapjuk a teljes megnyúlást.

Vegyük alulról az $i$-edik, az ábránkon fekete színnel megjelölt szakaszt. Ezt a rézhuzal darabot az alatta lévő $i-1$ rézhuzal darabra és az $M$ tömegű nehezékre ható nehézségi erő nyújtja. Ennek nagysága:

$$F_i = (i-1) \cdot l/n \cdot A \cdot \rho \cdot g + Mg.$$

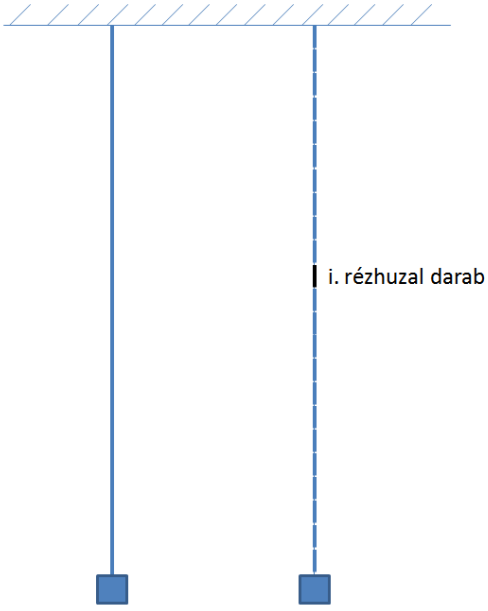
A Hook-törvény értelmében az $i$-edik rézhuzal szakasz megnyúlása:

$$\Delta l_i = l_{i0} \cdot \frac{1}{EA} \cdot F_i.$$

Behelyettesítve $l_{i0}$-t és $F_i$-t:

$$\Delta l_i = \frac{l}{n} \cdot \frac{1}{EA} \cdot \left[(i-1) \cdot \frac{l}{n} \cdot A \cdot \rho \cdot g + Mg\right].$$

Alakítsuk át a kifejezésünket az alábbiak szerint:




18.1. ábra. *Magyarázó ábra a 18.2. feladathoz*

$$\Delta l_i = (i-1)\frac{l^2}{n^2}\frac{\rho g}{E} + \frac{lMg}{nEA},$$

$$\Delta l_i = i\frac{l^2}{n^2}\frac{\rho g}{E} - \frac{l^2}{n^2}\frac{\rho g}{E} + \frac{lMg}{nEA}.$$

Így a rézhuzal teljes megnyúlása:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \left[ i \frac{l^2}{n^2} \frac{\rho g}{E} - \frac{l^2}{n^2} \frac{\rho g}{E} + \frac{lMg}{nEA} \right].$$

Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\Delta l = \frac{l^2}{n^2} \frac{\rho g}{E} \sum_{i=1}^{n} i - \frac{l^2}{n^2} \frac{\rho g}{E} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{lMg}{nEA} \sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$$\frac{l^2}{n^2} \frac{\rho g}{E} \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \frac{l^2}{n^2} \frac{\rho g}{E} \cdot n + \frac{lMg}{nEA} \cdot n =$$

$$\frac{l^2 \rho g}{2E} \cdot \frac{n-1}{n} - \frac{l^2}{n} \frac{\rho g}{E} + \frac{lMg}{EA} =$$

$$\frac{l^2 \rho g}{2E} + \frac{lMg}{EA} - \left[ \frac{l^2 \rho g}{2E} + \frac{l^2 \rho g}{E} \right] \frac{1}{n}.$$

Eredményünk annál pontosabb lesz, minél több részre daraboljuk a rézhuzalt. $n \to \infty$ esetén:

$$\Delta l = \frac{l^2 \rho g}{2E} + \frac{lMg}{EA}.$$

Így az $l = 100\ m$ hosszúságú, felső végén rögzített függőlegesen lefelé lógó rézhuzal megnyúlása a részecskéire ható nehézségi erő következtében:

$$\Delta l = \frac{l^2 \rho g}{2E} = \frac{100^2 \cdot 8960 \cdot 9{,}81}{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{11}} = 3{,}66 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 3{,}66\,\mathrm{mm}.$$

**18.3. feladat:** Egy $l = 12{,}5\,\text{cm}$ hosszú, $a = 1{,}5\,\text{cm}$ széles és $b = 0{,}5\,\text{mm}$ vastag acéllemez egyik végét rögzítjük, a másik végéhez pedig egy $m = 0{,}5\,\text{kg}$ tömegű testet erősítünk. A test tömegéhez képest a lemez tömege elhanyagolható. A lemez végét a rá rögzített testtel együtt kissé kitérítjük, majd magára hagyjuk. Határozzuk meg a kis kitérések esetén létrejövő harmonikus rezgőmozgás rezgésidejét. ($E = 200000\,\text{N/mm}^2$)

**Megoldás:** Ha egy acéllemezt egyik végén rögzítjük, a másik végét pedig az egyensúlyi helyzetéből kitérítünk, akkor az egyensúlyi helyzet irányába ható rugalmas erők ébrednek az acélszálban. Kis kitérések esetén ez az erő a következő alakban írható fel:

$$F = -\frac{E}{4}\frac{ab^3}{l^3} \cdot x,$$

ahol $x$ a lemez végpontjának távolsága az egyensúlyi helyzettől.

Ha a lemez végét elengedjük, akkor a rá rögzített $m$ tömegű testre ilyen nagyságú visszatérítő erő hat. Minden olyan esetben azonban, ha az egyensúlyi helyzetéből kitérített testre a kitéréssel arányos visszatérítő erő hat ($F = -Dx$), harmonikus rezgőmozgás fog kialakulni. Ebben az esetben

$$D = \frac{E}{4}\frac{ab^3}{l^3} = \frac{2 \cdot 10^{11}}{4} \cdot \frac{1{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-3})^3}{(12{,}5 \cdot 10^{-2})^3} = 48\,\text{N/m}.$$

Így a rezgésidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}5}{48}} = 0{,}64\,\text{s}.$$

**18.4. feladat:** Felső végénél rögzített $l = 50\,\text{cm}$ hosszú és $d = 2{,}5\,\text{mm}$ átmérőjű rugalmas huzal aljára $R_k = 10\,\text{cm}$ sugarú, $m = 1{,}5\,\text{kg}$ tömegű korongot erősítünk. A korong síkja vízszintes, és a huzal a korong középpontján megy át. Ha a korongot az egyensúlyi helyzetéből egy kicsit elcsavarjuk, majd magára hagyjuk, a korong forgó rezgést végez. Mennyi a rezgésidő, ha a szál torziómodulusa $G = 80000\,\text{N/mm}^2$?

**Megoldás:** Ha a felső végén rögzített rugalmas huzal alsó végét az egyensúlyi helyzetből kicsit elcsavarjuk, akkor olyan erők ébrednek a huzalban, amelyek igyekeznek a huzal elcsavarodását megszüntetni. Ezeknek a deformáció ellen ható erőknek a forgatónyomatéka arányos az elcsavarodás szögével:

$$M = -\frac{\pi G}{2} \cdot \frac{R^4}{l} \cdot \varphi = -D^* \cdot \varphi.$$

Ha a huzal aljára egy korongot rögzítünk, akkor a huzal elcsavarásával a korongra is ugyanekkora forgatónyomaték hat, aminek következtében a korong forgó mozgást végez. A forgómozgás dinamikai alapegyenlete értelmében:

$$\Theta \cdot \beta = M,$$

ahol $\Theta = (1/2)mR_k^2$ a korong tehetetlenségi nyomatéka, $\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ a korong szöggyorsulása.

Írjuk be $\beta$-t és $M$-et a dinamikai alapegyenletbe:

$$\Theta \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D^* \cdot \varphi.$$

A fenti differenciálegyenletet megoldva megkaphatjuk a forgómozgást leíró $\varphi(t)$ függvényt. Mi azonban egy egyszerűbb utat választunk a rezgésidő meghatározásához. Vegyük észre, hogy a korong forgómozgására felírt dinamikai alapegyenlet alakilag hasonló a harmonikus rezgőmozgás dinamikai egyenletéhez:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -D \cdot x.$$

Ebből arra a következtetésre juthatunk, hogy a korong is harmonikus forgó rezgőmozgást fog végezni. A rezgésidő a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

analógiájára:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}.$$

Számítsuk ki $\Theta$ és $D^*$ értékét:

$$\Theta = \frac{1}{2}mR_k^2 = \frac{1}{2}1{,}5 \cdot 0{,}1^2 = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kgm}^2,$$

$$D^* = \frac{\pi G}{2} \cdot \frac{R^4}{l} = \frac{3{,}14 \cdot 8 \cdot 10^{10}}{2} \cdot \frac{(1{,}25 \cdot 10^{-3})^4}{0{,}5} = 0{,}6136\,\mathrm{Nm}.$$

Végül a keresett rezgésidő:

$$T = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{7{,}5 \cdot 10^{-3}}{0{,}6136}} = 0{,}695\,\mathrm{s}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Hány méter hosszú rézdrótot nyújt meg a rá függesztett $6{,}6\,\text{kg}$ tömegű test $7{,}6\,\text{mm}$-rel, ha a drót átmérője $3{,}5\,\text{mm}$? ($E = 120000\,\text{N/mm}^2$)
   A rézdrót hossza (m): Megold.
2. Hány méter hosszú "kötél" szakadna el a saját súlya alatt, ha a szakítószilárdság $560\,\text{N/mm}^2$, és a kötél anyagának sűrűsége $12{,}3\,\text{kg/dm}^3$?
   A "kötél" hossza (m): Megold.
3. Egy $30\,\text{cm}$ hosszú, $1{,}5\,\text{cm}$ széles és $1\,\text{mm}$ vastag műanyag vonalzó egyik végét rögzítjük, a másik végéhez pedig egy $200\,\text{g}$ tömegű testet erősítünk. A test tömegéhez képest a lemez tömege elhanyagolható. A lemez végét a rá rögzített testtel együtt kissé kitérítjük, majd magára hagyjuk. A kis kitérések esetén létrejövő harmonikus rezgőmozgás rezgésidejét $0{,}7\,\text{s}$-nak mértük. Adjuk meg a vonalzó anyagának Young-modulusát $\text{N/mm}^2$-ben!
   A vonalzó anyagának Young-modulusa ($\text{N/mm}^2$): Megold.
4. Ismeretlen anyag torziómodulusának meghatározása céljából egy $50\,\text{cm}$ hosszúságú, $2\,\text{mm}$ átmérőjű huzalt készítünk, amelynek a végére egy $40\,\text{cm}$ hosszú és $0{,}5\,\text{kg}$ tömegű, henger alakú, homogén rudat erősítünk. A huzalt a rúd közepéhez kötjük úgy, hogy a rúd vízszintes helyzetű legyen. A rudat rezgésbe hozva megmérjük a rezgésidőt. Mennyi az anyag torziómodulusa $\text{N/mm}^2$-ben, ha $T = 1\,\text{s}$ rezgésidőt mértünk? ($\Theta = \frac{1}{12}mL^2$)
   A torziómodulus nagysága ($\text{N/mm}^2$): Megold.

# 12. LECKE

## Rezgőmozgás I.

## 19. Rezgőmozgás I.

**19.1. feladat:** Egy „bungee jumping" ugrás után az ugró a gumikötélen $5\,\mathrm{m}$ amplitúdójú, $0{,}125\,\mathrm{Hz}$ frekvenciájú harmonikus rezgőmozgást végez. Az időmérés kezdőpontját válasszuk meg úgy, hogy a kezdőfázis $\varphi_0 = 0$ legyen. Határozzuk meg az ugró kitérését és sebességét a következő időpillanatokban:
a) $0{,}25\,\mathrm{s}$, b) $0{,}5\,\mathrm{s}$ és c) $1{,}0\,\mathrm{s}$.

**Megoldás:** A rezgések körfrekvenciája:

$$\omega_0 = 2\pi f = 0{,}25\pi\,\mathrm{s}^{-1}.$$

A rezgések kitérés – idő függvénye és sebesség – idő függvénye a következő alakban írhatók:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = 5 \cdot \sin(0{,}25\pi t),$$

$$v(t) = \omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 1{,}25\pi \cdot \cos(0{,}25\pi t).$$

Helyettesítsük a fenti összefüggésekbe a feladatban meghatározott időpillanatokat!

a)
$$x(t = 0{,}25\,\mathrm{s}) = 0{,}98\,\mathrm{m}, \quad v(t = 0{,}25\,\mathrm{s}) = 3{,}85\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

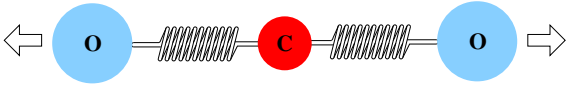
b)
$$x(t = 0{,}50\,\mathrm{s}) = 1{,}91\,\mathrm{m}, \quad v(t = 0{,}50\,\mathrm{s}) = 3{,}63\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

c)
$$x(t = 1{,}00\,\mathrm{s}) = 3{,}54\,\mathrm{m}, \quad v(t = 1{,}00\,\mathrm{s}) = 2{,}78\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Megjegyzés: Ne feledkezzünk meg arról, hogy a szögfüggvények argumentumában szereplő mennyiségek *radián*ban értendőek!

**19.2. feladat:** A széndioxid molekula egyszerűen modellezhető úgy, mint három golyó, amelyek egy egyenes mentén helyezkednek el középen a szén atomjával, miközben a szén- és oxigénatomok közötti kölcsönhatás leírható egy – egy lineáris rugóerővel. (Az ilyen molekulák rezgései elnyelik az infravörös hősugarakat, és ez a folyamat is hozzájárul a globális felmelegedés jelenségéhez.)
A széndioxid molekula egyik rezgési módusa úgy modellezhető, hogy a szénatom egy helyben áll, míg a két oxigénatom harmonikus rezgőmozgást végez ellentétes irányban. Ha az effektív „rugóállandó" $1{,}7\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, mekkora a rezgési frekvencia?

**Megoldás:** A vizsgált modellben a szén atomja áll. Ezért a két oxigénatom úgy mozog, mintha egy – egy rugón rezegnének egymástól függetlenül.




19.1. ábra. *A széndioxid molekula modellje*

Az oxigén relatív atomtömege a Mengyelejev – féle periódusos rendszer alapján $M_O = 16\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$. Egy mól anyagmennyiség mindig $N_A = 6\cdot 10^{23}$ elemi összetevőt tartalmaz, ami ez esetben oxigénatom. Tehát egy oxigénatom tömege:

$$m_O = \frac{M_O}{N_A} = 2{,}67\cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}.$$

Mivel a szénatom és oxigénatom közti erőhatást modellező rugóerő $D$ effektív „rugóállandója" ismert, így írhatjuk, hogy a $\nu$ rezgési frekvencia:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} = 4\cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz}.$$

**19.3. feladat:** Tekintsünk egy $0{,}2\,\mathrm{kg}$ tömegű testet, amelyik egy rugón harmonikus rezgéseket végez. Ha a test tömegét megnöveljük, akkor a periódusidő 20 % – kal növekszik meg. Mekkora volt a tömegnövekedés?

**Megoldás:** Jelölje $T_0$ a tömegnövekedés nélküli esetben a rezgések periódusidejét, míg $T_1$ a rezgések periódusidejét, amikor a megnövelt tömegű test rezeg.

Ezek a periódusidők kifejezhetők a rezgő tömeggel és a $D$ direkciós állandóval:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{D}},$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 + \Delta m}{D}}.$$

$\Delta m$ a keresett tömegnövekedést jelöli.

A feladat szövege alapján:

$$\frac{T_1}{T_0} = 1{,}2.$$

A fenti egyenletbe helyettesítve a periódusidőket meghatározó összefüggéseket azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt{1 + \frac{\Delta m}{m_0}} = \frac{T_1}{T_0} = 1{,}2.$$

Innen $\Delta m$ kifejezhető.

$$\Delta m = \left(\frac{T_1^2}{T_0^2} - 1\right) \cdot m_0 = 0{,}088\,\mathrm{kg}.$$

**19.4. feladat:** Egy rugót a plafonon rögzítünk és úgy lógatunk le, hogy a másik végére egy testet akasztunk. Ez a test, míg egyensúlyba nem kerül, a nyújtatlan rugót $d$ hosszal nyújtja meg. Ha a rugót tovább nyújtjuk, majd elengedjük, akkor a végére akasztott test $1{,}04\,\mathrm{s}$ periódusidejű harmonikus rezgéseit figyelhetjük meg. Mekkora volt a rugó $d$ megnyúlása?

**Megoldás:** A test akkor kerül egyensúlyba, amikor a gravitációs vonzást kiegyensúlyozza a rugó tartóereje, azaz:

$$mg = Dd,$$

ahonnan:

$$D = \frac{mg}{d}.$$

A test rezgéseinek periódusidejét meghatározhatjuk a test tömegéből és a rugó direkciós állandójából a következő módon:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}.$$

A periódusidőt meghatározó összefüggésbe helyettesítsük a direkciós állandóra kapott fenti összefüggést. Egyszerűsítések után (melyek során kiesik a test tömege is!) kapjuk, hogy:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}.$$

Innen a keresett $d$ megnyúlás már meghatározható:

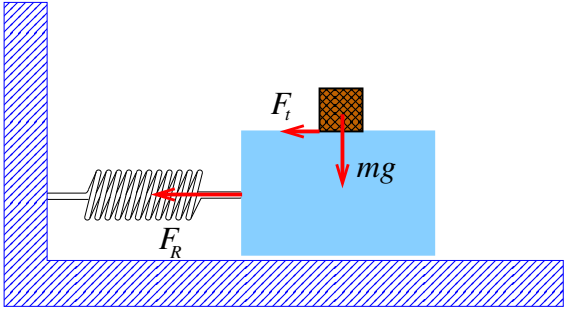
$$d = \frac{gT_0^2}{4\pi^2} = 0{,}27\,\mathrm{m}.$$

**19.5. feladat:** Egy vízszintes rugó egyik végét rögzítjük, a másik végéhez pedig egy $0{,}23\,\mathrm{kg}$ tömegű légpárnás kocsit kapcsolunk. Ez a kocsi a vízszintes síkon súrlódás nélkül mozoghat. A rugóállandó $25\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.
A kocsi tetején egy $0{,}11\,\mathrm{kg}$ tömegű fakocka foglal helyet. A kocsi és a fakocka közti tapadási súrlódási együttható értéke $0{,}14$.
a) Amikor a két test együttesen rezeg a rugón, mekkora a rezgéseik periódusideje?
b) Legfeljebb mekkora lehet a rezgések amplitúdója, ha azt akarjuk, hogy a fakocka ne csússzon meg a légpárnás kocsi tetején?

**Megoldás:** a) Amikor a két test együttesen mozog, akkor a kialakuló rezgések periódusideje:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_k + m_f}{D}} = 0{,}73\,\mathrm{s}.$$

$m_k$ - a légpárnás kocsi tömege, $m_f$ - fakocka tömege, $D$ - rugóállandó




19.2. ábra

b) A fakockát a tapadási súrlódás mozgatja együtt a légpárnás kiskocsival. Ez biztosítja a fakocka azonos gyorsulását a kocsival. (Lásd 19.2. ábrát!)

A tapadási súrlódásnak azonban van egy maximális értéke, amit a $\mu_0$ tapadási súrlódási együttható, valamint a súrlódó felületeket összenyomó erő határoznak meg:

$$F_t^{max} = \mu_0 m_f g = 0{,}15\,\mathrm{N}.$$

Amikor a rendszer $A$ amplitúdójú rezgéseket végez, akkor a maximális gyorsulás értéke:

$$a_{max} = \omega_0^2 \cdot A = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot A.$$

A tapadási súrlódásnak a fakocka ezen gyorsulását is biztosítania kell. Ez addig lehetséges, míg az ehhez szükséges erő kisebb vagy egyenlő mint a tapadási súrlódási erő maximuma, azaz:

$$m_f \cdot \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot A \leq \mu_0 m_f g$$

Innen az aplitúdóra a következő korlátozást kapjuk:

$$A \leq \frac{\mu_0 g T_0^2}{4\pi^2} = 0{,}019\,\mathrm{m}.$$

Tehát a fakocka addig nem csúszik meg a légpárnás kocsi tetején, míg a közös rezgések amplitúdója el nem éri az $1{,}9$ cm-t.

**19.6. feladat:** Egy dugattyú függőleges, $5$ Hz frekvenciájú harmonikus rezgéseket végez. A dugattyú tetejére egy pénzérmét helyeztünk.
Legfeljebb mekkora lehet a dugattyú rezgéseinek amplitúdója, hogy a pénzérme ne kezdjen el „csörömpölni" a dugattyún?

**Megoldás:** A pénzérmét a dugattyúhoz az érmére ható gravitációs erő nyomja, melynek nagysága:

$$F_g = m_p g.$$

Az érme és a dugattyú addig érintkeznek (azaz nincs csörömpölés), amíg a dugattyú gyorsulása kisebb, mint a gravitációs gyorsulás:

$$a_d \leq g.$$

Mivel a dugattyú harmonikus rezgőmozgást végez, ezért gyorsulása minden pillanatban változik. Legnagyobb a mozgás szélső helyzeteiben lesz. Ennek a maximális gyorsulásnak a nagysága:

$$a_{max} = \omega_0^2 \cdot A = 4\pi^2 f^2 \cdot A.$$

Tehát addig nem csörömpöl a pénzérme a dugattyún, amíg a rezgés maximális gyorsulása is kisebb mint a gravitációs gyorsulás, azaz:

$$4\pi^2 f^2 \cdot A \leq g.$$

A fenti összefüggésből a rezgések amplitúdójára kapunk korlátozást:

$$A \leq \frac{g}{4\pi^2 f^2} = 0{,}01\,\text{m}.$$

Tehát a pénzérme mindaddig nem fog csörömpölni a dugattyú tetején, míg a dugattyú rezgőmozgásának amplitúdója kisebb lesz mint $1$ cm.

**19.7. feladat:** Egy rezgő test tömege $1{,}06\,\text{kg}$, és egy $94\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ direkciós állandójú rugón rezeg $0{,}56\,\text{m}$ amplitúdóval.
a) Határozza meg a rendszer mechanikai energiáját!
b) Határozza meg a rezgő tömeg sebességét akkor, amikor annak az egyensúlyi helyzettől mért kitérése $-0{,}21\,\text{m}$!
c) A teljes mechanikai energia hány százalékát teszi ki a mozgási energia akkor amikor a rezgő test egyensúlyi helyzettől mért kitérése $0{,}5\,\text{m}$?

**Megoldás:** a) A rezgő rendszer összes mechanikai energiája meghatározható a rezgő rendszer amplitúdója, valamint a rugó direkciós állandója alapján:

$$E_0 = \frac{1}{2}D\cdot A^2 = 14{,}74\,\text{J}.$$

b) Amikor a rezgő tömeg egyensúlytól mért $x_1$ kitérése kisebb mint az amplitúdó, akkor a teljes mechanikai energia egy része mozgási energia, egy része pedig rugalmassági potenciális energia, tehát:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2.$$

Innen az adott kitéréskori sebesség meghatározható:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_0 - Dx_1^2}{m}} = 4{,}89\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

c)Amikor a test kitérése $x_2 = 0{,}5\,\text{m}$, akkor a mozgási energia:

$$E_k = E_0 - \frac{1}{2}Dx_2^2 = 2{,}99\,\text{J}.$$

Ez a mozgási energia a teljes mechanikai energia

$$E_{k\%} = 100\cdot\frac{E_k}{E_0} = 20{,}3\,\%\text{-a}.$$

**19.8. feladat:** Egy $0{,}16\,\mathrm{kg}$ tömegű jégkorong súrlódásmentesen csúszik a jégen $5{,}5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ sebességgel. Ez a korong nekiütközik egy $15\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ direkciós állandójú, vízszintes rugó végének, és hozzáragad. Határozza meg a kialakuló harmonikus rezgések amplitúdóját és periódusidejét!

**Megoldás:** Amikor a korong nekiütközik a rugó végének, akkor mozgási energiája rovására elkezdi összenyomni a rugót. Ez addig tart, amíg a korong összes mozgási energiája az elvégzett deformációs munka által át nem alakul a rugó rugalmassági potenciális energiájává, azaz:

$$\frac{1}{2}m_k v_k^2 = \frac{1}{2}D\Delta x_0^2.$$

Ebből az összenyomódás mértéke:

$$\Delta x_0 = \sqrt{\frac{m_k v_k^2}{D}} = 0{,}57\,\mathrm{m}.$$

Ezután a rugó elkezdi visszafelé gyorsítani a hozzáragadt tömeget. Ennek az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor lesz maximális sebessége, melynek nagysága éppen $5{,}5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Azaz jól láthatóan egy harmonikus rezgőmozgás alakul ki, melynek amplitúdója:

$$A = \Delta x_0 = 0{,}57\,\mathrm{m}.$$

A periódusidőt a rezgő tömeg és a direkciós állandó határozzák meg a következő összefüggés szerint:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_k}{D}} = 0{,}65\,\mathrm{s}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Egy $10\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ rugóállandójú rugón $2\,\mathrm{kg}$ tömegű test rezeg $10\,\mathrm{cm}$ - es amplitúdóval.
   a) Mekkora a kialakuló rezgések maximális sebessége? (SI egységben mérve.)
   A maximális sebesség (m/s): Megold.
   b) Mekkora a kialakuló rezgések maximális gyorsulása? (SI egységben mérve.)
   A maximális gyorsulás ($m/s^2$): Megold.
2. Egy $250\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ rugóállandójú rugó egyik végére $2\,\mathrm{kg}$ tömegű testet akasztunk. A rugó másik végét a plafonhoz rögzítjük. A testet egyensúlyi helyzetéből kitérítjük, majd magára hagyjuk. Mekkora a kialakuló rezgés periódusideje? (SI egységben mérve.)
   A rezgés periódusideje (s): Megold.
3. Egy $0{,}5\,\mathrm{kg}$ tömegű test $2\,\mathrm{s}$ - os harmonikus rezgéseket végez $2\,\mathrm{cm}$ - es amplitúdóval.
   a) Mekkora a direkciós állandó? (SI egységben mérve.)
   A direkciós állandó (N/m): Megold.
   b) Mekkora a test sebessége akkor, amikor pillanatnyi kitérése $1\,\mathrm{cm}$? (SI egységben mérve)
   A test pillanatnyi sebessége (m/s): Megold.
4. Egy $50\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ rugóállandójú rugó egyik végére $2\,\mathrm{kg}$ tömegű testet akasztunk. Ha testet rezgésbe hozzuk, mennyi időbe telik, míg egyensúlyi helyzetéből először éri el a maximális kitérésű állapotot? (SI egységben mérve.)
   A keresett időtartam (s): Megold.

# 13. LECKE

## Rezgőmozgás II.

## 20. Rezgőmozgás II.

**20.1. feladat:** Egy ingaóra ingájának hossza a hőtágulás miatt $5 \cdot 10^{-5}$ relatív megnyúlást szenvedett el. Mennyit késik, vagy siet ez az óra ennek következtében egy nap alatt?

**Megoldás:** Az ingaóra működési elve a következő: egy teljes lengés után a másodpercmutató egyet ugrik előre. Tehát amikor az óra pontosan jár, akkor egy nap alatt $86400$-at ugrik a másodpercmutató, ami ez esetben pontosan $86400$ másodpercnek felel meg.

Egy $l_0$ hosszúságú matematikai inka lengésideje a következő módon függ az inga hosszától:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_0}{g}},$$

$g$ - a gravitációs gyorsulás.

Ha az inga hossza megnövekszik $\Delta l$ értékkel a hőtágulás miatt, akkor lengésideje is változik:

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_0 + \Delta l}{g}}.$$

Képezzük a két idő hányadosát:

$$\frac{T_1}{T_0} = \sqrt{1 + \frac{\Delta l}{l_0}} = 1 + 2{,}5 \cdot 10^{-5},$$

ahol $\frac{\Delta l}{l_0} = 5 \cdot 10^{-5}$ - a relatív megnyúlás.

Látható, hogy a hosszabb inga esetében a másodperc mutató egy előre ugrása nem másodpercenként, hanem $(1 + 2{,}5 \cdot 10^{-5})$ másodpercenként következik be.

Tehát míg a másodpercmutató $86400$ - at ugrik, addig valójában – a hosszab inga miatt:

$$(1 + 2{,}5 \cdot 10^{-5}) \cdot 86400 = 86402\,\mathrm{s}$$

telik el.

Ez azt jelenti, hogy az adott hőtágulás miatt az ingaóra $2$ másodpercet késik. Egy nap elteltét mutatja, pedig már $2$ másodperccel több idő telt el!

---

**20.2. feladat:** $1{,}1\,\mathrm{kg}$ tömegű test csillapított rezgőmozgást végez. A direkciós állandó $9{,}25\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$, a csillapítási tényező pedig $5{,}5\,\mathrm{s^{-1}}$.
A kialakuló mozgás a csillapított rezgések melyik családjába tartozik?

**Megoldás:** Határozzuk meg a rezgő test saját körfrekvenciáját:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 2{,}9\,\mathrm{s^{-1}}.$$

Mivel a megadott csillapítási tényező ($\beta = 5{,}5\,\mathrm{s^{-1}}$) lényegesen nagyobb mint a saját körfrekvencia, így a kialakuló csillapított rezgés az *erősen csillapított* mozgások családjába tartozik.

---

**20.3. feladat:** $0{,}5\,\mathrm{kg}$ tömegű test csillapított rezgőmozgást végez. A direkciós állandó $12\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$. Azt tapasztaljuk, hogy a rezgések amplitúdója 12 rezgési periódusnyi idő alatt csökken a felére. Mekkora a csillapítási tényező?

**Megoldás:** Először határozzuk meg a rezgő rendszer saját körfrekvenciáját:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 4{,}9\,\mathrm{s}^{-1}.$$

A csillapított rezgések körfrekvenciája a csillapítás miatt kisebb lesz, mint a saját körfrekvencia:

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \frac{2\pi}{T_{cs}},$$

ahol $T_{cs}$ - a csillapított rezgések periódusideje.

A kezdeti amplitúdó csillapodás miatti megfeleződésének ideje a feladat szövege alapján:

$$T_{1/2} = 12 \cdot T_{cs} = 12 \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Vegyük figyelembe az amplitúdó csillapodásának exponenciális jellegét!

$$\frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-\beta T_{1/2}}$$

Az előző egyenlet logaritmizálása után:

$$\ln 2 = \beta T_{1/2} = 12\beta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Innen a csillapítási tényező ($\beta$) kifejezhető:

$$\beta = \frac{\omega_0 \cdot \ln 2}{\sqrt{576\pi^2 + (\ln 2)^2}} = 0{,}045\,\mathrm{s}^{-1}.$$

**20.4. feladat:** Határozza meg a kis csillapítású, csillapított rezgések egy periódusa során elveszített mechanikai energia hányadát!

**Megoldás:** Az $A_0$ kezdeti amplitúdójú csillapított rezgés összenergiája a mozgás kezdetekor:

$$E_0 = \frac{1}{2} D A_0^2.$$

A csillapított rezgések periódusideje:

$$T_{cs} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

ahol $\omega_0$ - a csillapítatlan rezgések saját körfrekvenciája, $\beta$ - a csillapítási tényező.

A rezgés energiája egy csillapítási periódus után:

$$E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{2} D A_0^2 \cdot e^{-2\beta T_{cs}} = E_0 \cdot e^{-2\beta T_{cs}}.$$

Az egy csillapítási periódus során bekövetkező mechanikai energiacsökkenés kezdeti összenergiához mért hányada:

$$\delta E_1 = \frac{E_0 - E_1}{E_0} = 1 - \frac{E_1}{E_0} = 1 - \exp\left(-\frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\right).$$

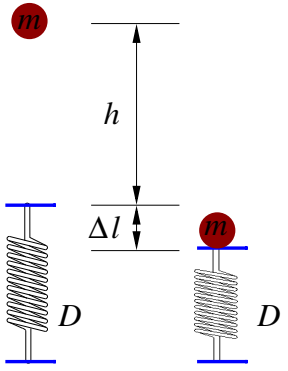
---

**20.5. feladat:** Egy $250\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ direkciós állandójú rugó áll függőlegesen a talajhoz rögzítve. A rugó szabad végére ráejtünk egy $2{,}15\,\mathrm{kg}$ tömegű testtet a rugó ezen végétől számított $25\,\mathrm{cm}$ – es magasságból úgy, hogy a test hozzáragad a rugó végéhez.

a) Milyen mértékben nyomódik össze a rugó?

b) Mekkora lesz a kialakuló rezgések amplitúdója és periódusideje?

Megoldás: a) A 20.1. ábra alapján írjuk fel a kiindulási állapot (bal oldali ábrarész), valamint a maximálisan összenyomott rugó állapota (jobb oldali ábrarész) között a mechanikai energia megmaradásának tételét!




20.1. ábra. *Rugóra szabadon eső golyó esete*

$$mgh + mg\Delta l = \frac{1}{2}D\Delta l^2$$

Az energiamegmaradás törvényét nullára rendezve egy másodfokú egyenletet kapunk $\Delta l$ - re.

$$\frac{1}{2}D\Delta l^2 - mg\Delta l - mgh = 0$$

Az előző egyenlet megoldásai:

$$(\Delta l)_{1,2} = \frac{mg}{D} \pm \frac{\sqrt{m^2g^2 + 2Dmgh}}{D},$$

$$\Delta l_1 = 0{,}3\,\mathrm{m}, \quad \Delta l_2 = -0{,}14\,\mathrm{m}.$$

A negatív összenyomódás ($\Delta l_2$) fizikai megfontolások alapján kizárható.

b) Az amplitúdó az egyensúlyi állapottól mért maximális kitérés. A golyó egyensúlyi helyzetét a rugón az határozza meg, hogy a rugóra helyezett golyó súlyereje a rugót addig nyomja össze, amíg az ébredő, a súlyerővel ellentétes irányú rugóerő nagysága egyenlő nem lesz a súlyerőével. Azaz:

$$mg = D\Delta l_0.$$

Innen:

$$\Delta l_0 = 0{,}08\,\mathrm{m}.$$

Az kialakuló rezgések amplitúdója a maximális összenyomódás és az egyensúlyi összenyomódás különbsége:

$$A = \Delta l_1 - \Delta l_0 = 0{,}22\,\mathrm{m}.$$

A rezgések periódusideje pedig:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 0{,}58\,\mathrm{s}.$$

---

**20.6. feladat:** Egy $1{,}5\,\mathrm{kg}$ tömegű pontszerűnek tekinthető test az $F(x) = 10e^{x^2} - 20$ erőfüggvény hatása alatt mozog. Határozza meg a test kis amplitúdójú rezgéseinek periódusidejét! (Minden mennyiség SI mértékegységekben tekintendő.)

