



Fülep Dávid – Harmati István – Horváth András
Kóbor János – Kovács Gáborné – Kovács Miklós
SZE-MTK

Hallgatói projektmunka feladatok

2013

Műszaki és természettudományos alapismeretek
tananyagainak fejlesztése a mérnökképzésben
Pályázati azonosító: TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0054



IMPRESSZUM

©COPYRIGHT: Fülep Dávid, Harmati István, Horváth András, Kóbor János, Kovács Gáborné, Kovács Miklós Széchenyi István Egyetem, Műszaki Tudományi Kar

Lektor: Dr. Pacher Pál, egyetemi docens, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Természettudományi Kar

©Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)

A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

ISBN 978-615-5391-03-3

Kiadó: Széchenyi István Egyetem, Műszaki Tudományi Kar

Támogatás:

Készült a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0054 számú, "Műszaki és természettudományos alapismeretek tananyagainak fejlesztése a mérnökképzésben" című projekt keretében.

Kulcsszavak: *projektmunka, koordináta-geometria, optika, elemi mechanika, színtan, matematikai statisztika, gépészeti méretezés, Excel, MATLAB*

Tartalmi összefoglaló: Ez a tananyag olyan problémák gyűjteménye, melyet BSc-hallgatók több alapozó tárgy ismeretének együttes alkalmazásával képesek megoldani. A matematika, fizika, közlekedéstudományok és a gépészet témájából több probléma kerül kidolgozásra, melyben az elméleti alapok és a használható módszerek rövid összefoglalása után végeredményként egy olyan program vagy Excel tábla kerül kidolgozásra, ami hasznos segédeszköz lehet a hasonló problémák megoldásában.

Tartalom

1. Tantermi vetítővászonon megjelenő képek olvashatósága

- 1.1. A feladat kitűzése
- 1.2. Elméleti alapok
- 1.3. Matematikai leírás
 - 1.3.1. A geometriai torzulások leírása
 - 1.3.2. A pixelek láthatóságának leírása
- 1.4. Informatikai megoldás
- 1.5. Esettanulmány
- 1.6. Önálló feladatok

2. Szelepemelés-függvény vizsgálata

- 2.1. A feladat kitűzése
- 2.2. Fizikai leírás
- 2.3. Matematikai módszerek
 - 2.3.1. A numerikus deriválás
 - 2.3.2. A matematikai módszer
- 2.4. Az informatikai alkalmazás kidolgozása
- 2.5. Bemutatás mintafeladaton
- 2.6. Önálló feladatok

3. Adott színképnek megfelelő szín generálása monitoron

- 3.1. A feladat kitűzése
- 3.2. Elméleti alapok
- 3.3. Matematikai leírás
- 3.4. Az informatikai megvalósítás
- 3.5. Önálló feladatok

4. Közlekedési adatok elemzése egyszerűbb matematikai statisztikai eszközökkel

- 4.1. A mérési adatok
- 4.2. A feladat kitűzése
- 4.3. Az adatok beolvasása
- 4.4. Ábrázolás
- 4.5. A követési idő várható értékére vonatkozó vizsgálatok
 - 4.5.1. A követési idő összehasonlítása két hasonló napon
 - 4.5.2. A követési idő összehasonlítása hétköznap és vasárnap
 - 4.5.3. A követési idő összehasonlítása délelőtt és délután
 - 4.5.4. A délutáni követési idő összehasonlítása kedden és pénteken
- 4.6. A sebesség várható értékére vonatkozó vizsgálatok
 - 4.6.1. A sebesség összehasonlítása a két haladási irányban
 - 4.6.2. Egy hétköznap és egy vasárnap adatainak összehasonlítása
- 4.7. Eloszlások vizsgálata Kolmogorov–Szmirnov-próbával
 - 4.7.1. A Kolmogorov–Szmirnov-próba

4.7.2. A sebesség eloszlásának vizsgálata

4.7.3. Követési idők eloszlásának összehasonlítása

4.8. Önálló feladatok

5. Ékszíjhajtás tervezése

5.1. Feladat

5.2. Megoldás

5.3. Felhasznált irodalom

5.4. Mellékletek

6. Szilárd illesztésű kötés méretezése

6.1. Feladat

6.2. Megoldás

6.3. Mellékletek

7. Hajtóműrészlet méretezése

7.1. Feladat

7.2. Megoldás

8. Parallelogramma emelő méretezése

8.1. Feladat

8.2. Megoldás

8.3. Felhasznált irodalom

8.4. Melléklet

9. Alakzáró tárcsás tengelykapcsoló

9.1. Feladat

9.2. Segédlet a „Tárcsás tengelykapcsoló 1” feladathoz

9.3. Felépítés

9.4. Kialakítás

9.5. Számítás

10. Erőzáró tárcsás tengelykapcsoló

10.1. Felépítés

10.2. Kialakítás

10.3. Számítás

11. Tokos tengelykapcsoló

11.1. Feladat

11.2. A tengelykapcsoló terhelhetősége

11.3. Számítás



Előszó

Kedves Olvasó!

Ez az oktatási segédanyag egy kísérlet arra, hogy megmutassuk: több tantárgy ismereteinek ötvözésével olyan problémák is tárgyalhatók, melyek érdekesek a gyakorlat számára és a több terület ismereteinek ötvözése magasabb szintre emeli a hallgató tudását. A tárgyalt problémák megoldásához több területben való jártasság is szükséges, ezért célszerű lehet csoportmunkában megoldani őket, így az egyes területekhez jobban értők a saját témájukban tevékenykedhetnek és az együttműködést is gyakorolhatják. Kellő tudással és időráfordítással azonban egyénileg is megoldhatók a feladatok.

Mindegyik fejezetben először egy-egy összetett problémát oldunk meg, részletesen leírva az elméleti alapokat, a számítási módszereket és a megoldásra használható informatikai eszköz működését is. Ezután hasonló témában önálló továbbgondolásra és kidolgozásra további problémákat is adunk.

A kitűzött célokból következően ez a tananyag inhomogén, nem elejétől végig történő végigolvasásra van száncva. Arra biztatjuk a kedves Olvasót, hogy a tartalomjegyzék alapján válassza ki a neki érdekesnek tűnő témákat és azokat olvassa el, értse meg, majd próbáljon az önálló feladatokra választ keresni.

Reméljük, hogy ez a példatár előmozdítja a több témában való ismeretek egyszerre történő felhasználását mind a hallgatók, mind az oktatók körében. Visszajelzéseket szívesen fogadunk.

Győr, 2013. június 5.

Dr. Horváth András
Széchenyi István Egyetem
horvatha@sze.hu

1. Tantermi vetítővászon megjelenő képek olvashatósága

1.1. A feladat kitűzése

Motiváció: Ma szinte minden előadóteremben van vetítővászon felszerelve, melyre digitális projektor vetít képet. A terem és a vászon geometriája azonban néha nem szerencsés eredményre vezet: előfordul, hogy a terem végéből nem láthatóak a finom részletek, vagy egy oldalt ülő hallgató igen torznak látja a képet. A feladat olyan számítási eljárást fejleszteni, mely segít felmérni, milyen problémák fordulhatnak elő egy adott előadóteremben.

Feladat: Dolgozzon ki számítási módszert és ennek egy informatikai megvalósítását, mely segítségével egy előadóteremben kiszámítható, hogy a terem egyes pontjaiból nézve:

- Mennyire torzul el a kép a ferde látószög miatt? (Többféle torzulást is figyelembe véve.)
- Mennyire láthatóak a kivetített legkisebb részletek? (Pixelek.)

A kapott módszer használatával mérje fel az egyetem egyik előadótermének azokat a helyeit, ahonnan nézve a kép nem jól látható, mert vagy a kis részletek a szem felbontóképessége alatt vannak, vagy zavaró mértékű a képarányok torzulása.

Az, hogy mi a „zavaró mértékű” kissé szubjektív, de a munka része erre mérőszámot bevezetni és megbecsülni, milyen értékek jelentenek zavaró torzulást.

1.2. Elméleti alapok

A látás optikájával kapcsolatban azt kell tudni, hogy az emberi szem felbontóképessége kb. 1 ívperc, azaz $1/60$ fok. Ha a vetítővászon két pontja ennél kisebb szög alatt látszik valahonnét, azok a megfigyelő szemében összefolynak, ami egy tantermi előadás esetén általában a képek feldolgozhatóságát lehetetlenné teszi. Az 1'-es elvi határ esetén is néha erőltetni kell a szemünket a kis részletek érzékelésére, ezért ilyenkor inkább 1,5'–2'-es látószög a kényelmes.

Nem ennyire kritikus a felbontóképesség kérdése, ha pl. tájképeket vetítenek, mert ott az összes részlet nélkül is valamennyire élvezhető marad a kép. Egy tanteremben viszont a vékony vonalak pontos észlelhetősége a megértést befolyásolja, hisz egy grafikonon vagy egy képletben egy vékony vonal észlelése is kulcsfontosságú lehet.

A megoldás egyik kulcseleme, hogy meg tudjuk határozni, hogy egy térbeli pontból nézve két másik pont milyen szög alatt látszik. Ez elemi koordináta-geometriával megadható, hisz ha az első pontból a másik kettőig húzott vektorok v_1 illetve v_2 , akkor az ezek által bezárt szög:

$$\alpha(v_1, v_2) = \cos^{-1} \left(\frac{v_1 v_2}{|v_1| |v_2|} \right), \quad (1.1)$$

ahol $v_i = |v_i|$.

Ezzel a formulával bármilyen két pont látószögét ki lehet számolni, de vigyázni kell a kerekítésekre, ha pl. a terem végéből a vászon két közeli pontjára alkalmazzuk, mert ekkor $v_1 \approx v_2$, így $v_1 v_2 / (|v_1| |v_2|) \approx 1$, az 1 környékén viszont a \cos^{-1} függvény meredeksége a végtelenbe tart, így argumentumában elkövetett kis kerekítési hiba a végeredményt nagyon meg tudja hamisítani. Nem szabad ezeket a képleteket egyszeres számábrázolási pontossággal kiértékelni ilyenkor.

Az (1.1) egyenletet a vásznon megjelenő pixeles kép szomszédos soraiban és oszlopaiban elhelyezkedő képpontjaira kell alkalmazni, hogy megtudjuk, látószögük eléri-e az emberi szem felbontóképességét.

A kivetített kép láthatóságával kapcsolatban nemcsak az lehet probléma, ha a közeli pontok összemosódnak, hanem az is, ha a kép a ferde ránézés miatt jelentősen torzul.

Ezt a torzulást jellemezhetjük pl. a következőkkel:

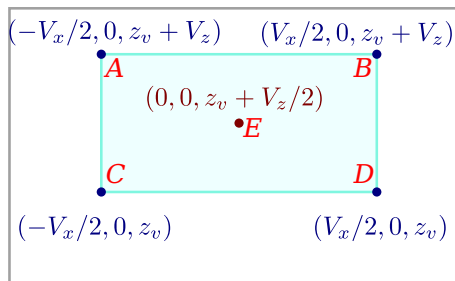
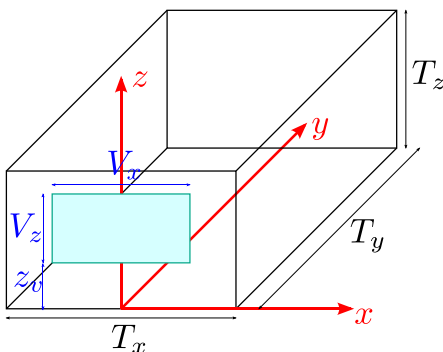
1. Összenyomódás: a látott vízszintes/függőleges képarány mennyire tér el az eredetitől (ami általában 4/3 vagy 16/9).
2. Nyíródás: mennyire térnek el ez az átlók látószögei egymástól (ideális esetben ezek egyformák).

Az „összenyomódás” minden teremben fellép, ha nagyon oldalról nézünk a vászonra, a „nyíródás” csak akkor, ha szemünk jelentősen más magasságban van, mint a vászon közepe és még oldalról is nézünk a vászonra.

1.3. Matematikai leírás

1.3.1. A geometriai torzulások leírása

Alkalmazzuk a probléma leírásához az 1.1. ábrán látható koordináta-rendszert és a feltüntetett méreteket!



1.1. ábra. A tanterem leírására használt koordináta-rendszer (balra) és a vetítővászon fontos pontjainak koordinátái.

Feltételeztük, hogy a vetítővászon szimmetrikusan van elhelyezve.

Ezekkel a jelölésekkel a vászon négy sarkának helyvektorai:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= (-V_x/2, 0, z_v + V_z) & \underline{B} &= (V_x/2, 0, z_v + V_z) \\ \underline{C} &= (-V_x/2, 0, z_v) & \underline{D} &= (V_x/2, 0, z_v)\end{aligned}\tag{1.2}$$

(1.3)

(V_x a vászon szélessége, V_z a magassága, z_v pedig a vászon aljának talajszint feletti magassága.)