**Megoldás:** Először az egyensúlyi helyzeteket kell meghatározni. Ehhez a

$$10e^{x^2} - 20 = 0$$

egyenletet kell megoldani. Az egyensúlyi helyzetek koordinátái:

$$x_1 = \sqrt{\ln 2}, \quad x_2 = -\sqrt{\ln 2}.$$

Rezgés azon egyensúlyi helyzet körül alakulhat ki, amelyik egyensúlyi helyzet stabil, azaz az erőfüggvény deriváltja ebben az egyensúlyi helyzetben *negatív*. Az erőfüggvény deriváltja:

$$F'(x) = 20x \cdot e^{x^2}.$$

$$F'(x_1) = 33{,}3\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1} \geq 0, \;\; F'(x_2) = -33{,}3\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1} \leq 0.$$

Tehát az $x_2$ koordinátájú egyensúlyi helyzet körül alakulhatnak ki rezgések. Amennyiben ezek a rezgések kis amplitúdójúak, akkor körfrekvenciájuk:

$$\omega_0 = \sqrt{-\frac{F'(x_2)}{m}} = 4{,}71\,\mathrm{s}^{-1}.$$

A körfrekvencia alapján a periódusidő pedig:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1{,}33\,\mathrm{s}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Egy fonálinga hosszát $10\,\%$ - kal megnöveljük. Hány százalékkal nő a lengésidő?
   A lengésidő növekedése (%): Megold.
2. Egy csillapított rezgőmozgás összenergiája $10\,\mathrm{s}$ alatt csökken a felére. Mekkora a csillapítási tényező? (SI egységekben mérve.)
   A csillapítási tényező nagysága (1/s): Megold.
3. Egy $2\,\mathrm{kg}$ tömegű test az $F(x) = x^2 - 1$ erő hatása alatt mozog.
   a) Mekkora azon egyensúlyi hely koordinátája, amelyik körül rezgések alakulhatnak ki? (SI egységekben mérve.)
   Az egyensúlyi hely koordinátája (m): Megold.
   b) Mekkora a kialakuló kis amplitúdójú rezgések periódusideje? (SI egységekben mérve.)
   A kis amplitúdójú rezgések periódusideje (s): Megold.

# 14. LECKE

## Hullámmozgás

## 21. Hullámmozgás

**21.1. feladat:** Egy $0{,}75\,\mathrm{m}$ hosszú, egyenletes tömegeloszlású fémhúr lineáris tömegsűrűsége $2{,}51 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.
a) Határozza meg az alaphang hullámhosszát ezen a húron!
b) Ha azt szeretnénk, hogy a húr alaphangjának frekvenciája $256\,\mathrm{Hz}$ legyen, mekkora erővel kell feszíteni a húrt?

**Megoldás:** a) Mivel az alaphang ezen a húron egy olyan állóhullám, amely $\lambda_0$ hullámhosszának fele pontosan megegyezik a húr $L$ hosszával, így:

$$\frac{\lambda_0}{2} = L.$$

Ezt átrendezve az alaphang hullámhosszára a következőt kapjuk:

$$\lambda_0 = 2 \cdot L = 1{,}5\,\mathrm{m}$$

b) Az alaphang hullámhosszát, mint azt előbb láthattuk, pusztán csak a húr hossza határozza meg. Az alaphang $v_0$ terjedési sebessége a húr mentén viszont függ a húr $\mu$ lineáris tömegsűrűségétől valamint a húrt feszítő $T$ erőtől is a következő tanult összefüggés szerint:

$$c_0 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Ugyanekkor a terjedési sebesség teremt kapcsolatot a frekvencia és hullámhossz között:

$$c_0 = \lambda_0 \cdot f_0.$$

Az előző két összefüggést összevonva, és abból a feszítőerőt kifejezve, megkapjuk az előállítandó alaphang kért frekvenciáját meghatározó feszítőerőt:

$$T = \mu \cdot \lambda_0^2 \cdot f_0^2 = 37\,\mathrm{N}.$$

**21.2. feladat:** Egy orvosi ultrahang berendezésben $4{,}8\,\mathrm{MHz}$ frekvenciájú ultrahangot használnak.
a) Határozza meg ennek az ultrahangnak a hullámhosszát levegőben, ha a hangsebesség ebben a levegőben $340\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
b) Határozza meg ennek az ultrahangnak a hullámhosszát az izomszövetben, ha a hangsebesség ebben a közegben $1580\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
c) Várhatóan mekkora lesz az izomszövetről készült ultrahangfelvétel térbeli felbontása?

**Megoldás:** a) Mivel a hullámhosszat egyértelműen meghatározza a hullám terjedési sebessége és a frekvencia, így:

$$\lambda_{lev.} = \frac{c_{lev.}}{f_0} = 7{,}1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m},$$

b) míg az izomszövetben:

$$\lambda_{izom} = \frac{c_{izom}}{f_0} = 3{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}.$$

c) Mivel a hullámokkal történő képi megjelenítés térbeli felbontásának a tárgyon történő hullámelhajlás szab határt, ami akkor válik jelentőssé, amikor a hullámhossz és a leképezett tárgy mérete egy nagyságrendbe esnek, ezért az izomszövetről készült ultrahang felvétel elvi térbeli felbontása ebben az esetben a milliméter néhány tizede.

**21.3. feladat:** Két, egymással szembefordított hanszóróból ugyanaz a $86\,\mathrm{cm}$ hulláhoszzúságú hang szól. Amikor a hangszórók között pontosan középen állunk erősítéses interferenciát tapasztalunk. Mennyivel kell elmozdulnunk az egyik hangszóró irányában ahhoz, hogy az első kioltási helyet megtaláljuk?

**Megoldás:** Jelöljük a keresett elmozdulást $\Delta$-val. Ekkor az egyik hangszóróhoz ennyivel közelebb, míg a másik hangszórótól ennyivel távolabb kerülünk. Tehát a hangszóróktól a hang által megtett utak különbsége éppen $2 \cdot \Delta$ lesz.

Az első kioltási helyet ott tapasztaljuk, ahol az útkülönbségre a hullámhossz fele éppen egyszer fér rá, így:

$$2 \cdot \Delta = \frac{\lambda}{2}.$$

Tehát a keresett elmozdulás:

$$\Delta = \frac{\lambda}{4} = 21{,}5\,\text{cm}.$$

---

**21.4. feladat:** Két hegedűn ugyanazt az „A" hangot játszák. Az egyik hegedű helyes hangolású, így a keltett hang $440\,\text{Hz}$ frekvenciájú, de a második hegedű kicsit elhangolódott, így a rajta keltett hang frekvenciája $439{,}6\,\text{Hz}$. Milyen lebegési frekvenciát hallanak ilyenkor a zenészek?

**Megoldás:** A lebegési, vagy lüktetési frekvencia a két, kicsit különböző frekvencia különbsége:

$$f_l = f_1 - f_2 = 0{,}4\,\text{Hz}.$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy a zenészek 10 másodperc alatt négyszer érzékelik a hegedűk együttes hangintenzitásának lecsökkenését, majd felerősödését.

---

**21.5. feladat:** Állóhullámot keltünk egy $78\,\text{cm}$ hosszú húron. Azt tapasztaljuk, hogy a keltett hullám három duzzadóhellyel rendelkezik a rögzített végek között.
a) Mekkora az állóhullám hullámhossza?
b) Mekkora az állóhullám fázissebessége és frekvenciája, ha a húr lineáris tömegsűrűsége $3{,}86 \cdot 10^{-5}\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$, és a húrt feszítő erő $10{,}2\,\text{N}$?

**Megoldás:** a) Mivel a két rögzített vég között három duzzadóhelye van a kialakult állóhullámnak, ezért a húr $L$ hosszára a kialakult állóhullám $\lambda$ hullámhosszának fele háromszor fér rá, azaz:

$$L = 3 \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Az előzőek alapján:

$$\lambda = \frac{2}{3} \cdot L = 52\,\text{cm}.$$

b) A keltett állóhullám fázissebessége:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{10{,}2}{3{,}86 \cdot 10^{-5}}} = 514\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1},$$

míg a frekvenciája:

$$f = \frac{c}{\lambda} = 988{,}5\,\text{Hz}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Víz felszínén $10$ Hz frekvenciával keltünk hullámokat. Ezen hullámok hullámhosszát $2$ centiméternek mérjük. Mekkora sebességgel terjednek a víz színén ezek a hullámok m/s - ban mérve?
   A víz felszínén terjedő hullámok sebessége (m/s): Megold.
2. Egy tengeralattjáró $65\,\mathrm{m}$ - rel a víz alatt mélységmérést végez ultrahanggal. A tengerfenék felé $1530\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ sebességgel hanghullámokat sugároznak. Azt tapasztalják, hogy a „visszhang" $0{,}86\,\mathrm{s}$ múlva ér vissza. Milyen mély ezen a helyen a tenger?
   A tenger mélysége (m): Megold.

# 15. LECKE

## Hangtan

## 22. Hangtan

**22.1. feladat:** Négy méterre egy hangszórótól a hangintenzitás $6{,}2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$.
(a) Mekkora az intenzitásszint ebben a pontban?
(b) Mekkora a hangszóró által sugárzott teljes teljesítmény?
(c) Milyen távolságban kell állni ettől a hangszórótól ahhoz, hogy a hang intenzitásának szintje $58\,\mathrm{dB}$ – re csökkenjen?

**Megoldás:** a) Az intenzitásszint definíciója alapján az $I_1 = 6{,}2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$ intenzitásnak megfelelő intenzitásszint:

$$n_1 = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0} = 77{,}9\,\mathrm{dB}$$

ahol $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$.

b) Ha $A_1$ felületen merőlegesen $P$ teljesítmény halad keresztül, akkor az intenzitás ezen a felületen:

$$I_1 = \frac{P}{A_1}.$$

Mivel a hangszóró méreteinél az $R_1 = 4$ méteres távolság vélhetően sokkal nagyobb, ezért ebből a távolságból a hangszórót pontforrásnak tekinthetjük. Ekkor a hang egy $R_1$ sugarú gömbfelületen halad keresztül, azaz:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi \cdot R_1^2}.$$

Ebből a teljesítmény kifejezhető:

$$P = 4\pi \cdot R_1^2 \cdot I_1 = 12{,}5\,\mathrm{mW}.$$

c) Az $n_2 = 58\,\text{dB}$ intenzitásszintnek megfelelő $I_2$ intenzitás:

$$I_2 = I_0 \cdot 10^{\frac{n_2}{10}} = 6{,}31 \cdot 10^{-7}\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Ilyen intenzitás egy $R_2$ sugarú gömbfelszínen alakul ki. Ezért:

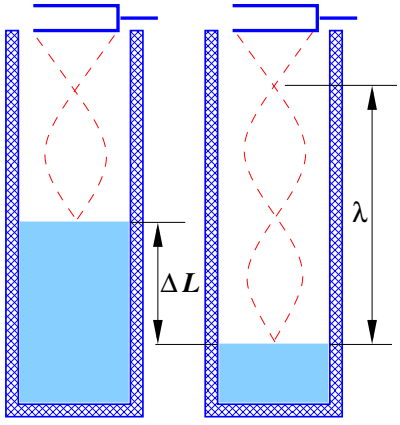
$$I_2 = \frac{P}{4\pi \cdot R_2^2}.$$

Innen $R_2$ kifejezhető:

$$R_2 = \sqrt{\frac{P}{4\pi \cdot I_2}} = 39{,}7\,\text{m}.$$

---

**22.2. feladat:** Egy üveghengerben található víz felett levegő van. Ha az üveghenger szájához egy rezgő hangvillát helyezünk, akkor a hengerben található víz szintjének változtatásával a henger szájánál hallható hang intenzitása is változik. Amikor ez az intenzitás maximális, akkor a hangvilla és a vízfelszín között állóhullám alakult ki. Ezt a jelenséget hangsebesség mérésére is ki lehet használni.
Az egyik mérés során, amelyben $510\,\text{Hz}$ frekvenciával rezgő hangvillát használtunk, azt tapasztaltuk, hogy a henger szájánál hallható hang intenzitása maximálisra nőtt minden alkalommal, amikor a vízszint újabb $33{,}5\,\text{cm}$ – rel csökkent. Mekkora volt a vizsgált hang sebessége?




22.1. ábra. *Egy hangsebességmérési eljárás elvi ábrája*

Megoldás: A vízoszlop felett kialakuló állóhullámnak csomópontja kell legyen a víz felszínén és duzzadóhelye az üveghenger szájánál. (Lásd. 22.1. ábrát) A vízfelszín szintjének csökkenésekor akkor hallunk maximális intenzitást, amikor a kialakult levegőoszlop $L$ hossza éppen egy félhullámhosszal nő meg.

Ezért:

$$\lambda = 2 \cdot \Delta L = 67\,\mathrm{cm}.$$

Mivel a frekvencia ismert, így a hangsebesség most már kiszámolható:

$$c = \nu \cdot \lambda = 341{,}7\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

**22.3. feladat:** Egy sziréna $470\,\mathrm{Hz}$ frekvenciájú figyelmeztető hangjelzést ad le. Mekkora sebességgel közelítünk autónkkal a szirénához, ha ezt a figyelmeztetést mi $510\,\mathrm{Hz}$ frekvenciájúnak halljuk? (A hangsebesség értéke $340\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.)

**Megoldás:** Ha egy hangforráshoz $v_m$ sebességgel közelít egy megfigyelő, akkor az $\nu_1$ magasabb frekvenciát észlel az alábbi összefüggés szerint:

$$\nu_1 = \nu_0 \left(1 + \frac{v_m}{c}\right),$$

ahol $c$ - a hangsebesség.

Innen a megfigyelő $v_m$ sebessége kifejezhető:

$$v_m = \left(\frac{\nu_1}{\nu_0} - 1\right) \cdot c = 28{,}9\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Egy hanghullám intenzitása $10^{-7}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$. Mekkora az ehhez tartozó intenzitásszint?
   A keresett hangintenzitásszint (dB):
   Megold.

2. Egy hegedű G húrja $60\,\mathrm{cm}$ hosszú. A rajta kialakuló alaphang frekvenciája $196\,\mathrm{Hz}$. Mekkora sebességgel terjed ezen a húron a hanghullám? (SI egységekben mérve.)
   A hanghullám terjedési sebessége (m/s):
   Megold.

# 16. LECKE

## A fény és optikai jelenségek

## 23. A fény és optikai jelenségek

**23.1. feladat:** 1,6 törésmutatójú üvegbe monokromatikus fénysugár lép be. Hány hullám található 1 mm-en az üvegben, ha vákuumban a fény hullámhossza 800 nm? Megváltozik-e a fény színe?

**Megoldás:** Az üveg törésmutatója vákuumra vonatkoztatva van megadva (relatív törésmutató). A törésmutató a fény közegbeli terjedési sebességével felírható:

$$n_{üv} = \frac{c_v}{c_ü}.$$

A fény terjedési sebességét a hullámhosszal felírva és az előző összefüggésbe beírva a következőt kapjuk:

$$c = \lambda \cdot f.$$

$$n_{üv} = \frac{c_v}{c_ü} = \frac{\lambda_v \cdot f}{\lambda_ü \cdot f} = \frac{\lambda_v}{\lambda_ü} \quad \Rightarrow \quad \lambda_ü = \frac{\lambda_v}{n_{üv}} = \frac{800\,\text{nm}}{1{,}6} = 500\,\text{nm}.$$

Egy milliméteren található hullámok száma:

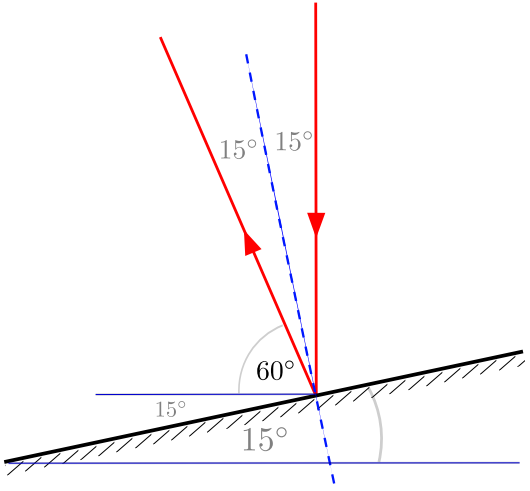
$$sz = \frac{1\,\text{mm}}{\lambda_ü} = \frac{1\,\text{mm}}{500\,\text{nm}} = \frac{10^{-3}\,\text{m}}{500 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} = 2000.$$

A fény frekvenciája állandó minden közegben, ezért a fény színe nem változik meg.

## 24. A fényvisszaverődés és a fénytörés

**24.1. feladat:** Egy síktükör tükröző felületével felfelé, a vízszintessel $15°$-os szöget bezárva fekszik. Egy fénysugár függőlegesen esik a tükörre. Mekkora szöget zár be a visszavert fénysugár a a vízszintessel?

**Megoldás:** Az ábra alapján a megoldás könnyen adódik.




24.1. ábra. *Magyarázó ábra a 24-1. feladathoz.*

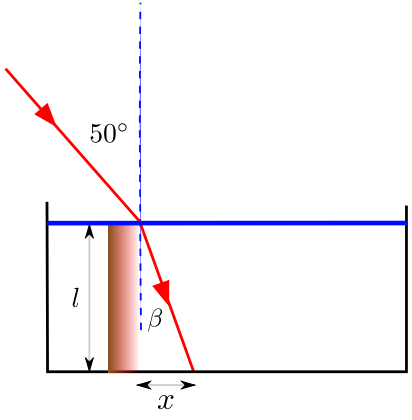
A kérdéses szög: $60°$.

**24.2. feladat:** Tiszta vizű medencében egy $2\,\mathrm{m}$ magas, függőleges oszlop áll úgy, hogy a víz teljesen ellepi. Milyen hosszú az oszlop árnyéka, ha a vízfelszínre eső napsugarak a függőlegessel $50°$-os szöget zárnak be? A víz levegőre vonatkoztatott törésmutatója $1{,}33$.

**Megoldás:** A törési törvény felhasználásával a törési szög kiszámítható:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{v-l} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n_{v-l}} = \frac{\sin 50°}{1{,}33} = 0{,}576.$$

A törési szög ebből: $\beta = 35{,}17°$.



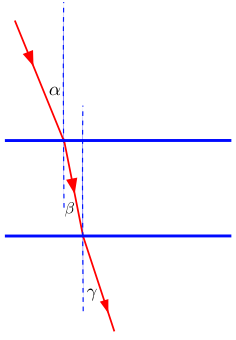

24.2. ábra. *Magyarázó ábra a 24-2. feladathoz.*

Az ábra alapján írhatjuk:

$$\tan\beta = \frac{x}{l} \quad \Rightarrow \quad x = l \cdot \tan\beta = 1{,}5 \cdot \tan 35{,}17^\circ = 1{,}057\,\mathrm{m}.$$

**24.3. feladat:** A víz felületén $1{,}4$ törésmutatójú olajréteg van. Számítsa ki a törési szöget a vízben, ha az olajrétegre $35^\circ$-os beesési szöggel érkezik a fénysugár! A víz törésmutatója 1,33.

**Megoldás:** A fénytörés törvényét felírva a keresett szög meghatározható.

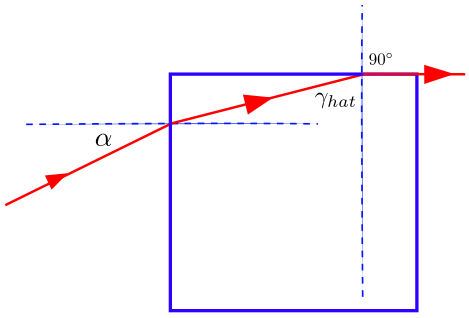



24.3. ábra. *Magyarázó ábra a 24-3. feladathoz.*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_o \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n_o} = \frac{\sin 35^\circ}{1{,}4} = 0{,}41.$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = n_{v-o} = \frac{n_v}{n_o} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = \sin\beta \cdot \frac{n_o}{n_v} = 0{,}41 \cdot \frac{1{,}4}{1{,}33} = 0{,}43.$$

A keresett szög tehát $\gamma = 25{,}5^\circ$.




24.4. ábra. *Ábra a 24-4. feladathoz.*

**24.4. feladat:** Az ábrán látható módon fénysugár érkezik egy $1{,}3$ törésmutatójú üvegkocka bal oldali lapjára. A beesés síkja függőleges. Mekkora az a legnagyobb beesési szög, amely esetén teljes visszaverődés lép fel a kocka felső, vízszintes lapján?

**Megoldás:** Az ábra jelöléseit használva a határszög nagyságát a következő egyenlet adja meg:

$$\sin \gamma_{hat} = \frac{1}{1{,}3} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{hat} = 50{,}28^\circ.$$

Az oldalsó lapon beeső fénysugárra felírva a fénytörés törvényét, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 1{,}3.$$

Mivel $\beta + \gamma_{hat} = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \gamma_{hat} = 90^\circ - 50{,}28^\circ = 39{,}72^\circ$, a beesési szög meghatározható:

$$\sin\alpha = 1{,}3 \cdot \sin\beta = 1{,}3 \cdot \sin 39{,}72^\circ = 0{,}83 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 56{,}2^\circ.$$

---

**24.5. feladat:** Két, egyforma pohár közül az elsőt vízzel ($n_v = 1{,}36$), a másodikat olajjal ($n_o = 1{,}46$) töltjük meg. Ha a poharakra felülről ránézünk, melyiket látjuk mélyebbnek?

**Megoldás:** Feltételezve, hogy a pohár levegőben van, az ábra alapján a vízzel telt pohár esetében az alábbi egyenletet írhatjuk:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{v-l}.$$

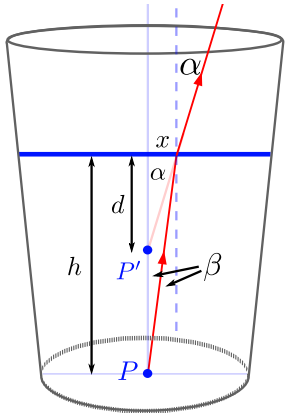
Mivel felülről nézzük, az $\alpha$ és $\beta$ szögek kicsik, így írhatjuk:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} = n_{v-l} = \frac{n_v}{n_l}.$$

Az ábra alapján:

$$\tan\alpha \approx \alpha = \frac{x}{d},$$
$$\tan\beta \approx \beta = \frac{x}{h}.$$

A két egyenletből:




24.5. ábra. *Magyarázó ábra a 24-5. feladathoz.*

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{h}{d} = \frac{n_v}{n_l}.$$

A pohár aljának a folyadék felszínétől való látszólagos távolsága tehát:

$$d = \frac{h}{n_v/n_l}.$$

Ez a távolság az olaj esetében kisebb, tehát a vízzel telt pohár látszik mélyebbnek.

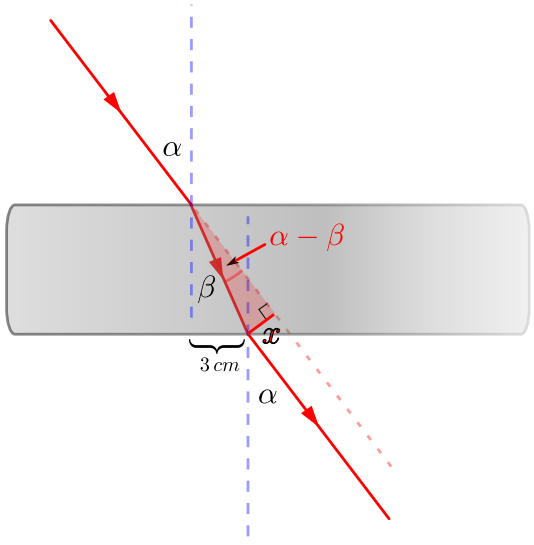
---

**24.6. feladat:** $4$ cm vastag pánparallel üveglemezre $60°$-os beesési szög alatt fénysugarat ejtünk. A fénysugár az üvegben $5$ cm hosszú utat fut be. Mennyi az üveg törésmutatója? Hány cm-t tolódott el a fénysugár?

**Megoldás:** A fénytörés törvényét felírva:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{ü-l}.$$

A rajzon látható derékszögű háromszög alsó, $\beta$ szöggel szemközti oldalának hossza: $3\,\text{cm}$. Írhatjuk tehát:




24.6. ábra. *Magyarázó ábra a 24-6. feladathoz.*

$$\sin\beta = \frac{3}{5}, \qquad \beta = 36{,}87°.$$

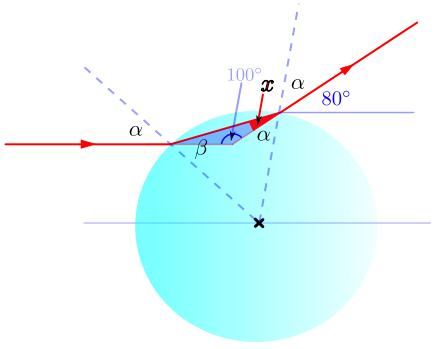
$$n_{ü-l} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin 60°}{3/5} = 1{,}44.$$

A fénysugár eltolódása:

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{x}{5\,\mathrm{cm}} \quad \Rightarrow \quad x=5\,\mathrm{cm}\cdot\sin(\alpha-\beta)=5\,\mathrm{cm}\cdot\sin(60^\circ-36{,}87^\circ)=1{,}964\,\mathrm{cm}.$$

**24.7. feladat:** Egy tóban úszkáló búvár levegőbuborékot bocsát ki. Hol bocsásson vízszintes irányban keskeny lézerfényt a buborékra, hogy a lézernyaláb eltérülése a vízszintes irányhoz képest $80^\circ$ legyen? A víznek a levegőre vonatkozó törésmutatója 1,3.

**Megoldás:** Az ábra alapján:




24.7. ábra. *Magyarázó ábra a 24-7. feladathoz.*

$$180^\circ=100^\circ+2\cdot x \quad \Rightarrow \quad x=40^\circ.$$

$$\beta=\alpha+x=\alpha+40^\circ.$$

Írjuk fel a fénytörés törvényét:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{l-v} = \frac{1}{n_{v-l}},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+40^\circ)} = \frac{1}{n_{v-l}},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+40^\circ)} = \frac{1}{1{,}3},$$

$$1{,}3\cdot\sin\alpha = \sin(\alpha+40^\circ),$$

$$1{,}3\cdot\sin\alpha = \sin\alpha\cdot\cos 40^\circ + \sin 40^\circ\cdot\cos\alpha,$$

$$1{,}3\cdot\sin\alpha = 0{,}766\cdot\sin\alpha + 0{,}643\cdot\cos\alpha,$$

$$0{,}534\cdot\sin\alpha = 0{,}643\cdot\cos\alpha,$$

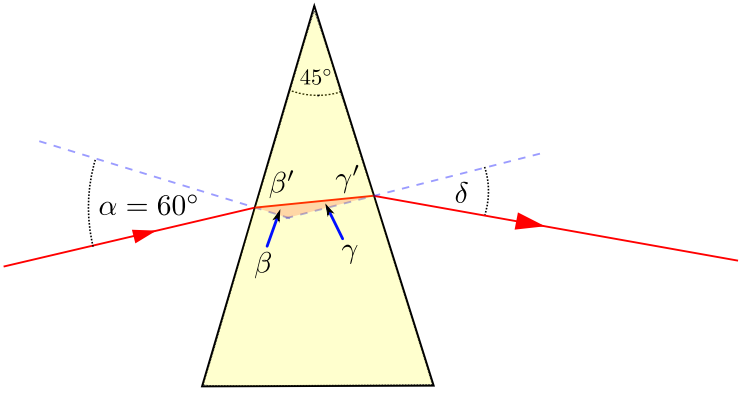
$$\tan\alpha = \frac{0{,}643}{0{,}534},$$

$$\alpha = 50{,}3^\circ.$$

---

**24.8. feladat:** Prizma lapjára $60^\circ$-os beesési szögben fénysugár érkezik, és a másik lapon kilép. A prizma törőszöge $45^\circ$-os. Mekkora a fénysugár kilépési (törési) szöge, ha a fény terjedési sebessége a prizma anyagában $2\cdot 10^8$ m/s?

**Megoldás:** A prizma anyagának vákuumra vonatkoztatott törésmutatója:




24.8. ábra. *Magyarázó ábra a 24-8. feladathoz.*

$$n_{p-v} = \frac{c_v}{c_p} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^8} = 1{,}5.$$

Az ábra alapján a fénytörés törvényét felírva:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{p-v} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n_{p-v}} = \frac{\sin 60°}{1{,}5} \quad \Rightarrow \quad \beta = 35{,}26°.$$

$$\beta' = 90° - \beta = 90° - 35{,}26° = 54{,}74°.$$

$$\gamma' = 180° - (\beta' + 45°) = 180° - (54{,}74° + 45°) = 80{,}26°.$$

$$\gamma = 90° - \gamma' = 90° - 80{,}26° = 9{,}74°.$$

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = n_{v-p} = \frac{1}{n_{p-v}} \quad \Rightarrow \quad \sin\delta = \sin\gamma \cdot n_{p-v} = \sin 9{,}74° \cdot 1{,}5 = 0{,}2538 \quad \Rightarrow \quad \delta = 14{,}7°.$$

**24.9. feladat:** Fénysugár egy része kvarckristályon megtörik, másik része visszaverődik. Mekkora a beesési szög, ha a visszavert és a megtört fénysugár merőleges egymásra? A törésmutató 1,54.

**Megoldás:** A feladat Brewster-szöget kérdez:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n,$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = n,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = n = 1{,}54 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 57^\circ.$$

**24.10. feladat:** Mekkora $\beta$ szögben van a Nap a horizont felett, ha egy megfigyelő a víz felületéről visszavert fényt síkban polarizáltnak látja? A víz levegőre vonatkoztatott törésmutatója $1{,}33$.

**Megoldás:** A polarizáció akkor jön létre, ha a fénysugarak beesési szöge éppen a Brewster-szög.

$$\tan\alpha = n = 1{,}33 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 53{,}06^\circ.$$

A Nap látószöge:

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 53{,}06^\circ = 36{,}94^\circ.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. A hélium-neon lézer fénye vörös, hullámhossza levegőben $632{,}8$ nm.
   a) Mekkora a frekvenciája?
   b) Mekkora a hullámhossza $1{,}5$ törésmutatójú üvegben?
   c) Mekkora a fénysebesség ebben az üvegben?

   A frekvencia (Hz-ben): Megold.

   A hullámhossz (nm): Megold.

   A fénysebesség (m/s): Megold.

2. Egy közegből levegőbe jutáskor egy fénysugár teljes-visszaverődési határszöge $40°$. Mekkora a közeg törésmutatója a felhasznált fény hullámhosszára vonatkozóan? Mekkora a fény fázissebessége a közegben?

   A törésmutató: Megold.

   A fázissebesség (m/s): Megold.

3. Planparalel üveglemezre $45°$-os szögben fénysugár esik. Az üveg törésmutatója $1{,}5$. Milyen vastag az üveg, ha a fénysugár áthaladás következtében $2$ cm-rel tolódik el?

   Vastagság (cm): Megold.

4. Pistike egy tó fenekén egy érdekes kavicsot pillant meg a sima víztükrön keresztül $6°$-os szögben, a vízfelszín merőlegeséhez képest. Egy egyenes pálcával utána nyúl, hogy megmozdítsa, és a tó fenekét a kavicstól $4$ cm-re éri el. Milyen mély a tó, ha a víz törésmutatója $1{,}33$?

   A tó mélysége (m): Megold.

5. Egy prizma törésmutatója $\sqrt{2}$, törőszöge, pedig $75°$. Mekkora lehet az a legkisebb beesési szög, melyre a fénysugár még elhagyja a prizmát a második törőfelületen?

A beesési szög °-ban: [ ]

Megold. [ ]

# 17. LECKE

## Hullámoptika

## 25. Fényhullámok interferenciája

**25.1. feladat:** Monokromatikus, $400\,\text{nm}$ hullámhosszúságú fénysugár esik egy $2\,\text{mm}$ vastag üveglemez szélső részére úgy, hogy a fény egy része az üvegben, másik része vákuumban halad. Mekkora a fáziskülönbség az üvegben haladó és a vákuumban haladó fényhullám között a kilépéskor, ha az üveg törésmutatója $1{,}6$?

**Megoldás:** Írjuk fel az egyes közegekben haladó hullámok egyenleteit:

$$y_u = A \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{d}{c_{ü}}\right)\right],$$

$$y_v = A \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{d}{c_v}\right)\right].$$

Írjuk fel a fáziskülönbséget:

$$\delta = \omega\left(t - \frac{d}{c_{ü}}\right) - \omega\left(t - \frac{d}{c_v}\right) = \omega\frac{d}{c_v} - \omega\frac{d}{c_{ü}} = 2\pi f \cdot \frac{d}{c_v} - 2\pi f \cdot \frac{d}{c_{ü}} = 2\pi\frac{d}{\lambda_v} - 2\pi\frac{d}{\lambda_{ü}}.$$

A törésmutatóból meghatározható a fény üvegbeli $\lambda_u$ hullámhossza.

$$n_{ü-v} = \frac{c_v}{c_{ü}} = \frac{\lambda_v \cdot f}{\lambda_{ü} \cdot f} = \frac{\lambda_v}{\lambda_{ü}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{ü} = \frac{\lambda_v}{n_{ü-v}} = \frac{400\,\text{nm}}{1{,}6} = 250\,\text{nm}.$$

$$\delta = 2\pi\frac{2 \cdot 10^{-3}}{400 \cdot 10^{-9}} - 2\pi\frac{2 \cdot 10^{-3}}{250 \cdot 10^{-9}} = -2\pi \cdot 3000 = -6000\pi.$$

**25.2. feladat:** Két koherens fényhullámmal világítunk meg egy falfelületet. Ha a fényhullámok útkülönbsége $1\,\mu$m, erősítést tapasztalunk. Az útkülönbséget fokozatosan növelve, $1{,}25\,\mu$m útkülönbség esetén teljes kioltás jön létre. Mennyi a fény hullámhossza?

**Megoldás:** Írjuk fel az erősítés illetve kioltás feltételeit az útkülönbségekre a hullámhossz alapján:
Erősítés:

$$\Delta s_1 = k \cdot \lambda,$$

kioltás:

$$\Delta s_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Vonjuk ki az alsó egyenletből a felsőt:

$$\Delta s_2 - \Delta s_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} - k \cdot \lambda = \frac{\lambda}{2},$$

$$1{,}25\,\mu\text{m} - 1\,\mu\text{m} = \frac{\lambda}{2},$$

$$0{,}25\,\mu\text{m} = \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0{,}5\,\mu\text{m} = 500\,\text{nm}.$$

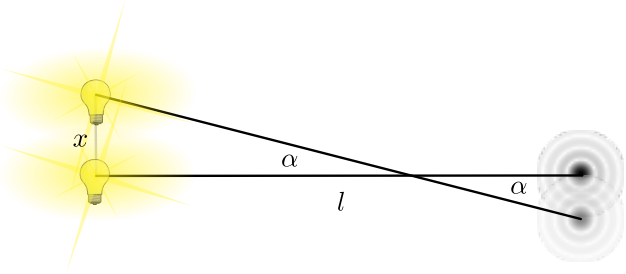
## 26. Fényelhajlás

**26.1. feladat:** Két fényforrást $2500\,\mathrm{m}$ távolságból néz valaki. A megfigyelő szemének pupillája $3\,\mathrm{mm}$ átmérőjű. Ha a megfigyelő szeme tökéletes volna, akkor a két fényforrás megkülönböztethetősége csak az elhajlás jelenségétől függne. Milyen távolságra vannak egymástól a fényforrások, hogy még elkülönítve lehessen látni azokat? (A fényforrás hullámhosszát vegyük $500\,\mathrm{nm}$-nek.)