A közepe pedig:

$$\underline{E} = (0, 0, z_v + V_z/2)\tag{1.4}$$

Ha mi az $\underline{r} = (x, y, z)$ pontban vagyunk, akkor tőlünk ezekbe a pontokba az

$\underline{u}_A = \underline{A} - \underline{r} = (-V_x/2 - x, -y, z_v + V_z - z)$, $\underline{u}_B = \underline{B} - \underline{r} = (+V_x/2 - x, -y, z_v + V_z - z)$, ... vektorok mutatnak.

Az ezek közti szögeket (1.1) alapján tudjuk meghatározni, így pl. a vászon felső oldalának látószöge

$\alpha_{A,B} = \alpha(\underline{u}_A, \underline{u}_B) = \cos^{-1}(\underline{u}_A \underline{u}_B / (u_A u_B))$ lesz. Hasonlóan fejezhető ki a többi szög is.

Teljesen általános esetben ezeket a látószögeket megadó formulákat nem lehet egyszerűsíteni, így nem lehet egyszerű formulával megadni pl. a vízszintes és függőleges képméreték arányát. Ezért ezeket adott esetekben numerikusan fogjuk kiértékelni.

A vászon oldalainak és átlóinak látószögei:

- Felső oldal: $\alpha_{A,B}$
- Alsó oldal: $\alpha_{C,D}$
- Bal oldal: $\alpha_{B,D}$
- Jobb oldal: $\alpha_{A,C}$
- Átlók: $\alpha_{A,D}$ és $\alpha_{B,C}$

Ha nem vagyunk igen közel a vászonhoz, akkor az oldalhosszak páronként kb. megegyeznek, azaz pl. $\alpha_{A,B} \approx \alpha_{C,D}$. A képarány-torzításhoz érdemes ezek átlagával számolni.

Így a megfigyelt oldalarány:

$$R_m = \frac{(\alpha_{A,B} + \alpha_{C,D})/2}{(\alpha_{B,D} + \alpha_{A,C})/2} = \frac{\alpha_{A,B} + \alpha_{C,D}}{\alpha_{B,D} + \alpha_{A,C}}. \quad (1.5)$$

Azt a vászon adataiból lehet tudni, ideális esetben mennyi ez az R_0 képarány. Ha a vászon jól van méretezve, akkor ennek értéke a képszabványoknak megfelelően 4:3, de a fenti paraméterekből is kifejezhető:

$$R_0 = \frac{V_x}{V_z}. \quad (1.6)$$

A kép „összenyomódását” értelemszerűen az R_m/R_0 arány fejezi ki, ami ideális esetben 1 lenne. Az első, a kép torzulását jellemző paraméter tehát:

$$P_1 = \frac{R_m}{R_0} = \frac{\alpha_{A,B} + \alpha_{C,D}}{\alpha_{B,D} + \alpha_{A,C}} \frac{V_z}{V_x}. \quad (1.7)$$

Az átlók látószögének aránya a második minőségi paraméterünk, mely optimális esetben szintén 1:

$$P_2 = \frac{\alpha_{A,D}}{\alpha_{B,C}}. \quad (1.8)$$

1.3.2. A pixelek láthatóságának leírása

A kép kis részleteinek láthatóságát azzal jellemezhetjük, milyen szög alatt látszik két szomszédos pixelsor illetve pixeloszlop a hallgatóság irányából. Ha a vetített kép kitölti a vásznat és felbontása $F_x \times F_z$, akkor a pixel-oszlopok távolsága V_x/F_x , a soroké pedig V_z/F_z .

Tipikus felbontás érték pl. a 800×600 , 1024×768 vagy újabban az 1280×800 .

Általános esetben két szomszédos pixel látószöge attól is függ, hogy a kép mely részén vannak. Ha pl. a megfigyelő igen közel van a vászon bal alsó sarkához, akkor természetesen az itteni pixeleket nagyobb látószög alatt látja, mint a jobb felső sarok környékieket. Az előadótermekben azonban ritkán fordul elő, hogy a hallgatóság olyan közel helyezkedik el a vászonhoz, hogy ez jelentős különbséget okozzon, ezért megengedhető az a közelítés, hogy a felbontást csak a vászon közepénél, a fent \underline{E} helyvektorral jellemzett pontnál vizsgáljuk.

A vászon közepéből a szomszédos oszlopig húzott vektor nyilván $\Delta \underline{p}_x = (V_x/F_x, 0, 0)$, a szomszédos sorig húzott pedig: $\Delta \underline{p}_z = (0, 0, V_z/F_z)$. Így a szomszédos oszlopok látószöge:

$$\alpha_x = \alpha(\underline{u}_E, \underline{u}_E + \Delta \underline{p}_x), \quad (1.9)$$

a soroké pedig:

$$\alpha_z = \alpha(\underline{u}_E, \underline{u}_E + \Delta \underline{p}_z). \quad (1.10)$$

A láthatóság feltétele, hogy mindkét szög nagyobb legyen az emberi szem $\varphi = 1'$ felbontóképességénél. Így a láthatóságot jellemző paraméterek:

$$P_3 = \frac{\alpha_x}{\varphi}, \quad P_4 = \frac{\alpha_z}{\varphi}. \quad (1.11)$$

P_3 -nak és P_4 -nek nem optimális értéke van, hanem alsó korlátja, mégpedig az 1-es érték. Ha mindegyik 1, akkor épp a láthatóság határán vannak a legfinomabb részletek. Igazán kényelmes akkor nézni a kivetített képet, ha P_3 és P_4 értéke 1,5 és 2 közt van: ekkor erőltetés nélkül láthatók a legvékonyabb vonalak is, de még nem zavaróan pixeles a kép. E paraméterek 3-nál nagyobb értéke viszont már nem kívánatos, mert ekkor túlzottan „darabos” képet láthatunk. (Bár személyfüggő, kit milyen mértékű pixeleség zavar.)

1.4. Informatikai megoldás

Az előző alfejezetben leírt formulák önmagukban nem bonyolultak, de kiértékelésük hosszadalmas számítást igényel. Ezért érdemes egy olyan informatikai segédeszközt tervezni, mely segíti a jóságot jellemző P_1, P_2, P_3



és P_4 paraméterek gyors kiértékelését a terem geometriai paraméterei és a megfigyelő helyvektora függvényében.

A modellt leíró paraméterek:

- A terem méretei: T_x, T_y, T_z .
- A vászon méretei: V_x, V_z .
- A vászon aljának magassága: z_v .
- Az emberi szem felbontóképessége: φ .

Vegyük észre, hogy a terem méretei a számításokban nem is szerepelnek. Azért van rájuk szükség, hogy tudjuk, mi az r helyvektorok megengedett tartománya.

Ezeket a paramétereket egy terem esetén fix értéknek vehetjük. A feladat az, hogy tetszőleges $r = (x, y, z)$ helyvektorra ki tudjuk értékelni a fenti, (1.7), (1.8) és (1.11) egyenletekből a P_1, P_2, P_3 és P_4 paramétereket és figyelmeztetést adjunk, ha az adott helyen valamelyik igen nagy torzulást vagy nem megfelelő látószöget jelez.

Saját becslés alapján a paraméterek elfogadható értéktartományai:

$$\begin{aligned} 0,75 < P_1 < 1,333 \\ 0,75 < P_2 < 1,333 \\ 1 < P_3 < 3 \\ 1 < P_4 < 3. \end{aligned} \tag{1.12}$$

A feladatot a Microsoft Excel 2010 segítségével oldjuk meg. A megoldást [ebben a fájlban](#) találjuk meg.

A feladathoz tartozó alapvető paramétereket az *Alapadatok* munkalapon tároljuk. Ezeket, és a későbbi számítási eredményeket is névvel látjuk el, hogy könnyebben lehessen rájuk hivatkozni.

A *Számolás* munkalapon kiszámítjuk a négy vizsgált paramétert a feladatban leírtaknak megfelelően egy adott nézőpont esetére.

Ez a nézőpont a C2:C4 tartományban található. Ide tetszőleges adatokat beírva a vizsgált P paraméterek kiszámításra kerülnek, és a *Vizualizálás* lapon grafikusán is megjelennek.

A nézőpont 3 koordinátája közül valójában csak az x és y koordinátát változtathatjuk, ez jelenti a néző terembeli elhelyezkedését, a függőleges, z koordináta pedig e két koordinátától függ. A néző terembeli függőleges koordinátáját ugyanis a terem adottságai, illetve az abban elfoglalt helyzetünk határozzák meg (nem számolva azzal a lehetőséggel, hogy a teremben elvileg hasalva, vagy állva is figyelhetjük a kivetítőt):

$$r_z = r_z(r_x, r_y)$$

A vízszintes elrendezésű termeknél r_z konstans értéknek tekinthető, azonban a vizsgált D1 előadóteremben a hátsó sorok felé emelkedik a padok magassága is. A padsorok viszont párhuzamosak a vászonnal, azaz r_y valójában csak r_y -tól függ. *Magasság* munkalapon készítünk egy értéktáblázatot, aminek adatait a mellékelt tervrajzról olvastuk le. Az értéktáblázatot grafikonon ábráztuk, amire harmadfokú polinomiális trendvonalat is illesztettünk, a grafikonra írva annak egyenletét. A későbbiekben ezt használtuk az r_z függvény meghatározására (*Számolás* munkalap, C4 mező).

A vizualizálás munkalapon 40x40-es cellák szimbolizálják a vizsgált terem alaprajzát. A termet így tehát 1600 részre osztottuk, és a *Számolás* munkalap segítségével minden ponthoz rendre meghatározzuk a P1, P2, P3 és P4 paraméterek értékeit. Egy apró Visual Basic program a terem valós méretei alapján meghatározza az adott pont x és y koordinátáját, és beírja a *Számolás* munkalap megfelelő celláiba. Ez alapján az Excel kiszámítja r_z értékét és elvégzi az összes többi szükséges számolást is. A paramétereket a *Vizualizálás* munkalapra írjuk, ahol feltételes formázással színekkel jelöljük azok megfelelőségét. Emellett 3-dimenziós grafikonon is megjelenítjük a paramétereket.

A feladat paramétereit változtatása esetén a számolást mindig újra el kell végezni, e célból az *Alapadatok* munkalapra egy nyomógombot tettünk, ami a Visual Basic eljárást indítja.



Ez természetesen akkor működik, ha az Excelben engedélyeztük a makrók futtatását (Fájl / Beállítások / Adatvédelmi központ / Az adatvédelmi központ beállításai / Makróbeállítások / Az összes makró engedélyezése).

1.5. Esettanulmány

A Széchenyi István Egyetem legnagyobb, D-1-es előadótermének tervrajzát megszereztük az egyetem Műszaki Osztályáról. Ez alapján a terem paraméterei (méterben):

$$T_x = 18,0 \quad T_y = 25,1 \quad T_z = 6,95$$

$$V_x = 5,1 \quad V_z = 3,8 \quad z_v = 3,0$$

(Lásd 1.1. ábra.)

Az egyik keresztmetszeti ábráról a terem széksorainak magassága is leolvasható, ezért a nézőpont z -koordinátáját nem adjuk meg külön, hanem y függvényében határozzuk meg. (Ld. az Excel munkalapot.)

Ezekkel az adatokkal használva a megadott Excel táblát felmérhetjük a láthatósági viszonyokat az előadóteremben. Az 1.2. ábrán az első két munkalap lényeges részét láthatjuk: bal oldalt az *Alapadatok*, középen és jobb oldalt a *Számolás* munkalapokét.

A *Vizualizálás* adatlap képernyőképét az 1.3. ábra mutatja.

Ezekről az ábrákról látszik, hogy a D-1 előadóterem láthatósági viszonyai nem optimálisak: a terem hátsó 1/3 részében ülők nem tudják a kivetített legkisebb részleteket észlelni, ami néha hátrányos lehet (P3 és P4 vizualizálása), valamint az első pár sorban a falakhoz közel ülők igen torznak látják a vásznat (P1 és P2 vizualizálása). A gyakorlati tapasztalat ezzel megegyezik: előadásokon az érdeklődő hallgatók valóban kihagyják a hátsó részeket és az első sorok széleit.



	A	B	C	D	E	F
1	Tantermi vetítővászon megjelenő képek olvashatósága					
2						
3	Terem méretei					
4	Szélesség T_x	18,00				Számolás
5	Hosszúság T_y	25,10				
6	Magasság T_z	6,95				
7						
8	Vászon méretei					
9	Szélesség V_x	5,10				
10	Magasság V_z	3,80				
11	Vászon aljának magassága z_v	3,00				
12						
13	Emberi szem felbontóképessége					
14	1/perc mértékegységben	1,00				
15	radián mértékegységben	0,00029086678				
16						
17	Projektor felbontása					
18	Vízszintes felbontás F_x	1024				
19	Függőleges felbontás F_z	768				
20						
21						

Bemenő paraméterek

	A	B	C	D	E	F	G
1	Tetszőleges r pont a teremben, ahol vagyunk						
2	r_x	9					
3	r_y	20					
4	r_z	3,6433					
5							
6	A vászon sarkainak és középpontjának helyvektorai						
7	Q	A	B	C	D	E	
8	Q_u	-2,55	2,55	-2,55	2,55	0	
9	Q_v	0	0	0	0	0	
10	Q_z	6,8	6,8	3	3	4,9	
11							
12	r pontból egy adott Q pontba mutató vektor						
13	Q	A	B	C	D	E	
14	U_{Qx}	-11,55	-6,45	-11,55	-6,45	-9	
15	U_{Qy}	-20	-20	-20	-20	-20	
16	U_{Qz}	3,1567	3,1567	-0,6433	-0,6433	1,2567	
17	vektorhossz	23,31	21,25	23,10	21,02	21,97	
18							
19	A vászon oldalainak és átlóinak látószögei						
20	Felső oldal $\alpha_{A,B}$	0,2100064					
21	Alsó oldal $\alpha_{C,D}$	0,2116691					
22	Bal oldal $\alpha_{B,D}$	0,1797045					
23	Jobb oldal $\alpha_{A,C}$	0,1636852					
24	Átló1 $\alpha_{A,D}$	0,2689028					
25	Átló2 $\alpha_{B,C}$	0,2754309					
26							
27	Oldalirányok						
28	Megfigyelt oldalirány $R_m = (\alpha_{A,B} + \alpha_{C,D}) / (\alpha_{B,D} + \alpha_{A,C})$	1,227979					
29	Vászon képarány $R_c = V_x / V_z$	11/3					
30							
31	P_1 paraméter: a kép torzulása						

Kiszámolt látószögek

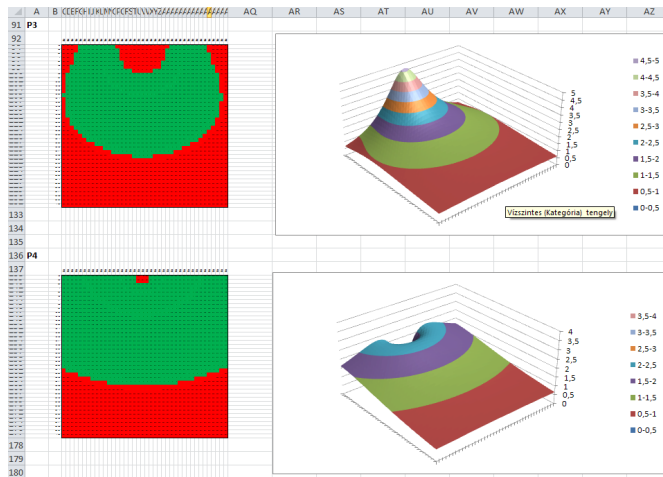
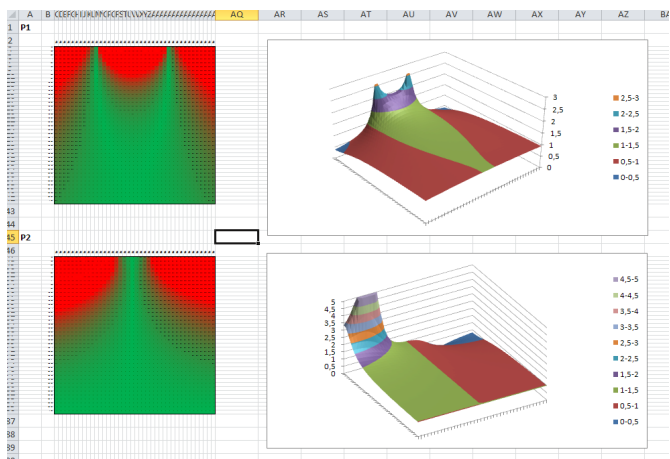
31	P_1 paraméter: a kép torzulása		
32	P_1 paraméter R_m/R_c		0,914965
33			
34	P_2 paraméter: az átlók látószögeinek aránya		
35	P_2 paraméter $\alpha_{A,D} / \alpha_{B,C}$		0,976299
36			
37	A vászon közepétől a szomszédos oszlopig húzott vektor		
38	Δp_x	0,004980469	
39	Δp_y	0	
40	Δp_z	0	
41	vektorhossz Δp_x		
42		0,004980469	
43	A vászon közepétől a szomszédos sorig húzott vektor		
44	Δp_x	0	
45	Δp_y	0	
46	Δp_z	0,004947917	
47	vektorhossz Δp_z		
48		0,004947917	
49	vektorhossz $(U_x + \Delta p_x)$		
50	vektorhossz $(U_y + \Delta p_y)$		
51		21,96565	
52	Szomszédos oszlopok látószöge α_x		
53	Szomszédos sorok látószöge α_z		
54		0,0002025	
55	P_3 és P_4 paraméterek		
56	P_3 paraméter		0,711104
57	P_4 paraméter		0,773084
58			

... folytatás

1.2. ábra. A Széchenyi István Egyetem D-1 előadójának esete. Képernyőképek az Excel fájl használatáról.

1.6. Önálló feladatok

- Dolgozzon ki közelítő, de egyszerűbb számítási módszert a fenti kidolgozott problémára, ha feltételezhetjük, hogy a hallgatók feje a vászon közepével egy magasságban van! (Kis előadóterem esete.)
- Egészítse ki a kidolgozott láthatósági számításokat egy olyan paraméterrel, mely azt méri, mennyire nem látszanak egyformán a vászon függőleges oldalai. Keressen olyan termet a környezetében, ahol ennek hatása jelentős a hallgatóságnak rendelkezésre bocsátott székek egy részéről és végezze el e terem vizsgálatát.
- A fent kidolgozott Excel táblát alkalmazva (esetleg módosítva) tegyen javaslatot, hogyan kellene megoldani a D-1 előadóteremben a vetítést, hogy minden székről jól látható, nem torz képet láthasson a



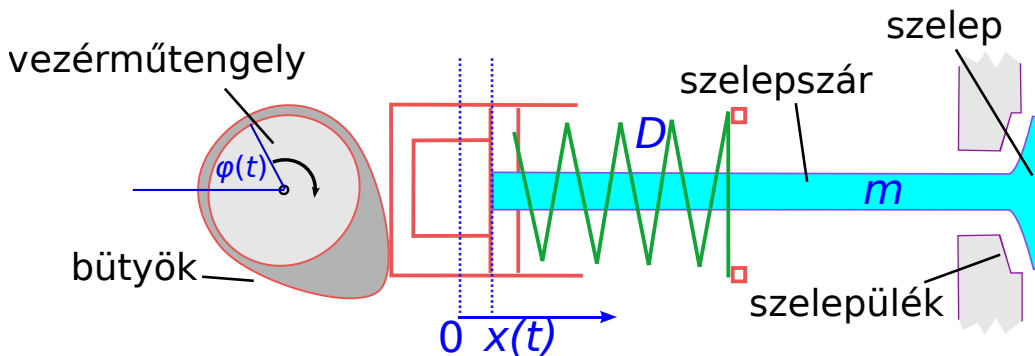
1.3. ábra. A Széchenyi István Egyetem D-1 előadójának esete. A láthatósági viszonyok vizualizálása.

hallgató. Megoldható ez egyetlen vászonnal?

2. Szelepelemelés-függvény vizsgálata

2.1. A feladat kitűzése

Motiváció: Belső égésű motorok kulcsfontosságú alkatrészei a motor szelepei. A szelepeket alaphelyzetben egy rugó zárva tartja, és a vezérműtengely aszimmetrikus „bütyke” nyitja a motor fázisának megfelelően. (Lásd 2.1. ábra.) A bütyök alakjának megválasztásával elvileg akármilyen függvény szerint befolyásolhatjuk a szelep helyzetét, de ennek korlátai vannak.



2.1. ábra. Egy belső égésű motor szelepeinek főbb tartozékai.

Alacsony fordulatszám mellett a rugó mindig rá tudja szorítani a szelepszár végét a bütyökre, a bütyöknek meg van ideje kinyitni a szelepet nem túlzottan nagy erő vagy az erő nem túl gyors változása mellett. Nagyobb fordulatszámnál azonban több probléma is előjön, mely közül kettőt kell itt megvizsgálni:

1. A rugó nem tudja kellő gyorsasággal zárni a szelepet, így a bütyök és a szelepszár vége elválik egymástól.



2. A szelep mozgatásához szükséges erő túl gyorsan változik, amit a rendszer ütésként érez és ez károsíthatja a szelepet.

Feladat: Hozzon létre egy olyan informatikai alkalmazást, segédeszközt, melynek bemenete:

- a szelepnýtás a vezérműtengely fázisszöge függvényében
- a szelep tömege
- a szeleprugó rugóállandója és a rugó előfeszítettsége a szelep zárt állapotában
- a motor fordulatszám
- az elviselhető erőderivált mértéke

Az alkalmazás jelenítse meg a szelep előírt hely-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő függvényét, figyelmeztessen, ha a fenti két probléma valamelyike fellép és a problémás időszakaszt is jelenítse meg.

Keressen tipikus értékeket a fenti paramétereknek és mutassa be a segédeszköz működését több fordulatszám mellett.

2.2. Fizikai leírás

Használjuk az alábbi jelöléseket:

- $\varphi(t)$: a vezérműtengely fázisszöge
- f : a motor fordulatszáma
- $X(\varphi)$: a szelep előírt helyzete („szelepemelés”) a fázisszög függvényében
- $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$: a szelep előírt helyzete, sebessége és gyorsulása az idő függvényében
- D : a szeleprugó rugóállandója
- m : a szelep effektív tömege (együttlmozgó tartozékokkal együtt)
- F : a szelepre ható erők eredője
- F_0 : a szeleprugó előfeszítettsége
- F_b : a bütyök által a szelepre kifejtett erő
- G_{max} : F_b idő szerinti deriváltjának maximális értéke.

Koordináta-rendszerünk legyen olyan, hogy a szelep zárt állapotában $x = 0$ legyen, nyitott állapotban pedig $x > 0$.

Ha a motor fordulatszáma f , akkor (négyütemű motoroknál) a vezérműtengely fordulatszáma $f/2$, így a vezérműtengely fázisszöge:

$$\varphi(t) = 2\pi \frac{f}{2} t = \pi f t \quad (2.1)$$

Ekkor nyilván teljesül, hogy:

$$x(t) = X(\varphi(t)) = X(\pi f t) \quad (2.2)$$

Így a szelep előírt sebessége és gyorsulása:

$$v(t) = x'(t) = (X(\pi ft))' = X'(\pi ft)\pi f \quad (2.3)$$

$$a(t) = x''(t) = (X(\pi ft))'' = X''(\pi ft)\pi^2 f^2 \quad (2.4)$$

Newton II. törvénye értelmében

$$F(t) = ma(t) = mx''(t). \quad (2.5)$$

Lineáris rugótörvényt feltételezve az előjelek figyelembe vételével:

$$F(t) = F_b(t) - F_0 - Dx(t). \quad (2.6)$$

Innen a bütők által a szelepszárra kifejtett erő:

$$F_b(t) = F_0 + Dx(t) + F(t) = F_0 + Dx(t) + mx''(t) \quad (2.7)$$

(2.2) és (2.4) alapján ez átírható:

$$F_b(\varphi) = F_0 + DX(\varphi) + mX''(\varphi)\pi^2 f^2. \quad (2.8)$$

A bütők akkor válik el a szelepszártól, ha $F_b < 0$ lenne, azaz a szétváláskor teljesül, hogy:

$$F_0 + DX(\varphi) + mX''(\varphi)\pi^2 f^2 < 0. \quad (2.9)$$

Fontos észrevenni, hogy mivel $X(\varphi)$ és $X''(\varphi)$ is változnak, ez a szétválási feltétel nem egyszerűen X vagy X'' minimumánál vagy maximumánál következik be. Az egyenlet tagjainak szemléletes jelentése: $F_0 + DX$ erőt biztosít a rugó, de $mX''\pi^2 f^2$ lenne szükséges, hogy az előírt módon mozogjon a szelep.

(2.9) egyenletből meghatározhatók azok a φ fázisszög-értékek, melyekre a szétválás megtörténik. Az is látszik, hogy ez igen kis f értékekre sosem áll fenn, hisz F_0 , D pozitív, $X(t)$ pedig nemnegatív mennyiség az értelmes konstrukciós beállítások esetében.