**Megoldás:** Az elhajlási korong első maximumának nyílásszögére igaz az alábbi összefüggés:

$$\sin\alpha = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{d}.$$

A két fényforrást akkor tudjuk megkülönböztetni, amikor az elhajlási korongok éppen nem csúsznak




26.1. ábra. *Magyarázó ábra a 26-1. feladathoz.*

egymásba (lásd az ábrát), vagyis igaz a következő:

$$\tan\alpha = \frac{x}{l} \quad \Rightarrow \quad x = l \cdot \tan\alpha.$$

Kis szögek esetén, ahogy ez ebben az esetben fennáll, $\sin\alpha \approx \tan\alpha$, ezét írhatjuk:

$$x = l \cdot 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{d} = 2500 \cdot 1{,}22 \cdot \frac{500 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-3}} = 0{,}51\,\mathrm{m}.$$

---

**26.2. feladat:** A $633\,\mathrm{nm}$ hullámhosszúságú fény keskeny réshez érkezik. Az interferenciaképen a központi fényes csík két oldalán elhelyezkedő első sötét csíkok a réstől $1{,}2°$-os szögben látszanak. Milyen széles a rés?

**Megoldás:** A résen történő fényelhajlás jelenségénél a kioltás feltétele:

$$\sin\alpha = n \cdot \frac{\lambda}{a},$$

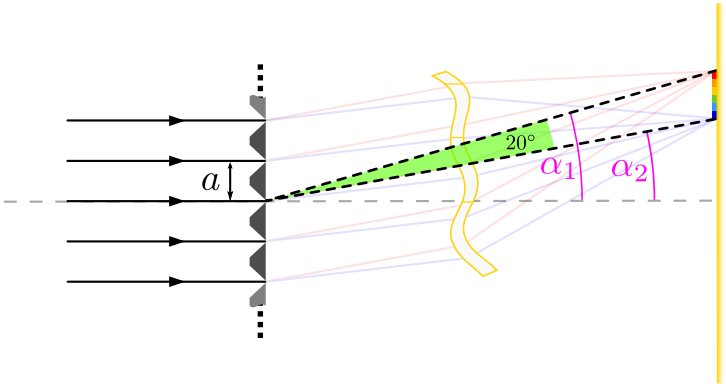
ahol $a$ a rés szélessége. Ezt kifejezve:

$$a = n \cdot \frac{\lambda}{\sin\alpha}.$$

Mivel első kioltásról van szó, $n = 1$.

$$a = \frac{\lambda}{\sin\alpha} = \frac{633 \cdot 10^{-9}}{\sin 0{,}6°} = 6{,}04 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} = 60{,}4\,\mu\mathrm{m}.$$

---




26.2. ábra. *Magyarázó ábra a 26-2. feladathoz.*

**26.3. feladat:** Hány karcolást tartalmaz milliméterenként az a rács, amely a rajta áthaladó látható fény elsőrendű spektrumát $20°$-os szögben vetíti ki? A látható fény hullámhosszának határai $430\,\text{nm}$ és $680\,\text{nm}$.

**Megoldás:** A feladathoz először rajzot készítünk:
Az optikai rács elhajlási képében a maximumhelyekre az alábbi összefüggés igaz:

$$a \cdot \sin\alpha = n \cdot \lambda,$$

ahol $a$ a rácsállandó. Esetünkben $n = 1$, így a különböző hullámhosszakra felírva a maximumhelyeket, a rácsállandó meghatározható.

$$a \cdot \sin\alpha_1 = \lambda_1, \qquad \text{illetve} \qquad a \cdot \sin\alpha_2 = \lambda_2.$$

Osszuk el a két egyenletet egymással:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Az ábra alapján $\alpha_1-\alpha_2=20^\circ$.

$$\frac{\sin(\alpha_2+20^\circ)}{\sin\alpha_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2},\qquad \text{azaz}\qquad \frac{\sin\alpha_2\cdot\cos 20^\circ+\cos\alpha_2\cdot\sin 20^\circ}{\sin\alpha_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Egyszerűsítve $\sin\alpha_2$-vel, majd $\tan\alpha_2$-t kifejezve:

$$\cos 20^\circ+\sin 20^\circ\cdot\frac{1}{\tan\alpha_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

$$\tan\alpha_2=\frac{\sin 20^\circ}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-\cos 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\frac{680}{430}-\cos 20^\circ}\quad\Rightarrow\quad \alpha_2=28{,}06^\circ.$$

Ezt visszaírva a korábbi, maximumot megadó kifejezésbe:

$$a\cdot\sin 28{,}06^\circ=430\cdot10^{-9}\,\mathrm{m}\quad\Rightarrow\quad a=\frac{430\cdot10^{-9}\,\mathrm{m}}{\sin 28{,}06^\circ}=9{,}14\cdot10^{-7}\,\mathrm{m}.$$

Az $1\,\mathrm{mm}$-re jutó karcolások, rések száma:

$$x=\frac{10^{-3}}{9{,}14\cdot10^{-7}}\approx 1094.$$

**26.4. feladat:** Először egy $400\,\text{nm}$, majd egy $800\,\text{nm}$ hullámhosszúságú, monokromatikus fénnyel világítunk meg egy $2\,\text{cm}$ széles rést. Mekkora a rés szélein tapasztalt elhajlási szögek aránya a két esetben?

**Megoldás:** Az első esetben az elhajlási szög:

$$\sin\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{a},$$

a második esetben:

$$\sin\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{a}.$$

A két egyenletből a keresett szögek aránya meghatározható:

$$x = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\arcsin\left(\frac{\lambda_1}{a}\right)}{\arcsin\left(\frac{\lambda_2}{a}\right)} = \frac{\arcsin\left(\frac{400\cdot10^{-9}}{2\cdot10^{-2}}\right)}{\arcsin\left(\frac{800\cdot10^{-9}}{2\cdot10^{-2}}\right)} = \frac{1{,}146\cdot10^{-3}}{2{,}292\cdot10^{-3}} = 0{,}5.$$

Az elhajlási szögek kicsik, így végső soron az arány a hullámhosszak $\lambda_1/\lambda_2$ arányával egyezik meg.

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Az $1$ mm szélességű rést $589$ nm-es fénnyel világítjuk meg. Az elhajlási képet a réstől $3$ m-re levő ernyőn vizsgáljuk. Milyen távolságra van egymástól (a középső maximum ugyanazon oldalán levő) első és második sötét csík?

   A távolság (mm): Megold.

2. Közeledő személyautó két fényszórója $1{,}4$ m-re van egymástól. Milyen maximális távolság esetén tudja a szemünk megkülönböztetni a két fényforrást? Milyen szögben látszanak ekkor a reflektorok? A szem pupilláját $5$ mm átmérőjűnek, a fény hullámhosszát pedig $550$ nm-nek vegye!

   A keresett távolság (km): Megold.

   A keresett szög (rad): Megold.

3. Egy $20$ mm széles optikai rács $6000$ karcolást tartalmaz. A rácsra merőlegesen $589$ nm hullámhosszú fény esik. Határozza meg egy távoli ernyőn megjelenő interferenciaképen a legnagyobb, második legnagyobb és harmadik legnagyobb szöget, amelyhez maximális erősítés tartozik!

   Az első: (°-ban): Megold.

   A második: (°-ban): Megold.

   A harmadik: (°-ban): Megold.

4. Tegyük fel, hogy a látható fény hullámhosszának határai $430$ nm és $680$ nm! Hány karcolást tartalmaz milliméterenként az a rács, amelyen áthaladó fény elsőrendű spektruma $20°$-os szögben látszik?

   A karcolások száma $1$ mm-en: Megold.

# 18. LECKE

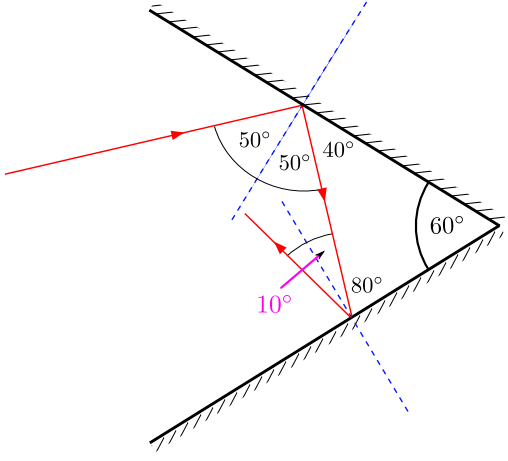
## Geometriai optika

# 27. Egyszerű képalkotó eszközök

## 27.1. Síktükör képalkotása

**27.1. feladat:** Az ábrán látható módon fénysugarat ejtünk két, egymással $60°$-os szöget bezáró síktükör egyikére. A beesési szög $50°$. Mekkora beesési szöggel érkezik a fénysugár a másik tükörre?

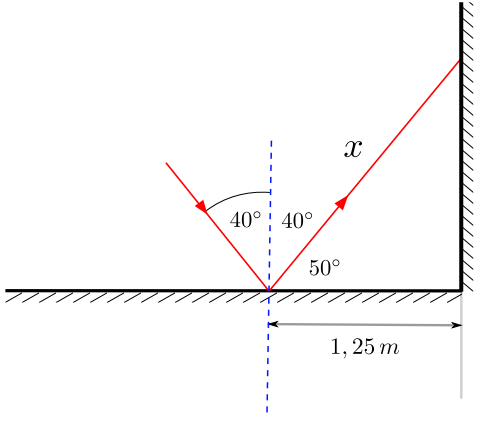
**Megoldás:** A megoldáshoz készítsünk rajzot:




27.1. ábra. *Magyarázó ábra a 27-1. feladathoz.*

**27.2. feladat:** A vízszintes asztalon egy síktükör fekszik, melyhez a síkjára merőlegesen egy másik síktükröt illesztünk. A vízszintes tükörre, a két síktükör síkjára merőleges síkban, fénysugarat ejtünk $40°$-os beesési szögben. A beesési pont távolsága a két tükör érintkezési egyenesétől $1{,}25\,\mathrm{m}$. Mekkora utat tesz meg a fény a beesési ponttól a függőleges síkú tükörig?

**Megoldás:** Ennél a feladatnál is célszerű rajzot készíteni. A fényvisszaverődés törvényéből illetve geometriai megfontolásokból egyszerűen adódik a megoldás.



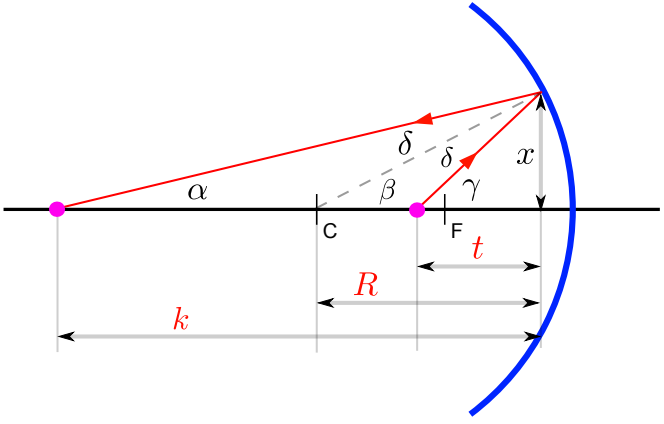

27.2. ábra. *Magyarázó ábra a 27-2. feladathoz.*

$$\cos 50° = \frac{1{,}25}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1{,}25}{\cos 50°} = 1{,}945\,\mathrm{m}.$$

## 27.2. Gömbtükrök képalkotása

**27.3. feladat:** Egy homorú gömbtükörtől $1\,\mathrm{m}$ távolságban elhelyezett fényforrás fényét a gömbtükör a tükörtől $4\,\mathrm{m}$ távolságban gyűjti össze. Mekkora a gömbtükör görbületi sugara? (Készítsen rajzot!)

**Megoldás:** Először készítsük el a rajzot:




27.3. ábra. *Magyarázó ábra a 27-3. feladathoz.*

Az ábra jelöléseit használva:

$$\tan\alpha \approx \alpha = \frac{x}{k},$$
$$\tan\beta \approx \beta = \frac{x}{R},$$
$$\tan\gamma \approx \gamma = \frac{x}{t}.$$

Az egyes háromszögek szögeit megvizsgálva írhatjuk:

$$\beta = \alpha + \delta,$$
$$\gamma = \beta + \delta.$$

Kivonva egymásból a két egyenletet a következőt kapjuk:

$$\beta - \gamma = \alpha - \beta.$$

Átrendezve:

$$\alpha + \gamma = 2 \cdot \beta,$$
$$\frac{x}{k} + \frac{x}{t} = \frac{2 \cdot x}{R}.$$

$x$-szel egyszerűsítve:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = \frac{2}{R}.$$

Ebből $R$ meghatározható:

$$R = \frac{2 \cdot k \cdot t}{k + t} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 1}{1 + 4} = 1{,}6\,\mathrm{m}.$$

**27.4. feladat:** $40\,\text{cm}$ görbületi sugarú domború tükör előtt $10\,\text{cm}$ távolságban egy $3\,\text{cm}$ nagyságú tárgy van. Mekkora kép keletkezik a tárgyról? (Készítsen rajzot!)

**Megoldás:** Írjuk fel a tükröegyenletet:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}.$$

Mivel a gömbtükrök fókusztávolsága a görbületi sugár fele, írhatjuk, hogy $f=R/2=20\,\text{cm}$. Vegyük figyelembe, hogy a domború tükör fókusztávolsága virtuális, ezért $f<0$.

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{k}=\frac{1}{(-20)},$$

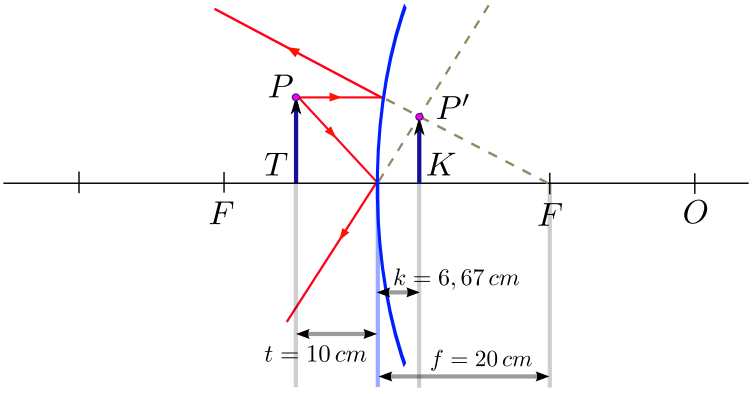
$$\frac{1}{k}=-\frac{1}{20}-\frac{1}{10}=-\frac{3}{20} \quad \Rightarrow \quad k=-6{,}67\,\text{cm}.$$

A nagyítás értékéből adódik a kép mérete:

$$N=-\frac{k}{t}=-\frac{-6{,}67}{10}=0{,}667$$

Mivel a nagyítás pozitív előjelű, a kép a tárggyal egyező állású.

$$N=\frac{K}{T} \quad \Rightarrow \quad K=N\cdot T=0{,}667\cdot 3=2\,\text{cm}.$$




27.4. ábra. *Magyarázó ábra a 27-4. feladathoz.*

## 27.3. Optikai lencsék képalkotása

27.5. feladat: Mekkora a fényképezőgép-objektív gyújtótávolsága, ha a $60\,\mathrm{m}$ távolságban lévő $15\,\mathrm{m}$ magas épületről $2\,\mathrm{mm}$ magasságú valódi képet állít elő a CCD-chipen?

**Megoldás:** A nagyítás:

$$|N| = \frac{K}{T} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{15} = 1{,}333 \cdot 10^{-4}.$$

Írjuk fel az oldalnagyítást a kép-, illetve tárgytávolság hányadosaként:

$$|N| = \frac{k}{t} \quad \Rightarrow \quad k = |N| \cdot t = 1{,}333 \cdot 10^{-4} \cdot 60 = 8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

A fókusztávolság a lencseegyenlettel határozható meg:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

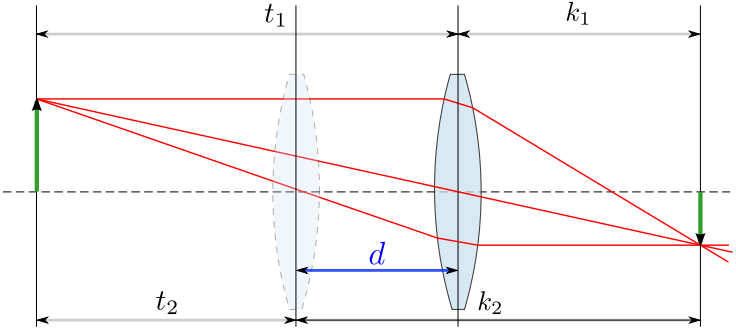
$$f = \frac{k \cdot t}{k + t} = \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 60}{8 \cdot 10^{-3} + 60} = 8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 8\,\mathrm{mm}.$$

Mivel a tárgy messze van, a kép közelítőleg a lencse fókuszsíkjában keletkezik.

---

**27.6. feladat:** Gyűjtőlencsével egy lámpa izzószálának $1\,\mathrm{cm}$ nagyságú éles képét állítjuk elő egy ernyőn. A lencsével a lámpához közelítve ismét éles képet kapunk, de most a kép $9\,\mathrm{cm}$ nagyságú, eközben az izzó és az ernyő helyzete nem változik. Mekkora az izzószál?

**Megoldás:** A következő ábra segít a feladat megoldásában:




27.5. ábra. *Magyarázó ábra a 27-6. feladathoz.*

Szerkesztéssel könnyen belátható, hogy a lencse két helyzete szimmetrikus a $t_1 + k_1 (= t_2 + k_2)$ szakasz felezőpontjára nézve. Legyen $t_1 + k_1 = l$. Az ábra alapján a következő egyenletek igazak:

$$t_1 = k_2 = \frac{l+d}{2},$$

$$t_2 = k_1 = \frac{l-d}{2}.$$

A nagyítások ez alapján:

$$|N_1| = \frac{K_1}{T} = \frac{k_1}{t_1} = \frac{\frac{l-d}{2}}{\frac{l+d}{2}} = \frac{l-d}{l+d},$$

$$|N_2| = \frac{K_2}{T} = \frac{k_2}{t_2} = \frac{\frac{l+d}{2}}{\frac{l-d}{2}} = \frac{l+d}{l-d}.$$

Mivel a két esetben a képek méreteit ismerjük, a következő egyenletekhez jutunk:

$$\frac{K_1}{T} = \frac{9}{T} = \frac{l-d}{l+d},$$
$$\frac{K_2}{T} = \frac{1}{T} = \frac{l+d}{l-d}.$$

A két egyenletből adódik:

$$\frac{9}{T} = \frac{1}{\frac{1}{T}},$$
$$T^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad T = 3\,\text{cm}.$$

---

**27.7. feladat:** Ultrahangot fókuszálunk víz alatt egy olyan lencsével, amelynek két görbületi sugara $r_1 = -100\,\text{mm}$ és $r_2 = -200\,\text{mm}$. A hang terjedési sebessége vízben $1500\,\text{m/s}$, a lencse anyagában $2000\,\text{m/s}$. A fénysugarakra megállapított összefüggések a hangsugarakra is érvényesek. Számítsuk ki a lencse fókusztávolságát!

**Megoldás:** A lencse fókusztávolságát megadó összefüggés:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

A lencse anyagának vízre vonatkozó törésmutatója:

$$n_{l-v} = \frac{c_v}{c_l} = \frac{1500}{2000} = 0{,}75.$$

Helyettesítsük be az adatokat az első összefüggésbe:

$$\frac{1}{f} = (0{,}75 - 1)\left(\frac{1}{-100 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{-200 \cdot 10^{-3}}\right) = 3{,}75\,\frac{1}{\mathrm{m}}.$$

Ebből a lencse fókusztávolsága:

$$f = \frac{1}{3{,}75} = 0{,}267\,\mathrm{m} = 26{,}7\,\mathrm{cm}.$$

Mivel a fókusztávolság értéke pozitív, a lencse gyűjtőlencseként viselkedik.

## 28. Optikai eszközök képalkotása

**28.1. feladat:** Rövidlátó ember $-3$ dioptriás szemüveget használ. Szemüveg nélkül milyen távol elhelyezkedő tárgyakat lát élesen?

**Megoldás:** Emberünk rövidlátó. A szemüvegének fókusztávolsága: $f_{lencse} = -\frac{1}{3}\,\mathrm{m}$. Tegyük fel, hogy szemüveg nélkül $t_1$ távolságban lévő tárgyakat látja élesen. felírva a lencseegyenletet:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f_{szem}}.$$

Szemüveggel a messze lévő tárgyakat is élesen látja. Erre az esetre felírva a lencseegyenletet (a szemüveg lencséjének dioptriája és a szem dioptriája összeadódik):

$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f_{szem}} + \frac{1}{f_{lencse}}.$$

A két egyenletet egymásból kivonva:

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = -\frac{1}{f_{lencse}}.$$

Mivel $t_2 \approx \infty$, ezért:

$$\frac{1}{t_1} = -\frac{1}{f_{lencse}} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{3}\,\mathrm{m} = 33{,}3\,\mathrm{cm}.$$

**28.2. feladat:** Egy festőművész csak a 75 cm és 2 m távolságtartományban lévő tárgyakat látja tisztán. Ahhoz, hogy jól lássa a messze lévő tárgyakat, valamint a szemétől 25 cm-re elhelyezett festőállványt, a szemorvos bifokális szemüveget javasol. Milyen jellegű és mekkora fókusztávolságú lencsékből áll a szemüveg? A táj milyen tartománya fog hiányozni a képről, ha a festő csak a bifokális szemüvegét használva dolgozik?

**Megoldás:** A bifokális szemüveg két, különböző optikai lencséből áll. Az egyik a távolba nézéshez, a másik a közelre nézéshez korrigálja a szem hibáját. A feladat első részében határozzuk meg a két lencse fókusztávolságát.

**1. lencse:**

A festő 2 m-nél távolabbra nem lát élesen. Ha pont 2 m-re néz egy tárgyat, a leképezési törvényre a következőt írhatjuk:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{k}=D_{szem-1}.$$

ahol $D_{szem-1}$ a szem dioptriája távolba nézéskor. Ha a festő az 1. szemüveglencsével néz a végtelen távolba, a leképezési törvény:

$$\frac{1}{\infty}+\frac{1}{k}=D_{szem-1}+D_{lencse-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k}=D_{szem-1}+D_{lencse-1}.$$

A két egyenletből adódik:

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{k}+D_{lencse-1} \quad \Rightarrow \quad D_{lencse-1}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathrm{m}}.$$

Az 1. lencse fókusztávolsága tehát:

$$f_{lencse-1}=\frac{1}{D_{lencse-1}}=-2\,\mathrm{m}.$$

A mínusz előjel szórólencsére utal.

**2. lencse:**

A festő 75 cm-nél közelebb tárgyat nem lát élesen. Ennél a távolságnál a lencseegyenlet:

$$\frac{1}{0{,}75} + \frac{1}{k} = D_{szem-2}.$$

Ha a másik lencsével egy, a tisztánlátás távolságában lévő tárgyat szemlél, a következő összefüggés igaz:

$$\frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{k} = D_{szem-2} + D_{lencse-2}.$$

A két egyenletből kapjuk:

$$\frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{k} = \frac{1}{0{,}75} + \frac{1}{k} + D_{lencse-2} \quad \Rightarrow \quad D_{lencse-2} = \frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{0{,}75} = 2{,}667\,\frac{1}{\mathrm{m}}.$$

A 2. lencse fókusztávolsága tehát:

$$f_{lencse-1} = \frac{1}{D_{lencse-2}} = 0{,}375\,\mathrm{m}.$$

A pozitív előjel gyűjtőlencsét jelent.

A feladat második részében megvizsgáljuk, hogy a két lencsével milyen minimális és maximális távolságokra lát.

**1. lencse:**

Tegyük fel, hogy az első lencsével $t_{1-min}$ legkisebb távolságra lát. Ekkor igaz a következő:

$$\frac{1}{t_{1-min}} + \frac{1}{k} = D_{szem-2} + D_{lencse-1}.$$

Beírva ide a korábban $D_{szem-2}$-re meghatározott egyenletet illetve az 1. lencse $D_{lencse-1}$ dioptria értékét:

$$\frac{1}{t_{1-min}} + \frac{1}{k} = \frac{1}{0{,}75} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t_{1-min} = 1{,}2\,\mathrm{m}.$$

**2. lencse:**

A második lencsével kapcsolatban határozzuk meg a $t_{2-max}$ távolságot, amit még élesen lát:

$$\frac{1}{t_{2-max}} + \frac{1}{k} = D_{szem-1} + D_{lencse-2}.$$

$$\frac{1}{t_{2-max}} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} + 2{,}667 \quad \Rightarrow \quad t_{2-max} = 0{,}316\,\text{m}.$$

A kapott értékekből következik, hogy a festő a $31{,}6$ cm és $1{,}2$ m közötti távolságban elhelyezkedő tárgyakat nem látja élesen.

---

**28.3. feladat:** Mekkora egy $5$ cm fókusztávolságú egyszerű lencse szögnagyítása nagyítóként használva, ha a kép a szemtől $25$ cm távolságban keletkezik?

**Megoldás:** Az ábra jelöléseit felhasználva a nagyító maximális szögnagyítását keressük:

$$N_l = \frac{\tan\alpha}{\tan\alpha_0} = \frac{K/k}{T/d_0} = \frac{d_0}{t}.$$

A leképezési törvényből fejezzük ki $1/t$-t:

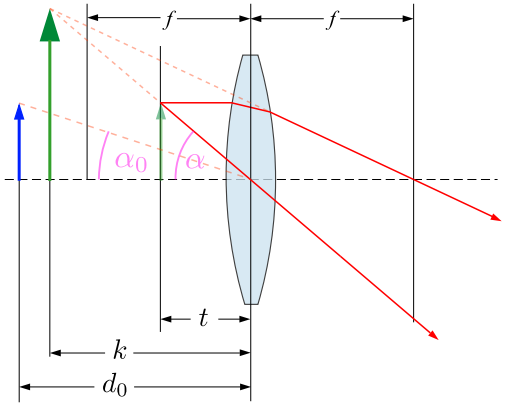
$$\frac{1}{t} = \frac{1}{f} - \frac{1}{k}.$$

A képnek a tisztánlátás távolságában, vagy annál nagyobb távolságban kell keletkezni. Mivel virtuális képről van szó, $k < 0$, így $-k = d_0 \Rightarrow k = -d_0$. Ezt beírva a következőt kapjuk:

$$N_l = \frac{d_0}{t} = \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{d_0}\right) \cdot d_0 = 1 + \frac{d_0}{f}.$$

Esetünkben:

$$N_l = 1 + \frac{0{,}25}{0{,}05} = 6.$$




28.1. ábra. *Magyarázó ábra a 28-3. feladathoz.*

---

**28.4. feladat:** Egy 24 mm x 36 mm-es diapozitívot 50-szeres lineáris nagyításban kell kivetíteni a 100 mm fókusztávolságú vetítőlencsével. Mekkora távolságban kell elhelyezni az ernyőt a lencsétől?

**Megoldás:** A feladat a képtávolságot kérdezi. Induljunk ki a leképezési törvényből:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}.$$

A nagyítást megadó összefüggésből fejezzük ki a $t$ tárgytávolságot:

$$|N|=\frac{k}{t} \quad \Rightarrow \quad t=\frac{k}{|N|}.$$

Ezt írjuk be a leképezési törvénybe:

$$\frac{1}{k/|N|}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}.$$

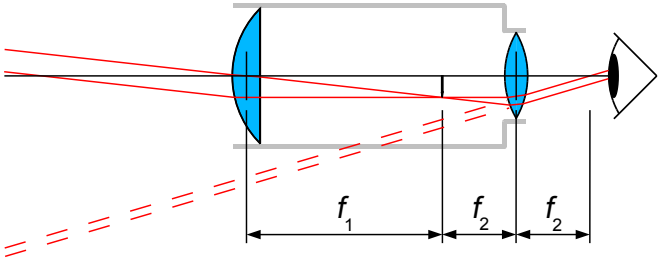
Ebből a $k$ képtávolság megadható:

$$k=f\cdot(|N|+1)=0{,}1\cdot(50+1)=5{,}1\,\mathrm{m}.$$

---

**28.5. feladat:** Egy csillagászati távcső tárgylencséje $1{,}25$ dioptriás. Ez a távcső a Hold megfigyelésére van beállítva. Ha a tárgylencse rögzített, merre és mennyivel kell elmozdítani a szemlencsét ahhoz, hogy egy $40\,\mathrm{m}$ távolságra lévő tárgyat figyelhessünk meg?

**Megoldás:** A távcső működésének ismeretében a keresett elmozdulás megadható.
Az égitestek szemlélésénél a tárgy nagyon távol van, így a kép a fókuszsíkban keletkezik. Ezt a képet nagyítja fel a szemlencse. Az első lencsével készített kép képtávolsága az első lencse fókusztávolságával egyezik meg, míg a második lencse leképezésénél a tárgytávolság ezen lencse fókusztávolságával egyezik meg. Jól mutatja ezt az alábbi rajz:
Határozzuk meg, mekkora lesz az első lencse által készített kép képtávolsága $40\,\mathrm{m}$-es tárgytávolság esetén:




28.2. ábra. *Magyarázó ábra a 28-5. feladathoz.*

$$\frac{1}{t'}+\frac{1}{k'}=\frac{1}{f_1}.$$

$$\frac{1}{40}+\frac{1}{k'}=1{,}25 \quad \Rightarrow \quad k'=0{,}8163\,\mathrm{m}=81{,}63\,\mathrm{cm}.$$

Az objektív fókusztávolsága:

$$D_1=\frac{1}{f_1} \quad \Rightarrow \quad f_1=\frac{1}{D_1}=\frac{1}{1{,}25}=0{,}8\,\mathrm{m}=80\,\mathrm{cm}.$$

A kép tehát $1{,}63$ cm-rel távolabb keletkezik. A szemlencsét tehát $1{,}63$ cm-rel kell távolítani a tárgylencséhez képest.

---

**28.6. feladat:** Egy csillagvizsgáló távcsöve olyan objektívet tartalmaz, melynek fókusztávolsága $18{,}6$ m. Hány km távolság figyelhető meg ezzel a távcsővel a Holdon, ha az objektív lencse erről a részről $2{,}5$ cm-es képet állít elő?

**Megoldás:** A feladat szerint a vizsgált terület kiterjedésének nagyságát kell meghatározni. Ehhez írjuk fel a nagyításra vonatkozó összefüggést, és használjuk fel, hogy a nagy távolság miatt a kép a fókuszsíkban keletkezik:

$$|N| = \frac{K}{T} = \frac{k}{t} \approx \frac{f}{t}.$$

Ebből a $T$ tárgy mérete kifejezhető:

$$T = \frac{K \cdot t}{f} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot 384000\,\mathrm{km}}{18{,}6\,\mathrm{m}} = 516{,}129\,\mathrm{km}.$$

**28.7. feladat:** Egy mikroszkóp objektívjének fókusztávolsága $5\,\mathrm{cm}$, okulárjának fókusztávolsága $4\,\mathrm{cm}$. A lencsék közötti távolság $17\,\mathrm{cm}$. Számítsuk ki a mikroszkóp összes nagyítását!

**Megoldás:** A mikroszkóp eredő nagyítása:

$$N = N_{ob} \cdot N_{ok} = \left(\frac{l - f_2}{f_1} - 1\right)\left(1 + \frac{d_0}{f_2}\right) = \left(\frac{0{,}17 - 0{,}04}{0{,}05} - 1\right)\left(1 + \frac{0{,}25}{0{,}04}\right) = 1{,}6 \cdot 7{,}25 = 11{,}6.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Gépkocsi domború visszapillantó tükre a vezetőtől $50$ cm-re van. A tükörtől $50$ m-re a gépkocsi mögött $2$ m magas jármű halad, melynek virtuális képe a tükörben $5$ cm-es. Határozza meg a lineáris nagyítást, a tükör fókusztávolságát és a látószögnagyítást.

   A lineáris nagyítás: Megold.

   A fókusztávolság (m): Megold.

   A látószögnagyítás: Megold.

2. Mekkora a borotválkozótükör fókusztávolsága, ha arcunkról a tisztánlátás távolságában $(25$ cm$)$ kétszeres nagyítású képet alkot?

   A fókusztávolság (cm): Megold.

3. A $20$ cm fókusztávolságú homorú tükör egy tárgyról $10$ cm-es nagyított képet ad. Ha a tárgy és a kép helyét felcseréljük, akkor a kép nagysága $2{,}5$ cm. Mekkora a tárgy nagysága, az eredeti tárgytávolság és a képtávolság?

   A tárgy nagysága (cm): Megold.

   A tárgytávolság (cm): Megold.

   A képtávolság (cm): Megold.

4. Egy $-32$ cm fókusztávolságú szórólencsétől $20$ cm-re elhelyezünk egy tárgyat.
   a) Hol fog keletkezni a kép?
   b) Mekkora a nagyítás?

A képtávolság (cm): Megold.

A nagyítás: Megold.

5. Egy diavetítő objektívje egy vékony lencse. A dia $24$ mm magas, és úgy kell kivetíteni, hogy kitöltse a $180$ cm magas vetítővásznat. A dia és a vászon távolsága $3$ m.
a) Mekkora legyen az objektív fókusztávolsága?
b) Milyen távolságra helyezzük a lencsét a diától, hogy éles képet kapjunk?

A fókusztávolság (cm): Megold.

A lencse és a dia távolsága (cm): Megold.

6. Egy rövidlátó fizikatanár, aki szabad szemmel csak $2$ m távolságig lát, egy olyan rövidlátó matematikatanár szemüvegét teszi fel, aki $4$ m távolságig lát ugyancsak szabad szemmel. Meddig lát el ezzel a szemüveggel az első rövidlátó?

A távolság (m): Megold.

# 19. LECKE

## Termodinamika

## 29. Hőtágulás

**29.1. feladat:** Egy rézből készült telefonvezetéknek téli napokon, $-20°$C-os hidegben gyakorlatilag nincs belógása az egymástó $35$ m-re lévő oszlopok között. Mennyivel hosszabb a vezeték $35°$C-os nyári melegben? A réz hőtágulási együtthatója: $17 \cdot 10^{-6}\,1/°$C.

**Megoldás:** Szilárd testek hőtágulására vonatkozó összefüggést felírva:

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T.$$

A feladatban adott számadatokat beírva:

$$\Delta l = 17 \cdot 10^{-6} \cdot 35 \cdot (35 - (-20)) = 3{,}27\,\text{cm}.$$

---

**29.2. feladat:** Egy alumíniumlemezbe $8$ cm átmérőjű kör alakú lyuk van vágva. Mennyivel változik meg a lyuk területe, ha $50°$C-kal megnöveljük a hőmérsékletet? Az alumínium hőtágulási együtthatója: $24 \cdot 10^{-6}\,1/°$C.

**Megoldás:** A lyuk mérete ugyanannyival nő, mint amennyivel a kivágott körlap darab területe növekedne a hőmérséklet-változás miatt.

$$\Delta A = 2 \cdot \alpha \cdot A_0 \cdot \Delta T.$$

A lyuk területe:

$$A_0 = r^2 \cdot \pi = (4 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \pi = 5{,}03 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^2.$$

A számadatokat behelyettesítve:

$$\Delta A = 2 \cdot 24 \cdot 10^{-6} \cdot 5{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot 50 = 0{,}121\,\text{cm}^2.$$

**29.3. feladat:** Higanyt melegítve azt tapasztaljuk, hogy sűrűsége $3{,}5\%$ -kal csökken. Ugyanilyen hőmérséklet-változásnak kitéve hány %-kal csökken a vas sűrűsége? A higany hőtágulási együtthatója: $1{,}82 \cdot 10^{-4}\,1/°\mathrm{C}$, a vas hőtágulási együtthatója: $11{,}7 \cdot 10^{-6}\,1/°\mathrm{C}$

**Megoldás:** Írjuk fel a hőmérséklet-változás hatására bekövetkező sűrűség változást:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0 \cdot (1 + 3\alpha \cdot \Delta T)} = \frac{m}{V_0} \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \cdot \Delta T} = \rho_0 \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \cdot \Delta T}.$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 + 3\alpha \cdot \Delta T},$$

$$\frac{\rho_0 - 0{,}035 \cdot \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{1 + 3\alpha \cdot \Delta T}.$$

A higany adataira vonatkozóan számoljuk ki a hőmérséklet-változást. Vegyük figyelembe, hogy a folyadékoknak a hőtágulási együtthatója térfogati hőtágulási együttható. A fenti összefüggésben lineáris hőtágulási együtthatóval számoltunk, így a higany esetén a 3-as szorzót elhagyjuk:

$$0{,}965 = \frac{1}{1 + \alpha_{Hg} \cdot \Delta T} \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{1 - 0{,}965}{0{,}965 \cdot \alpha_{Hg}} = 199{,}3°\mathrm{C}.$$

Vas esetén a sűrűség-változás:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 + 3\alpha_{Fe} \cdot \Delta T} = \frac{1}{1 + 3 \cdot 11{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot 199{,}3} = 0{,}993 \quad \Rightarrow \quad \Delta\rho \to 0{,}7\%.$$

## 30. Ideális gázok termodinamikája

**30.1. feladat:** Három liter $15°\mathrm{C}$ hőmérsékletű $10^5\,\mathrm{Pa}$ nyomású gázt $-170°\mathrm{C}$-ra hűtünk úgy, hogy közben a térfogata nem változott. Mekkora lesz a nyomása?

**Megoldás:** Tekintsük át az adatokat:

$$T_1 = 15°\mathrm{C} = 288\,\mathrm{K} \qquad T_2 = -170°\mathrm{C} = 103\,\mathrm{K}$$
$$p_1 = 10^5\,\mathrm{Pa} \qquad p_2 = ?$$

Az állapotváltozás *izochor*. Gay-Lussac II. törvényét felírva, a nyomás meghatározható:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \qquad \Rightarrow \qquad p_2 = \frac{p_1}{T_1} \cdot T_2 = \frac{10^5}{288} \cdot 103 = 3{,}576 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}.$$

---

**30.2. feladat:** Egy alsó végén zárt, felül nyitott, függőleges állású csőben $l = 15\,\mathrm{cm}$ magasságú higanyoszlop $h_1 = 60\,\mathrm{cm}$ hosszú, szobahőmérsékletű $(20°\mathrm{C})$ levegőoszlopot zár el úgy, hogy a higanyoszlop felső vége pontosan az üvegcső szájánál helyezkedik el. Hány °C-kal kell csökkenteni a bezárt levegő hőmérsékletét, hogy a higanyoszlop $5\,\mathrm{cm}$-t mozduljon el?

**Megoldás:** A folyamat *izobár* állapotváltozás. Gay-Lussac I. törvényét felírva:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

A bezárt gáz térfogatát a levegőoszlop hosszával írjuk fel: $V = A \cdot h$. Helyettesítsük be ezt az előbbi összefüggésbe:

$$\frac{A \cdot h_1}{T_1} = \frac{A \cdot h_2}{T_2}.$$

$A$-val egyszerűsítve:

$$\frac{h_1}{T_1} = \frac{h_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{h_2}{h_1} \cdot T_1 = \frac{55}{60} \cdot 293 = 268{,}6\,\mathrm{K} = -4{,}4^\circ\mathrm{C}.$$

A bezárt levegő hőmérsékletét tehát $24{,}4^\circ$C-kal kell csökkenteni.

---

**30.3. feladat:** Egy pohár sörben figyelünk egy buborékot. A pohár alján $20\,$cm mélyen a buborék átmérője $2\,$mm. Feltéve, hogy a felszíne és az alja között a sör hőmérséklete állandó, mekkora lesz a buborék átmérője $2\,$cm-rel a felszín alatt? A külső légnyomás $100\,$kPa.

**Megoldás:** A felszálló buborékban lévő gáz hőmérséklete állandó, így *izoterm* állapotváltozás történik. A kiindulási állapotban a gáz nyomása és térfogata:

$$p_1 = p_k + \rho \cdot g \cdot h_1.$$

$$V_1 = \frac{4 \cdot r_1^3 \cdot \pi}{3},$$

ahol $p_k$ a külső légnyomás értéke, $h_1$ a buborék távolsága a sör felszínétől. A sör sűrűségét a továbbiakban a víz sűrűségével közelítjük.

Amikor a buborék a felszín közelébe ért, a nyomása, térfogata a következőképpen alakul:

$$p_2 = p_k + \rho \cdot g \cdot h_2,$$

$$V_2 = \frac{4 \cdot r_2^3 \cdot \pi}{3}.$$

Az izoterm állapotváltozásra írjuk fel a Boyle-Mariotte törvényt:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2.$$

Behelyettesítve:

$$(p_k + \rho \cdot g \cdot h_1) \cdot \frac{4 \cdot r_1^3 \cdot \pi}{3} = (p_k + \rho \cdot g \cdot h_2) \cdot \frac{4 \cdot r_2^3 \cdot \pi}{3},$$

$$(p_k + \rho \cdot g \cdot h_1) \cdot r_1^3 = (p_k + \rho \cdot g \cdot h_2) \cdot r_2^3,$$

$$r_2^3 = \frac{(p_k + \rho \cdot g \cdot h_1) \cdot r_1^3}{p_k + \rho \cdot g \cdot h_2},$$

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{(p_k + \rho \cdot g \cdot h_1) \cdot r_1^3}{p_k + \rho \cdot g \cdot h_2}} = r_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{p_k + \rho \cdot g \cdot h_1}{p_k + \rho \cdot g \cdot h_2}} =$$

$$= r_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{100 \cdot 10^3 + 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}2}{100 \cdot 10^3 + 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}02}} = 1{,}006 \cdot r_1 = 1{,}006\,\text{mm}.$$

Az új átmérő tehát $d_2 = 2 \cdot r_2 = 2 \cdot 1{,}006\,\text{mm} = 2{,}012\,\text{mm}$.

**30.4. feladat:** Mekkora a lámpa $10\,\mathrm{cm}^3$ térfogatú égőjében lévő argongáz tömege, ha $120°\mathrm{C}$ átlagos hőmérsékleten $9{,}7 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$ a nyomás? Mekkora az égőben lévő nyomás szobahőmérsékleten?

**Megoldás:** Az egyesített gáztörvényből kiindulva a gáz anyagmennyisége meghatározható:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T,$$

$$n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{9{,}7 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{8{,}31 \cdot 393} = 2{,}97 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{mol}.$$

Az anyagmennyiségből a gáz tömege kiszámítható:

$$n = \frac{m}{M_{Ar}} \quad \Rightarrow \quad m = n \cdot M_{Ar} = 2{,}97 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{mol} \cdot 39{,}9\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} = 11{,}85\,\mathrm{mg}.$$

A nyomás kiszámítása könnyen megy, hiszen *izochor* folyamatot feltételezve az alábbi egyenlet igaz:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2},$$

$$p_2 = \frac{p_1}{T_1} \cdot T_2 = \frac{9{,}7 \cdot 10^4}{393} \cdot 293 = 7{,}23 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}.$$

---

**30.5. feladat:** Egy 20 literes palackban $10^7\,\mathrm{Pa}$ nyomású és $0°\mathrm{C}$ hőmérsékletű oxigén van. Az oxigénből kiengedünk $0{,}86\,\mathrm{kg}$-ot. Az oxigén sűrűsége $10^5\,\mathrm{Pa}$ nyomáson és $0°\mathrm{C}$-on $1{,}43\,\mathrm{kg/m}^3$.
a) Mekkora lesz a nyomás, ha a hőmérséklet ismét $0°\mathrm{C}$?
b) Mekkora hőmérsékletre kell az oxigént melegítenünk, hogy nyomása újból $100 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ legyen?

**Megoldás:** a)

A gáz anyagmennyisége megváltozik. Az egyesített gáztörvényből meghatározható a nyomásváltozás.

$$p_1 \cdot V = n_1 \cdot R \cdot T_1 \quad \Rightarrow \quad n_1 = \frac{10^7 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 273} = 88{,}16\,\text{mol}.$$

$$m_1 = n_1 \cdot M_{O_2} = 88{,}16 \cdot 32 = 2821{,}12\,\text{g}.$$

Az új tömeg:

$$m_2 = m_1 - 860\,\text{g} = 2821{,}12\,\text{g} - 860\,\text{g} = 1961{,}12\,\text{g}.$$

$$n_2 = \frac{m_2}{M_{O_2}} = 61{,}285\,\text{mol}.$$

A keresett nyomás tehát:

$$p_2 = \frac{n_2 \cdot R \cdot T_1}{V} = \frac{61{,}285 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{20 \cdot 10^{-3}} = 6{,}95 \cdot 10^6\,\text{Pa}.$$

b)
Az egyesített gáztörvény felírva a keresett hőmérséklet egyszerűen adódik:

$$p_1 \cdot V = n_2 \cdot R \cdot T_3,$$

$$T_3 = \frac{p_1 \cdot V}{n_2 \cdot R} = \frac{10^7 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{61{,}285 \cdot 8{,}31} = 392{,}7\,\text{K} = 119{,}7^\circ\text{C}.$$

---

**30.6. feladat:** Egy $4\,\text{dm}^2$ alapterületű hengerben $32\,\text{g}$ tömegű, $0^\circ$C hőmérsékletű oxigéngázt $150\,\text{kg}$ tömegű dugattyú zár el. A külső nyomás $10^5\,\text{Pa}$. A henger tengelye függőleges. A $32\,\text{g}$ tömegű $0^\circ$C-os gáz térfogata $10^5\,\text{Pa}$ nyomáson $22{,}4\,\text{dm}^3$.
a) Milyen magasan áll a dugattyú?
b) A gázt melegítjük egészen addig, amíg a dugattyú kétszeres magasságra emelkedik. Mekkora most a gáz hőmérséklete?

Megoldás: a)

A gáz nyomása a külső légnyomás és a dugattyú súlyából származó nyomás összege:

$$p_1 = p_k + p_d = p_k + \frac{F_d}{A} = p_k + \frac{m_d \cdot g}{A} = 10^5 + \frac{150 \cdot 9{,}81}{4 \cdot 10^{-2}} = 1{,}3675 \cdot 10^5 \,\text{Pa}.$$

A $0^\circ$C-on adott térfogatból kiindulva, *izoterm* folyamatot feltételezve a következőt írhatjuk:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{p_2 \cdot V_2}{p_1} = \frac{10^5 \cdot 22{,}4}{1{,}3675 \cdot 10^5} = 16{,}38\,\text{dm}^3.$$

A keresett magasság:

$$h_1 = \frac{V_1}{A} = \frac{16{,}38}{4} \approx 4{,}1\,\text{dm}.$$

b)

Mivel a folyamat állandó nyomáson megy végbe, Gay-Lussac I. törvényéből következik a megoldás:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{2 \cdot V_1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2 \cdot T_1 = 2 \cdot 273\,\text{K} = 546\,\text{K} = 273^\circ\text{C}.$$

## 31. Kinetikus gázelmélet

**31.1. feladat:** Hogyan aránylik adott hőmérsékletű levegőben a nitrogén és az oxigén molekulák sebessége egymáshoz?

**Megoldás:** Az ekvipartíció tételéből kiindulva a következőt írhatjuk:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot k \cdot T,$$

ahol $\epsilon$ az egy szabadsági fokra jutó energia.
Ideális gáz esetén egy részecske összes energiájára a következő egyenlőség igaz:

$$E_1 = \frac{f}{2} \cdot k \cdot T.$$

ahol $f$ az energiatároló szabadsági fokok száma. Kétatomos molekuláknál a szabadsági fokok száma $f = 5$, melyből a mozgási energia három szabadsági fokra jut. A nitrogén és az oxigén molekulák esetén a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\frac{3}{2}\cdot k\cdot T=\frac{1}{2}\cdot m_{N_2}\cdot v_{N_2}^2,$$
$$\frac{3}{2}\cdot k\cdot T=\frac{1}{2}\cdot m_{O_2}\cdot v_{O_2}^2.$$

A két egyenletet osszuk el egymással:

$$1=\frac{m_{N_2}\cdot v_{N_2}^2}{m_{O_2}\cdot v_{O_2}^2}.$$

Az egyenletet átrendezve:

$$\frac{m_{O_2}}{m_{N_2}}=\frac{v_{N_2}^2}{v_{O_2}^2},$$
$$\frac{v_{N_2}}{v_{O_2}}=\sqrt{\frac{m_{O_2}}{m_{N_2}}}.$$

A $N_2$ és az $O_2$ gázmolekulák tömegét meghatározva az eredmény könnyen adódik.

$$m_{N_2}=\frac{M_{N_2}}{N_A}=\frac{28}{6\cdot 10^{23}}=4{,}6667\cdot 10^{-23}\,\mathrm{g},$$
$$m_{O_2}=\frac{M_{O_2}}{N_A}=\frac{32}{6\cdot 10^{23}}=5{,}3333\cdot 10^{-23}\,\mathrm{g},$$
$$\frac{v_{N_2}}{v_{O_2}}=\sqrt{\frac{5{,}33\cdot 10^{-23}}{4{,}67\cdot 10^{-23}}}=1{,}069.$$

**31.2. feladat:** Mekkora munkával lehet a $3{\cdot}10^{27}$ darab molekulát tartalmazó gáz térfogatát felére csökkenteni állandó nyomáson, ha a gáz hőmérséklete 300 K?

**Megoldás:** Mivel a folyamat *izobár*, érvényes Gay-Lussac I. törvénye:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1/2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{T_1}{2} = 150\,\mathrm{K}.$$

A tágulási munka kiszámítása (állandó nyomáson) a következő összefüggéssel lehetséges:

$$W = -p \cdot \Delta V.$$

A kezdő-, és végállapotra felírva az állapotegyenletet:

$$p \cdot V_1 = N \cdot k \cdot T_1,$$

$$p \cdot V_2 = N \cdot k \cdot T_2.$$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt:

$$p \cdot (V_2 - V_1) = N \cdot k \cdot (T_2 - T_1),$$

$$p \cdot \Delta V = N \cdot k \cdot \Delta T.$$

A tágulási munka tehát:

$$W = -p \cdot \Delta V = -N \cdot k \cdot \Delta T = -3 \cdot 10^{27} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot (150 - 300) = 6{,}21 \cdot 10^{6}\,\mathrm{J}.$$

**31.3. feladat:** Egy $3\,\mathrm{dm}^3$ térfogatú edényben $3 \cdot 10^{23}$ darab kétatomos gázmolekula van. A gáz nyomása $4 \cdot 10^5$ Pa.

a) Mekkora a gáz hőmérséklete?

b) Mekkora egy molekula egy szabadsági fokára jutó átlagos energia?

c) Mekkora a gáz belső energiája?

**Megoldás:** a)

A gáz hőmérséklete az állapot egyenletből meghatározható:

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{p \cdot V}{N \cdot k} = \frac{4 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}} = 289{,}9\,\mathrm{K}.$$

b)

Az ekvipartíció tétele alapján:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot k \cdot T = \frac{1}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 289{,}9 = 2 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{J}.$$

c)

A gáz belső energiája:

$$E_b = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot T = \frac{5}{2} \cdot 3 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 289{,}9 = 3000\,\mathrm{J}.$$

## 32. A hőtan főtételei

**32.1. feladat:** Zárt gáztartályban 30 liter, 2 atm nyomású hidrogén van. A gázt felmelegítve nyomása 3,3 atmra nő.
a) Mennyivel változott a gáz belső energiája?
b) Mennyi hőt vett fel a gáz?

**Megoldás:** a)
A belső energia megváltozását a következő összefüggés adja meg:

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot \Delta T.$$

Mivel a hőtani folyamat *izochor*, az állapotegyenletre a következőt írhatjuk:

$$\Delta(p \cdot V) = N \cdot k \cdot \Delta T.$$

Állandó térfogaton:

$$\Delta p \cdot V = N \cdot k \cdot \Delta T.$$

A belső energia tehát:

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot \Delta T = \frac{f}{2} \cdot \Delta p \cdot V.$$

Mivel a hidrogéngáz kétatomos hidrogénmolekulákból áll, a szabadsági fokok száma $f = 5$.

$$\Delta E_b = \frac{5}{2} \cdot \Delta p \cdot V = \frac{5}{2} \cdot (p_2 - p_1) \cdot V = \frac{5}{2} \cdot (3{,}3 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^5) \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 9750\,\text{J}.$$

b)

Írjuk fel a hőtan I. főtételét:

$$\Delta E_b = Q + W.$$

Izochor folyamatnál a tágulási munka nulla, ezért

$$Q = \Delta E_b = 9750\,\mathrm{J}.$$

---

**32.2. feladat:** Állandó, $1$ atm nyomáson melegítünk $30$ liter levegőt, amíg térfogata $34$ literre nő.
a) Mennyivel változott a gáz belső energiája?
b) Mennyi munkát végeztünk a gázon?
c) Mennyi hőt vett fel a gáz?

**Megoldás:** a)
A belső energia:

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot \Delta T = \frac{f}{2} \cdot p \cdot \Delta V.$$

A levegőt alkotó gázok többsége kétatomos gáz, ezért a szabadsági fokok száma $f = 5$.

$$\Delta E_b = \frac{5}{2} \cdot p \cdot \Delta V = \frac{5}{2} \cdot 10^5 \cdot (34 \cdot 10^{-3} - 30 \cdot 10^{-3}) = 1000\,\mathrm{J}.$$

b)
A tágulási munka:

$$W = -p \cdot \Delta V = -10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = -400\,\mathrm{J}.$$

c)

A hőtan I. főtétele alapján a hőenergia könnyen adódik.

$$\Delta E_b = Q + W \quad \Rightarrow \quad Q = \Delta E_b - W = 1000\,\mathrm{J} - (-400\,\mathrm{J}) = 1400\,\mathrm{J}.$$

**32.3. feladat:** Egy $5\,\mathrm{l}$-es tartályban $8 \cdot 10^5$ Pa nyomású, $50°\mathrm{C}$ hőmérsékletű egyatomos gáz van.
a) Hány gázatom van a tartályban?
b) Mekkora a gáz belső energiája?
c) A gáz egyharmadát kiengedjük a tartályból. Hány °C-ra kell melegíteni a tartályban maradó gázt, hogy nyomása $12 \cdot 10^5$ Pa legyen?

**Megoldás:** a)
Az egyesített gáztörvényből kiindulva a részecskeszám megadható:

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T \quad \Rightarrow \quad N = \frac{p \cdot V}{k \cdot T} = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 323} = 8{,}9738 \cdot 10^{23}.$$

b)
A gáz belső energiája:

$$E_b = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot T = \frac{3}{2} \cdot 8{,}97 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 323 = 5997{,}7\,\mathrm{J}.$$

c)
Az új részecskeszám: $N' = 2 \cdot N/3 = 5{,}98 \cdot 10^{23}$. Az állapotegyenletet felírva a hőmérséklet meghatározható:

$$p' \cdot V = N' \cdot k \cdot T' \quad \Rightarrow \quad T' = \frac{p' \cdot V}{N' \cdot k} = \frac{12 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{5{,}98 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}} = 727\,\mathrm{K} = 454°\mathrm{C}.$$

## 33. Hőtani folyamatok

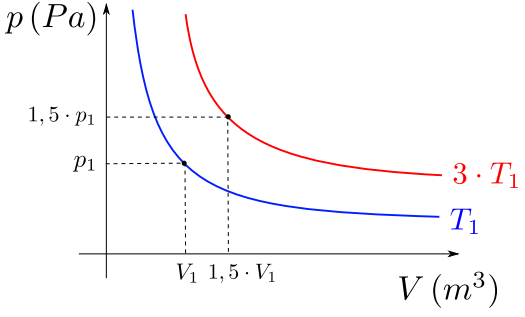
**33.1. feladat:** Egy $50$ g-os rézdarab hőmérséklete $25°$C. Mekkora lesz a hőmérséklete, ha $1200$ J hőt közlünk vele?

**Megoldás:** Mivel

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T,$$

a keresett hőmérséklet könnyen meghatározható (a réz fajhője $387\, J/(kg \cdot °\,\mathrm{C})$):

$$\Delta T = \frac{Q}{c \cdot m} = \frac{1200}{387 \cdot 50 \cdot 10^{-3}} = 62°\mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad T' = T + \Delta T = 25°\mathrm{C} + 62°\mathrm{C} = 87°\mathrm{C}.$$




33.1. ábra. *Ábra a 33-2. feladathoz.*

**33.2. feladat:** Az ábráról két különböző edényben lévő oxigéngáz adatait lehet leolvasni. Melyik gáznak nagyobb a hőkapacitása?

**Megoldás:** A hőkapacitás:

$$C = \frac{Q}{\Delta T},$$

vagy

$$C = c \cdot m,$$

ahol $c$ az anyag fajhője.
Írjuk fel az állapotegyenletet a két gázra:

$$p_1 \cdot V_1 = N_1 \cdot k \cdot T_1,$$

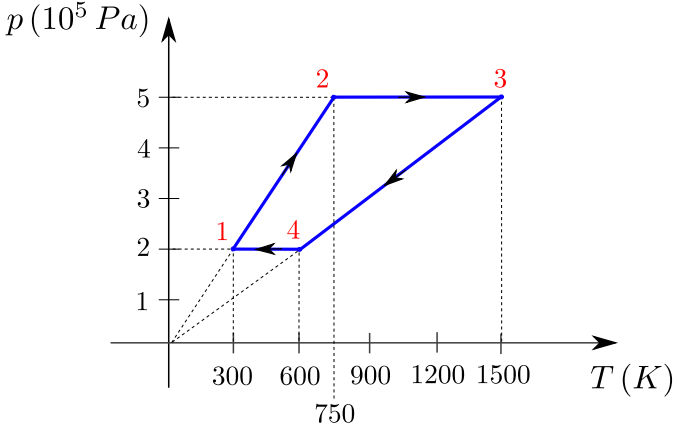
$$1{,}5 \cdot p_1 \cdot 1{,}5 \cdot V_1 = N_2 \cdot k \cdot 3 \cdot T_1.$$

Fejezzük ki a részecskeszámokat:

$$N_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{k \cdot T_1},$$

$$N_2 = \frac{1{,}5 \cdot p_1 \cdot 1{,}5 \cdot V_1}{k \cdot 3 \cdot T_1} = 0{,}75 \cdot \frac{p_1 \cdot V_1}{k \cdot T_1} = 0{,}75 \cdot N_1.$$

Az 1. számú gáz tehát több részecskét tartalmaz, ezért a gáz tömege is nagyobb. A hőkapacitása tehát az 1. gáznak nagyobb.




33.2. ábra. *Ábra a 33-3. feladathoz.*

**33.3. feladat:** Egyatomos molekulákból álló gázzal az ábrán látható körfolyamatot végezzük el. A részecskeszám $3 \cdot 10^{23}$.
a) Mekkora a körfolyamatban hasznosítható munka?
b) Mekkora a felvett hő?
c) Mekkora a leadott hő?

**Megoldás:** a)
Elsőként, az állapotegyenlet alapján, határozzuk meg az egyes fázisokban a gáz térfogatát.

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T \quad \Rightarrow \quad V = \frac{N \cdot k \cdot T}{p}.$$

Az 1. állapotban tehát:

$$V_1 = \frac{N \cdot k \cdot T_1}{p_1} = \frac{3 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{2 \cdot 10^5} = 6{,}21\,\mathrm{dm}^3.$$

A 2. állapotban:

$$V_2 = \frac{N \cdot k \cdot T_2}{p_2} = \frac{3 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 750}{5 \cdot 10^5} = 6{,}21\,\mathrm{dm}^3.$$

A 3. állapotban:

$$V_3 = \frac{N \cdot k \cdot T_3}{p_3} = \frac{3 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 1500}{5 \cdot 10^5} = 12{,}42\,\mathrm{dm}^3.$$

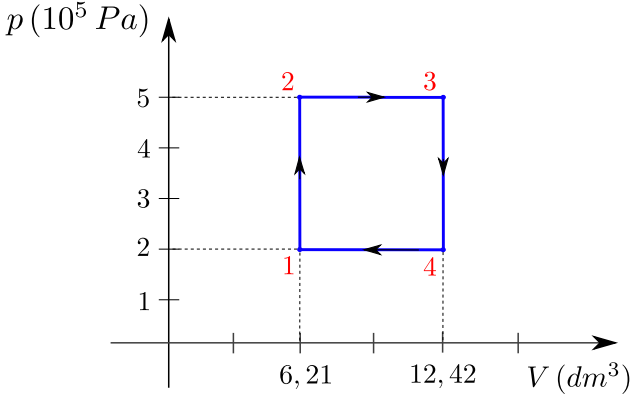
A 4. állapotban:

$$V_4 = \frac{N \cdot k \cdot T_4}{p_4} = \frac{3 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 600}{2 \cdot 10^5} = 12{,}42\,\mathrm{dm}^3.$$

A kapott eredmények alapján jól látható, hogy a $p - V$ diagramon a következő állapotváltozásokat ábrázolhatjuk:

- 1. $\Rightarrow$ 2. - izochor ($V$ = állandó),
- 2. $\Rightarrow$ 3. - izobár ($p$ = állandó),
- 3. $\Rightarrow$ 4. - izochor ($V$ = állandó),
- 4. $\Rightarrow$ 1. - izobár ($p$ = állandó).

A gáz térfogata tehát a 2. $\Rightarrow$ 3., illetve a 4. $\Rightarrow$ 1. állapotváltozásnál változik. A 2. $\Rightarrow$ 3. átmenetnél tágul, a 4. $\Rightarrow$ 1. átmenetnél összehúzódik (lásd $p - V$ grafikon).
A környezet által a gázon végzett munka a két állapotváltozásnál kiszámolt tágulási munkák algebrai (előjeles) összege:




33.3. ábra. *$p-V$ diagram a 33-3. feladathoz.*

$$W_{össz} = W_{2-3} + W_{4-1} = -p_2 \cdot \Delta V + (-p_4 \cdot \Delta V) =$$
$$= -5 \cdot 10^5 \cdot (12{,}42 \cdot 10^{-3} - 6{,}21 \cdot 10^{-3}) - 2 \cdot 10^5 (6{,}21 \cdot 10^{-3} - 12{,}42 \cdot 10^{-3}) = -1863\,\mathrm{J}.$$

A hasznos munka a gáz által a környezet felé átadott munka, mely az előbbi eredmény ellentettje:

$$W_{hasznos} = 1863\,\mathrm{J}.$$

b-c)
Számoljuk ki az egyes állapotváltozásoknál a hőmennyiséget:
1. $\Rightarrow$ 2. átmenet:

$$\Delta E_b = Q + W.$$

Mivel az állapotváltozás izochor, $W = 0$.

$$Q = \Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot \Delta T.$$

$$Q_{1-2} = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot (750 - 300) = 2794{,}5\,\mathrm{J}.$$

2. $\Rightarrow$ 3. átmenet:

$$\Delta E_b = Q + W \quad \Rightarrow \quad Q = \Delta E_b - W.$$

$$Q_{2-3} = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot (T_3 - T_2) - (-p_2 \cdot (V_3 - V_2)) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot (1500 - 750) + 5 \cdot 10^5 \cdot (12{,}42 \cdot 10^{-3} - 6{,}21 \cdot 10^{-3}) = 7762{,}5\,\mathrm{J}.$$

3. $\Rightarrow$ 4. átmenet:
Izochor állapotváltozás, $W = 0$.

$$Q_{3-4} = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot (T_4 - T_3) = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot (600 - 1500) = -5589\,\mathrm{J}.$$

4. $\Rightarrow$ 1. átmenet:

$$Q_{4-1} = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot (T_1 - T_4) - (-p_4 \cdot (V_1 - V_4)) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot (300 - 600) + 2 \cdot 10^5 \cdot (6{,}21 \cdot 10^{-3} - 12{,}42 \cdot 10^{-3}) = -3105\,\mathrm{J}.$$

Az összes felvett hő a pozitív előjelű hőmennyiségek összege, a teljes leadott hő pedig a negatív előjelű hőmennyiség értékek összege lesz:

$$Q_{fel} = Q_{1-2} + Q_{2-3} = 2794{,}5\,\mathrm{J} + 7762{,}5\,\mathrm{J} = 10557\,\mathrm{J},$$

$$Q_{le} = Q_{3-4} + Q_{4-1} = -5589\,\mathrm{J} + (-3105\,\mathrm{J}) = -8694\,\mathrm{J}.$$

---

**33.4. feladat:** A $10°$C-os, $300\,\mathrm{J/K}$ hőkapacitású kaloriméterben $0{,}5\,\mathrm{kg}$, $10°$C-os alkohol van. Az alkoholhoz $1\,\mathrm{dl}$, $50°$C-os vizet öntünk. Határozzuk meg a kialakuló közös hőmérsékletet.

**Megoldás:** Hőszigetelt rendszerben a termikus kölcsönhatás során leadott és felvett hőmennyiségek összege nulla.

$$Q_{le} + Q_{fel} = 0,$$

$$-Q_{le} = Q_{fel}.$$

A kölcsönhatás során a víz ad át hőenergiát az alkoholnak és a kaloriméternek. Mivel $Q = c \cdot m \cdot \Delta T$, a következőt írhatjuk:

$$-(c_v \cdot m_v \cdot \Delta T_v) = c_a \cdot m_a \cdot \Delta T_a + C_{kal} \cdot \Delta T_{kal},$$

$$-(c_v \cdot m_v \cdot (T_k - T_v)) = c_a \cdot m_a \cdot (T_k - T_a) + C_{kal} \cdot (T_k - T_{kal}),$$

$$c_v \cdot m_v \cdot (T_v - T_k) = c_a \cdot m_a \cdot (T_k - T_a) + C_{kal} \cdot (T_k - T_{kal}).$$

A víz tömegét a sűrűségének ismeretében könnyen kiszámolhatjuk:

$$m_v = \rho_v \cdot V_v = 1000 \cdot 10^{-4} = 0{,}1\,\text{kg}.$$

Helyettesítsük be az adatokat az előbbi egyenletbe, majd fejezzük ki a közös hőmérsékletet ($T_k$-t):

$$4180 \cdot 0{,}1 \cdot (50 - T_k) = 2400 \cdot 0{,}5 \cdot (T_k - 10) + 300 \cdot (T_k - 10),$$

$$T_k = \frac{4180 \cdot 0{,}1 \cdot 50 + 2400 \cdot 0{,}5 \cdot 10 + 300 \cdot 10}{4180 \cdot 0{,}1 + 2400 \cdot 0{,}5 + 300} = 18{,}72^\circ\text{C}.$$

**33.5. feladat:** Mennyi $0°$C-os jeget lehet megolvasztani $1\,\mathrm{kg}$, $100°$C-os vízgőzzel?

**Megoldás:** A jég olvadásához szükséges hőt a gőz lecsapódásakor felszabaduló hő, illetve a lecsapódott, $100°$C-os víz $0°$C-ra való lehűlésekor felszabaduló hő fedezi.

$$Q_1 = L_f \cdot m_g = 2{,}26 \cdot 10^6 \cdot 1 = 2260000\,\mathrm{J},$$

$$Q_2 = c_v \cdot m_g \cdot \Delta T = 4186 \cdot 1 \cdot (100 - 0) = 418600\,\mathrm{J}.$$

A rendelkezésre álló hő:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 2260000 + 418600 = 2678600\,\mathrm{J}.$$

A jég megolvasztásához szükséges hőmennyiség:

$$Q_o = L_o \cdot m_j.$$

Mivel $Q_o = Q$, a jég tömege:

$$m_j = \frac{Q_o}{L_o} = \frac{2678600}{3{,}33 \cdot 10^5} = 8{,}04\,\mathrm{kg}.$$

---

**33.6. feladat:** $0{,}2\,\mathrm{kg}$ vizet elforralunk $100°$C-on és $10\,\mathrm{N/cm^2}$ nyomáson. A keletkező vízgőz sűrűsége $0{,}6\,\mathrm{kg/m^3}$, forráshője $2{,}25 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kg}$. Mennyivel lesz nagyobb a keletkező $100°$C-os vízgőz belső energiája annál, mint amennyi a $100°$C-os vízé volt?

**Megoldás:** A belső energia megváltozása a hőtan I. főtételéből határozható meg:

$$\Delta E_b = Q + W,$$

ahol $Q$ a rendszerbe juttatott hőenergiát, $W$ a rendszeren végzett munkát jelenti.

$Q$ a forraláshoz szükséges hőenergia:

$$Q = L_f \cdot m_v = 2{,}25 \cdot 10^6 \cdot 0{,}2 = 450000\,\mathrm{J}.$$

$W$ a gőz tágulási munkája:

$$W = -p \cdot \Delta V_g,$$

ahol $\Delta V_g$ a gőz térfogatának megváltozása. Mivel a kiindulási állapotban a gőz térfogata $0$ volt, a víz teljes elforralásakor keletkező gőz ($V_g$) térfogata megegyezik $\Delta V_g$-vel:

$$\Delta V_g = V_g = \frac{m_g}{\rho_g} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}\,\mathrm{m}^3.$$

A tágulási munka tehát:

$$W = -p \cdot \Delta V_g = -(10^5 \cdot \frac{1}{3}) = -33333{,}33\,\mathrm{J},$$

a belső energia változás pedig:

$$\Delta E_b = Q + W = 450000 - 33333{,}33 = 416667\,\mathrm{J}.$$

---

**33.7. feladat:** Mennyi idő alatt lehet az $1\,\mathrm{kW}$ teljesítményű fűtőszállal $3\,\mathrm{dl}$, $4°$C-os vizet elforralni?

**Megoldás:** A fűtőszál teljesítménye $1000\,\mathrm{W}$. A teljesítmény definíciója alapján írhatjuk:

$$P = \frac{W}{t}.$$

Itt a munka elektromos munka. Tegyük fel, hogy az elektromos munka teljes egészében hőenergiává alakul, s ez a hő fedezi a melegítéshez ($Q_1$), illetve forraláshoz ($Q_2$) szükséges hőenergiát.