A másik vizsgált probléma: ha túl gyorsan változik $F(b)$ az idő függvényében. (2.7) szerint:

$$(F_b(t))' = (F_0 + Dx(t) + mx''(t))' = Dx'(t) + mx'''(t). \quad (2.10)$$

Ezt fázisszögre átírva:

$$F'_b = DX'(\varphi)\pi f + mX'''(\varphi)\pi^3 f^3. \quad (2.11)$$

Érdekes, hogy felbukkan az $X(\varphi)$ függvény 3. deriváltja is, valamint az, hogy a fordulatszám köbével arányos tagot kapunk. A fordulatszám növekedtével ez gyorsan emelkedő effektust jelent és valószínűleg a kritikus tartományban (amikor túl nagyvá válik F'_b) az f -fel arányos tag elhanyagolható emellett.

A második vizsgált szempontunk akkor nem teljesül, ha

$$|DX'(\varphi)\pi f + mX'''(\varphi)\pi^3 f^3| > G_{max}. \quad (2.12)$$

2.3. Matematikai módszerek

Az előzőek szerint tehát (2.9) teljesülése esetén válik szét a büttyök és a szelepszár vége, míg (2.12) írja le, milyen fázisszögeknél lesz túl nagy a büttyök kifejtett erejének idő szerinti deriváltja.

2.3.1. A numerikus deriválás

Mindegyik formula kiértékeléséhez aritmetikai műveleteken kívül deriválásra van szükség: $X(\varphi)$ első három deriváltját kell előállítani. Önmagában ez tetszőleges $X(\varphi)$ -re elvégezhető analitikusan is, ha a függvény formulával adott, de sok esetben ez nem teljesül, mert csak egy táblázatunk van a megfelelő értékekről. Továbbá a (2.9) illetve (2.12) egyenlőtlenségek fennállásának vizsgálata valószínűleg mindenképp csak numerikusan vizsgálható, hacsak $X(\varphi)$ nem egy nagyon egyszerű formulával adható meg.



Ezért érdemes numerikus kiértékelésre áttérni akkor is, ha formulával adott a bütök alakja. Így ha táblázattal adott a szelepemelés-függvény, akkor abból indulunk ki, ha pedig formulával, akkor abból generálunk egyenletes $\Delta\varphi$ lépésközzel egy függvényérték-táblázatot és ebből indulunk ki a számítások során.

Szükségünk van tehát arra, hogy táblázattal adott függvény deriváltjait közelítőleg meghatározzuk. Ennek utána lehet nézni a szakirodalomban, de olyan egyszerű a probléma, hogy pusztán a definícióból kiindulva is meg lehet határozni jó közelítő formulákat. Az általános jelöléseket használva beszéljünk egy $f(x)$ függvény közelítő deriválásáról, melynek értékei az $x_i = i \cdot \Delta x + x_0$ pontokban adott $f_i = f(x_i)$ értékek.

Az első derivált közelítésére egy olyan differenciahányados kiszámolása alkalmas, ami a vizsgált pontot tartalmazó véges intervallumra vonatkozik. 3 ilyen ötlet merülhet fel x_i közvetlen környezetében:

$$\begin{aligned} f'(x_i) &\approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}, && \text{jobb oldali} \\ f'(x_i) &\approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}, && \text{bal oldali} \\ f'(x_i) &\approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}, && \text{centrális} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ha Δx elég kicsi, mindegyik jól közelíti a deriváltat. A szakirodalomban utánolvasva (pl.: Faragó, Horváth: **Numerikus módszerek**) az derül ki, hogy a centrális az, amelyik pontosabb, ezért ezt fogjuk használni.

A jobb oldali derivált viszont jól közelíti a vizsgált ponttól jobbra levő intervallum közepén a deriváltat (azaz $f'(x_i + \Delta x/2)$ -t), a bal oldali pedig a bal oldali intervallum közepén (azaz $f'(x_i - \Delta x/2)$ -t), így a második derivált közelítési is centrális deriválttal adható meg:

$$f''(x_i) \approx \frac{f'(x_i + \Delta x/2) - f'(x_i - \Delta x/2)}{\Delta x} \approx \frac{\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} \tag{2.14}$$

Ez egybevág a szakirodalomban elfogadott formulával. Nem találjuk meg viszont ott a harmadik derivált közelítésére alkalmas formulát, ezért azt ugyanezzel a gondolatmenettel kell levezetnünk. A harmadik derivált

a második derivált első deriváltja. Erre a deriválásra a centrális deriválás módszerét alkalmazva:

$$f'''(x_i) \approx \frac{f''(x_i + \Delta x/2) - f''(x_i - \Delta x/2)}{2\Delta x} \approx \frac{\frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2} - \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{(\Delta x)^2}}{2\Delta x} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2(\Delta x)^3}. \quad (2.15)$$

A szakirodalom a numerikus deriváltaknál megjegyzi, hogy ennek kiszámítása igen érzékeny a kerekítési hibákra, ezért ha függvényértékeinket pontosan kell kiszámolni illetve pontos mérési adatokat kell használnunk.

2.3.2. A matematikai módszer

Így minden dolog adott a kitűzött probléma megoldásához. Az áttekinthetőség kedvéért összefoglalva a lépéseket:

1. Készítsünk egyenletes $\Delta\varphi$ lépésközű táblázatot $X_i = X(\varphi_i)$ értékeiről a $\varphi_i = \varphi_0 + i \cdot \Delta\varphi$ pontokban.
2. Számoljuk ki a deriváltak numerikus közelítését a fentebbi formulák szerint:

$$\begin{aligned} X'_i &\approx \frac{X_{i+1} - X_{i-1}}{2\Delta\varphi} \\ X''_i &\approx \frac{X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1}}{(\Delta\varphi)^2} \\ X'''_i &\approx \frac{X_{i+2} - 2X_{i+1} + 2X_{i-1} - X_{i-2}}{2(\Delta\varphi)^3}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

3. Számoljuk ki a bütöök által a szelepre kifejtett erőt az előbbi alappontokban (2.9) szerint:

$$F_i = F_0 + DX_i + mX''_i \pi^2 f^2. \quad (2.17)$$

4. Számoljuk ki az erő deriváltjának nagyságát (2.12) alapján:

$$G_i = |DX'(\varphi)\pi f + mX'''(\varphi)\pi^3 f^3|. \quad (2.18)$$

A probléma áttekinthetősége kedvéért érdemes X deriváltjait is ábrázolni, de az igazán releváns az előbbi F_i és G_i értékek ábrázolása, illetve annak megkeresése, fellép-e és ha igen, mely időpontokban, hogy $F_i < 0$ (szétválás) vagy $G_i > G_{max}$ (ütésszerű erőváltozás).

2.4. Az informatikai alkalmazás kidolgozása

A feladatot a Microsoft Excel 2010 segítségével oldjuk meg. A megoldást tartalmazó Excel fájl [itt található](#).

A feladathoz tartozó alapvető paramétereket az *Alapadatok* munkalapon tároljuk. Ezeket, és a későbbi számítási eredményeket is névvel elnevezzük, hogy könnyebben lehessen rájuk hivatkozni.

A *Számolás* munkalapon kiszámítjuk az egyes „ i ” lépésekhez tartozó ϕ szöveget, és az X_i értékeket, illetve ezek első, második és harmadik deriváltját. Praktikus, hogy ez nem függ az időtől.

A G és H oszlopokban meghatározzuk a szelepszárra ható erőt és annak deriváltját, majd a J és K oszlopokban a két vizsgált feltétel teljesülését: A J oszlop értéke F abszolút értéke azokban az esetekben, amikor $F < 0$, azaz szétválás történik, a K oszlopban pedig azokat az eseteket keressük, amikor az erőderivált értéke egy meghatározott értéket túllép (ez a káros, ütésszerű terhelés mértéke).

A táblázatban a feltételes formázás is segít az „érdekes” részek megtalálásában.

A *Vizualizálás* lapon a hely, sebesség és gyorsulás függvényeket láthatjuk, az időfüggetlen X_i és deriváltjainak formájában, illetve megtekinthetjük a hely-idő függvényt.

Külön ábrán kapott helyet a szelepre ható erő (F) és deriváltjának (G) megjelenítése. Ezen az ábrán jól láthatók az ütés és szétválás esetei.

Mindezt a fordulatszám megengedett tartományban való változtatásával tehetjük még szemléletesebbé. Maga a csúszka az *Alapadatok* munkalap B19 cellájához van kötve, tehát értéke azzal együtt változik.

2.5. Bemutató mintafeladaton

Tipikus szelep-paraméterek a következők:

- f : 1500 és 9000 1/perc, azaz 25 Hz és 150 Hz közt változik.
- $D = 60\,000$ N/m.
- $F_0 = 300$ N
- $m = 0,1$ kg
- $G_{max} = 2 \cdot 10^6$ N/s.

Igazán pontos szelepemelés-függvényt csak mérésekből lehet szerezni, de lehet olyan egyszerű modellfüggvényt találni, mely a valódi függvény kvalitatív tulajdonságaival rendelkezik és a módszer kipróbálására alkalmas. Ilyen lehet pl. a következő:

$$X(\varphi) = \begin{cases} A \left(1 - \left(\frac{\varphi - \varphi_c}{\delta}\right)^4\right)^3 & \text{ha } |\varphi - \varphi_c| \leq \delta \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (2.19)$$

Könnyű belátni, hogy ez a függvény $\varphi_c - \delta$ és $\varphi_c + \delta$ közt egy szimmetrikus, A magasságú, 3-szor deriválható függvény, melynek lefutása olyan jellegű, mint a valódi szelepemelés függvények.

Ennek reális paraméterei lehetnek pl.: $A = 12$ mm, $\varphi_c = 150^\circ$, $\delta = 60^\circ$.

A számításokat természetesen m-ben és radiánban kell végezni, de a be- és kimenő adatoknál a mm és a fok használata szemléletesebb.

2.6. Önálló feladatok

1. Keressen a szakirodalomban a numerikus deriválásra használható más módszert is, és írja át arra a megoldást, majd hasonlítsa össze az eredményeket.
2. Adjon meg módszert, mely megadott $X(\varphi)$ függvényhez magától megkeresi azt a legkisebb fordulatszámot, amikor a fenti két kritérium megsérül.

3. Fejlesszen módszert és informatikai alkalmazást, mely a fordított utat járja be, azaz egy gyorsulás-idő-függvényből indul ki és ebből állítja elő a sebesség-idő és hely-idő függvényeket. Eközben vizsgálja azt is, hogy a kapott függvények reálisak legyenek, azaz pl. a szelepemelés-függvény egyetlen intervallumon belül legyen pozitív, azon kívül 0.

3. Adott színeknek megfelelő szín generálása monitoron

3.1. A feladat kitűzése

Motiváció: Az emberi színlátás komplex folyamat. Gyakran szükség lehet arra, hogy egy monitoron megmutassuk, milyen színűnek látunk egy megadott színekű tárgyat. Ez azonban nem minden szín esetén lehetséges, ekkor jó, ha tudjuk, hogy a szín nem jeleníthető meg monitoron.

Feladat: Készítsen programot vagy alkalmazást, mely egy tetszőleges színekhez megtalálja azt az R, G, B értékhármaszt, mely a megadott paraméterű monitoron olyan színeként jelenik meg, amilyennek az átlagos ember az adott színekű tárgyat látná. Amennyiben ez pontosan megoldható, adja meg az R,G,B értékeket, ha pedig nem, akkor adjon figyelmeztetést és egy olyan R,G,B hármaszt, mely a lehető legközelebbi színt eredményezi az előírthoz. A „legközelebbi színt” egy emberi szemhez illesztett színrendszerben kell érteni.

3.2. Elméleti alapok

A színelmélet alapjait megtaláljuk pl. Horváth András: „A fényterjedés és észlelés fizikája mérnököknek” c. tankönyvében. Ezek alapján a következőt mondhatjuk:

A színtan egyik alapfogalma a „metamer”, ami olyan színpárt takar, melyek színeképe eltér, az emberi észlelés számára viszont egyenértékűnek tűnnek. A metaméria jelensége annak köszönhető, hogy szemünk 3 típusú érzékelősejtet használ nappali megvilágítás esetén, melyeknek eltér a hullámhossz szerinti érzékenysége, és agyunkba csak a három érzékelő által adott jelek egymáshoz való viszonya alapján jut el színi információ. Ezért, bár a színeképek halmaza az emberi láthatósági tartományon belüli folytonos, nemnegatív függvények halmazával egyezik meg, azaz végtelen dimenziós sokaságot alkot, szemünk ezt egy 3 dimenziós sokasággá redukálja. Egyszerűbben a legtöbb színekhez végtelen sok olyan, tőle különböző színek tartozik, melyhez azonos színérzet társul, így nem tudjuk megkülönböztetni őket.

Ez teszi lehetővé a színes képek megjelenítését, hisz a metaméria jelensége miatt egy monitoron nem kell a megjelenített tárgy színeképét leutánozni, elég, ha egy metamerjét állítjuk elő. A monitorok erre az additív

színkeverés ötletét alkalmazzák: három, különböző színű (vörös, zöld, kék) elemi pötty fényességét tudjuk képpontonként állítani, melyek olyan közel vannak egymáshoz, hogy az emberi látás számára összemosódnak. A közismert R, G és B értékek ezen elemi fényforrások intenzitását szabályozzák. Az elméleti megfontolásokban azonban nem az RGB értékeket használjuk a számítások során, mert sok olyan szín van, melynek metamerje ebben a rendszerben negatív komponenseket is tartalmaz, hanem az XYZ-t, mely minden színképre nemnegatív értékeket ad.

Ennek kiszámítási módja egy egyszerű integrálással adható meg: ha adott egy $l(\lambda)$ színkép, akkor ennek X , Y és Z komponensei:

$$\begin{aligned} X &= \int l(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda \\ Y &= \int l(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda \\ Z &= \int l(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \end{aligned} \tag{3.1}$$

Itt \bar{x} , \bar{y} és \bar{z} az XYZ-rendszer színmegfeleltető függvényei, melynek szabványos értékei a CIE honlapjáról 1 vagy 5 nm-es lépésközű táblázatok formájában letölthetők. Az integrálás elvben minden pozitív értékre történik, azonban 380 nm alatt és 780 nm felett szemünk nem érzékeny, így a színmegfeleltető függvények 0 értéket vesznek fel, emiatt az integrálási határoknak 380 és 780 nm vehető.

A monitorok többsége által használt sRGB rendszer és az XYZ koordináták közti kapcsolatot a következő egyenlet adja meg:

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,2406 & -1,5372 & -0,4986 \\ -0,9689 & 1,8758 & 0,0415 \\ 0,0557 & -0,2040 & 1,0570 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Látható, hogy (3.2) egyenlet mátrixában vannak negatív elemek is, így X , Y és Z hiába nemnegatív, R , G és B értékek közt lehetnek azok, ami tiltott, hisz nem lehet negatív fényességű fényforrást készíteni.

Tehát ha adott a színek és (3.1) alapján kiszámoljuk az X , Y és Z komponenseket, majd ezt (3.2) szerint átszámoljuk R , G , B értékekre, akkor két eset lehetséges:

- R , G , B mindegyike nemnegatív: ekkor a szín metamerje megjeleníthető az sRGB rendszerben, így nem kell tovább keresnünk, a megjelenítés ez alapján elvégezhető.
- R , G , B valamelyike negatív: ekkor a színnek nincs sRGB-beli metamerje. Ekkor további vizsgálatra van szükség a legközelebbi, de megjeleníthető szín keresésére.

A színtan szerint az emberi szem a színek egymástól mért „távolságát” nem az X , Y , Z , vagy R , G , B értékek különbségével veszi arányosnak, hanem egy speciális mérték szerint mér. Ennek számszerű vizsgálatával született az Lab rendszer, melynek 3 szín-koordinátája az XYZ-rendszerből így számolható ki:

$$\begin{aligned}
 L &= 116 g(Y/Y_f) - 16 \\
 a &= 500 [g(X/X_f) - g(Y/Y_f)] \\
 b &= 200 [g(Y/Y_f) - g(Z/Z_f)]
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

ahol a g függvény definíciója:

$$g(t) = \begin{cases} t^{1/3} & \text{ha } t > (6/29)^3 \\ \frac{1}{3} \left(\frac{29}{6}\right)^2 t + \frac{4}{29} & \text{különben} \end{cases}
 \tag{3.4}$$

Itt X_f , Y_f és Z_f egy referencia-fényforrás XYZ koordinátáit jelöli, melynek fényét fehérnek tekintjük. Az sRGB rendszerben ezek értékei:

$$X_f = 0,9505 \quad Y_f = 1 \quad Z_f = 1,0890
 \tag{3.5}$$

Az Lab-rendszerben L méri az észlelt fényességet, a és b a színezetet és két fényforrás színének eltérésre a

$$\Delta C = \sqrt{(\Delta L)^2 + (\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}
 \tag{3.6}$$

formula szolgál.

Mivel mi csak a színek eltérést vizsgáljuk, nem az intenzitásokét, ezért feltehetjük, hogy $\Delta L = 0$. (Így normáljuk az értékeket.)

Ezért ha van egy adott X, Y, Z színhármasunk, akkor számoljuk ki ennek a és b koordinátáit (3.3) szerint, majd keressük azokat az X', Z' értékeket, melyekből (3.2) alapján kapható R', G' és B' koordináták mindegyike nemnegatív és

$$W = (a - a')^2 + (b - b')^2 \quad (3.7)$$

a lehető legkisebb értéket veszi fel.

Ábrázolható színeknél ez a minimum 0 és $X = X', Y = Y', Z = Z'$ lesz, nem ábrázolhatóknál más értéket kapunk. Ilyenkor az R', G', B' értékek adják a lehető legközelebbi szín megjelenítésének alapját.

Ezek az R', G', B' értékek azonban még nem azok, amiket RGB értékeként a színkódba beírhatunk. Egyrészt azért, mert a konvenció szerint a teljesen fehér színnek azonos RGB értékeket szokás tulajdonítani, másrészt mert a szokásos képfarmátumoknál az elvi RGB értékektől nemlineárisan függő, 0 és 255 közé normált egész értéket szokás megadni. Előbbit egyszerűen a (3.5) értékekkel való normálással szokás megoldani, míg a nemlineáris transzformáció többnyire jól közelíthető egy hatványfüggvénnyel, azaz a megjelenítendő értékek:

$$R_m = \text{int}(255 \cdot (R'/M)^{1/\gamma}), \quad G_m = \text{int}(255 \cdot (G'/M)^{1/\gamma}), \quad B_m = \text{int}(255 \cdot (B'/M)^{1/\gamma}), \quad (3.8)$$

ahol $M = \max(R', G', B')$, γ pedig a kijelzőre jellemző „gamma-tényező”, ami a legtöbb monitornál 2,2, $\text{int}()$ pedig az egészrész-függvény.

Az itt leírt transzformáció hasznos, mert így ha R_m értékét 1 bájtton adjuk meg, akkor csak 255 fokozatot tudunk ábrázolni. A gamma-transzformáció nélkül ez azt jelentené, hogy 1:255 lenne a leghalványabb, még nem fekete és a legfényesebb pixel intenzitásának aránya, használatával viszont 1:255^γ lesz, azaz sok ezres kontrasztarányok is ábrázolhatók. A 2,2-es érték történeti okokból szokásos, mert illeszkedik a hagyományos képcsöves monitorok és TV-készülékek átviteli karakterisztikájához.

3.3. Matematikai leírás

A probléma megoldásához tehát az alábbiakat kell megtenni:

1. Beszerezni a CIE hivatalos színmegfeleltető függvényeit az XYZ-rendszerhez. Ezt a honlapról letöltöttük, 5 nm-es felbontásban [itt](#) mellékeljük. (\bar{x}_i , \bar{y}_i és \bar{z}_i értékek. $i = 1, \dots, N$, ahol N a táblázatok elemszáma.)
2. Megadni a színeképet ugyanilyen felbontásban táblázatszerűen. (l_i értékek.)
3. Választani egy referencia-színt. Az sRGB rendszerben ezeket (3.5) adja meg.
4. Meg kell állapítani a használt megjelenítő eszköz (monitor) gamma-értékét. Ha nem tudjuk ezt megállapítani, a legtöbb esetben a $\gamma = 2,2$ -es érték használata jó közelítés.

Mivel most a függvényeink táblázattal adottak, ezért (3.1) helyett közelítő összegeket kell használnunk:

$$X_0 = \sum_{i=1}^N l_i \bar{x}_i, \quad Y_0 = \sum_{i=1}^N l_i \bar{y}_i, \quad Z_0 = \sum_{i=1}^N l_i \bar{z}_i. \quad (3.9)$$

Nem szoroztuk $\Delta\lambda$ -val, mert úgyis normálunk.

Ezekből kiszámoljuk a normált értékeket:

$$X = X_0/Y_0, \quad Y = 1, \quad Z = Z_0/Y_0. \quad (3.10)$$

Ezek után a matematikai feladat: keressük azon X' és Z' értékeket, melyre egyrészt

$$W = (a' - a)^2 + (b' - b)^2 \quad (3.11)$$

minimális, ahol

$$\begin{aligned} a &= 500 [g(X/X_f) - g(Y/Y_f)] \\ a' &= 500 [g(X'/X_f) - g(Y'/Y_f)] \\ b &= 200 [g(Y/Y_f) - g(Z/Z_f)] \\ b' &= 200 [g(Y'/Y_f) - g(Z'/Z_f)] \end{aligned} \quad (3.12)$$

valamint

$$g(t) = \begin{cases} t^{1/3} & \text{ha } t > (6/29)^3 \\ \frac{1}{3} \left(\frac{29}{6}\right)^2 t + \frac{4}{29} & \text{különben} \end{cases} \quad (3.13)$$

továbbá

$$R' \geq 0, \quad G' \geq 0, \quad B' \geq 0, \quad (3.14)$$

ahol

$$\begin{pmatrix} R' \\ G' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,2406 & -1,5372 & -0,4986 \\ -0,9689 & 1,8758 & 0,0415 \\ 0,0557 & -0,2040 & 1,0570 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Ezek az egyenletek kicsit egyszerűsödnek, ha beírjuk az $Y = 1$ és $Y' = 1$ feltételeket. Ezt azért nem tettük meg, hogy áttekinthetőbb maradjon.

Az (3.11)-(3.4) egyenletekben meghatározott minimalizálási feladat, melyhez a (3.14) és (3.15) egyenletek tartoznak, mint kiegészítő feltételek, egy nemlineáris programozási feladat.

Ennek megoldásaként előállhat, hogy $W_{opt} = 0$, ekkor pontosan megjeleníthető színünk van, vagy az is, hogy $W_{opt} > 0$, ekkor csak közelítő színünk van. A lehető legjobb szín R' , B' , G' értékeiből a megjelenítendő színcsatorna-értékek:

$$R_m = \text{int}(255 \cdot (R'/M)^{1/\gamma}), \quad G_m = \text{int}(255 \cdot (G'/M)^{1/\gamma}), \quad B_m = \text{int}(255 \cdot (B'/M)^{1/\gamma}), \quad (3.16)$$

ahol $M = \max(R', G', B')$.



3.4. Az informatikai megvalósítás

A feladatot a Microsoft Excel 2010 segítségével oldjuk meg. A megoldást [itt találjuk meg](#).

A feladathoz tartozó alapvető paramétereket az *Alapadatok* munkalapon tároljuk. Ezeket, és a későbbi számítási eredményeket is névvel jelöljük, hogy könnyebben lehessen rájuk hivatkozni.

A CIE táblázat a *cie* munkalapon kapott helyet, mellette az E oszlopban felvettük a színeképet (az l_i értékek formájában)

A feladatmegoldás lépései a Számolás munkalapon követhetők nyomon. A 23. sorban található $g(t)$ függvény itt csak a megjelenítést szolgálja, valójában egy g nevű saját függvényt írtunk erre Visual Basic nyelven (a függvény a *Module1* nevű modulban található.)

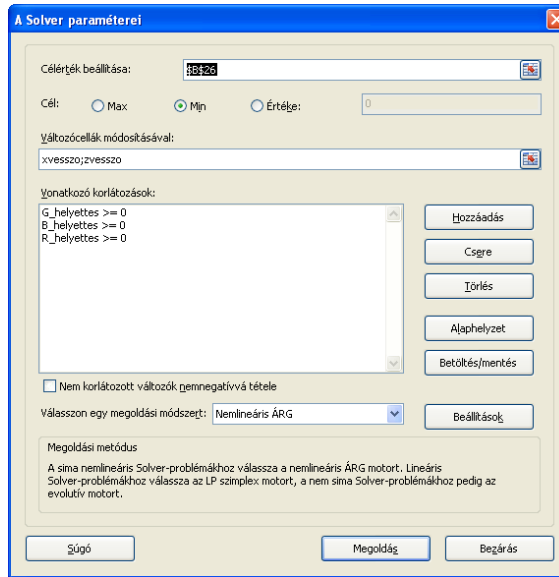
A keresett X' , Y' és Z' értékek a B18:B20 tartományban találhatóak, amint említettük, Y' értékén 1-nek vesszük, illetve X' , Y' , Z' értékeket a normalizált X , Y , Z értékekre állítjuk be. Amennyiben a kiszámolt elvi RGB értékek valamelyike negatív értéket vesz fel, az X' és Z' értékeit a Solver segítségével keressük meg a 3.1. ábrán látható módon. A minimalizálandó függvény a W , z' és y' módosításával keressük. Korlátozásnak az R, G, B kódon nemnegativitását be kell állítanunk. A Solvert a szokásos módon érdemes az $1E-14$ pontosságúra állítani.