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

A víz tömege könnyen meghatározható:

$$m_v = \rho_v \cdot V_v = 1000 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-3} = 0{,}3\,\mathrm{kg}.$$

A $4°$C-os víz $100°$C-ra való melegítéséhez szükséges hőenergia:

$$Q_1 = c_v \cdot m_v \cdot \Delta T = 4186 \cdot 0{,}3 \cdot (100 - 4) = 120556{,}8\,\mathrm{J}.$$

A $100°$C-os víz elforralásához szükséges hőenergia:

$$Q_2 = L_f \cdot m_v = 2{,}26 \cdot 10^6 \cdot 0{,}3 = 678000\,\mathrm{J}.$$

A teljes hőenergia nagysága tehát:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 120556{,}8 + 678000 = 798556{,}8\,\mathrm{J}.$$

Mivel az előzőek alapján $W = Q$, a teljesítmény alapján a keresett idő meghatározható:

$$W = P \cdot t = Q,$$

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{798556{,}8}{1000} = 798{,}56\,\mathrm{s}.$$

**33.8. feladat:** Legalább mekkora vízszintes irányú sebességgel kell egy $0°$C hőmérsékletű hógolyót a függőleges falhoz dobni, hogy megolvadjon? A hó olvadáshője: $3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg.

**Megoldás:** Tegyük fel, hogy a hógolyó mozgási energiája teljes egészében hővé alakul. Ekkor:

$$E_m = Q,$$

azaz

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = L_o \cdot m.$$

Ebből a sebesség meghatározható:

$$v = \sqrt{2 \cdot L_o} = \sqrt{3{,}34 \cdot 10^5} = 817{,}31\,\text{m/s}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Fúrás közben az acél fúró és a réz munkadarab $90°$C-ra melegszik fel. Mekkora a furat mérete a munkadarabban $20°$C-on, ha a fúró átmérője $20°$C-on $10$ mm?
($\alpha_{ac} = 1{,}1 \cdot 10^{-5}\, 1/K, \alpha_r = 1{,}84 \cdot 10^{-5}$ 1/K.)

   A furat mérete (mm): ☐ Megold. ☐

2. Egy edény térfogata $0°$C-on $1$ liter. Ezen a hőmérsékleten az edényt teletöltjük higannyal, majd egy nagyobb tálba állítjuk. Ha az egészet $100°$C-ra melegítjük, a tálban $15{,}2\,\text{cm}^3$ kiömlött higany van. Mekkora az edény anyagának lineáris hőtágulási együtthatója, ha $\beta_{Hg} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ 1/K?

   A lineáris hőtágulási együttható (1/K): ☐ Megold. ☐

3. Egy $25\,\text{dm}^3$ térfogatú gáztartályban $1{,}4$ kg tömegű, $5$ MPa nyomású nitrogéngáz van. Mekkora a hőmérséklete? Mekkora lesz a palackban maradt gáz nyomása, ha ezen a hőmérsékleten tartva a gáz felét elhasználjuk?

   A gáz hőmérséklete (°C): ☐ Megold. ☐

   A gáz nyomása (MPa): ☐ Megold. ☐

4. Robbanómotor hengerében a sűrítési végnyomás $1{,}2$ MPa, a sűrítési ütem kezdetén a hengerben levő keverék nyomása $0{,}09$ MPa. A motor sűrítési aránya 1:8. Mekkora lesz a végállapotban a hőmérséklet, ha kezdetben $21°$C volt?

   A hőmérséklet (°C): ☐ Megold. ☐

5. Egy $100\,\text{dm}^3$ térfogatú, $10^5$ Pa nyomású He gázzal töltött edénybe egy $500$ W-os elektromos melegítő van beépítve. A melegítőt $27°$C hőmérsékleten 1 percre bekapcsoljuk. Mekkora lesz a gáz nyomása és a belső

energiája a melegítés befejezésekor?

A nyomás (Pa): Megold.

A belső energia (J): Megold.

6. Egy leeresztett hőlégballonnak és rakományának tömege 200 kg. A külső levegő hőmérséklete 10°C, nyomása 101 kPa. A ballont 400 $m^3$ meleg levegővel töltjük meg. Milyen hőmérsékletűre kell melegítenünk a levegőt, hogy a ballon felszálljon? (A 10°C-os levegő sűrűsége 1,25 $kg/m^3$.)

A keresett hőmérséklet (°C): Megold.

7. Nukleáris fúzió akkor következik be a deutérium gázban, ha a nukleonok átlagos kinetikus energiája eléri a 0,72 MeV értéket. Milyen magas hőmérséklet szükséges ehhez? ($1eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J.)

A keresett hőmérséklet (K): Megold.

8. A 250 g tömegű 15°C-os vizet tartalmazó, elhanyagolható hőkapacitású kaloriméterbe 20 g vizes havat dobunk. A hőmérséklet a kaloriméterben ennek következtében 5°C-kal csökken. Mennyi vizet tartalmazott a hó?
($L_o = 3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg, $c_v = 4183$ J/(kg · K).)

A víz tömege (g): Megold.

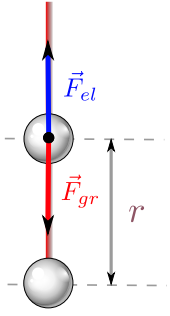
# 20. LECKE

## A Coulomb-törvény és az elektromos mező

## 34. A Coulomb-törvény és az elektromos mező

**34.1. feladat:** Egy függőleges helyzetű, vékony, szigetelő anyagból készült szálra két, alumínium gyöngyöt fűzünk fel. Az első töltése $Q_1 = +18\,\mathrm{nC}$. Miután ezt felfűztük, a második, semleges gyöngyöt hozzáérintjük az elsőhöz, és ezután fűzzük fel. Milyen messze kerül a második gyöngy az elsőtől, ha a gyöngyök tömege $1\,\mathrm{g}$?

**Megoldás:** Az összeérintés pillanatában a második gyöngy is elektromos állapotba kerül. Töltésének nagyságát a töltésmegmaradás törvényéből határozhatjuk meg.




34.1. ábra. *Egymást taszító elektromosan töltött alumínium gyöngyök.*

Kezdetben a két gyöngy együttes töltése $Q_1 = +18\,\mathrm{nC}$. Az összeérintéskor ez a töltésmennyiség oszlik el a két gyöngyön. Mivel a gyöngyök ugyanolyanok, a töltésük a szétválasztáskor $Q' = +9\,\mathrm{nC}$ lesz. Az összes töltésmennyiség tehát nem változik. Ezt figyelembe véve a gyöngyök taszítani fogják egymást a felfűzés után. A második gyöngy egyensúlyban lesz. Az erők nagyságára tehát a következőt írhatjuk (a súrlódástól eltekintünk):

$$F_{gr} = F_C,$$

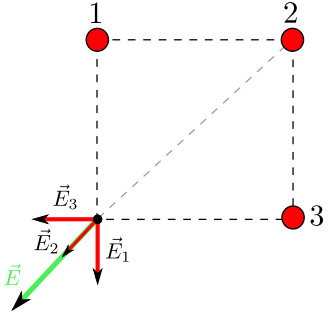
$$m \cdot g = k \cdot \frac{Q'^2}{r^2},$$

$$r = \sqrt{\frac{k \cdot Q'^2}{m \cdot g}} = \sqrt{\frac{8{,}99 \cdot 10^9 \cdot (9 \cdot 10^{-9})^2}{10^{-3} \cdot 9{,}81}} = 8{,}62 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 0{,}862\,\mathrm{cm}.$$

---

**34.2. feladat:** Három, $Q = +4 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$ nagyságú töltést helyezünk el egy $10\,\mathrm{cm}$ oldalhosszúságú négyzet három csúcsában. Határozzuk meg az elektromos térerősséget a négyzet negyedik csúcsában!

**Megoldás:** Az ábra alapján a negyedik csúcsban a térerősség nagyságát és irányát az egyes ponttöltések által



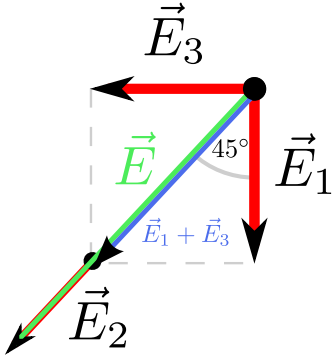

34.2. ábra. *Magyarázó ábra a 34-2. feladathoz.*

az adott pontban meghatározott térerősség vektorok összegéből kapjuk meg.

$$\underline{E} = \underline{E_1} + \underline{E_2} + \underline{E_3}.$$

Az ábra alapján jól látszik, hogy az eredő térerősség vektor iránya a függőlegessel $45°$-os szöget zár be.
Az egyes töltések által keltett elektromos térerősség nagyságát a vizsgált pontban a következő összefüggéssel számíthatjuk ki:

$$E = k \cdot \frac{Q}{r^2}.$$




34.3. ábra. *A térerősség vektorok összege.*

Az ábra alapján írhatjuk:

$$\cos 45^\circ = \frac{E_1}{E_{1+3}} \quad \Rightarrow \quad E_{1+3} = \frac{E_1}{\cos 45^\circ} = \frac{k \cdot \frac{Q}{r^2}}{\cos 45^\circ} = \frac{8{,}99 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9}}{0{,}1^2}}{\cos 45^\circ} = 5085{,}51\,\text{N/C}.$$

$$E_2 = k \cdot \frac{Q}{r'^2} = 8{,}99 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9}}{(0{,}1 \cdot \sqrt{2})^2} = 1798\,\text{N/C}.$$

Az eredő térerősség nagysága tehát:

$$E = E_{1+3} + E_2 = 5085{,}51 + 1798 = 6883{,}51\,\text{N/C}.$$

**34.3. feladat:** Egy öt elektron töltésű, $1{,}6 \cdot 10^{-12}$ g tömegű olajcsepp szabadon esik légritkított térben. Mekkora nagyságú függőleges elektromos mező szükséges ahhoz, hogy a csepp lebegjen?

**Megoldás:** A lebegés feltétele, hogy a cseppre ható erők eredője nulla legyen (egyensúly). Ha az elektromos mezőt bekapcsoljuk, a cseppre ható erők nagyságára a következőt írhatjuk:

$$F_{gr} = F_C,$$

$$m \cdot g = E \cdot Q.$$

Ebből a térerősség nagysága meghatározható:

$$E = \frac{m \cdot g}{Q} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-15} \cdot 9{,}81}{5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 19620\,\text{N/C}.$$

A térerősség vektor iránya függőlegesen lefelé mutat.

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Három töltés egy egyenes mentén helyezkedik el. A töltések nagysága rendre $-4\,\mu$C, $3\,\mu$C és $-7\,\mu$C, a távolságuk pedig $20$ cm, ill. $15$ cm. Határozzuk meg a középen lévő $3\,\mu$C töltésre ható eredő erőt!

   Az erő nagysága (N): Megold.

2. Két, $1$ g tömegű golyó azonos pontban egy-egy $2$ cm hosszúságú vékony fonállal van felfüggesztve. Ha a golyóknak egyenlő nagyságú és előjelű töltést adunk, akkor a golyók eltávolodnak egymástól úgy, hogy a függesztő fonalak $60°$-os szöget zárnak be egymással. Mekkora töltést adtunk a golyóknak?

   A töltés nagysága (Q): Megold.

3. Félkör alakú vékony, sima szigetelő rúd vízszintes síkban van rögzítve, végpontjaiban $20$ nC és $10$ nC töltésű részecskéket rögzítettünk. A félkörön pozitív töltéssel ellátott kis gyűrű csúszhat. Mekkora szöget zár be a gyűrűhöz és a $10$ nC-os töltéshez húzott sugár egyensúlyban?

   A szög nagysága (°): Megold.

# 21. LECKE

## Az elektromos mező munkája. A feszültség

## 35. Az elektromos mező munkája. A feszültség

**35.1. feladat:** Elektromos térben állandó sebességgel mozgatunk egy $2 \cdot 10^{-6}$ C próbatöltést két pont között és eközben $5 \cdot 10^{-5}$ J munkát végzünk. Mekkora a két pont között az elektromos potenciálkülönbség (feszültség)?

**Megoldás:** A feszültség a két pont között a következő összefüggéssel határozható meg:

$$U = \frac{W}{Q} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-6}} = 25\,\mathrm{V}.$$

**35.2. feladat:** Két egyaránt $8 \cdot 10^{-9}$ C nagyságú, de ellentétes előjelű töltés $80$ cm-re van egymástól. Mekkora az elektromos potenciál a pozitív töltéstől $20$, ill. $40$ cm-re a két töltést összekötő szakasz mentén?

**Megoldás:** Az elektromos potenciál ponttöltés keltette elektromos mezőben, $r$ távolságban a következő összefüggéssel adható meg:

$$U = k \cdot \frac{Q}{r}.$$

Az első esetben a potenciálok:

$$U_1 = k \cdot \frac{Q_1}{r_1} = 8{,}99 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-9}}{0{,}2} = 359{,}6\,\mathrm{V},$$

$$U_2 = k \cdot \frac{Q_2}{r_2} = 8{,}99 \cdot 10^9 \cdot \frac{-8 \cdot 10^{-9}}{0{,}6} = -119{,}87\,\mathrm{V}.$$

A potenciál $20$ cm-re tehát: $U = U_1 + U_2 = 359{,}6 - 119{,}87 = 239{,}73\,\mathrm{V}$.
Második esetben, mivel az egyes töltésektől mért távolságok ugyanakkorák $(40\,\mathrm{cm})$, könnyű belátni, hogy a potenciál $U = 0\,\mathrm{V}$.

**35.3. feladat:** A **B** pontban $25\,\mathrm{V}$-tal nagyobb az elektromos potenciál, mint **A** pontban. Mekkora sebességre tesz szert a **B**-ben nyugalmi állapotban lévő, $1{,}8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg}$ tömegű, $3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}$ töltésű részecske miközben az **A** pontba ér anélkül, hogy az elektromos téren kívül bármilyen más erőhatást figyelembe kellene vennünk?

**Megoldás:** Az $A$ pont és a $B$ pont közötti potenciálkülönbség (feszültség) $U_{AB} = 25\,\mathrm{V}$. Az elektromos mező munkája, miközben a töltést az $A$ pontból a $B$ pontba mozgatja:

$$W_{el} = Q \cdot U_{AB} = 3 \cdot 10^{-5} \cdot 25 = 7{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}.$$

A munkatétel alapján:

$$W_{el} = \Delta E_{mozg},$$

$$W_{el} = \Delta\left(\frac{1}{2} m \cdot v^2\right),$$

$$W_{el} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot W_{el}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-4}}{1{,}8 \cdot 10^{-5}}} = 9{,}13\,\mathrm{m/s}.$$

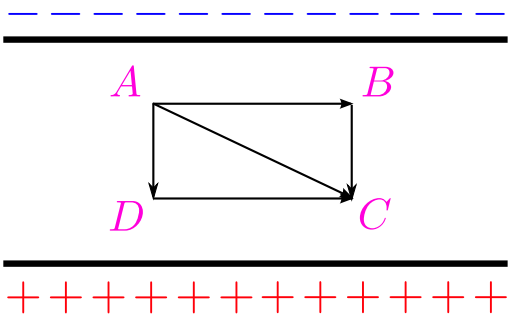
# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Egy elektron egy $2{,}5 \cdot 10^5$ N/C nagyságú homogén térben az erővonalakkal párhuzamosan mozog. Az elektronra negatív töltése miatt lassító erő hat. Mekkora utat tesz meg a térben az elektron mielőtt teljesen elveszti sebességét, ha a kezdeti mozgási energiája $2 \cdot 10^{-17}$ J?

   A megtett út (mm): ☐ Megold. ☐

2. Tegyük fel, hogy egy síkkondenzátorban homogén elektromos tér van, a térerősség 5000 N/C. Az ábra szerinti elrendezés esetén az $AD$ és $BC$ szakaszok 1 $cm$, az $AB$ és $DC$ szakaszok pedig 2 cm hosszúak.
   a) Mennyi munkát végeznek az elektromos erők, ha
   egy $-20$ mC töltésű pontszerű test az $A$ pontból a $C$-be az $ABC$, az $ADC$ vagy egyenesen az $AC$ úton jut el?




   b) Mekkora a potenciálkülönbség a különböző pontok között?

   A munka az ABC úton (J): ☐ Megold. ☐

   A munka az ADC úton (J): ☐ Megold. ☐

A munka az AC úton (J): Megold.

A potenciálkülönbség az AB pontok között (V): Megold.

A potenciálkülönbség az AC pontok között (V): Megold.

A potenciálkülönbség az AD pontok között (V): Megold.

**3.** Az $5$ cm átmérőjű, belül üreges, vékony falú fémgömbön $4{,}2 \cdot 10^{-9}$ C töltés van. A gömböt körülveszi egy $12$ cm átmérőjű másik fémgömb, amelynek töltése $-7{,}8 \cdot 10^{-9}$ C. Mekkora a potenciál a gömbök közös középpontjától $15$ cm távolságban?

A potenciál 15 cm-re (V): Megold.

# 22. LECKE

## Kapacitás, kondenzátorok

## 36. Kapacitás, kondenzátorok

**36.1. feladat:** Egy $5\,\mu$F kapacitású kondenzátor, melynek lemezei között levegő található, $30\,$V feszültségű telepre kapcsolunk. A telepet ezután eltávolítjuk, de a kondenzátor feltöltött marad.
a) Számítsuk ki a kondenzátor töltését!
b) A lemezek közötti térrészt olajjal töltjük fel. Határozzuk meg a fegyverzetek közötti feszültség új értékét ($\epsilon_r = 2{,}1$)!
c) Mekkora lesz az elektromos mező energiasűrűsége, ha a fegyverzetek $10\,$cm távolságra vannak?

**Megoldás:** a)
A kondenzátor fegyverzetein tárolt töltések a következő összefüggéssel határozhatók meg:

$$C = \frac{Q}{U} \quad \Rightarrow \quad Q = C \cdot U = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 30 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\,\text{C}.$$

b)
Mivel a fegyverzetek közötti térrészt $\epsilon_r = 2{,}1$ dielektromos állandójú anyag tölti ki, továbbá a kondenzátoron lévő töltésmennyiség nem változott:

$$C' = \epsilon_r \cdot C \quad \Rightarrow \quad U' = \frac{U}{\epsilon_r} = \frac{30}{2{,}1} = 14{,}3\,\text{V}.$$

c)

Az elektromos mező energiája:

$$E_c = \frac{1}{2} C \cdot U^2.$$

Síkkondenzátor kapacitása, ha a fegyverzetek között dielektrikum van ($\epsilon_0$ a vákuum dielektromos állandója):

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}{d}.$$

Az elektromos mező a fegyverzetek között homogén, így a feszültségre írhatjuk:

$$U = E \cdot d \quad \Rightarrow \quad E = \frac{U}{d} = \frac{14{,}3}{0{,}1} = 143\,\mathrm{V/m}.$$

Az energia tehát (az egyenlet jobb oldalán lévő $E$ az elektromos térerősség!):

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}{d} \cdot (E \cdot d)^2,$$

$$E_c = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A \cdot d \cdot E^2.$$

Mivel $A \cdot d = V$ (ti. a lemezek közötti térrész térfogata), az energiasűrűség:

$$\rho_{el} = \frac{E_c}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E^2 = \frac{1}{2} \cdot 8{,}84 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}1 \cdot 143^2 = 1{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{J/m^3}.$$

**36.2. feladat:** Egy $3\,\mu$F és egy $4\,\mu$F kapacitású kondenzátort egyenként feltöltünk egy $6\,$V-os telepről. Ezután lekapcsoltuk a feszültségforrást, és úgy kötöttük őket össze, hogy az egyik negatív oldalát a másik pozitív oldalához kapcsoltuk.
a) Mennyi töltés található az egyes kondenzátorokon?
b) Az összekapcsolás után mekkora feszültség mérhető a fegyverzetek között?

**Megoldás:** a)
Kezdetben a kondenzátorokon lévő töltésmennyiségek:

$$Q_1 = C_1 \cdot U = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 6 = 18 \cdot 10^{-6}\,\text{C},$$

$$Q_2 = C_2 \cdot U = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 6 = 24 \cdot 10^{-6}\,\text{C}.$$

Az összekapcsolás után a töltések kiegyenlítődnek, így a kondenzátorokon lévő összes töltés:

$$Q' = Q'_1 + Q'_2 = Q_2 - Q_1 = 24 \cdot 10^{-6} - 18 \cdot 10^{-6} = 6 \cdot 10^{-6}\,\text{C}.$$

Az összekötés miatt a két kondenzátor feszültsége megegyezik:

$$U'_1 = U'_2 = U',$$

$$\frac{Q'_1}{3 \cdot 10^{-6}} = \frac{Q'_2}{4 \cdot 10^{-6}},$$

$$Q'_1 = 0{,}75 \cdot Q'_2.$$

Behelyettesítve:

$$0{,}75 \cdot Q'_2 + Q'_2 = 6 \cdot 10^{-6}\,\text{C} \quad \Rightarrow \quad Q'_2 = 3{,}43 \cdot 10^{-6}\,\text{C},$$

$$Q'_1 = 6 \cdot 10^{-6} - 3{,}43 \cdot 10^{-6} = 2{,}57 \cdot 10^{-6}\,\text{C}.$$

b)

Mivel a két kondenzátor párhuzamosan van kapcsolva, az eredő kapacitás:

$$C_e = C_1 + C_2 = 7\,\mu\text{F}.$$

Ebből a keresett feszültség:

$$U' = \frac{Q'}{C_e} = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-6}} = 0{,}86\,\text{V}.$$

---

**36.3. feladat:** A számítógép billentyűzetén a billentyűt lenyomva két lemezt közelítünk egymáshoz, aminek hatására megváltozik a kapacitás, amit a számítógép megfelelően észrevesz és értelmez. A lemezek távolsága lenyomás nélkül $5\,\text{mm}$. Ez $0{,}15\,\text{mm}$-re csökken, ha azt lenyomják. A lemezek területe $9{,}5 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2$, a köztük lévő anyag relatív dielektromos állandója $3{,}5$. Mekkora a kapacitás változása a billentyű lenyomásakor?

**Megoldás:** Síkkondenzátor kapacitása:

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}.$$

A kapacitás tehát fordítottan arányos a lemezek távolságával. A kapacitás változás tehát:

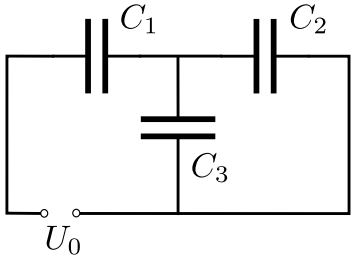
$$C' - C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A \cdot \left(\frac{1}{d'} - \frac{1}{d}\right) = 8{,}84 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}5 \cdot 9{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{1}{0{,}15 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}}\right) = 19\,\text{pF}.$$

---

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Mekkora a töltés és a feszültség a három kondenzátoron, ha $U_0 = 150\,\text{V}$, $C_1 = 22\,\mu\text{F}$, $C_2 = 3\,\mu\text{F}$, $C_3 = 8\,\mu\text{F}$?




$Q_1$ ($\mu$C): Megold.

$Q_2$ ($\mu$C): Megold.

$Q_3$ ($\mu$C): Megold.

$U_1$ (V): Megold.

$U_2$ (V): Megold.

$U_3$ (V): Megold.

2. Egy $500\,\text{nF}$ és egy $1\,\mu\text{F}$ kapacitású kondenzátort először sorba, azután párhuzamosan kapcsolunk. Mekkorák lesznek az egyes kondenzátorok feszültségei, töltései az első ill. a második esetben, ha a rendszerre $1\,\text{kV}$ feszültséget kötünk?

**Soros kapcsolásnál**

Az 500 nF-os kondenzátor feszültsége (V): Megold.

Az 1 $\mu$F-os kondenzátor feszültsége (V): Megold.

Az 500 nF-os kondenzátor töltése (C): Megold.

Az 1 $\mu$F-os kondenzátor töltése (C): Megold.

**Párhuzamos kapcsolásnál**

Az 500 nF-os kondenzátor feszültsége (V): Megold.

Az 1 $\mu$F-os kondenzátor feszültsége (V): Megold.

Az 500 nF-os kondenzátor töltése (C): Megold.

Az 1 $\mu$F-os kondenzátor töltése (C): Megold.

3. Síkkondenzátor levegőben levő lemezei között 4 cm a távolság. A lemezekre 100 V feszültséget kapcsolunk. A fegyverzetek közé velük párhuzamosan az egyik végétől 3 cm távolságban vékony, töltés nélküli fémlemezt helyezünk el.
Megváltozik-e a kondenzátor kapacitása a fémlemez betolásakor?

☐ Igen.

☐ Nem.

Határozzuk meg a fémlemez és a tőle távolabb lévő fegyverzet közötti feszültséget!
A feszültség (V): Megold.

# 23. LECKE

## Az egyenáram. Áramkörök

## 37. Az egyenáram. Áramkörök

**37.1. feladat:** Egy elektromos fűnyíró géphez egy $35\,\mathrm{m}$-es hosszabbító rézvezetőjének keresztmetszete $5{,}2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2$. Egy másik kábelben a vezető $13 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2$ keresztmetszetű rézhuzal. Milyen hosszú hosszabbítót készíthetünk e másik kábelből, ha azt szeretnénk, hogy az ellenállása ne legyen nagyobb, mint a $35\,\mathrm{m}$-es hosszabbítóé? Mekkora a $35\,\mathrm{m}$-es hosszabbító ellenállása? (A réz fajlagos ellenállása $1{,}72 \cdot 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$).

**Megoldás:** Lineáris vezető ellenállása az alábbi összefüggéssel adható meg:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}.$$

Az első esetben:

$$R_1 = \rho \cdot \frac{l_1}{A_1} = 1{,}72 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{35}{5{,}2 \cdot 10^{-7}} = 1{,}16\,\Omega,$$

a második esetben:

$$R_2 = \rho \cdot \frac{l_2}{A_2} \quad \Rightarrow \quad l_2 = \frac{R_2 \cdot A_2}{\rho}.$$

Mivel $R_1 = R_2$:

$$l_2 = \frac{R_1 \cdot A_2}{\rho} = \frac{1{,}16 \cdot 13 \cdot 10^{-7}}{1{,}72 \cdot 10^{-8}} = 87{,}7\,\mathrm{m}.$$

---

**37.2. feladat:** $A$ és $B$ pontok között kétvezetékes, $800\,\Omega$ ellenállású hírközlő vonal működik. $AB = 40\,\mathrm{km}$. $A$-tól mekkora távolságban történt a rövidzárlat, ha a voltmérő $10\,\mathrm{V}$ feszültséget, az árammérő $40\,\mathrm{mA}$-t mutat?

**Megoldás:** A rövidzárlat miatt rövidebb vezetéken folyik az áram. Ennek a vezetékdarabnak az ellenállása:

$$R' = \frac{U}{I} = \frac{10}{40 \cdot 10^{-3}} = 250\,\Omega.$$

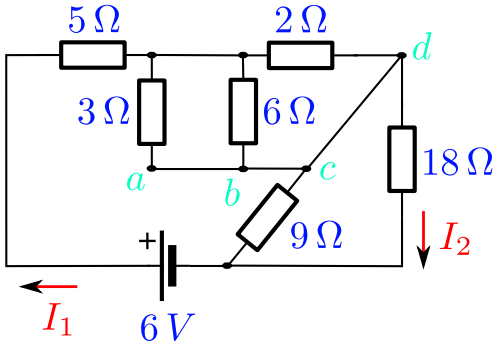
Írjuk fel az eredeti vezeték és a rövidebb vezeték ellenállását:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A},$$

$$R' = \rho \cdot \frac{l'}{A}.$$

Osszuk el egymással a két egyenletet:

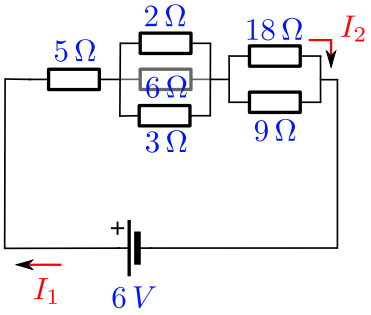
$$\frac{R}{R'} = \frac{l}{l'} \quad \Rightarrow \quad l' = \frac{R'}{R} \cdot l = \frac{250}{800} \cdot 40\,\text{km} = 12{,}5\,\text{km}.$$




37.1. ábra. *Kapcsolási rajz a 37-3. feladathoz.*

**37.3. feladat:** Határozzuk meg $R_e$, $I_1$ és $I_2$ értékeit a fenti kapcsolásban!

**Megoldás:** Mivel az *a*, *b*, *c* és *d* pontok össze vannak kötve, azonos potenciálú helyek. A kapcsolást ez alapján áttekinthetőbben is lerajzolhatjuk:




37.2. ábra. *Magyarázó ábra a 37-3. feladathoz.*

Az eredő ellenállás:

$$R_e = 5 + \left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{\frac{1}{18}+\frac{1}{9}}\right) = 5 + 1 + 6 = 12\,\Omega.$$

A főágban folyó áram erőssége:

$$I_1 = \frac{U}{R_e} = \frac{6}{12} = 0{,}5\,\mathrm{A}.$$

A $18\,\Omega$-os ellenállás feszültsége:

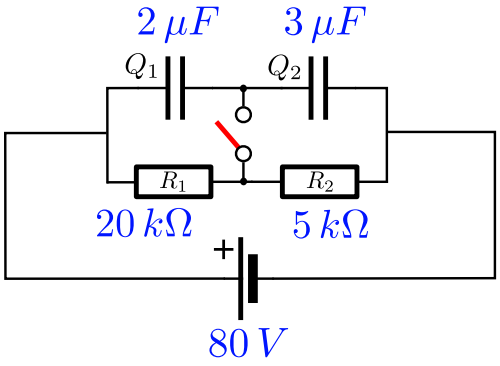
$$U' = R'_e \cdot I_1.$$

$R'_e$ a $18\,\Omega$ és $9\,\Omega$ ellenállás eredője. $R'_e = 6\,\Omega$.

$$U' = 6 \cdot 0{,}5 = 3\,\mathrm{V}.$$

A $18\,\Omega$-os ellenálláson átfolyó $I_2$ áramerősség most már meghatározható:

$$I_2 = \frac{U'}{R'} = \frac{3}{18} = 0{,}17\,\mathrm{A}.$$




37.3. ábra. *Kapcsolási rajz a 37-4. feladathoz.*

**37.4. feladat:** Az ábrán látható elrendezésben határozzuk meg nyitott kapcsolónál:
a) az egyes ellenállásokon a feszültséget,
b) az egyes kondenzátorok feszültségét és a rajtuk lévő töltésmennyiséget.
c) Zárjuk a kapcsolót! Mennyi töltés halad át rajta?

**Megoldás:** a)
Mivel az ellenállásokon ugyanakkora az áramerősség, a következőt írhatjuk:

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}.$$

Továbbá, az ellenállásokon eső feszültségek összege $80\,\mathrm{V}$, azaz:

$$U_1 + U_2 = 80\,\mathrm{V}.$$

A két egyenletből:

$$\frac{80 - U_2}{R_1} = \frac{U_2}{R_2},$$

$$\frac{80 - U_2}{20 \cdot 10^{+3}} = \frac{U_2}{5 \cdot 10^{+3}} \quad \Rightarrow \quad U_2 = 16\,\mathrm{V}.$$

$$U_1 = 80\,\mathrm{V} - U_2 = 80\,\mathrm{V} - 16\,\mathrm{V} = 64\,\mathrm{V}.$$

b)

A kondenzátorok feltöltődése után ezen az ágon nem folyik áram. A kondenzátorok közötti vezetékdarabra többlettöltések nem jutnak, emiatt a kondenzátorokon azonos töltésmennyiség lesz.

$$Q_1 = Q_2 = Q.$$

Emiatt írhatjuk:

$$U_1 \cdot C_1 = U_2 \cdot C_2.$$

Továbbá igaz, hogy $U_1 + U_2 = 80\,\mathrm{V}$. A két egyenletből:

$$(80 - U_2) \cdot C_1 = U_2 \cdot C_2,$$

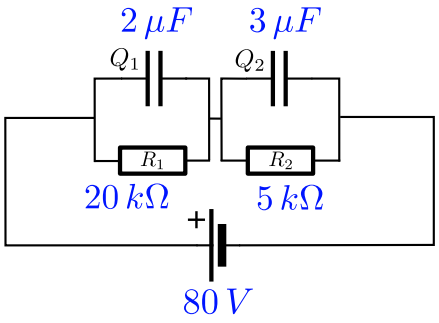
$$(80 - U_2) \cdot 2 \cdot 10^{-6} = U_2 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad U_2 = 32\,\mathrm{V}.$$

$$U_1 = 80\,\mathrm{V} - U_2 = 80\,\mathrm{V} - 32\,\mathrm{V} = 48\,\mathrm{V}.$$

A kondenzátorok töltése ezek után:

$$Q = C_1 \cdot U_1 = C_2 \cdot U_2 = 9{,}6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C} = 96\,\mu\mathrm{C}.$$

c)




37.4. ábra. *Magyarázó ábra a 37-4. feladathoz.*

A kapcsoló zárásakor, a további számolásokhoz, a fenti kapcsolási rajz nyújt segítséget.
A kondenzátorok feltöltődése után ezeken az ágakon már nem folyik áram, így a feszültségeket az ellenállások határozzák meg:

$$U_1 = 64\,\mathrm{V},$$
$$U_2 = 16\,\mathrm{V}.$$

Ezek a feszültségértékek lesznek a kondenzátorok feszültségei, melyekből a töltések meghatározhatók:

$$Q_1' = C_1 \cdot U_1 = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 64 = 128\,\mu\mathrm{C},$$
$$Q_2' = C_2 \cdot U_2 = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 16 = 48\,\mu\mathrm{C}.$$

Az egyes kondenzátorok kapcsoló oldali lemezeiről eláramló pozitív, illetve az odaáramló negatív töltések értékei:

$$\Delta Q_1 = Q_1' - Q = 128\,\mu\mathrm{C} - 96\,\mu\mathrm{C} = 32\,\mu\mathrm{C},$$
$$\Delta Q_2 = Q - Q_2' = 96\,\mu\mathrm{C} - 48\,\mu\mathrm{C} = 48\,\mu\mathrm{C}.$$

Az összes töltésáramlás tehát:

$$Q_{kap} = 32\,\mu\text{C} + 48\,\mu\text{C} = 80\,\mu\text{C}.$$

---

**37.5. feladat:** Egy szárazelem $1{,}41\,\text{V}$ kapocsfeszültség mellett $2\,\text{A}$ erősségű áramot szolgáltat. Mekkora az elem belső ellenállása, ha az üresjárási feszültsége $1{,}59\,\text{V}$?