A kényelmes használat érdekében készítettünk egy Kiértékelés gombot, ami lefuttatja a beállított Solvert, ezután pedig a megjeleníthető RGB értékek alapján egy kis területen meg is jeleníti a kiválasztott, megtalált színt.

Az l_i értékek szabadon változtathatók és utána a Solvert újra lefuttathatjuk (akár kézzel, akár a Kiértékelés gomb újbóli megnyomásával).

3.5. Önálló feladatok

1. Készítsen az eddigiek alapján egy minél valóságosabb „szivárvány-skálát”, azaz a megjeleníthető színek közül a tiszta színekhez legközelebb álló színekből álló sorozatot, mely 380–760 nm közti hullámhosszúságú egyszínű színeképek alapján készül. Hol lehet ilyenkor egyszerűsíteni a fenti számításokon?



3.1. ábra. Helyettesítő RGB színek keresése Solver segítségével

2. A fentiekben ismertetett elmélet alapján készítsen programot, mely megmondja két, RGB értékekkel megadott szín „távolságát” azaz a (3.6) egyenlet szerinti ΔC értéket. A számítás vegye figyelembe, hogy a megadott R , G és B értékek nem lineárisan függenek az intenzitástól.
3. Készítsen programot, ami egy tetszőleges színek metamerjét megkeresi 3, táblázattal adott alapszínek lineáris kombinációjaként!

4. Közlekedési adatok elemzése egyszerűbb matematikai statisztikai eszközökkel

Ebben a fejezetben nagy számú, közlekedési, forgalmi adat egyszerűbb vizsgálatát fogjuk bemutatni az alapképzésben szereplő *Valószínűség-számítás és matematikai statisztika* tantárgyban szereplő matematikai statisztikai eszköztár felhasználásával. Ilyen hatalmas mennyiségű adat feldolgozása esetén elegendhetetlen valamilyen szoftver használata. Rengeteg olyan programcsomag létezik, amely alkalmas statisztikai számítások elvégzésére, mi most a MATLAB programcsomagot fogjuk használni.

4.1. A mérési adatok

A mérési időszak 2002.04.05. 0 órától 2002.04.17. éjfélig tartott. A mérési adatokat a [forgalmiadatok.txt](#) fájl tartalmazza. A mérés során regisztrálták a mérés időpontját, az elhaladó jármű mozgásának irányát, a jármű kategóriáját és sebességét. Ha egy egyszerű szerkesztővel megnyitjuk a fájlt, akkor rengeteg (több, mint 120 000), az alábbiakhoz hasonló sort találunk:

```
05/04/02 10:31:14 1 1 45
05/04/02 10:31:18 2 5 42
05/04/02 10:31:23 1 1 60
05/04/02 10:31:25 2 2 38
05/04/02 10:31:26 2 2 40
```

Az egyes oszlopokban levő adatok magyarázata:

- Első két oszlop: a mérés időpontja, nap/hónap/év óra:perc:másodperc formátumban.
- Harmadik oszlop: a regisztrált jármű haladási iránya. Ez lehet
 - 1: a kilométer számozás növekvő irányába;

- 2: a kilométer számozás csökkenő irányába.
- Negyedik oszlop: a jármű kategóriája. Ez lehet:
 - 1: Személygépkocsi (személygépkocsi vontatmánnyal vagy anélkül, kisautóbusz 9 férőhely alatt);
 - 2: Kis tehergépkocsi (tehergépkocsi, amelynek megengedett legnagyobb össztömege kisebb 3,5 tonnánál);
 - 3: Egyes autóbusz (a KRESZ szerint meghatározott, kivéve a 9 férőhely alattiakat);
 - 4: Csuklós autóbusz (a KRESZ szerint meghatározott több tagú autóbusz);
 - 5: Közepesen nehéz tehergépkocsi (3,5 – 7,5 tonna közötti össztömegű kéttengelyes tehergépkocsi);
 - 6: Nehéz tehergépkocsi (7,5 tonnánál nagyobb össztömegű két- vagy többtengelyes tehergépkocsi pótkocsi vagy vontatmány nélkül);
 - 7: Pótkocsis tehergépkocsi (két- vagy háromtengelyes tehergépkocsi pótkocsival a KRESZ szerint meghatározva);
 - 8: Nyerges szerelvény (nyerges vontatóból és félpótkocsiból álló járműszerelvény a KRESZ szerint meghatározva);
 - 9: Speciális nehéz jármű (hat- vagy ennél több tengelyes speciális nehéz jármű);
 - 10: Motorkerékpár és segédmotoros kerékpár (a KRESZ szerint meghatározva);
 - 11: Kerékpár (a KRESZ szerint meghatározva);
 - 12: Lassú jármű (lassú jármű és mezőgazdasági vontató a KRESZ szerint meghatározva, pl. fogat, traktor);
 - 13: Egyéb, illetve a járművet nem sikerült azonosítani.
- Ötödik oszlop: a jármű sebessége km/h -ban.

4.2. A feladat kitűzése

Készítsen az előző fejezetben vázolt formátumban rendelkezésre álló adatokhoz olyan MATLAB programot, mely alkalmas:

- Beolvasni az adatokat, ügyelve a dátumok kezelésére.
- Statisztikailag megvizsgálni a követési idők várható értékeit többféle szempontból. (Két hasonló vagy épp eltérő jellegű nap összehasonlítása, napszakok összehasonlítása.)
- Megvizsgálni a sebességek eloszlását. (Különböző irányok és különböző jellegű napok összehasonlítása.)
- Statisztikai próbával vizsgálni a követési idők és a sebességek eloszlásának különbözőségét vagy egyezőségét.

4.3. Az adatok beolvasása

A MATLAB program lehetővé teszi, hogy egy csak numerikus értékeket tartalmazó `valami.txt` fájlt betöltsünk a `load` paranccsal:

```
»load valami.txt;
```

Ekkor automatikusan létrejön a `valami` nevű mátrix, mely a betöltött adatokat tartalmazza. A mi esetünkben más a helyzet, hiszen a mérés időpontja közvetlenül még nem kezelhető numerikus értéként, ezért egy rövid szkriptet írunk, amely

- számmá alakítja a dátumot;
- szétválogatja az eltérő irányba (1, illetve 2) haladó járművekhez tartozó adatokat;
- végül a kapott értékeket kiírja két fájlba.

A függvényben használt Matlab parancsok:



- `c=textscan(fid, '%s %s %f %f %f', 1)`: A `fid` azonosítójú fájlból olvassa be a formátumban meghatározott adatokat (mérési időpont: két sztring, további értékek: három float) egyszer.
- `strcat(c1, ' ', c2)`: a `c` cellatömb első (nap/hónap/év) és második (óra:perc:másodperc) elemét fűzi össze egy szóközzel elválasztva egyetlen sztringgá, hogy a következő lépésben az így kapott időpontot számmá alakíthassuk.
- `datenum(s, 'dd/mm/yy HH:MM:SS')`: a megadott dátum (időpont) formátumú `s` sztringet alakítja át számmá. Alapértelmezésben ez a szám a 0. év 0. napja óta eltelt napok száma, amely tört értéket is felvehet.
- `cell2mat`: cellatömböt alakít mátrixszá. Csak akkor használható, ha a cellatömb minden eleme azonos típusú.
- `save adat1.txt adat1 -ascii -double`: az `adat1` mátrix elemeit menti el az `adat1.txt` fájlba, `double` pontossággal. Ez utóbbira a `datenum` paranccsal kapott értékek miatt van szükség.

Végül a szkript:

```
fid=fopen('forgalmiadatok.txt','rt'); % megnyitjuk a fájlt
CA={};
CB={}; % létrehozuk az egyelőre üres cellatömböket

while ~feof(fid) % ciklus a fájl végéig
c=textscan(fid,'%s %s %f %f %f',1); % két sztring és három float beolvasása
a=strcat(c{1},{' '},c{2}); % az időpontot megadó dátumot és időt összekapcsoljuk,
% közöttük egy szóközzel
c{1}=datenum(a,'dd/mm/yy HH:MM:SS'); % a kapott dátumból egy számot készítünk
c(2)=[]; % az eddigi második elemet megszüntetjük,
% mivel két elemet összevontunk

irany1=isequal(c{2},1); % létrehozunk két logikai változót a különböző
irany2=isequal(c{2},2); % irányokhoz tartozó adatok szétválogatásához

if (irany1==1) % elágazás: ha az irány az 1-es, akkor a
c(2)=[]; % az irányt megadó értékre már nincs szükségünk
CA=[CA;c]; % az adatokat a CA cellatömbhöz tesszük
end % elágazás vége
if (irany2==1) % elágazás: ha az irány a 2-es, akkor a
c(2)=[]; % az irányt megadó értékre már nincs szükségünk
CB=[CB;c]; % az adatokat a CB cellatömbhöz tesszük
end % elágazás vége
end % ciklus vége
fclose(fid); % bezárjuk a fájlt

adat1=cell2mat(CA); % a cellatömböket mátrixokká alakítjuk
adat2=cell2mat(CB);

save adat1.txt adat1 -ascii -double; % a mátrixokat kiírjuk egy-egy fájlba double
save adat2.txt adat2 -ascii -double; % pontossággal (utóbbira a datenum miatt van szükség)
```

4-1. önálló feladat: A fenti MATLAB szkript (szándékosan) nem a leghatékonyabb, az adatok beolvasása és szétválogatása természetesen másképp is megvalósítható. Írjunk a fentinel hatékonyabb kódot ennek elvégzésére!

4.4. Ábrázolás

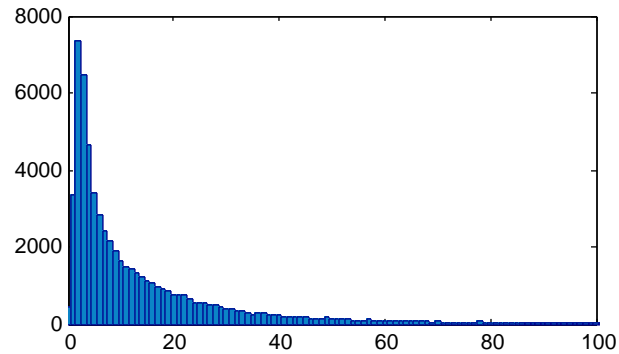
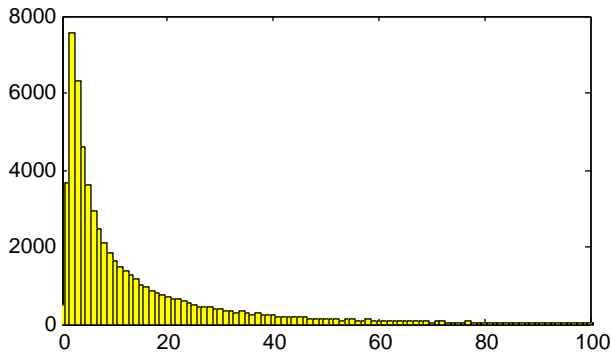
A mért adatokat (illetve az abból számolt értékeket) ábrázolhatjuk a mérési időpont függvényében (4.2. és 4.5. ábra) a `plot` függvénnyel, pl.

```
>> plot(adat1(:,1),adat1(:,3) );
```

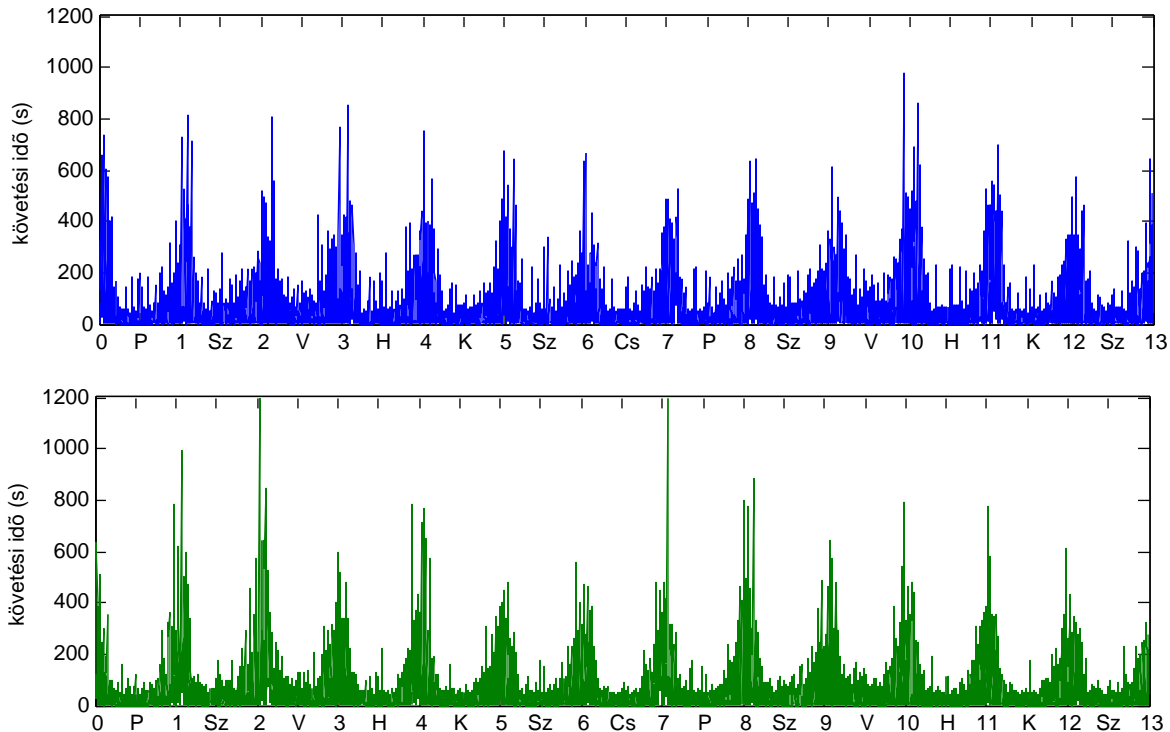
Készíthetünk hisztogramot a `hist` függvénnyel, ami a részintervallumokba eső elemek számát ábrázolja. Ennek első argumentuma az adat vektor, a második a részintervallumok középpontjait tartalmazza. A 4.3. ábra a járművek óránkénti számát mutatja. Ehhez az időpontokat átalakítottuk órává, 0-nak választva 2002.04.05-ét.

```
>> t1=(adat1(:,1)-datenum('2002.04.05','yyyy.mm.dd'))*24;  
>> ido=0.5:1:311.5;  
>> hist(t1,ido);
```

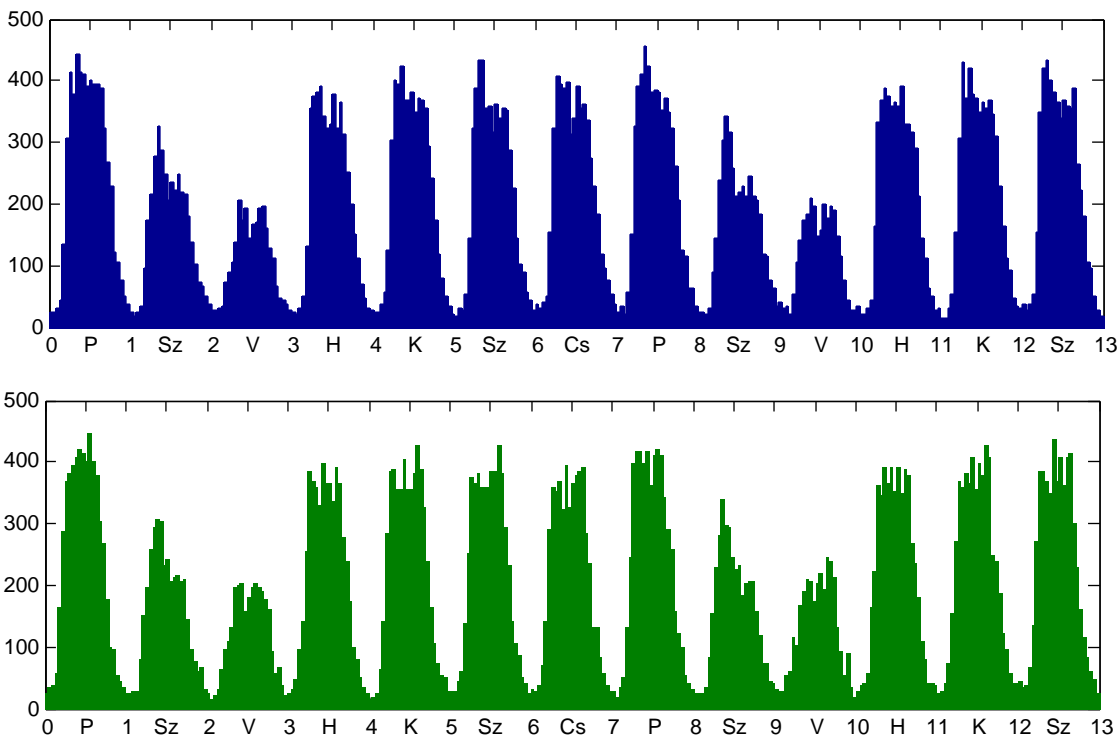
Hasonlóan készíthetünk gyakorisági hisztogramot a sebességről és a követési időről is.



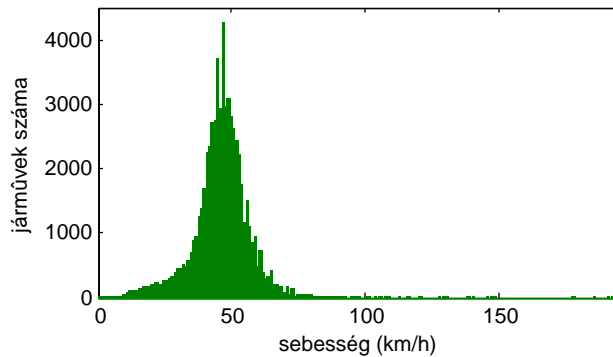
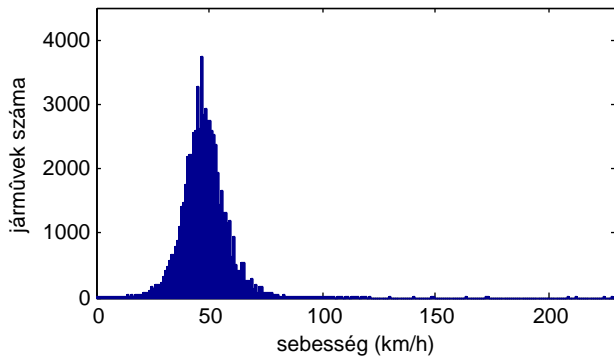
4.1. ábra. A másodpercben mért követési időre vonatkozó gyakorisági hisztogram részlete az 1-es (balra), illetve a 2-es irányra (jobbra).



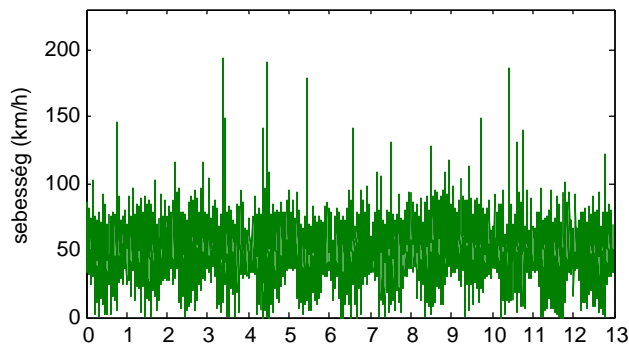
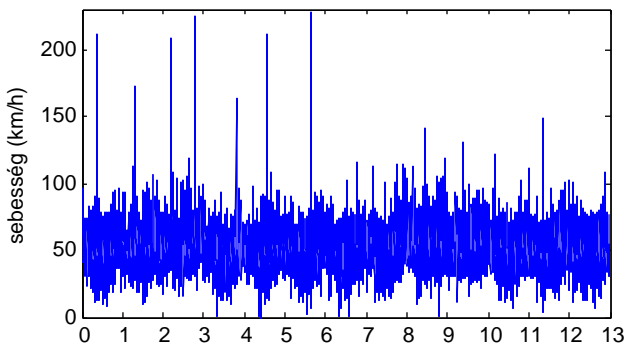
4.2. ábra. A másodpercben mért követési idők a teljes mérési időszakban. Az ábrán megfigyelhető a napi periodicitás: napközben nagyobb a forgalom, így kisebbek a követési időközök, estefelé csökken a forgalom, növekednek a követési időközök. A legnagyobb időközök éjfél után, hajnal előtt jelentkeznek, ekkor a legkisebb a forgalom.



4.3. ábra. Az járművek óránkénti számának eloszlása a teljes mérési időszakban. Itt is megfigyelhető a napi periodicitás, továbbá jól látszik az is, hogy a hétközi forgalomhoz képest a szombati, illetve vasárnapi forgalom lényegesen kisebb. Szintén megfigyelhető a forgalom visszaesése a déli órákban.



4.4. ábra. A sebesség eloszlása a teljes mérési időszakban. A mért sebességek 50 km/h körül koncentrálnak. A gyakorisági hisztogramok normális eloszlást sejtetnek, ennek vizsgálatára majd visszatérünk.



4.5. ábra. A sebesség a teljes mérési időszakban. A nagyobb sebességek abban az időszakban jelentkeznek, amikor a forgalom kisebb. A kiugróan nagy sebességek is általában ilyenkor fordulnak elő.

4.5. A követési idő várható értékére vonatkozó vizsgálatok

Ebben a részben az egy irányban, egymás után elhaladó járművek regisztrálása között eltelt időt, tehát a követési időt fogjuk vizsgálni. Az eddigi ábrákból már valószínűsíthető, hogy a különböző időszakokban (reggel–este, hétköznap–hétvége) számított átlagos követési idők között lehetnek hasonlóak, de előfordulhatnak nagyobb mértékű eltérések is. Az adatok matematikai statisztikai elemzésére azért is van szükség, mert az első ránézésre hasonlóknak tűnő adatok lehetnek statisztikai szempontból szignifikánsan eltérőek, míg a különbözőnek látszóak lehetnek statisztikai szempontból azonosak is. A következőkben hasonló és eltérő jellegű időszakokban mért követési időket fogunk hasonlítani.

4.5.1. A követési idő összehasonlítása két hasonló napon

Tekintsük a két pénteki napra vonatkozó adatokat. Igaz-e 95%-os szignifikancia szinten, hogy két pénteken (2002.04.05. és 04.12.), 7 és 9 óra között a követési idő várható értéke megegyezik?

Legyenek m_1 , illetve m_2 az egyes napokhoz tartozó várható értékek. Ekkor a nullhipotézis és az ellenhipotézis a következő lesz:

$$H_0 : m_1 - m_2 = 0$$

$$H_1 : m_1 - m_2 \neq 0$$

Mivel mindkét adathalmaz elemszáma nagy (ezt ugyan még nem ellenőriztük, de azért sejthető), ezért kétmintás u -próbával vizsgálhatjuk a hipotézist. A próbastatisztika formulája ekkor:

$$\hat{u} = \frac{\hat{m}_{n_1} - \hat{m}_{n_2} - m_0}{\sqrt{\frac{\hat{s}_{n_1}^2}{n_1} + \frac{\hat{s}_{n_2}^2}{n_2}}}$$

Itt n_1 és n_2 jelenti az adathalmazok elemszámát, \hat{m}_{n_1} és \hat{m}_{n_2} a mintaátlagok, $\hat{s}_{n_1}^2$ és $\hat{s}_{n_2}^2$ a korrigált tapasztalati szórásnégyzetek, m_0 pedig a várható értékek különbségére feltételezett érték. A fenti formula eloszlása H_0

fennállása esetén közelítőleg standard normális, így a 95%-os szignifikancia szinthez tartozó elfogadási és kritikus tartomány:

$$\begin{aligned} \text{kritikus tartomány:} & \quad (-\infty; 1,96) \cup (1,96; \infty) \\ \text{elfogadási tartomány:} & \quad (-1,96; 1,96) \end{aligned}$$

Már csak az van hátra, hogy az adatokból kiszámítsuk a szükséges statisztikai mérőszámokat.