**Megoldás:** Az üresjárási feszültségre a következő összefüggés igaz:

$$U_0 = U_k + U_b.$$

ahol $U_0$ az üresjárási feszültség, $U_k$ a kapocsfeszültség, $U_b$ pedig a belső feszültség. Az egyenletből a belső feszültség:

$$U_b = U_0 - U_k = 1{,}59 - 1{,}41 = 0{,}18\,\text{V}.$$

$$U_b = I \cdot R_b \quad \Rightarrow \quad R_b = \frac{U_b}{I} = \frac{0{,}18}{2} = 0{,}09\,\Omega.$$

---

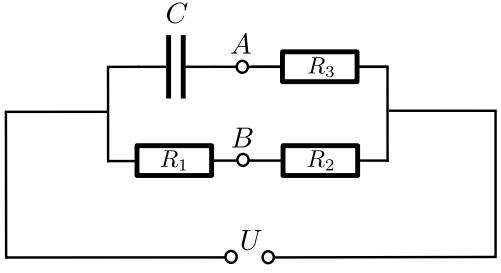
# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Egyenlő tömegű alumíniumból egy $5\,\Omega$ és egy $50\,\Omega$ ellenállású huzalt készítenek. Hogyan aránylik a hosszabb huzal hosszmérete a rövidebbéhez?

   Válasz: Megold.

2. Az ábrán látható kapcsolásban $R_1 = 10\,\Omega, R_2 = 20\,\Omega, R_3 = 10\,\Omega, U = 60\,\text{V}$. Mekkora feszültség van az $A - B$ pontok között?




   A feszültség (V): Megold.

3. Egy telep kapocsfeszültsége $1\,\text{A}$-es áramerősségnél $90\,\text{V}$, $10\,\Omega$-os terhelő ellenállás esetén pedig $50\,\text{V}$. Mekkora áramot ad a telep, ha rövidre zárjuk a kapcsait?

   Az áramerősség (A): Megold.

# 24. LECKE

## Az elektromos áram munkája. A teljesítmény

## 38. Az elektromos áram munkája. A teljesítmény

**38.1. feladat:** Szívütem szabályzó $1{,}25\,\text{Hz}$ frekvenciával működteti a szívet úgy, hogy minden szívciklus elindításához $0{,}001\,\text{s}$ időtartamú, $3\,\text{V}$ feszültségű ingert ad a szív megfelelő részének, melynek ellenállása $400\,\Omega$. Hány évig működik a szívütem szabályzó, ha beépített áramforrásának $20\,\text{kJ}$ energiáját $30\,\%$-os hatásfokkal hasznosítja?

**Megoldás:** Az ingerléshez szükséges energia:

$$E = U \cdot I \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t = \frac{3^2}{400} \cdot 0{,}001 = 2{,}25 \cdot 10^{-5}\,\text{J}.$$

A hatásfok definíciója alapján írhatjuk:

$$\eta = \frac{E_{hasznos}}{E_{befektetett}},$$

$$E_{befektetett} = 20000\,\text{J}.$$

A hasznos energia az egyes ingerek előállításához szükséges elektromos energia. Mivel másodpercenként $1{,}25$ inger fut át a szíven, $x$ másodperc alatt a teljes energia:

$$E_{hasznos} = x \cdot 1{,}25 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-5}\,\text{J}.$$

A következőt kaptuk:

$$\eta = \frac{E_{hasznos}}{E_{befektetett}},$$

$$0{,}3 = \frac{x \cdot 1{,}25 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-5}}{20000},$$

$$x = \frac{0{,}3 \cdot 20000}{1{,}25 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-5}} = 2{,}133 \cdot 10^{8}\,\text{s} = 6{,}76\,\text{év}.$$

**38.2. feladat:** Legalább hány wattos merülőforralóval lehet $2{,}5\,\mathrm{dl}$, $20\,^\circ\mathrm{C}$-os vizet $5$ perc alatt forrásba hozni? Mekkora ellenállása kell legyen a forralónak, ha $220\,\mathrm{V}$-ról üzemeltetjük?

**Megoldás:** A forraláshoz szükséges hőenergia:

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T = 4200 \cdot 0{,}25 \cdot 80 = 84000\,\mathrm{J}.$$

Az elektromos energia:

$$E_{el} = U \cdot I \cdot t,$$

$$E_{el} = Q \quad \Rightarrow \quad U \cdot I \cdot t = Q.$$

Az áramerősség tehát:

$$I = \frac{Q}{U \cdot t} = \frac{84000}{220 \cdot 5 \cdot 60} = 1{,}273\,\mathrm{A}.$$

A teljesítmény:

$$P = U \cdot I = 220 \cdot 1{,}273 = 280\,\mathrm{W}.$$

A merülőforraló ellenállása:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{220}{1{,}273} = 172{,}82\,\Omega \approx 173\,\Omega.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. A $24\,\mathrm{V}$-ra méretezett $30\,\mathrm{W}$-os forrasztópákát $10\%$-kal kisebb feszültségre kapcsoljuk. Ha eltekintünk a fűtőellenállás hőmérséklet-függésétől, hány százalékkal csökken a páka teljesítménye?

   Válasz (%):

   Megold.

2. Adott egy $3\,\mathrm{V}$ üresjárási feszültségű és $2\,\Omega$ belső ellenállású telep. Mekkora külső ellenállás esetén lesz a fogyasztó teljesítménye $1\,\mathrm{W}$?

   Válasz 1. ($\Omega$):

   Megold.

   Válasz 2. ($\Omega$):

   Megold.

# 25. LECKE

## Mágneses indukció. Az indukált feszültség

## 39. Mágneses indukció. Az indukált feszültség

**39.1. feladat:** Egymástól $10\,\text{cm}$ távolságban lévő igen hosszú két párhuzamos vezető mindegyikében $20\,\text{A}$ erősségű áram folyik azonos irányban. Az egyik vezetőtől mindkét irányban $5\,\text{cm}$ távolságban mekkora a mágneses indukció?

**Megoldás:** Hosszú egyenes vezető körül a mágneses indukció nagyságára a következő kifejezést írhatjuk:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot r \cdot \pi}.$$

Ha a $10\,\text{cm}$-t a másik vezetővel ellentétes irányban mérjük az indukció nagysága:

$$B = B_1 + B_2.$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot r_1 \cdot \pi} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{2 \cdot 0{,}05 \cdot \pi} = 8 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2},$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot r_2 \cdot \pi} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{2 \cdot 0{,}15 \cdot \pi} = 2{,}67 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}.$$

Az eredő indukció nagysága tehát: $B = 8 \cdot 10^{-5} + 2{,}67 \cdot 10^{-5} = 10{,}67 \cdot 10^{-5}\,\text{V} \cdot \text{s/m}^2$.

A másik vezető irányába mérve az $5\,\text{cm}$-t az eredő indukció nagysága nulla, mert az egyes vezetőktől az adott pontban az indukció vektorok nagysága megegyezik, de irányuk - a jobbkéz-szabály alapján - ellentétes lesz.

**39.2. feladat:** Két $1{,}6\,\text{m}$ távolságban lévő párhuzamos sín végét egy $96\,\Omega$ ellenállású villanykörtén keresztül kötjük össze. A sínen $5\,\text{m/s}$ sebességgel egy vezetőt mozgatunk úgy, hogy annak végei a síneken vannak. A mágneses tér nagysága $0{,}8\,\text{T}$ és ez merőleges a sínek által kijelölt síkra. A lámpa ellenállásának kivételével minden más ellenállás elhanyagolható.

a) Mekkora a mozgó vezető által keltett feszültség?
b) Mekkora az áramkörben folyó áram?
c) Mekkora elektromos teljesítményt ad le a körte?
d) Mennyi energiát fogyaszt a körte $60\,\text{s}$ alatt?

**Megoldás:** a)

Írjuk fel a mozgási indukció esetére vonatkozóan az indukált feszültség meghatározására kapott összefüggést:

$$U = B \cdot l \cdot v = 0{,}8 \cdot 1{,}6 \cdot 5 = 6{,}4\,\text{V}.$$

b)

Az áramerősséget Ohm-törvényéből egyszerűen számolhatjuk:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{6{,}4}{96} = 0{,}067\,\text{A}.$$

c)

A teljesítmény:

$$P = I^2 \cdot R = 0{,}067^2 \cdot 96 = 0{,}427\,\text{W}.$$

d)

Az elektromos munka:

$$W = P \cdot t = 0{,}427 \cdot 60 = 25{,}6\,\text{J}.$$

**39.3. feladat:** Egy $1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$ területű, 20 menetes tekercs síkja merőleges a $0{,}05\,\mathrm{T}$ nagyságú mágneses térre. $0{,}1\,\mathrm{s}$ idővel később a tér nagysága $0{,}06\,\mathrm{T}$-ra nőtt. Határozzuk meg az ez alatt az idő alatt indukálódott átlagos feszültséget!

**Megoldás:** Az indukált feszültség nagysága:

$$U = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = N \cdot \frac{\Delta(B \cdot A)}{\Delta t} = N \cdot A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = 20 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{(0{,}06 - 0{,}05)}{0{,}1} = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V} = 3\,\mathrm{mV}.$$

**39.4. feladat:** Egy sztereó berendezés bemenő transzformátorának primer tekercse 660 menetes, míg a szekunder tekercs menetszáma 25. A villásdugót a $230\,\mathrm{V}$-os hálózatra kötve $0{,}42\,\mathrm{A}$ áram folyik a primer tekercsben. A transzformátor kimenete a berendezés félvezető áramköreit látja el feszültséggel.
a) Határozzuk meg a szekunder körben eső feszültséget!
b) Határozzuk meg a szekunder kör áramát!
c) Mekkora a félvezető áramkörökhöz juttatott átlagos teljesítmény?

**Megoldás:** a)
A transzformátor primer és szekunder feszültségeinek arányára az alábbit írhatjuk:

$$\frac{U_p}{U_{sz}} = \frac{N_p}{N_{sz}}.$$

Ebből a szekunder feszültség:

$$U_{sz} = U_p \cdot \frac{N_{sz}}{N_p} = 230 \cdot \frac{25}{660} = 8{,}712\,\mathrm{V}.$$

b)

Az áramerősségek aránya:

$$\frac{I_p}{I_{sz}} = \frac{N_{sz}}{N_p} \quad \Rightarrow \quad I_{sz} = I_p \cdot \frac{N_p}{N_{sz}} = 0{,}42 \cdot \frac{660}{25} = 11{,}088\,\text{A}.$$

c)
A teljesítmények ideális transzformátor esetén egyenlőek:

$$P_p = P_{sz}.$$

A szekunder oldalon a teljesítmény:

$$P_{sz} = U_{sz} \cdot I_{sz} = 8{,}712 \cdot 11{,}088 = 96{,}6\,\text{W}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Igen hosszú rúdon $2 \cdot 10^{-8}$ C töltés helyezkedik el egyenletesen, méterenként. Mekkora a mágneses indukció az egyenestől $10$ cm távolságban, ha a rúd $20$ m/s sebességgel mozog hosszirányban?

   A mágneses indukció nagysága (T): ____ Megold.

2. Egy teherautó tengelye $2{,}4$ m hosszú. A teherautó $30$ m/s sebességgel északra halad egy olyan helyen, ahol a Föld mágneses terének függőleges komponense $90\,\mu$T. Mekkora feszültség alakul ki a tengely végpontjai között?

   A feszültség (mV): ____ Megold.

3. Egy kerékpár lámpáját ellátó áramfejlesztő generátor forgó fejét a kerékpár $33$ cm sugarú kereke $44$-szer forgatja meg, amíg a kerék egyet fordul. A generátor tekercse (armatúrája) $75$ menetes és minden menet területe $2{,}6 \cdot 10^{-3}$ m$^2$. A mágneses tér nagysága $0{,}1$ T. Mekkora a kerékpáros sebessége, ha csúcsban $6$ V feszültség keletkezett?

   A sebesség (m/s): ____ Megold.

# 26. LECKE

## Töltött részecskék mágneses mezőben. A Lorentz-erő

## 40. Töltött részecskék mágneses mezőben. A Lorentz-erő

**40.1. feladat:** A proton sebessége a részecskegyorsítóban $5 \cdot 10^6$ m/s. A proton egy olyan mágneses térben mozog, melynek nagysága $0{,}4$ T és iránya $30°$-os szöget zár be a proton sebességének irányával.
a) Mekkora a protonra ható erő iránya és nagysága?
b) Mekkora a proton gyorsulása?
c) Mekkora volna az erő és a gyorsulás, ha a proton helyett egy elektron mozogna hasonló körülmények között?

**Megoldás:** a)
A protonra ható erő nagyságát a Lorentz-erő adja meg. Mivel a sebesség nem merőleges az indukcióvonalakra, a sebesség arra merőleges komponensével kell számolni:

$$F = B \cdot Q \cdot v \cdot \sin\alpha = 0{,}4 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \sin 30° = 1{,}6 \cdot 10^{-13}\,\text{N}.$$

b)
A gyorsulás Newton II. törvénye alapján határozható meg:

$$F = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-13}}{1{,}6726 \cdot 10^{-27}} = 9{,}566 \cdot 10^{13}\,\text{m/s}^2.$$

c)
Az erő nagysága ugyanakkora lenne, a gyorsulás viszont a tömegtől is függ, ezért:

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-13}}{9{,}1094 \cdot 10^{-31}} = 1{,}76 \cdot 10^{17}\,\text{m/s}^2.$$

**40.2. feladat:** Egy proton gyakorlatilag nyugalomból kezd gyorsulni egy síkkondenzátor pozitív lemezétől a negatív fegyverzete felé. A kondenzátorra 2100 V feszültséget kapcsoltak. A nagy sebességű proton a negatív lemezen lévő kis lyukon elhagyja az elektromos teret és egyenletes sebességgel halad egészen addig, míg be nem lép egy sebességére merőleges irányú homogén, 0,1 T erősségű mágneses térbe.
a) Határozzuk meg, hogy a proton milyen sebességgel hagyta el a kondenzátort?
b) Mekkora a proton mozgási energiájának megváltozása a mágneses tér hatására?
c) Mekkora annak a körnek a sugara, amelyen a proton a mágneses térben mozog?

**Megoldás:** a)
A munkatétel alapján:

$$W = \Delta E_{mozg},$$

$$Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot Q \cdot U}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2100}{1{,}6726 \cdot 10^{-27}}} = 6{,}34 \cdot 10^5 \,\text{m/s}.$$

b)
A mozgási energia nem változik, mivel a mágneses térben a protonra ható erő merőleges a sebességvektor irányára, ezért csak a proton mozgásának irányát változtatja meg.
c)
A körpályán való mozgás dinamikai egyenlete:

$$F_{cp} = m_p \cdot a_{cp}.$$

A centripetális erő a Lorentz-erő:

$$B \cdot Q \cdot v = m \cdot a_{cp},$$

$$B \cdot Q \cdot v = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{m \cdot v}{B \cdot Q} = \frac{1{,}6726 \cdot 10^{-27} \cdot 6{,}34 \cdot 10^5}{0{,}1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 6{,}63 \,\text{cm}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. A töltött részecskék sebességválogatására olyan berendezést szoktak alkalmazni, melyben a részecskére ható elektromos és mágneses terek éppen kiegyenlítik egymás hatását. Egy ilyen rendszerbe a $B$ mágneses térre merőlegesen $v$ sebességgel belövünk egy $+q$ töltésű részecskét. A sebességválogató elektromos tere $5{,}65 \cdot 10^3$ N/C nagyságú, míg az alkalmazott mágneses tér $0{,}4$ T. Mekkora a részecske fajlagos töltése (töltés/tömeg hányadosa), ha a részecske egy $2{,}9$ cm sugarú körpályán mozogna, ha az elektromos teret kikapcsolnánk?

   A fajlagos töltés (C/kg): [ ] Megold. [ ]

# 27. LECKE

## Váltakozó áram és feszültség

## 41. Váltakozó áram és feszültség

**41.1. feladat:** Egy sztereó rádióvevő berendezés $34\,\mathrm{V}$ csúcsfeszültségű váltóáramú jelet küld a körülbelül $8\,\Omega$ ellenállású hangszóróra. Mekkora a hangszóró kimenetein mérhető effektív feszültség? Mekkora a hangszórón átfolyó váltóáram effektív értéke? Mekkora a teljesítmény?

**Megoldás:** A maximális feszültség tehát: $U_{max} = 34\,\mathrm{V}$. Ebből az effektív érték:

$$U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = 24{,}042\,\mathrm{V}.$$

Az effektív áram:

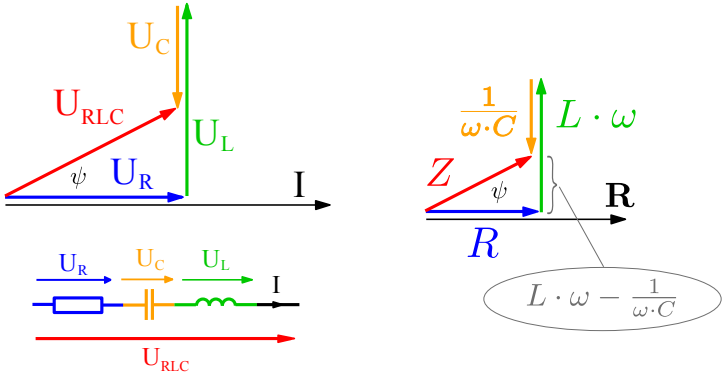
$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{R} = 3{,}005\,\mathrm{A}.$$

A teljesítmény ebben az esetben:

$$P_{eff} = I_{eff}^2 \cdot R = 3{,}005^2 \cdot 8 = 72{,}24\,\mathrm{W}.$$

---

**41.2. feladat:** Soros $RLC$ kört ($R = 100\,\Omega, L = 0{,}2\,\mathrm{H}, C = 20\,\mu\mathrm{F}$) egy szokványos $50\,\mathrm{Hz}$-es, $U = 230\,\mathrm{V}$ effektív értékű feszültségre kapcsolunk.
a) Mekkora az áramerősség effektív és maximális értéke és a teljesítmény?
b) Hogyan kell a feszültségforrás frekvenciáját változtatni, hogy rezonancia lépjen fel (vagyis mekkora $f_R$)?
c) A fenti rezonanciafrekvenciánál mekkora lesz az effektív és maximális áramerősség, illetve a teljesítmény?




41.1. ábra. *Magyarázó ábra a 41-2. feladathoz.*

Megoldás: a)
Az effektív áramerősség:

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z},$$

ahol $Z$ az impedancia.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot 2\pi \cdot f - \frac{1}{C \cdot 2\pi \cdot f}\right)^2}$$

$$Z = \sqrt{100^2 + \left(0{,}2 \cdot 2\pi \cdot 50 - \frac{1}{20 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 50}\right)^2} = 138{,}85\,\Omega.$$

Az effektív áramerősség tehát:

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{R} = \frac{230}{138{,}85} = 1{,}656\,\text{A}.$$

A maximális áramerősség:

$$I_{max} = I_{eff} \cdot \sqrt{2} = 2{,}342\,\text{A}.$$

A teljesítmény:

$$P_{eff} = I_{eff}^2 \cdot R = 1{,}656^2 \cdot 100 = 274{,}2\,\text{W}.$$

b)

Feszültségi rezonancia $\psi = 0°$-nál van. Ekkor maximális áram folyik át a rendszeren (áramrezonancia). Ez alapján:

$$X_L = X_C \quad \Rightarrow \quad L \cdot \omega = \frac{1}{C \cdot \omega},$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \Rightarrow \quad f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}2 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}} = 79{,}58\,\text{Hz}.$$

c)

Az effektív áramerősség:

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{R} = 2{,}3\,\text{A}.$$

A maximális áramerősség:

$$I_{max} = I_{eff} \cdot \sqrt{2} = 3{,}25\,\text{A}.$$

A teljesítmény:

$$P_{eff} = I_{eff}^2 \cdot R = 2{,}3^2 \cdot 100 = 529\,\text{W}.$$

---

**41.3. feladat:** Egy ismeretlen induktivitású és belső ellenállású reális tekercscsel sorosan kapcsolunk egy $15\,\mu$F kapacitású kondenzátort. Ekkor az áramkör rezonanciafrekvenciája $f_R = 50\,$Hz. Mekkora kondenzátort kellene az első helyére bekötnünk, hogy a rezonancia $200\,$Hz-nél lépjen fel?

**Megoldás:** Elsőként határozzuk meg a rezonancia frekvenciából a tekercs induktivitását:

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{f_R^2 \cdot 4\pi^2 \cdot C} = \frac{1}{50^2 \cdot 4\pi^2 \cdot 15 \cdot 10^{-6}} = 0{,}6755\,\text{H}.$$

A keresett kapacitás:

$$C' = \frac{1}{f_R^2 \cdot 4\pi^2 \cdot L} = \frac{1}{200^2 \cdot 4\pi^2 \cdot 0{,}6755} = 9{,}375 \cdot 10^{-7}\,\text{F}.$$

---

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Egy $148\,\Omega$ ellenállást, egy $1{,}5\,\mu$F kondenzátort és egy $35{,}7$ mH induktivitású tekercset sorosan rákötünk egy $35$ V effektív feszültségű, $512$ Hz frekvenciájú generátorra.
   a) Mekkora az egyes elemeken mérhető effektív feszültség?
   b) Mekkora az áramkör által ténylegesen felvett teljesítmény?

   Az ellenálláson mérhető feszültség (V): Megold.

   A kondenzátoron mérhető feszültség (V): Megold.

   A tekercsen mérhető feszültség (V): Megold.

   A teljesítmény (W): Megold.

2. Egy $RLC$ áramkörben az ellenállás $92\,\Omega$, a generátor effektív feszültsége $3$ V. Mekkora a leadott teljesítmény rezonancia esetén?

   A teljesítmény (W): Megold.

# 28. LECKE

## Relativitáselmélet

## 42. Relativitáselmélet

**42.1. feladat:** Képzeljük el, hogy egy XXV. századi űrhajó $0{,}8 \cdot c$ sebességgel repül az űrben. Mennyi idő alatt szeli át a $150$ millió kilométeres Nap – Föld távolságot
a) egy földi megfigyelő szempontjából mérve,
b) az űrhajóval együtt utazó megfigyelő szempontjából mérve?

**Megoldás:** a) A földi megfigyelő szempontjából a keresett repülési idő egyszerűen a Nap – Föld távolság és az űrhajó sebességének ($v = 0{,}8 \cdot c$) a hányadosa:

$$\Delta t_f = \frac{D}{v} = 625\,\mathrm{s}.$$

b) Az űrhajón utazó megfigyelő szempontjából az órák lassabban járnak, mint a földiek, ezért:

$$\Delta t_u = \frac{\Delta t_f}{\gamma} = \frac{\Delta t_f}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = 375\,\mathrm{s}$$

---

**42.2. feladat:** Az előző feladatbeli XXV. századi űrhajót még a kilövés előtt a Földön $50\,\mathrm{m}$ hosszúnak mérték. Mekkora az űrhajó hossza a földi megfigyelő szempontjából, amikor az űrhajó a Nap felé száguld $0{,}8 \cdot \mathrm{c}$ sebességgel?

**Megoldás:** Amikor az űrhajó mozog a megfigyelőhöz képest, akkor hosszát a megfigyelő rövidebbnek méri:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{L_0}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = 30\,\mathrm{m}.$$

---

**42.3. feladat:** Rómeó és Júlia ikrek, akik a XXX. században élnek. Júlia űrhajós kiképzést kap, és egy űrhajóval, állandó, fénysebesség közeli sebességgel, elindul egy távoli csillagrendszerbe. Eközben Rómeó éli földi életét. Júlia miután eléri a távoli csillagrendszert szinte azonnal visszaindul a Földre, ugyanazzal a sebességgel, mint amivel odafelé is utazott. Melyikük az idősebb, amikor újra találkoznak a Földön?

**Megoldás:** Mivel a mozgó órák lassabban járnak az állóakhoz képest, az első ötletünk az lesz, hogy Júlia lesz a fiatalabb. Ugyanakkor Júlia szempontjából Rómeó az aki hozzá képest mozog, ezért Júlia szerint Rómeó lesz a fiatalabb. Ez az eredmény ellentmondásosnak tűnik. Ezt a problémát nevezzük iker paradoxonnak.

Azonban, ha jobban odafigyelünk, akkor a két érvelés mégsem teljesen szimmetrikus. Júlia, ahhoz, hogy visszatérhessen a Földre, le kell, hogy lassítson, majd az ellenkező irányban fel kell, hogy gyorsuljon. A lassítás és a gyorsulás idejére, legyen az bármilyen rövid is, nem inerciarendszerből szemléli az eseményeket. Tehát Júlia, mozgása során az egyik inerciarendszerből kilép egy gorsuló vonatkoztatási rendszerbe, majd miután elérte visszautazási sebességét, egy másik inerciarendszerből szemléli az eseményeket, mint a távoli csillagra való utazáskor.

Rómeó végig ugyanabból az inerciarendszerből figyeli Júlia utazását, ezért Rómeó érvelése felel meg a speciális relativitás elmélete követelményeinek, azaz valójában Júlia lesz a fiatalabb, amikor újra találkoznak!

Ezt az eredményt erősítik meg azok a szinkronizált, nagyon pontos órák, amelyek közül az egyiket végig inerciarendszerben hagyjuk, míg a másikat gyorsuló vonatkoztatási rendszerbe helyezzük. Mindig azok az órák járnak lassabban (mutatnak kevesebb eltelt időt), amelyek elszenvedik a gyorsulást!

---

**42.4. feladat:** Az előző feladatbeli Júlia utazzon az Alfa Centauri csillagrendszerbe, amelynek távolsága a Földtől $4 \cdot 10^{16}$ m. Júlia utazási sebessége oda-vissza $0{,}8 \cdot c$ nagyságú, és az oda- és visszaút között csak elhanyagolhatóan rövid ideig tartózkodik az Alfa Centaurin. Határozza meg Júlia repülési idejét mind Rómeó, mind pedig Júlia szempontjából!

**Megoldás:** Rómeó földi óráin mérve Júlia teljes repülési ideje:

$$\Delta t_f = \frac{2 \cdot D}{v} = 3{,}3 \cdot 10^8 \text{ s},$$

ami kb. $10{,}5$ év.

A Júliával együtt utazó órák lassabban járnak a földiekhez képest:

$$\Delta t_u = \frac{\Delta t_f}{\gamma} = \frac{\Delta t_f}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = 2 \cdot 10^8 \text{ s},$$

ami kb. $6{,}3$ év.

Tehát Júlia lesz mintegy $4{,}2$ évvel fiatalabb visszatérése után, hiszen az előző feladat alapján a helyes érvelés feltétele, hogy olyan vonatkoztatási rendszerben hasonlítsuk össze a két időt, amelyik a vizsgált mozgás teljes ideje alatt inerciarendszer marad.

---

**42.5. feladat:** Két űrhajó közeledik a Földhöz ellentétes irányokból. Az első sebessége $0{,}5 \cdot c$ a Földhöz képest, míg a másiké $0{,}8 \cdot c$. Mekkora a két űrhajó egymáshoz viszonyított sebessége?

**Megoldás:** A feladat megoldása lényegében a Földhöz rögzített inerciarendszerből Lorentz – transzformációval való áttérés az egyik űrhajóhoz rögzített inerciarendszerbe.

Számoljunk az első űrhajóhoz rögzített inerciarendszerben. Ekkor a második űrhajó Földhöz viszonyított sebességének ($u_2 = 0{,}8 \cdot c$) és a Földnek az első űrhajóhoz rögzített inerciarendszerben mérhető sebességének ($u_F' = 0{,}5 \cdot c$) eredőjét keressük. A sebességek Lorentz – transzformációja alapján:

$$u_2' = \frac{u_2 + u_F'}{1 + \frac{u_2 \cdot u_F'}{c^2}} = \frac{1{,}3}{1{,}4} \cdot c \approx 0{,}93 \cdot c.$$

Természetesen szimmetrikus eredményt kapunk, ha a feladatot a második űrhajóhoz rögzített

inerciarendszerben oldjuk meg.

**42.6. feladat:** Egy elektront $800\,\text{kV}$ feszültséggel gyorsítunk nyugalomból.
(a) Határozza meg az elektron nyugalmi energiáját!
(b) Határozza meg az elektron mozgási energiáját, teljes energiáját, sebességét és impulzusát a gyorsítás utáni időpillanatban! Az energiákat adja meg eV-ban és J-ban is! (Megjegyzés: $1\,\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$)

**Megoldás:** a) Az elektron nyugalmi tömege egy univerzális fizikai állandó. Értéke $m_e = 9{,}1094 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$.
Az ennek a nyugalmi tömegnek megfelelő nyugalmi energia:

$$E_0 = m_e \cdot c^2 = 8{,}198 \cdot 10^{-14}\,\text{J} = 512\,\text{keV}.$$

b) Az elektron teljes energiája a gyorsítás után két részből adódik össze. Az egyik a nyugalmi energia, a másik pedig az elektromos tér gyorsítási munkájából adódó $E_k$ mozgási energia. Tehát:

$$E_k = q_e \cdot U_0 = 1{,}28 \cdot 10^{-13}\,\text{J} = 800\,\text{keV},$$

ahol $q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$ - az elektron töltése, míg $U_0 = 800\,\text{kV}$ - a gyorsítófeszültség.
Az elektron teljes energiája pedig:

$$E = E_0 + E_k = 2{,}1 \cdot 10^{-13}\,\text{J} = 1312\,\text{keV}.$$

Mivel a speciális relativitás elmélete szerint:

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2,$$

ahol $p$ - a lendület, ezért:

$$p_e = \sqrt{\frac{E^2 - E_0^2}{c^2}} = 6{,}44 \cdot 10^{-22}\,\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Az elektron sebessége összenergiája alapján határozható meg, hiszen:

$$E = m \cdot c^2 = \frac{m_e \cdot c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

ahol $\beta = \frac{v}{c}$.

Határozzuk meg a $\beta$ sebességarányt:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E^2}} = \frac{v}{c} = 0{,}92.$$

Tehát a gyorsított elektron sebessége a gyorsítás utáni pillanatban:

$$v_e = 0{,}92 \cdot c = 2{,}76 \cdot 10^8 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. A trícium felezési ideje laboratóriumi mérések alapján $12{,}32$ év. Mekkorának mérjük ezt a felezési időt, ha a trícium preparátum hozzánk képest a fénysebesség felével mozog?
   A mért felezési idő (év): Megold.
2. Az LHC részecskegyorsítóban $7\,\mathrm{TeV}$ végenergiára gyorsítják a protonokat, melyek nyugalmi energiája $938\,\mathrm{MeV}$. Hányad része a protonok végsebessége a fény vákuumbeli terjedési sebességének?
   A proton sebességének és a fény vákumbeli sebességének aránya:
   Megold.
3. Hányszorosára nő egy részecske tömege, ha a fénysebesség felével mozog?
   Megold.

# 29. LECKE

## Fénykvantumok és anyaghullámok

## 43. Fénykvantumok és anyaghullámok

**43.1. feladat:** Egy fotocella katódjából $2{,}16 \cdot 10^{-19}$ J vagy ennél több energiával lehet egy elektront kiszakítani. Mekkora frekvenciájú elektromágneses sugárzás képes fényelektromos jelenséget (fotoeffektust) létrehozni? Mekkora a legkisebb frekvenciájú fénynek a hullámhossza? E fotocella katódját $0{,}250 \cdot 10^{-6}$ m hullámhosszú elektromágneses sugárzás éri. Mekkora sebességgel lépnek ki az elektronok a katódból? Az anódáram $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ A. Legalább hány foton ütközik a katódba 1 s alatt?

**Megoldás:** A fényelektromos jelenség Einstein-féle magyarázata szerint a fotocella katódjában kötött elektronok elnyelik a megvilágító fény $h \cdot f$ nagyságú energia adagját (fotonját). Ha a foton $h \cdot f$ energiája nagyobb, mint az elektronnak a katódból történő kilépéséhez szükséges energia, az úgynevezett kilépési munka, akkor a különbözet a kilépő elektron mozgási energiájában jelentkezik:

$$h \cdot f = A + \frac{1}{2} m_e v^2.$$

Ennek értelmében fényelektromos jelenség akkor jön létre, ha a foton energiája legalább a kilépési munkát fedezi:

$$h \cdot f = A.$$

Innen a legkisebb frekvenciájú megvilágító fény frekvenciája és hullámhossza:

$$f = \frac{A}{h} = \frac{2{,}16 \cdot 10^{-19}}{6{,}626 \cdot 10^{-34}} = 3{,}2599 \cdot 10^{14}\,\text{Hz},$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2{,}998 \cdot 10^{8}}{3{,}2599 \cdot 10^{14}} = 9{,}197 \cdot 10^{-7}\,\text{m}.$$

A feladat második részében a katódból kilépő elektronok sebességét ismét az Einstein-féle összefüggés segítségével határozhatjuk meg:

$$h \cdot f = A + \frac{1}{2} m_e v^2.$$

A fotocella katódját megvilágító elektromágneses sugárzás fotonjainak az energiája:

$$h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{2{,}998 \cdot 10^{8}}{0{,}250 \cdot 10^{-6}} = 7{,}946 \cdot 10^{-19}\,\text{J}.$$

Az Einstein-féle összefüggés átrendezésével számíthatjuk ki a kilépő elektronok mozgási energiáját:

$$E_e = \frac{1}{2} m_e v^2 = h \cdot f - A = 7{,}946 \cdot 10^{-19} - 2{,}16 \cdot 10^{-19} = 5{,}786 \cdot 10^{-19}\,\text{J}.$$

Innen a kilépő elektronok sebessége:

$$v = \sqrt{\frac{2E_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}786 \cdot 10^{-19}}{9{,}1094 \cdot 10^{-31}}} = 1{,}127 \cdot 10^6 \; m/s = 1127 \,\text{km/s}.$$

Ha a fotocellára egyenfeszültséget kapcsolunk, akkor az anód és a katód között a feszültséggel arányos állandó nagyságú elektromos erőtér alakul ki, amely megfelelően választott polaritás esetén az anód irányában gyorsítja a fotoeffektussal keletkező elektronokat. Az anódot elérő fotoelektronok képezik az anódáramot. A feladat szerint az anódáram $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ A, ami azt jelenti, hogy 1 másodperc alatt $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ C töltés áramlik a fotocella áramkörében, így a fotocella anódja és katódja között is. Ha ezt a töltésmennyiséget elosztjuk az elektron töltésének nagyságával, akkor megkapjuk, hogy hány elektron áramlik másodpercenként az anód és a katód között:

$$N_e = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-3}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 1{,}561 \cdot 10^{16}$$

Mivel a fotoeffektus során a katódra becsapódó minden foton egy fotoelektront kelt, ezért a másodpercenként a fotokatódra csapódó fotonok számának legalább $1{,}561 \cdot 10^{16}$-nak kell lennie.

---

**43.2. feladat:** Egy fotocella ezüst fotokatódját $2537 \cdot 10^{-10}$ m hullámhosszúságú ultraibolya fénnyel világítjuk meg. Határozzuk meg azt a potenciálkülönbséget, amely képes megszüntetni a fotoáramot! Ezüst esetében $3250 \cdot 10^{-10}$ m a legnagyobb hullámhossz, amivel még fotoeffektust lehet kiváltani.

**Megoldás:** Ha egy fotocella katódját és anódját egy vezetékkel összekötjük, akkor az így létrehozott áramkörben feszültségforrás közbeiktatása nélkül is folyik áram. Ennek az az oka, hogy a katódból a fotoeffektus során kilépő nagy sebességű elektronok bizonyos hányada az anódba csapódik és abban elnyelődik. Ennek következtében az anódban elektron többlet, a katódban pedig elektron hiány alakul ki. Az elektron egyensúly úgy áll helyre, hogy elektronok vándorolnak az anódról a katódra a közéjük kapcsolt vezetéken keresztül.

Ha ebbe az áramkörbe egyenáramú feszültségforrást kapcsolunk úgy, hogy az anód negatív, a katód pedig pozitív polaritású legyen, akkor az anód és a katód között olyan elektromos erőtér alakul ki, amely az elektronokat fékezi. Ez a fékező hatás a feszültség növelésével fokozódik. Az elektronok fékeződésének az az oka, hogy az elektromos erőtér az elektronokon $eU$ nagyságú munkát végez. Mivel az elektronok mozgása az elektromos erőtér irányával ellentétes, ez a munka negatív előjelű, tehát az elektron mozgási energiáját csökkenti. A feszültség növelésével egyre kisebb lesz az anódot elérő fotoelektronok mozgási energiája és ezáltal a sebessége. Addig folyik áram a fotocella áramkörében, amíg az anódot elérő fotoelektronok mozgási energiája nullára nem csökken:

$$E_e - eU = 0.$$

Megjegyzés: Ha tovább növelnénk a feszültséget, akkor a fotoelektronok sebessége már az előtt nullára csökkenne, mielőtt elérnék az anódot.

A fotoelektronok mozgási energiáját ismét az Einstein-féle összefüggés átrendezésével határozhatjuk meg:

$$E_e = \frac{1}{2} m_e v^2 = h \cdot f - A.$$

Annak a fotonnak az energiája, amivel még fotoeffekust lehet kiváltani, csupán arra elég, hogy fedezze a kilépési munkát. Ezért:

$$A = h \cdot f_h = h \cdot \frac{c}{\lambda_h} = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{2{,}998 \cdot 10^8}{3250 \cdot 10^{-10}} = 6{,}112 \cdot 10^{-19}\,\text{J}.$$

A következő lépésben meghatározzuk a fotoelektronok kezdeti mozgási energiáját, ha a fotocella ezüst fotokatódját $2537 \cdot 10^{-10}$ m hullámhosszúságú ultraibolya fénnyel világítjuk meg:

$$E_e = \frac{1}{2} m_e v^2 = h \cdot f - A = h \cdot \frac{c}{\lambda} - A,$$

$$E_e = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{2{,}998 \cdot 10^8}{2537 \cdot 10^{-10}} - 6{,}112 \cdot 10^{-19} = 1{,}718 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}.$$

Végül kiszámolhatjuk a fotoáramot megszüntető feszültséget:

$$U = \frac{E_e}{e} = \frac{1{,}718 \cdot 10^{-19}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 1{,}072\,\mathrm{V}.$$

---

**43.3. feladat:** Határozzuk meg a szórt $\gamma$-foton energiáját, és az elektronnak átadott energiát, ha a primér $\gamma$-foton energiája $1\,\mathrm{MeV}$ és a szóródási szög $57^0$.

**Megoldás:** A feladat megoldása nagyon egyszerű, ha ismerjük a szórt foton energiáját a szórási szög függvényében megadó alábbi összefüggést:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)}.$$

Behelyettesítés után:

$$m_e c^2 = 9{,}1094 \cdot 10^{-31} \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^2 = 8{,}1875 \cdot 10^{-14}\ J = 0{,}511\,\text{MeV},$$

$$E'_\gamma = \frac{1}{1 + \frac{1}{0{,}511}(1 - \cos 57^0)} = 0{,}529\,\text{MeV}.$$

Az energiamegmaradás törvénye értelmében az elektronnak átadott energia:

$$E_e = E_\gamma - E'_\gamma = 1 - 0{,}528 = 0{,}471\,\text{MeV}.$$

---

**43.4. feladat:** Az $0{,}431 \cdot 10^{-10}$ m hullámhosszúságú röntgenfoton kölcsönhatásba lép egy elegendően kis rendszámú elem lazán kötött elektronjával. Ennek következményeként $52^0$-kal megváltoztatja irányát. Mekkora lesz a meglökött elektron mozgási energiája? A röntgenfoton eredeti haladási irányával milyen szöget bezáró pályán halad tova az elektron?

**Megoldás:** A meglökött elektron mozgási energiáját a 43.3. feladat megoldásának lépéseit követve határozhatjuk meg.

Először meghatározzuk a $0{,}431 \cdot 10^{-10}$ m hullámhosszúságú röntgenfoton energiáját:

$$E_\gamma = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda},$$

$$E_\gamma = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{2{,}998 \cdot 10^8}{0{,}431 \cdot 10^{-10}} = 4{,}609 \cdot 10^{-15}\ J = 28{,}770\,\text{keV},$$

$$E'_\gamma = \frac{28{,}770}{1 + \frac{28{,}770}{511}(1 - \cos 52^0)} = 28{,}161\,\text{keV}.$$

A meglökött elektron mozgási energiája:

$$E_e = E_\gamma - E'_\gamma = 28{,}770 - 28{,}161 = 0{,}609\,\text{keV}.$$

A kilökött elektron repülési iránya és a röntgenfoton eredeti haladási iránya közötti szöget jelöljük $\varphi$-vel. A $\varphi$ szög nagyságát a lendületmegmaradás törvényének segítségével határozhatjuk meg. Ehhez szükségünk van a bejövő és a szórt röntgenfoton, továbbá a kilökött elektron lendületének ismeretére:

$$p_\gamma = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{0{,}431 \cdot 10^{-10}} = 1{,}5374 \cdot 10^{-23}.$$

A szórt foton hullámhosszát az energiájából határozhatjuk meg. Mivel

$$E'_\gamma = h \cdot f' = h \cdot \frac{c}{\lambda'} = p_{\gamma'} \cdot c,$$

ezért

$$p_{\gamma'} = \frac{E'_\gamma}{c} = \frac{28161 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}{2{,}998 \cdot 10^8} = 1{,}5048 \cdot 10^{-23}.$$

Következik a meglökött elektron lendületének meghatározása, ami kétféle módon történhet. A relativisztikus formulák minden esetben pontos eredményt szolgáltatnak, azonban több szakon nem tananyag a speciális relativitáselmélet. A klasszikus képletek minden olyan esetben jó közelítik a pontos eredményt, amikor az elektron sebessége lényegesen kisebb a vákuumbeli fénysebességnél.

Megjegyzés: Ennek ellenőrzéséhez is a speciális relativitáselmélet ismeretére van szükség. Bizonyítás nélkül megadjuk, azt a formulát, amely segítségével kiszámolhatjuk a meglökött elektron sebességét:

$$v_e = c\sqrt{1 - \frac{1}{(\frac{E_m}{m_0 c^2} + 1)^2}}.$$

Behelyettesítés után:

$$v_e = c\sqrt{1 - \frac{1}{(\frac{0{,}609}{511} + 1)^2}} = 0{,}049c.$$

Tehát a meglökött elektron sebessége a vákuumbeli fénysebesség 4,9%-a.

Ezek után azt kell mérlegelni, hogy a vizsgált probléma esetén elhanyagolhatóak-e a relativisztikus hatások vagy nem. Tételezzük fel, hogy megengedhető a klasszikus közelítés, amely szerint egy részecske mozgási energiáját a jól ismert összefüggéssel számolhatjuk ki:

$$E_e = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{p_e^2}{2m_e}.$$

Átrendezéssel megkapjuk az elektron lendületét:

$$p_e = \sqrt{2m_e E_e},$$

$$p_e = \sqrt{2 \cdot 9{,}1094 \cdot 10^{-31} \cdot 609 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 1{,}333 \cdot 10^{-23}.$$

Bontsuk fel a szórt foton és a meglökött elektron lendületét a röntgenfoton eredeti haladási irányával párhuzamos és arra merőleges összetevőkre:

$$p^{\parallel}_{\gamma'} = p_{\gamma'} \cdot \cos\theta \qquad p^{\perp}_{\gamma'} = p_{\gamma'} \cdot \sin\theta$$

$$p^{\parallel}_{e} = p_{e} \cdot \cos\varphi \qquad p^{\perp}_{e} = p_{e} \cdot \sin\varphi$$

Alkalmazzuk a lendületmegmaradás törvényét:

$$p_\gamma = p^{\parallel}_{\gamma'} + p^{\parallel}_{e},$$

$$0 = p^{\perp}_{\gamma'} - p^{\perp}_{e}.$$

Ez utóbbi összefüggés segítségével határozhatjuk meg $\varphi$ értékét:

$$0 = p_{\gamma'} \cdot \sin\theta - p_e \cdot \sin\varphi,$$

$$\sin\varphi = \frac{p_{\gamma'}}{p_e} \cdot \sin\theta,$$

$$\sin\varphi = \frac{1{,}504 \cdot 10^{-23}}{1{,}334 \cdot 10^{-23}} \cdot \sin 52^0 = 0{,}89,$$

$$\varphi = 62{,}8^0.$$

---

**43.5. feladat:** Egy fényforrás 60 W teljesítménnyel $5 \cdot 10^{-7}$ m hullámhosszúságú fotonokat sugároz. Hány foton hagyja el másodpercenként a fényforrást?

**Megoldás:** A kvantumelmélet szerint az elektromágneses sugárzásokban, így a fénysugárzásban is energia adagok, fotonok formájában áramlik az energia. Az energia adagok nagysága, azaz a fotonok energia tartalma arányos az elektromágneses sugárzás frekvenciájával:

$$\epsilon = h \cdot f$$

Határozzuk meg a $5 \cdot 10^{-7}$ m hullámhosszúságú fotonok energiáját:

$$\epsilon = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda},$$

$$\epsilon = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}}{5 \cdot 10^{-7}} = 3{,}9729 \cdot 10^{-19}.$$

Megjegyzés: A számolások során nagyon gyakran kell a $h \cdot c$ szorzattal számolni, ezért érdemes az értékét megjegyezni.

$$h \cdot c = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8} = 1{,}9865 \cdot 10^{-25}$$

Ha egy fényforrás $P = 60\,\mathrm{W}$ teljesítményű, akkor másodpercenként $E = 60\,\mathrm{J}$ energiát sugároz ki.
Az ehhez szükséges fotonszám:

$$N = \frac{E}{\epsilon} = \frac{60}{3{,}9729 \cdot 10^{-19}} = 1{,}510 \cdot 10^{20}\,1/\mathrm{s}.$$

---

**43.6. feladat:** Egy fényforrás 100 W teljesítménnyel $5{,}37 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$ hullámhosszúságú fotonokat sugároz egyenletesen a tér minden irányába. Hány foton hagyja el a fényforrást másodpercenként? Ha $100\,\mathrm{m}$-re állunk tőle, hány foton lép $1\,\mathrm{s}$ alatt be egyik szemünk pupilláján, ha a pupilla átmérőjét $4\,\mathrm{mm}$-nek vesszük?

**Megoldás:** Kövessük a 43.5. feladat megoldásának lépéseit:

$$\epsilon = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{1{,}9865 \cdot 10^{-25}}{5{,}37 \cdot 10^{-7}} = 3{,}6993 \cdot 10^{-19},$$

$$N = \frac{E}{\epsilon} = \frac{100}{3{,}6993 \cdot 10^{-19}} = 2{,}7032 \cdot 10^{20}\,1/\mathrm{s}.$$

Képzeletben vegyük körbe a fényforrást egy $100\,\mathrm{m}$ sugarú gömbfelülettel. A fényforrásból kilépő fotonok mindegyike átrepül ezen a képzeletbeli gömbfelületen. Ha a fényforrásból másodpercenként kirepülő fotonok számát elosztjuk a gömb felszínének nagyságával, akkor megkapjuk az egységnyi felületen áthaladó fotonok számát.

Számítsuk először ki a $100\ m$ sugarú gömb felületének a nagyságát:

$$A = 4R^2\pi = 4 \cdot 100^2 \cdot \pi = 125664\,\mathrm{m}^2.$$

Innen a keresett felületi fotonsűrűség:

$$\rho = \frac{N}{A} = \frac{2{,}7032 \cdot 10^{20}}{125664} = 2{,}1511 \cdot 10^{15}\,\text{foton}/\mathrm{m}^2.$$

A pupilla felületének nagysága:

$$a = r^2\pi = (2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \pi = 1{,}2566 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2.$$

Ha ezt a felületi fotonsűrűséget összeszorozzuk a pupilla felületének nagyságával, megkapjuk szemünk pupilláján 1 másodperc alatt áthaladó fotonok számát:

$$n = \rho \cdot a = 2{,}1511 \cdot 10^{15} \cdot 1{,}2566 \cdot 10^{-5} = 2{,}703 \cdot 10^{10} \text{ foton/s}.$$

---

**43.7. feladat:** Mekkora a $E_m = 100\,\text{keV}$ mozgási energiájú elektron de Broglie-féle hullámhossza és impulzusa? (Relativisztikusan számoljunk.)

**Megoldás:** A speciális relativitáselmélet szerint az elektron relativisztikus energiája, amely a nyugalmi energiát is magába foglalja, és a lendülete között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$E = m_0c^2 + E_m = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}.$$

Ebből kifejezhetjük az elektron lendületét:

$$p = \sqrt{\frac{(m_0c^2 + E_m)^2 - (m_0c^2)^2}{c^2}}.$$

Behelyettesítés után:

$$p = \sqrt{\frac{((511 \cdot 10^3 + 100 \cdot 10^3) \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19})^2 - (511 \cdot 10^3 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19})^2}{(2{,}998 \cdot 10^8)^2}},$$

$$p = \sqrt{611000^2 - 511000^2} \cdot \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}}{2{,}998 \cdot 10^8},$$

$$p = 1{,}789 \cdot 10^{-22}.$$

Végül az elektron de Broglie-féle hullámhossza:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{1{,}789 \cdot 10^{-25}} = 3{,}702 \cdot 10^{-12}\,\text{m}.$$

## Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Hány nanométer a megvilágító fény maximális hullámhossza, amely még képes fotoeffektust kiváltani rézből készült fotokatód esetén. Réz esetében a kilépési munka $A = 4{,}7\,\text{eV}$.
   A maximális hullámhossz (m): Megold.
2. Ezüst esetében $3{,}250 \cdot 10^{-10}$ m a legnagyobb hullámhossz, amivel még fotoeffektust lehet kiváltani. Határozzuk meg az ezüst felületéről kirepülő elektronok sebességét (km/s), ha a megvilágító ultraibolya fény hullámhossza $2{,}536 \cdot 10^{-10}$ m!
   Az elektronok sebessége (km/s): Megold.

3. Egy $75\,\text{keV}$ energiájú röntgen foton nyugvó elektronon $30^0$-os szögben szóródik. Határozzuk meg a meglökött elektron sebességét (km/s)!
A meglökött elektronok sebessége (km/s): Megold.

4. Gammasugár nyaláb Compton-szórás következtében $60^0$-os szögben szóródik. Hány picométer ($10^{-12}\,\text{m}$) volt a szóródás előtti hullámhossz, ha a szóródás után $0{,}312 \cdot 10^{-11}\,\text{m}$ hullámhosszat mértünk?
A szóródás előtti hullámhossz (pm): Megold.

5. Egy $150\,\text{W}$ teljesítményű fényforrás $4{,}7 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$ hullámhosszúságú monokromatikus fényt sugároz ki. Hányszor $10^{20}$ fotont bocsát ki a fényforrás másodpercenként?
Fotonszám ($10^{20}\,\frac{1}{\text{s}}$): Megold.

6. Egy $100\,\text{W}$ teljesítményű fényforrás $6 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$ hullámhosszúságú monokromatikus fényt sugároz ki. Feltételezzük, hogy a fényforrás minden irányban egyenletesen és egyformán sugároz. A fényforrástól $0{,}75\,\text{m}$ távolságra, a fénysugarakra merőlegesen $1\,\text{cm}^2$ katódfelületű fotocellát helyezünk el. Hány mA áram folyik a fotocellán, ha minden foton elektront vált ki?
A fotocella árama (mA): Megold.

7. A neutronhoz rendelhető de Broglie hullámhossz $2{,}3 \cdot 10^{-14}\,\text{m}$. Hány MeV a neutron mozgási energiája?
A neutron mozgási energiája (MeV): Megold.

# 30. LECKE

## Atomfizika

## 44. Atomfizika

**44.1. feladat:** Mekkora periódusidővel kering az elektron a hidrogénatomban a harmadik kvantumpályán a Bohr-modell szerint?

**Megoldás:** A Bohr-féle atommodell szerint a hidrogénatom elektronja meghatározott sugarú körpályákon, meghatározott sebességgel egyenletes körmozgást végez. Az elektron mozgásegyenletének és Bohr I. posztulátumának segítségével a pályasugár és a kerületi sebesség kifejezhető:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} n^2,$$

$$v_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} \cdot \frac{1}{n}.$$

Megjegyzés: A további számolások megkönnyítése érdekében számítsuk ki $n^2$, illetve $1/n$ együtthatójának értékét.

$$\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (6{,}626 \cdot 10^{-34})^2}{\pi \cdot 9{,}1094 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}602 \cdot 10^{-19})^2} = 0{,}52927 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m},$$

$$\frac{e^2}{2\epsilon_0 h} = \frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}626 \cdot 10^{-34}} = 2{,}1873 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m/s}.$$

A harmadik kvantumpálya sugara és az elektron pályasebessége:

$$r_3 = 0{,}529 \cdot 10^{-10} \cdot 3^2 = 4{,}763 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m},$$

$$v_3 = 2{,}187 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{3} = 7{,}291 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}.$$

A harmadik kvantumpálya hossza nem más, mint az $r_3$ sugarú kör kerülete:

$$K_3 = 2r_3\pi = 2 \cdot 4{,}761 \cdot 10^{-10} \cdot \pi = 2{,}993 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}.$$

Végül a keringési idő:

$$T_3 = \frac{K_3}{v_3} = \frac{2{,}989 \cdot 10^{-9}}{7{,}29 \cdot 10^5} = 4{,}105 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{s}.$$

---

**44.2. feladat:** A hosszú láncmolekulákban gyakran előfordul, hogy egy-egy elektron majdnem teljesen szabadon mozoghat a molekula teljes hosszában. Ezeket az elektronokat nevezzük delokalizált elektronoknak. Számítsuk ki egy $4\,\mathrm{nm}$ hosszúságú láncmolekulában található delokalizált elektronok $E_1$, $E_2$ és $E_3$ energiaszintjeit!

**Megoldás:** Egy $a$ hosszúságú láncmolekulában található delokalizált elektronok energiaszintjeit a következő összefüggés segítségével határozhatjuk meg:

$$E_n = \frac{h^2}{8m_e a^2} \cdot n^2,$$

$$E_n = \frac{(6{,}626 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot (9{,}1094 \cdot 10^{-31}) \cdot (4 \cdot 10^{-9})^2} \cdot n^2 = 3{,}765 \cdot 10^{-21} \cdot n^2.$$

$n$ megfelelő értékeinek behelyettesítése után megkapjuk az energiaszint értékeket.

$$E_1 = 3{,}765 \cdot 10^{-21} \cdot 1^2 = 0{,}376 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J},$$

$$E_2 = 3{,}765 \cdot 10^{-21} \cdot 2^2 = 1{,}506 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J},$$

$$E_3 = 3{,}765 \cdot 10^{-21} \cdot 3^2 = 3{,}389 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J}.$$

**44.3. feladat:** Számítsuk ki, hogy egy $4\,\mathrm{nm}$ hosszúságú láncmolekulában található delokalizált elektron alapállapotban mekkora valószínűséggel tartózkodik a láncmolekula középső $2\,\mathrm{nm}$ hosszúságú tartományában.

**Megoldás:** Egy $a$ hosszúságú láncmolekulában található delokalizált elektron az alábbi állapotfüggvénnyel írható le:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sin \frac{n\pi}{a} \cdot x.$$

Az elektron alapállapotában $n = 1$:

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sin \frac{\pi}{a} \cdot x.$$

A $|\varphi(x)|^2 dx$ mennyiség adja meg annak a valószínűségét, hogy az elektron az $x$ és $x + dx$ közötti intervallumban tartózkodik. Ha a láncmolekula középső tartományát felbontjuk $dx$ hosszúságú szakaszokra, akkor mindegyik szakaszra kiszámolhatjuk $|\varphi(x)|^2 dx$ értékét. Ha a végén ezeket az értékeket összeadjuk, akkor megkapjuk annak a valószínűségét, hogy az elektron a láncmolekula középső tartományában tartózkodik. Abban az esetben, ha a $dx$ szakaszok hosszúságát egyre kisebbre választjuk, akkor az összegzés az alábbi integrálba megy át:

$$P = \int_A^B |\varphi(x)|^2 dx.$$

Megjegyzés: Ha az integrálási határokat $A = 0$-nak és $B = a$-nak vesszük, akkor a láncmolekula teljes hosszára határozzuk meg az elektron megtalálási valószínűségét, ami értelemszerűen $1$:

$$P = \int_0^a |\varphi(x)|^2 dx = 1.$$

Ha az integrálást egy $4\,\text{nm}$ hosszúságú láncmolekula középső $2\,\text{nm}$ hosszúságú tartományára kell elvégezni, akkor az integrálási határok a következők lesznek: $A = 1\,\text{nm}$ és $B = 3\,\text{nm}$.

Egyszerűbbnek tűnik az integrálást paraméteresen elvégezni és ezt követően a paraméterek értékeit behelyettesíteni és a végeredményt kiszámolni. A paraméteresen megadott integrálási határok az alábbiak: $A = a/4$ és $B = 3a/4$.

Ezek után elvégezhetjük az integrálást.

$$P = \int_{a/4}^{3a/4} \left| \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right|^2 dx = \int_{a/4}^{3a/4} \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx =$$

$$= \left| \frac{2}{a}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{a}{\pi}\sin\left(2\frac{\pi}{a}x\right)\right) \right|_{a/4}^{3a/4} =$$

$$= \left\{\frac{2}{a}\left(\frac{1}{2}\frac{3a}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{a}{\pi}\sin\left(2\frac{\pi}{a}\frac{3a}{4}\right)\right)\right\} - \left\{\frac{2}{a}\left(\frac{1}{2}\frac{a}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{a}{\pi}\sin\left(2\frac{\pi}{a}\frac{a}{4}\right)\right)\right\} =$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{3\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = 0{,}818.$$

**44.4. feladat:** Egy véges magasságú vagy szélességű potenciállépcsőn való áthatolás jelenségét nevezzük alagút-effektusnak. Az alagút-effektussal magyarázhatjuk például a radioaktív atommagok $\alpha$-bomlását és az alagútdiódák működését. Becsüljük meg, hogy hányad részére csökken egy $10$ aJ energiájú elektron áthatolási valószínűsége egy olyan potenciállépcsőn, amelynek vastagsága $0{,}2$ nm, magassága pedig $16$ aJ-ról a duplájára növekszik.

**Megoldás:** A Schrödinger-egyenlet alapján határozható meg a potenciállépcsőn való áthatolás valószínűsége:

$$T \sim e^{-\frac{2b}{\hbar}\sqrt{2m(V-E)}}.$$

Számítsuk ki a $T$ kitevőjében szereplő kifejezés értékét a potenciállépcső magasságának két értékére:

$$\alpha_1 = \frac{2b}{\hbar}\sqrt{2m(V_1-E)} = \frac{2\cdot 0{,}2\cdot 10^{-9}}{\left(\frac{6{,}626\cdot 10^{-34}}{2\cdot\pi}\right)}\sqrt{2\cdot 9{,}1094\cdot 10^{-31}(16\cdot 10^{-18}-10\cdot 10^{-18})},$$

$$\alpha_1 = 12{,}541,$$

$$\alpha_2 = \frac{2b}{\hbar}\sqrt{2m(V_2-E)} = \frac{2\cdot 0{,}2\cdot 10^{-9}}{\left(\frac{6{,}626\cdot 10^{-34}}{2\cdot\pi}\right)}\sqrt{2\cdot 9{,}1094\cdot 10^{-31}(32\cdot 10^{-18}-10\cdot 10^{-18})},$$

$$\alpha_2 = 24{,}014.$$

Az áthatolási valószínűség aránya:

$$\gamma = \frac{T_2}{T_1} = \frac{e^{-24{,}014}}{e^{-12{,}541}} = 1{,}041\cdot 10^{-5}.$$

**44.5. feladat:** Számítsuk ki hidrogénatom esetében az m=4 és n=2 közötti átmenetnek megfelelő színképvonal hullámhosszát!

**Megoldás:** A hidrogénatom színképvonalainak hullámhosszát illetően a Bohr-féle atommodellen és a kvantummechanikai megfontolásokon alapuló számítások ugyanarra az eredményre vezettek:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Számítsuk ki a Rydberg-állandónak is nevezett együttható értékét:

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = \frac{9{,}1094 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}602 \cdot 10^{-19})^4}{8 \cdot (8{,}854 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (6{,}626 \cdot 10^{-34})^3 \cdot 2{,}998 \cdot 10^8} = 1{,}0969 \cdot 10^7.$$

Ezt követően a keresett hullámhossz:

$$\frac{1}{\lambda} = 1{,}0969 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 2{,}0567 \cdot 10^6,$$

$$\lambda = 4{,}8622 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}.$$

Megjegyzés: A hidrogénnek ez a színképvonala a látható tartományba esik és a Balmer-sorozat tagja.

**44.6. feladat:** Egy $15 \cdot 10^{-18}$ J mozgási energiájú elektron $0{,}8 \cdot 10^{-6}$ m-es helyre van beszorítva. Hány százalékos pontossággal tudjuk a sebességét megmérni?

**Megoldás:** A feladat megoldásához meg kell határoznunk az elektron sebességét, illetve a sebesség bizonytalanságát.

A 43.4. feladatban már számoltunk az elektron sebességét meghatározó alábbi összefüggéssel:

$$v_e = c\sqrt{1 - \frac{1}{(\frac{E_m}{m_0c^2} + 1)^2}}.$$

Behelyettesítés után:

$$v_e = c\sqrt{1 - \frac{1}{(\frac{0{,}093633}{511} + 1)^2}} = 0{,}01914c = 5{,}7384 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

Tehát a meglökött elektron sebessége a vákuumbeli fénysebesség 1,9%-a.

Megjegyzés: Pusztán kíváncsiságból számítsuk ki az elektron sebességét a mozgási energiát megadó klasszikus képlet alapján is.

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2.$$

Innen az elektron sebessége:

$$v_e = \sqrt{\frac{2E_m}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 10^{-18}}{9{,}1094 \cdot 10^{-31}}} = 5{,}7387 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

A két sebesség érték közötti eltérés kisebb, mint 0,01% körüli. Amennyiben az adott probléma esetében ekkora eltérés megengedhető, akkor számolhatunk a számolás szempontjából egyszerűbb klasszikus képlettel.

A sebesség bizonytalanságát a Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés segítségével számolhatjuk ki:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \text{azaz} \qquad \Delta x \cdot m \Delta v \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Innen

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{2m \cdot \Delta x} = \frac{\frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot \pi}}{2 \cdot 9{,}1094 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-6}} = 72{,}35\,\text{m/s}.$$

Így a sebesség relatív bizonytalansága:

$$\frac{\Delta v}{v} \geq \frac{72{,}35}{5{,}7384 \cdot 10^{6}} = 1{,}261 \cdot 10^{-5}.$$

Tehát a sebességmérés pontossága meghaladja az $1{,}261 \cdot 10^{-3}$ %-ot.

---

**44.7. feladat:** Mekkora a röntgencső feszültsége, ha az általa kisugárzott folytonos színképben nincsenek olyan hullámhosszak, amelyek $206 \cdot 10^{-10}$ m-nél kisebbek?

**Megoldás:** Először számítsuk ki a határhullámhossznak megfelelő fotonok energiáját:

$$E_h = h \cdot f = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1{,}9865 \cdot 10^{-25}}{206 \cdot 10^{-10}} = 9{,}6432 \cdot 10^{-18}\,\text{J}.$$

Megjegyzés: A 43.5. feladatban kiszámoltuk, hogy $h \cdot c = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8} = 1{,}9865 \cdot 10^{-25}$.

Ha a röntgencső katódja és anódja közé egyenfeszültséget kapcsolunk, akkor a kialakuló elektromos erőtér $eU$ nagyságú munkát végez a katódból kilépő elektronokon, amely megfelelően választott polaritás esetén növeli azok energiáját. A katódból kilépő elektronok kezdeti mozgási energiája általában elhanyagolható $eU$-hoz képest, ezért a felgyorsított elektronok közel $eU$ energiával csapodnak az anódba. Az anódba csapódó elektronok egy része elektronokat lök ki az anódot alkotó atomok legbelső elektronhéjáról, elindítva ezzel a karakterisztikus röntgensugárzás keletkezését.

A feladatunkkal azonban a röntgensugárzás keltésének másik módja kapcsolatos. Az anódba becsapódó elektronok ahogy elhaladnak az atommagok mellett, az atommagok fékező hatásának következtében lelassulnak és az energiacsökkenésükkel egyenlő nagyságú röntgenfotont sugároznak ki. Az elektronok lassulásának mértéke, így a röntgenfoton energiájának nagysága attól függ, hogy az elektron milyen távolságban halad el az atommag mellett. Minél kisebb ez a távolság, annál erősebb az elektron és az atommag kölcsönhatása, következésképpen annál jelentősebb az elektron lassulása és a röntgenfoton energiája. A legnagyobb energiájú röntgenfoton akkor keletkezik, amikor az elektron telibe találja az atommagot. Ebben az esetben az elektron energiája nullára csökken, így a keletkező röntgenfoton energiája egyenlő lesz $eU$-val:

$$eU = \frac{hc}{\lambda}.$$

Behelyettesítés után:

$$1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot U = 9{,}6432 \cdot 10^{-18}.$$

Innen a röntgencső feszültsége:

$$U = \frac{9{,}6432 \cdot 10^{-18}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}},$$

$$U = 60{,}2\,\mathrm{V}.$$

---

**44.8. feladat:** Egy $80\,\mathrm{kV}$ csőfeszültséggel működő röntgencső röntgensugárzásának spektrumában előforduló legkisebb hullámhossz $0{,}153 \cdot 10^{-10}$ m. Becsüljük meg ez alapján a Planck állandó értékét!

**Megoldás:** A 44.8. feladat megoldásában leírtak alapján:

$$eU = \frac{hc}{\lambda}.$$

Fejezzük ki a Planck állandót:

$$h = \frac{eU\lambda}{c}.$$

Helyettesítsük be a paraméterek értékeit:

$$h = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 80000 \cdot 0{,}153 \cdot 10^{-10}}{2{,}998 \cdot 10^{8}} = 6{,}541 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}.$$

---

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a hidrogénatomra a második Bohr-pályán keringő elektron sebességét (km/s)!
   Az elektron sebessége (km/s): Megold.
2. Számítsuk ki, hogy hány nanométer hullámhosszúságú fénnyel gerjeszthető az alapállapotú delokalizált elektron egy $4\,\mathrm{nm}nm$ hosszúságú láncmolekulában az $n = 5$ gerjesztett állapotába!
   A gerjesztő fény hullámhossza (nm): Megold.
3. Számítsuk ki egy $4\,\mathrm{nm}$ hosszúságú láncmolekulában található delokalizált elektron első gerjesztett állapotában mekkora valószínűséggel tartózkodik a láncmolekula középső $2\,\mathrm{nm}$ hosszúságú tartományában.
   Az elektron tartózkodási valószínűsége: Megold.
4. Becsüljük meg, hogy hány százalékára csökken egy $10\,\mathrm{aJ}$ energiájú elektron áthatolási valószínűsége egy olyan potenciállépcsőn, amelynek magassága $16\,\mathrm{aJ}$, vastagsága pedig $0{,}2\,\mathrm{nm}$-ről $0{,}3\,\mathrm{nm}$-re növekszik. Az áthatolási valószínűség csökkenése (%): Megold.
5. Határozzuk meg a szabadon mozgó elektron helyének elmosódottságát (nm) abban a pillanatban, amikor $10^{-3}\%$ pontossággal meghatároztuk energiáját, amelyet $0{,}16\,\mathrm{pJ}$-nak találtunk.
   Az elektron helyének elmosódottsága (nm): Megold.
6. A színképvonalak hullámhossza nem lehet egyetlen pontosan meghatározott érték. Létezik az úgynevezett természetes vonal kiszélesedés. Mekkora ez a vonal kiszélesedés (nm) egy $760\,\mathrm{nm}$ hullámhosszúságú vörös vonalnál, ha a fényt kibocsátó atom $10^{-8}\,\mathrm{s}$-ig van gerjesztettt állapotban? (Az eredményt normál alakban adja meg! pl.: $6{,}0225E-23$)
   Vonal kiszélesedés (nm): Megold.

7. Határozzuk meg egy 30 kV csőfeszültséggel működő röntgencső röntgensugárzásának spektrumában előforduló legkisebb hullámhosszt (pm)!
Legkisebb hullámhossz (pm): [ ] Megold. [ ]

# 31. LECKE

## Molekulafizika

## 45. Molekulafizika

**45.1. feladat:** Számítsuk ki a $HCl$ képződéshőjét a $H_2$, a $Cl_2$ és a $HCl$ disszociációs energiájának ismeretében, amelyek rendre $4{,}5$ eV, $2{,}5$ eV, illetve $4{,}4$ eV!

**Megoldás:** A $HCl$ képződése az alábbi kémiai reakcióegyenlettel írható le:

$$H_2 + Cl_2 = 2HCl.$$

Vizsgáljuk meg a reakció energia mérlegét. A hidrogénmolekula és a klórmolekula disszociójához összesen $4{,}5\,\text{eV} + 2{,}5\,\text{eV} = 7\,\text{eV}$ energiára van szükség. A reakcióban két sósav molekula keletkezik, ami $2 \cdot 4{,}4 = 8{,}8\,\text{eV}$ energia felszabadulásával jár. Összességében tehát két sósav molekula keletkezése során $8{,}8 - 7 = 1{,}8\,\text{eV}$ energia szabadul fel. Ebből következik, hogy mólnyi mennyiségű $HCl$ keletkezésekor felszabaduló energia:

$$Q = \frac{1{,}8}{2} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 5{,}4198 \cdot 10^{23}\,\text{eV}.$$

Így a sósav képződéshője:

$$Q = 5{,}4198 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 86825\,\text{J/mol} = 86{,}825\,\text{kJ/mol}.$$

---

**45.2. feladat:** $H_2$ molekula rotációs színképében a $J = 1$ és $J = 0$ állapot közötti átmenet során $4{,}8 \cdot 10^{-5}\,\text{m}$ hullámhosszúságú infravörös sugárzás emittálódik. Számítsuk ki az atommagok távolságát a $H_2$ molekulában!

**Megoldás:** A molekulák forgási állapotát egy $J$, nemnegatív egész számmal, a rotációs kvantumszámmal lehet jellemezni, és a rotációs energia nagysága a következőképpen számolható:

$$E_r(J) = \frac{h^2}{8\pi^2\Theta} J(J+1),$$

ahol $\Theta$ a molekula tehetetlenségi myomatéka.

A $J = 1$ és $J = 0$ átmenet során felszabaduló energia:

$$\Delta E = E_r(1) - E_r(0) = \frac{h^2}{8\pi^2\Theta}[1(1+1) - 0(0+1)],$$

$$\Delta E = 2\frac{h^2}{8\pi^2\Theta}.$$

Ez az energia távozik egy infravörös foton formájában. Ezért:

$$\Delta E = E_f,$$

$$2\frac{h^2}{8\pi^2\Theta} = \frac{hc}{\lambda}.$$

Fejezzük ki $\Theta$-t és számítsuk ki az értékét:

$$\Theta = \frac{h\lambda}{4\pi^2 c} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}}{4\pi^2 \cdot 2{,}998 \cdot 10^8},$$

$$\Theta = 2{,}687 \cdot 10^{-48}\,\mathrm{kgm}^2.$$

Érdekes módon a kvantummechanikai számítások szerint $\Theta$ értéke jó közelítéssel klasszikus fizikai számításokból is meghatározható:

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} m_i l_i^2,$$

ahol $m_i$ a forgó rendszert alkotó tömegpontok tömege, $l_i$ pedig a forgástengelytől mért távolsága. A hidrogénmolekula két hidrogén atomból épül fel, ezért $n = 2$ és $m = m_1 = m_2 = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg. A forgástengely a két hidrogén atom között, tőlük egyenlő távolságban lévő tömegközépponton megy keresztül, ezért $l_1 = l_2 = a/2$, ahol $a$-val jelöljük a hidrogén atommagok távolságát.

Ezek alapján:

$$\Theta = 2m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{ma^2}{2}.$$

Innen:

$$a = \sqrt{\frac{2\Theta}{m}},$$

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}687 \cdot 10^{-48}}{1{,}6726 \cdot 10^{-27}}},$$

$$a = 0{,}567 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}.$$

---

**45.3. feladat:** A kétatomos molekulákban az atomokat olyan erők tartják egymás közelében, amelyek jó közelítéssel harmonikus erőknek tekinthetők. Határozzuk meg a $CO$ molekula $D$ erőállandóját, ha a vibrációs frekvenciája $64 \cdot 10^{12}$ Hz!

**Megoldás:** A kétatomos molekulák vibrációs frekvenciája és erőállandója között a következő összefüggés áll fenn:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{\mu}},$$

ahol $\mu$ a molekula redukált tömege, amit a következőképpen számolunk ki:

$$\mu = \frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B}.$$

Számítsuk ki először a $CO$ molekula redukált tömegét:

$$\mu = \frac{12u \cdot 16u}{12u + 16u} = \frac{12 \cdot 16}{28} u = 11{,}383 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}.$$

Megjegyzés: A kémiai elemek különböző, kissé eltérő tömegű izotópok keverékei. A relatív atomtömeget a természetben leggyakrabban előforduló, 12, illetve 16 relatív atomtömegű $^{12}C$ és $^{16}O$ izotópokra végeztül el.

Az erőállandó a következőképpen határozható meg:

$$D = (2\pi f)^2 \mu = (2\pi \cdot 64 \cdot 10^{12})^2 \cdot 11{,}383 \cdot 10^{-27}\,\text{N/m},$$

$$D = 1840{,}7\,\text{N/m}.$$

Megjegyzés: Ilyen rugalmas erőt fejt ki például az a rugó, amelynek 1 cm-rel történő megnyújtásához 18,3 N erő szükséges.

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Hány nanométer hullámhosszúságú az a foton, melynek energiája elegendő egy $O_2$ molekula disszociációjához, ha $E_d = 5{,}2\,\text{eV}$?
   A foton hullámhossza (nm): Megold.
2. Az $O_2$ molekula rotációs energiaállandója $E_r^* = 0{,}00013\,\text{eV}$. Számítsuk ki az atommagok távolságát az $O_2$ molekulában! Az eredményt normálalakban, pl.: 1,234E-23, adjuk meg.
   Az atommagok távolsága (m): Megold.
3. Határozzuk meg az $N_2$ molekula $D$ erőállandóját, ha a vibrációs frekvenciája $70 \cdot 10^{12}$ Hz! A számolást a természetben leggyakrabban előforduló $^{14}N$ izotópra végezzük, amelynek relatív atomtömege $14$!
   A nitrogén molekula erőállandója (N/m): Megold.

# 32. LECKE

## Anyagszerkezet

## 46. Anyagszerkezet

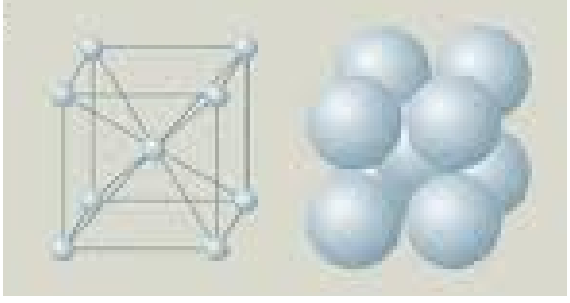
**46.1. feladat:** Az öntöttvas szobahőmérsékleten $7210\,\mathrm{kg/m^3}$ sűrűségű, relatív atomtömege $55{,}8$. Mekkora a tércentrált köbös rács elemi cellájának az élhossza?

**Megoldás:** A 46.1. ábrán jól látható, hogy az elemi cella csúcsaiban található atomok nyolcadrésze és a középen lévő atom tartozozik a vizsgált elemi cellához. Így összesen minden elemi cella

$$8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2$$

atomot tartalmaz. Így egy elemi cella össztömege:

$$m = 2 \cdot 55{,}8 \cdot 1{,}660 \cdot 10^{-27} = 1{,}85256 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}.$$



46.1. ábra. *Tércentrált kockarács elemi cellája*

Mivel az öntöttvas szobahőmérsékleten $7210\,\mathrm{kg/m^3}$ sűrűségű, ezért $1\,\mathrm{m^3}$ öntöttvasban

$$N = \frac{7210}{m} = \frac{7210}{1{,}85256 \cdot 10^{-25}} = 3{,}8919 \cdot 10^{28}$$

elemi cella található. Ezért egy elemi cella térfogata:

$$v = \frac{1\,\mathrm{m}^3}{N} = \frac{1\,\mathrm{m}^3}{3{,}893 \cdot 10^{28}} = 2{,}5694 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{m}^3.$$

Ha az elemi cella élhosszúságát $a$-val jelöljük, akkor a térfogata $v = a^3$, így

$$a = \sqrt[3]{v} = 2{,}951 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}.$$

---

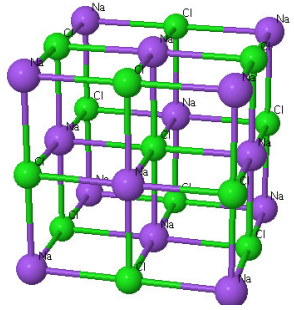
**46.2. feladat:** A konyhasó (NaCl) sűrűsége $2160\,\mathrm{kg/m}^3$. Ismerve, hogy a konyhasó egyszerű kockarácsban kristályosodik, határozzuk meg a sókristályban a szomszédos Na és Cl atomok távolságát! A Na és a Cl relatív atomtömege 23, illetve 35,5.)

**Megoldás:** Az elemi cella csúcsaiban felváltva találhatók $Na$, illetve $Cl$ atomok (46.2. ábra). Az előző feladatban leírt meggondolások alapján egy elemi cella fél $Na$ és fél $Cl$ atomot tartalmaz.

Így egy elemi cella össztömege:

$$m = 0{,}5 \cdot (23 \cdot 1{,}660 \cdot 10^{-27} + 35{,}5 \cdot 1{,}660 \cdot 10^{-27}) = 4{,}8555 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}.$$

Mivel a konyhasó $2160\,\mathrm{kg/m}^3$ sűrűségű, ezért $1\,\mathrm{m}^3$ öntöttvasban




46.2. ábra. *A konyhasó rácsszerkezete*

$$N = \frac{2160}{m} = \frac{2160}{4{,}8555 \cdot 10^{-26}} = 4{,}4486 \cdot 10^{28}$$

elemi cella található. Ezért egy elemi cella térfogata:

$$v = \frac{1\,\mathrm{m}^3}{N} = \frac{1\,\mathrm{m}^3}{4{,}4486 \cdot 10^{28}} = 2{,}2479 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{m}^3.$$

Ha az elemi cella élhosszúságát $a$-val jelöljük, akkor a térfogata $v = a^3$, így

$$a = \sqrt[3]{v} = 2{,}822 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}.$$

**46.3. feladat:** Statisztikai fizikai számítások szerint $T$ hőmérsékleten annak a valószínűsége, hogy egy $E$ energiához tartozó energiaszint be van töltve

$$p(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1},$$

ahol $E_F$ a rendszer Fermi-szintje, $k$ a Boltzman-állandó. Számítsuk ki, hogy szobahőmérsékleten $293\,\mathrm{K}$ az $E_F = 7\,\mathrm{eV}$ felett $0{,}1\,\mathrm{eV}$-tal az energiaszintek hány százaléka van betöltve?

**Megoldás:** A feladat könnyen megoldható. Helyettesítsünk be a betöltöttség valószínűségét megadó fenti összefüggésbe:

$$p(E) = \frac{1}{e^{\frac{(7{,}1-7)\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}}{1{,}381\cdot 10^{-23}\cdot 293}} + 1} = 0{,}0187.$$

Tehát az energiaszintek $1{,}87\,\%$-a van betöltve a $E_F = 7\,\mathrm{eV}$ felett $0{,}1\,\mathrm{eV}$-tal.

---

**46.4. feladat:** Szabad elektrongázban az egységnyi energiaintervallumban lévő elektronok számát az alábbi összefüggéssel adhatjuk meg:

$$\rho(E) = V\frac{4\pi}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\frac{E^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}.$$

Határozzuk meg a Fermi-szint értékét alumíniumban! Az alumínium sűrűsége $2{,}7\,\mathrm{g/cm^3}$, relatív atomtömege $27$ és atomonként három szabad elektronja van.

**Megoldás:** Mivel az alumínium relatív atomtömege 27, ezért 27 g alumíniumban $6{,}022 \cdot 10^{23}$ darab atom található. Az alumínium sűrűsége $2{,}7\,\mathrm{g/cm^3}$, ezért $1\,\mathrm{cm^3}$ alumíniumban található atomok száma $6{,}022 \cdot 10^{22}$ darab. Mivel az alumínium három vegyértékű, ezért három delokalizált eletktront ad az elektrongázba. Az elektrongázban található szabad elektronok száma tehát

$$N = 6{,}022 \cdot 10^{22} \cdot 3 = 18{,}066 \cdot 10^{22}.$$

Az elektrongázban található elektronok számát úgy is meghatározhatjuk, ha az egységnyi energiaintervallumban lévő elektronok számát összegezzük:

$$N = \int_0^\infty \rho(E)dE = \int_0^\infty V\frac{4\pi}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}}\frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}}+1}\,dE.$$

$T = 0\ K$ esetén az integrálás könnyen elvégezhető, hiszen a

$$p(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}}+1}$$

betöltési valószínűség függvény értéke a Fermi szint alatt 1, fölötte pedig 0:

$$N = \int_0^{E_F} V\frac{4\pi}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}} \cdot 1\ dE + \int_{E_F}^\infty V\frac{4\pi}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}} \cdot 0\ dE.$$

A második integrál értéke 0, ezért

$$N = \int_0^{E_F} V \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} \cdot 1 \, dE = V \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^{E_F} E^{\frac{1}{2}} \, dE,$$

$$N = V \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot E_F^{\frac{3}{2}}.$$

Helyettesítsük be az ismert értékeket:

$$18{,}066 \cdot 10^{22} = 10^{-6} \cdot \frac{4\pi}{(6{,}626 \cdot 10^{-34})^3} (2 \cdot 9{,}1094 \cdot 10^{-31})^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot E_F^{\frac{3}{2}},$$

$$18{,}066 \cdot 10^{22} = 7{,}0818 \cdot 10^{49} \cdot E_F^{\frac{3}{2}}.$$

Innen

$$E_F = 18{,}670 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 11{,}65\,\mathrm{eV}.$$

---

**46.5. feladat:** Tiszta Si-kristályban a tiltott sáv szélessége $1{,}1\,\mathrm{eV}$. Számítsuk ki a párkeltésre alkalmas fény maximális hullámhosszát!

**Megoldás:** A párkeltésre alkalmas fény fotonjának energiája meg kell hogy haladja a tiltott sáv szélességét:

$$E_f \geq \Delta E.$$

Ezért

$$\frac{hc}{\lambda} \geq \Delta E,$$

$$\lambda \leq \frac{hc}{\Delta E} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}}{1{,}1 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 1127\,\text{nm}.$$

---

**46.6. feladat:** Egy lézer $T = 300\,\text{K}$-en működve $7 \cdot 10^{-7}$ m hullámhosszúságú sugárzást bocsát ki. Miért nem működhet optikai rezonátor nélkül?

**Megoldás:** A lézerek működéséhez elengedhetetlen, hogy az indukált emisszió gyakorisága meghaladja a spontán átmenetek gyakoriságát. Ez optikai rezonátor alkalmazása nélkül akkor következik be, ha az úgynevezett p-arány értéke meghaladja at 1-et.

Számítsuk ki tehát a p-arány értékét:

$$p = \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}.$$

Ehhez azonban ismerni kell a $7 \cdot 10^{-7}$ m hullámhosszúságú sugárzás frekvenciáját:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{2{,}998 \cdot 10^{8}}{7 \cdot 10^{-7}} = 4{,}2829 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}.$$

Tehát a p-arány:

$$p = \frac{1}{e^{\frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 4{,}282 \cdot 10^{14}}{1{,}381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} - 1} = 1{,}786 \cdot 10^{-30}.$$

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Az ezüst sűrűsége $10{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$, kristályszerkezete lapcentrált kockarács, relatív atomtömege 108. Mekkora az elemi cellájának az élhossza?
   Az elemi cella élhossza (m): Megold.
2. Határozzuk meg a wolfram sűrűségét, ha tudjuk, hogy tércentrált kockarácsban kristályosodik, rácsállandója $0{,}3165\,\mathrm{nm}$, relatív atomtömege 184.
   A wolfram sűrűsége ($\mathrm{kg/m^3}$): Megold.
3. Határozzuk meg, hogy egy $0\,\mathrm{K}$ hőmérsékletű fémtömbben hány elektron energiája kisebb $1\,\mathrm{eV}$-nál, ha a fémtömb térfogata $5\,\mathrm{cm^3}$ és $E_F = 9\,\mathrm{eV}$!
   Az elektronok száma: Megold.
4. Tiszta Ge-kristályban a tiltott sáv szélessége $0{,}72\,\mathrm{eV}$. Számítsuk ki a párkeltésre alkalmas fény minimális hullámhosszát (nm)!
   A párkeltésre alkalmas fény minimális hullámhossza (nm): Megold.
5. Egy hegesztés íve kb. $1000\,\mathrm{K}$ hőmérsékletű és $5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$ hullámhosszúságú fotonokat is sugároz. Az ilyen hullámhosszúságú fotonok közül hányszor több keletkezik spontán emisszióval, mint indukálttal?
   A spontán és az indukált emisszió aránya: Megold.

# 33. LECKE

## Magfizika

## 47. Magfizika

**47.1. feladat:** Számítsuk ki a ${}^{56}_{26}Fe$ atommag tömegét és a tömeghiány ($\Delta m$) nagyságát, ha $M({}^{56}Fe) = 55{,}93494u$!

**Megoldás:** Mivel az atomi tömegállandó (tömegegység) értéke $u = 1{,}660 \cdot 10^{-27}$ kg, ezért

$$M({}^{56}Fe) = 55{,}93494 \cdot 1{,}660 \cdot 10^{-27} = 9{,}2852 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}.$$

Ahogy azt tanultuk, atommagok tömege mindig kisebb, mint az alkotóelemek tömegeinek összege. Az eltérést tömeghiánynak, vagy tömegdefektusnak nevezték el, ami a következőképpen számolható:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{mag}.$$

A ${}^{56}_{26}Fe$ jelölés alapján könnyen megállapíthatjuk a rendszámot és a tömegszámot: $Z = 26$ és $A = 56$. A fontosabb fizikai állandókat tartalmazó táblázatból kiolvashatjuk a proton és a neutron tömegét.

$$\Delta m = 26 \cdot 1{,}6726 \cdot 10^{-27} + (56 - 26) \cdot 1{,}6749 \cdot 10^{-27} - 9{,}2852 \cdot 10^{-26},$$

$$\Delta m = 8{,}826 \cdot 10^{-28}\,\text{kg}.$$

**47.2. feladat:** Hány MeV a $^{56}Fe$ atommag teljes kötési energiája ($\Delta W$), és az egy nukleonra jutó átlagos kötési energiája ($\varepsilon$)?

**Megoldás:** A tömeghiánnyal einsteini értelemben ekvivalens energiát nevezzük az atommag kötési energiájának. Ezt az energiát kell az atommaggal közölni ahhoz, hogy azt alkotóelemeire bonthassuk.

$$\Delta W = \Delta m c^2.$$

A számolást könnyen elvégezhetjük:

$$\Delta W = 8{,}826 \cdot 10^{-28} \cdot (2{,}997925 \cdot 10^{8})^2,$$

$$\Delta W = 7{,}9324 \cdot 10^{-11}\,\text{J}.$$

A szakirodalomban még napjainkban is gyakran adják meg a kötési energiát *elektronvolt*-ban. Számítsuk ki mi is a $^{56}_{26}Fe$ kötési energiáját elektronvoltban.

$$\Delta W = \frac{7{,}9324 \cdot 10^{-11}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 4{,}9516 \cdot 10^{8}\,\text{eV},$$

$$\Delta W = 495\,\text{MeV}.$$

Végül az egy nukleonra jutó átlagos kötési energia:

$$\epsilon = \frac{\Delta W}{A} = \frac{495}{56} = 8{,}84\,\text{MeV}.$$

**47.3. feladat:** Számítsuk ki a $^{56}Fe$ atommag sugarát, térfogatát és sűrűségét!

**Megoldás:** Az atommagok sugarát a következő összefüggés segítségével határozhatjuk meg:

$$R_{mag} = r_0 A^{1/3}.$$

ahol $r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-15}\ m$, $A$ pedig az adott nuklid tömegszáma, azaz az atommagban található protonok és neutronok együttes száma.

$^{56}Fe$ esetében $A = 56$, így

$$R(^{56}Fe) = 1{,}2 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt[3]{56} = 4{,}59 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}.$$

Ideális, gömb alakú atommagot feltételezve az atommag térfogata a következőképpen számolható:

$$V_{mag} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Behelyettesítve a $^{56}Fe$ atommag sugarára kapott értéket:

$$V(^{56}Fe) = \frac{4}{3}\pi(4{,}59 \cdot 10^{-15})^3,$$

$$V(^{56}Fe) = 4{,}053 \cdot 10^{-43}\,\mathrm{m}^3.$$

Végül a $^{56}Fe$ atommag tömegét elosztva a térfogatával megkapjuk a sűrűségét:

$$\rho = \frac{M(^{56}Fe)}{V(^{56}Fe)} = \frac{9{,}2852 \cdot 10^{-26}}{4{,}053 \cdot 10^{-43}},$$

$$\rho = 2{,}29 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}.$$

Megjegyzés: Talán jobban érzékelhető, hogy milyen óriási sűrűségről van szó, ha kiszámoljuk, hogy mekkora a tömege $1\,\mathrm{mm^3}$ maganyagnak. A számolás különösebb nehézség nélkül elvégezhető:

$$\rho = 2{,}29 \cdot 10^{8}\,\mathrm{kg/mm^3} = 2{,}29 \cdot 10^{5}\,\mathrm{tonna/mm^3}.$$

**47.4. feladat:** A $^{226}Ra$ atommag $\alpha$-bomlásakor $\Delta E = 4{,}88\,\mathrm{MeV}$ energia szabadul fel. Számítsuk ki a keletkező $\alpha$-részecske energiáját és sebességét!

**Megoldás:** A $^{226}Ra$ atommag $\alpha$-bomlásakor az alábbi magreakció játszódik le:

$$^{226}_{88}Ra \longrightarrow ^{222}_{86}Ra + \alpha.$$

A bomlás során felszabaduló $\Delta E$ energia a bomlástermékek mozgási energiájává alakul, ezért felírható az alábbi összefüggés:

$$\frac{1}{2} M_{Rn} v_{Rn}^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \Delta E.$$

A bomlási folyamatra felírható a lendületmegmaradás törvénye is. Ha feltételezzük, hogy egy nyugvó $^{226}Ra$ atommag bomlott, akkor

$$M_{Rn} v_{Rn} = m_\alpha v_\alpha.$$

Ez utóbbi összefüggés alapján:

$$v_{Rn} = \frac{m_\alpha}{M_{Rn}} \cdot v_\alpha.$$

Helyettesítsük be $v_{Rn}$-t az első összefüggésbe:

$$\frac{1}{2} M_{Rn} \cdot \left( \frac{m_\alpha}{M_{Rn}} \cdot v_\alpha \right)^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \Delta E.$$

A zárójel felbontása után az összefüggés a következő alakra hozható:

$$\frac{m_\alpha}{M_{Rn}} \cdot \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \Delta E,$$

$$\left( \frac{m_\alpha}{M_{Rn}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \Delta E.$$

Mivel az $\alpha$-részecske mozgási energiája

$$E_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2, \qquad \text{ezért}$$

$$\left( \frac{m_\alpha}{M_{Rn}} + 1 \right) \cdot E_\alpha = \Delta E.$$

Az $\alpha$-részecske mozgási energiáját kifejezve:

$$E_\alpha = \Delta E \cdot \frac{M_{Rn}}{m_\alpha + M_{Rn}},$$

$$E_\alpha = 4{,}88 \cdot \frac{222u}{4u + 222u} = 4{,}88 \cdot \frac{222}{226} = 4{,}7936\,\text{MeV}.$$

A $^{226}Ra$ atommag $\alpha$-bomlásakor a bomlási energia több, mint $98\%$-át az $\alpha$-részecske viszi el.

Számítsuk ki az $\alpha$-részecske sebességét.

$$E_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2, \qquad \text{ezért}$$

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{m_\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}7936 \cdot 10^6 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}{3{,}3436 \cdot 10^{-27}}},$$

$$v_\alpha = 2{,}143 \cdot 10^7\,\text{m/s}.$$

Megjegyzés: Ez a sebesség a hétköznapi sebességekhez mérten óriási, azonban nem tekintjük relativisztikus sebességnek, hiszen a vákuumbeli fénysebességnek kisebb, mint 10%-a. Ezért nem okoz nagy hibát, hogy nem a relativisztikus formulákkal számoltunk.

**47.5. feladat:** Mennyi 1 gramm $^{226}Ra$ aktivitása? ($T_{1/2} = 1600$ év)

**Megoldás:** Egy sugárforrás aktivitása arányos a a sugárforrásban lévő bomlásra képes atommagok számával:

$$A = \lambda \cdot N.$$

A $\lambda$ arányossági tényezőt nevezzük bomlási állandónak. Belátható, hogy a bomlási állandó az alábbi kapcsolatban van a felezési idővel:

$$\lambda = \frac{ln2}{T_{1/2}}.$$

Ezek alapján a $^{226}Ra$ bomlási állandója:

$$\lambda = \frac{ln2}{1600 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 1{,}3728 \cdot 10^{-11}\ 1/\text{s}.$$

Megjegyzés: A felezési időt SI-ben, másodpercben kell megadni.

Most határozzuk meg a bomlásra képes atommagok számát. A tömegspektrometriás mérések alapján a nuklidok tömegszáma $1\%$ pontosságon belül megegyezik a relatív atomtömegükkel. A $^{226}Ra$ relatív atomtömege tehát $1\%$ pontosságon belül egyenlő 226-tal. Bármely nuklidból annyi grammot veszünk, amennyi a relatív atomtömege, abban mindig ugyanannyi, $6{,}022 \cdot 10^{23}$ darab atommag található. Ebből következik, hogy 226 g $^{226}Ra$-ban $6{,}022 \cdot 10^{23}$ darab bomlásra képes atommag található. Akkor az 1 gramm sugárforrásban lévő atommagok száma:

$$N = \frac{1}{226} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 2{,}665 \cdot 10^{21}.$$

Tehát 1 gramm $^{226}Ra$ aktivitása:

$$A = 1{,}3728 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}665 \cdot 10^{21} = 3{,}66 \cdot 10^{10}\,\text{Bq}.$$

---

**47.6. feladat:** Egy izotóplaboratóriumban egy kísérlethez $^{131}I$ radioaktív izotópot használtak. A kísérlet végén $53{,}1\,\text{MBq}$ aktivitású radioaktív hulladék keletkezett. A hatósági előírások szerint addig kell egy $^{131}I$-gyel szennyezett radioaktív hulladékot biztonságosan tárolni, amig az aktivitása $1\,\text{MBq}$ alá nem csökken. Számítsuk ki a várható tárolási időt! ($T_{1/2} = 8{,}0207\,\text{nap}$)

**Megoldás:** Tudjuk, hogy a radioaktív izotópok aktivitása időben exponenciálisan csökken:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

Adott kezdeti és pillanatnyi aktivitás esetén az eltelt időt a fenti összefüggésből fejezhetjük ki:

$$t = -\frac{1}{\lambda} \cdot ln\frac{A}{A_0}.$$

Határozzuk meg a $^{131}I$ bomlási állandóját:

$$\lambda = \frac{ln2}{8{,}0207 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 1{,}0002 \cdot 10^{-6}\,1/\text{s}.$$

A várható tárolási idő tehát

$$t = -\frac{1}{1{,}0002 \cdot 10^{-6}} \cdot ln\frac{1 \cdot 10^6}{53{,}1 \cdot 10^6} = 3{,}9713 \cdot 10^6\,\text{s} = 45{,}96\,\text{nap}.$$

**47.7. feladat:** A $^{238}U$ és $^{235}U$ radioaktív izotópok felezési ideje $4{,}468 \cdot 10^9$ év, illetve $7{,}038 \cdot 10^8$ év. Napjainkban az urán izotópok előfordulási aránya $99{,}275\%$ $^{238}U$ és $0{,}720\%$ $^{235}U$. Tételezzük fel, hogy a Föld keletkezésekor mindkét izotópból azonos mennyiségű volt. Becsüljük meg a Föld korát.

**Megoldás:** Mivel napjainkban az urán izotópok előfordulási aránya $99{,}275\%$ $^{238}U$ és $0{,}720\%$ $^{235}U$, ezért

$$\frac{N_{238}}{N_{238}+N_{235}} = 0{,}99275, \qquad \frac{N_{235}}{N_{238}+N_{235}} = 0{,}00720.$$

Osszuk el az első egyenlőség bal oldalát a második egyenlőség bal oldalával, jobb oldalát a jobb oldalával:

$$\frac{N_{238}}{N_{235}} = \frac{0{,}99275}{0{,}00720}.$$

Jelöljük $N_0$-val a $^{238}U$ és $^{235}U$ radioaktív izotópok kezdeti mennyiségét. Ha $t_F$-fel jelöljük a Föld korát, akkor a jelenlegi mennyiségeket az exponenciális bomlástörvényt alkalmazva számolhatjuk ki:

$$N_{238} = N_0 \cdot e^{-\lambda_{238} t_F}, \qquad N_{235} = N_0 \cdot e^{-\lambda_{235} t_F}.$$

Behelyettesítés után:

$$\frac{N_0 \cdot e^{-\lambda_{238} t_F}}{N_0 \cdot e^{-\lambda_{235} t_F}} = \frac{0{,}99275}{0{,}00720} = 137{,}88.$$

$N_0$-val egyszerűsíthetünk és az exponenciális függvényekre vonatkozó azonosságot felhasználva:

$$e^{-(\lambda_{238}-\lambda_{235})t_F} = 137{,}88.$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát:

$$-(\lambda_{238} - \lambda_{235})t_F = \ln 137{,}88 = 4{,}926.$$

Már csak $\lambda_{238}$ és $\lambda_{235}$ értékét kell kiszámolnunk:

$$\lambda_{238} = \frac{ln2}{4{,}468 \cdot 10^9 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 4{,}916 \cdot 10^{-18}\ 1/\mathrm{s},$$

$$\lambda_{235} = \frac{ln2}{7{,}038 \cdot 10^8 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 31{,}208 \cdot 10^{-18}\ 1/\mathrm{s}.$$

Most már kiszámolhatjuk a Föld életkorát:

$$t_F = \frac{4{,}926}{\lambda_{235} - \lambda_{238}} = \frac{4{,}926}{26{,}31 \cdot 10^{-18}} = 1{,}8737 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s},$$

$$t_F = 5{,}937 \cdot 10^9\ \text{év}.$$

**47.8. feladat:** Mesterséges holdak energiaellátásának biztosítására gyakran alkalmaznak $^{210}Po$ izotópot tartalmazó zárt sugárforrást. Mekkora aktivitású legyen a sugárforrás a műhold fellövésekor, ha azt szeretnénk, hogy még egy év múlva is $100\,\mathrm{W}$ teljesítményt szolgáltasson? Hány gramm $^{210}Po$-re van szükség? (A $^{210}Po$ izotóp $\alpha$-bomással bomlik, felezési ideje $T_{1/2} = 138$ nap és bomlásonként hozzávetőlegesen $5{,}305\,\mathrm{MeV}$ energia szabadul fel.)

**Megoldás:** $^{210}Po$ izotóp esetében bomlásonként hozzávetőlegesen $5{,}305\,\mathrm{MeV}$ energia szabadul fel.

$$\epsilon = 5{,}305 \cdot 10^6 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 8{,}4986 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J/bomlás}.$$

Könnyen kiszámíthatjuk, hogy másodpercenként hány bomlásnak kell bekövetkezni ahhoz, hogy a sugárforrás $100\ W$ teljesítményt szolgáltasson:

$$n = \frac{100\ J/s}{8{,}4986 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J/bomlás}} = 1{,}1767 \cdot 10^{14}\ \mathrm{bomlás/s}.$$

Mivel a másodpercenkénti bomlások száma definíció szerint a sugárforrás aktivitása, azt a következtetést vonhatjuk le, hogy egy $A = 1{,}1767 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Bq}$ aktivitású $^{210}Po$ sugárforrásnak $100\,\mathrm{W}$ a teljesítménye.

A feladat második részében azt kell kiszámolnunk, hogy mekkora aktivitású legyen a sugárforrás a műhold fellövésekor. Tudjuk, hogy a radioaktív izotópok aktivitása időben exponenciálisan csökken:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

A fenti összefüggésben $A_0$ értékét kell meghatároznunk:

$$A_0 = \frac{A}{e^{-\lambda t}}.$$

Ehhez azonban szükségünk van $\lambda$ értékére:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{138 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 5{,}813 \cdot 10^{-8}.$$

$\lambda$ értékét felhasználva:

$$A_0 = \frac{A}{e^{-\lambda t}} = \frac{1{,}1767 \cdot 10^{14}}{e^{-5{,}8134 \cdot 10^{-8} \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}} = 7{,}369 \cdot 10^{14}\,\text{Bq}.$$

Tehát a műhold fellövésekor a sugárforrás aktivitása $7{,}369 \cdot 10^{14}$ Bq kell hogy legyen.

Vajon hány gramm $^{210}Po$-re van szükség? Erre is könnyen válaszolhatunk. A sugárforrások aktivitása mindig arányos a sugárforrásban található bomlásra képes atommagok számával:

$$A = \lambda \cdot N.$$

Ebből meghatározhatjuk, hogy hány atommagot tartalmaz a $^{210}Po$ sugárforrás a fellövéskor:

$$N = \frac{A}{\lambda} = \frac{7{,}369 \cdot 10^{14}}{5{,}8134 \cdot 10^{-8}} = 1{,}2676 \cdot 10^{22}.$$

Egyik korábbi feladatban is alkalmaztuk már azt a tapasztalatot, hogy ha bármely nuklidból annyi grammot veszünk, amennyi a relatív atomtömege, abban mindig ugyanannyi, $6{,}022 \cdot 10^{23}$ darab atommag található. Ebből következik, hogy 210 g $^{210}Po$-ben $6{,}022 \cdot 10^{23}$ darab bomlásra képes $^{210}Po$ atommag található.

Mivel bármilyen anyagminta tömege arányos a benne található atomok (atommagok) számával:

$$\frac{m}{1{,}2676 \cdot 10^{22}} = \frac{210}{6{,}022 \cdot 10^{23}}.$$

Innen meghatározhatjuk a $^{210}Po$ sugárforrás tömegét: $m = 4{,}42$ g.

# Önellenőrzés

Gyakorló feladatok

1. Az $^{235}U$ atommag relatív tömege $235{,}044$. Számítsuk ki az $^{235}U$ atommag esetén a tömeghiány ($\Delta m$) nagyságát! (Az eredményt normál alakban adja meg! pl.: $6{,}0225E-23$)
   A tömeghiány nagysága (kg): Megold.
2. Hány MeV az $^{235}U$ atommag egy nukleonra jutó átlagos kötési energiája ($\varepsilon$)?
   Az egy nukleonra jutó átlagos kötési energia (MeV): Megold.
3. Számítsuk ki az $^{235}U$ atommag sűrűségét! (Az eredményt normál alakban adja meg! pl.: $6{,}0225E-23$)
   Az $^{235}U$ atommag sűrűsége (kg/m$^3$): Megold.
4. A $^{210}Po$ izotóp $\alpha$-bomással bomlik, és bomlásonként hozzávetőlegesen $5{,}305$ MeV energia szabadul fel. Számítsuk ki a keletkező $\alpha$-részecske sebességét! (Az eredményt normál alakban adja meg! pl.: $6{,}0225E-23$)
   Az $\alpha$-részecske sebessége (m/s): Megold.
5. Mennyi 1 gramm $^{131}I$ aktivitása? ($T_{1/2}=8{,}0207$ nap)
   1 gramm $^{131}I$ aktivitása (Bq): Megold.
6. Egy radioaktív sugárforrás aktivitása egy hét alatt $27$ %-kal csökkent. Hány nap a sugárforrás felezési ideje?
   Felezési idő (nap): Megold.
7. A $^{14}C$ radioaktív izotóp a táplálékkal bekerül a szervezetünkbe. A csontrendszerünkben található $^{14}C$ fajlagos aktivitása $255$ Bq/kg. Egy régészeti feltárás során előkerült emberi csontoknak megmérték a $^{14}C$ fajlagos aktivitását, és azt $33$ Bq/kg-nak találták. Hány éves a régészeti lelet? A $^{14}C$ felezési ideje 5568 év.
   A régészeti lelet kora (év): Megold.

**8.** A csernobili atomerőmű felrobbant blokkjának $3{,}2\ GW$ volt a hő-teljesítménye. Tudjuk, hogy az $^{235}U$ atommag hasadásakor $200\ MeV$ energia szabadul fel. Hány kilogramm $^{235}U$ atommag hasadt el naponta?
A naponta elhasadt hasadóanyag tömege (kg): Megold.