Először kiválasztjuk a megadott időtartamokhoz tartozó adatokat. Ehhez az időpontokat a már használt `datenum` paranccsal átalakítjuk, azután az `adat1` mátrix első oszlopából kiválasztjuk azokat a sorokat, amelyek a két időpont közé esnek, majd az egyes időpontok különbségéből képezzük a követési időközöket. Mivel ezt célszerű másodpercben mérni, ezért a napokban megadott időt másodperccé alakítjuk:

```
>> datum1=datenum('2002.04.05 07:00:00','yyyy.mm.dd HH:MM:SS');
>> datum2=datenum('2002.04.05 09:00:00','yyyy.mm.dd HH:MM:SS');
>> reggell=adat1( adat1(:,1)> datum1 & adat1(:,1)<datum2 ,:);
>> reggeld1=diff( reggell(:,1) )*24*3600;
```

A másik pénteki nappal hasonlóan eljárva kapjuk az ottani követési időket (`reggeld2`). A `mean` paranccsal meghatározható az adatok átlaga, a `var` paranccsal pedig a korrigált tapasztalati szórásnégyzete:

```
>> mean( reggeld1)

ans =

    8.8012

>> sqrt( var(reggeld1) )

ans =

   11.2991
```

A másik péntekre kiszámítva ezeket 8,3244, illetve 13,7241 adódik. Az adathalmaz elemeinek száma:



```
>> size (reggeld1,1)
```

```
ans =
```

```
815
```

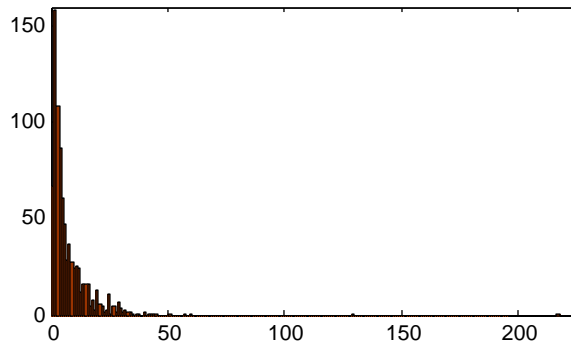
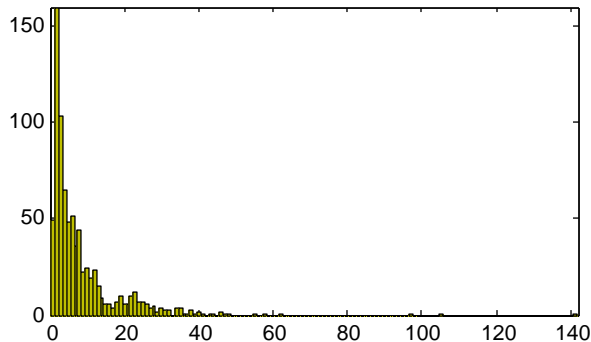
A másik adathalmaz elemszámára 863 adódik. Behelyettesíthetünk a próbastatisztikába:

```
>> (mean(reggeld2)-mean(reggeld1))/sqrt(var(reggeld1)/size(reggeld1,1)+var(reggeld2)/size(reggeld2,1))
```

```
ans =
```

```
-0.7787
```

Mivel a kapott érték az elfogadási tartományba esik, ezért a H_0 nullhipotézist elfogadjuk (nincs okunk arra, hogy elutasítsuk), azaz 95%-os szignifikancia szinten igaz, hogy a követési idők várható értéke a két időszakban egyenlő.



4.6. ábra. A másodpercben mért követési időre vonatkozó gyakorisági hisztogram a két pénteki napon, 04.05-én (balra) és 04.12-én (jobbra).

4.5.2. A követési idő összehasonlítása hétköznap és vasárnap

Most egy hétközi és egy hétvégi napon mért követési időket fogunk összehasonlítani. A választott napok 04.12. (péntek) és 04.15. (vasárnap), az ezeken belül vizsgált időszak legyen a reggel 7 és 9 óra közötti. Az adatok feldolgozása az előző feladatban bemutatott módon történhet. A gyakorisági hisztogramokból látszik, hogy itt már jelentő eltérés várható a követési időben. A pénteki napra már meghatároztuk az átlagot (8,3244 s), vasárnapra 20,1404 s adódik. Ezek alapján az a feltételezésünk, hogy vasárnap szignifikánsan nagyobb a követési idő várható értéke.

Legyen m_1 a péntekre, m_2 pedig a vasárnapra vonatkozó várható érték. Ekkor tehát azt akarjuk vizsgálni, hogy $m_1 < m_2$ (azaz $m_1 - m_2 < 0$) elfogadható-e 95%-os szignifikancia szinten. A vizsgálandó állítás szigorú egyenlőtlenséggel van megfogalmazva, így azt ellenhipotézisként kezelhetjük. Így a nullhipotézis és az ellenhipotézis:

$$H_0 : m_1 - m_2 \geq 0$$

$$H_1 : m_1 - m_2 < 0$$

A hipotézis ellenőrzését végezhetjük az előző feladatban látottakhoz hasonló módon is, de most inkább használjunk az egészre egyetlen MATLAB függvényt. Emlékezzünk arra, hogy a próbastatisztika formulája

$$\frac{\hat{m}_{n_1} - \hat{m}_{n_2}}{\sqrt{\frac{\hat{s}_{n_1}^2}{n_1} + \frac{\hat{s}_{n_2}^2}{n_2}}},$$

ami normális eloszlásból származó adatok esetén Student-eloszlású (másnéven t -eloszlású), melynek szabadsági foka a

$$\left(\frac{\hat{s}_{n_1}^2}{n_1} + \frac{\hat{s}_{n_2}^2}{n_2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\hat{s}_{n_1}^4}{n_1^2(n_1 - 1)} + \frac{\hat{s}_{n_2}^4}{n_2^2(n_2 - 1)} \right)^{-1}$$

kifejezéssel becsülhető. Ennek értéke a mi esetünkben kb. 447. Ilyen szabadsági fokú Student-eloszlás a gyakorlati alkalmazásokban már szinte standard normális eloszlásnak tekinthető. Másrészt azt is tudjuk, hogy

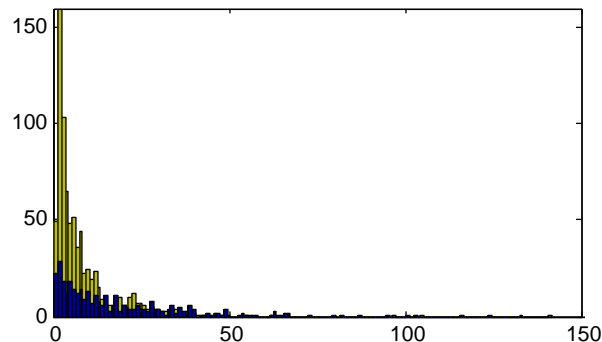
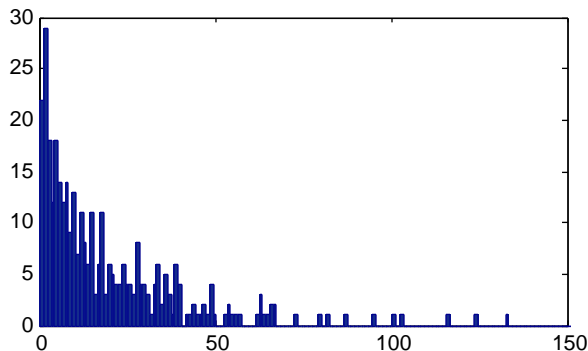
a próbatisztika formulája nagy n_1 és n_2 esetén nem normális eloszlásból származó adatoknál is (H_0 fennállásakor) közelítőleg standard normális eloszlású. A közelítés miatt használhatjuk tehát a kétmintás t -próbához tartozó `ttest2` MATLAB függvényt. A függvény értéke 0, ha a nullhipotézis elfogadható 95%-os szignifikancia szinten, és 1 akkor, ha nem. A `'Vartype'`, `'unequal'` jelentése: nem tételezzük fel a szórások egyenlőségét; a `'Tail'`, `'left'` jelentése: bal oldali ellenhipotézis. A péntekre vonatkozó adatokat tartalmazza a `pentek`, a vasárnapra vonatkozóakat pedig a `vasarnap` vektor. Ekkor

```
>> ttest2(pentek,vasarnap,'Vartype','unequal','Tail','left')
```

```
ans =
```

```
1
```

A kapott eredmény szerint az $m_1 - m_2 \geq 0$ nullhipotézist elutasítjuk, az $m_1 - m_2 < 0$ (azaz $m_2 > m_1$) ellenhipotézist elfogadjuk, tehát vasárnap 7 és 9 között nagyobb a követési idő várható értéke, mint pénteken a hasonló időszakban.



4.7. ábra. A másodpercben mért követési időre vonatkozó gyakorisági hisztogram 04.14-én vasárnap (balra) és ugyanez együtt ábrázolva a 04.12-én, pénteken mért gyakorisági hisztogrammal (jobbra).

4.5.3. A követési idő összehasonlítása délelőtt és délután

Vizsgáljuk meg, hogy igaz-e 95%-os szignifikancia szinten, hogy egyazon nap délelőttjén és délutánján mért követési idők várható értéke egyenlő! A kiválasztott nap legyen 04.16 (kedd), a vizsgált időszakok pedig legyenek a reggel 7 és 9, illetve a délután 3 és 5 óra közötti időtartamok. Az egyes időszakokhoz tartozó követési időközöket tartalmazza a `delelott` és a `delutan` vektor. Mivel a szórások egyenlőségét most sem tételezzük fel, továbbá kétoldali ellenhipotézisünk van, ezért a `ttest2` függvényt a `'Vartype'`, `'unequal'` és a `'Tail'`, `'both'` opciókkal használjuk:

```
>> ttest2(delelott,delutan,'Vartype','unequal','Tail','both')
ans =
     1
```

Ezek szerint nem igaz 95%-os szignifikancia szinten, hogy a vizsgált időszakokban a követési idő várható értéke egyenlő. A követési idők átlaga délelőtt 9,0759 s, délután pedig 11,0215 s. Vizsgáljuk most meg azt, hogy igaz-e 95%-os szignifikancia szinten az, hogy délután szigorúan nagyobb a követési idő várható értéke, tehát a délelőtti és a délutáni várható érték különbsége szigorúan kisebb nullánál. Ezt nyilván az ellenhipotézisben fogalmazhatjuk meg, így a kritikus tartomány bal oldalon fog elhelyezkedni. Ennek megfelelően a függvényt a `'Tail'`, `'left'` opcióval használjuk:

```
>> ttest2(delelott,delutan,'Vartype','unequal','Tail','left')
ans =
     1
```

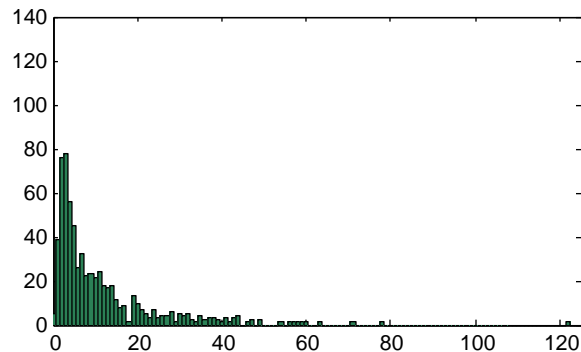
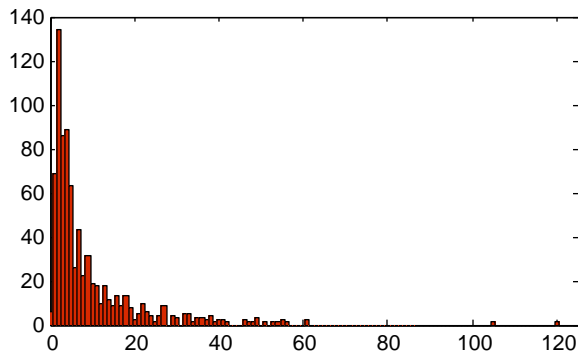
Vagyis ismét az ellenhipotézist fogadjuk el, tehát az adott szignifikancia szinten igaz, hogy a délután mért követési idő várható értéke több, mint a délelőtti.

A `ttest2` függvény használható még a következő kimenő változókkal is:

```
>>[h,p,ci,stats]=ttest2(delelott,delutan)
```

Az egyes változók jelentése:

- h : 0, ha a nullhipotézist elfogadjuk, 1, ha elutasítjuk.
- p : Annak valószínűsége, hogy a H_0 nullhipotézis fennállása esetén egy minta legalább olyan szélsőséges, mint a ténylegesen kapott minta (az angol nyelvű szakirodalomban gyakran p -value néven emlegetett érték).
- ci : A várható értékek különbségére vonatkozó konfidencia intervallum.
- $stats$: További statisztikai jellemzők: a próbastatisztika értéke ($tstat$), szabadsági fok (df), korrigált tapasztalati szórások (sd).



4.8. ábra. A másodpercben mért követési időre vonatkozó gyakorisági hisztogram 04.16-án kedden 7 és 9 óra között (balra), illetve 15 és 17 óra között (jobbra).

4.5.4. A délutáni követési idő összehasonlítása kedden és pénteken

Vizsgáljuk meg, hogy igaz-e 95%-os szignifikancia szinten, hogy egy hétközi (kedd) és egy pénteki napon délután a követési idő várható értéke egyenlő-e! A napok legyenek 04.12 (péntek) és 04.16. (kedd), a vizsgált időszak pedig a délután 3 és 5 óra közötti. Az adatok kiválogatását és a követési idők meghatározását a már látott módon végezzük el. A keddi adatokat tartalmazza a `kedd`, a péntekieket pedig a `pentek` vektor. Használjuk a `tttest2` függvényt az imént megismert módon:

```
>> [h,p,ci,stats]=tttest2(kedd, pentek, 'Vartype', 'unequal', 'Tail', 'both')
```

```
h =
```

```
0
```

```
p =
```

```
0.4555
```

```
ci =
```

```
-0.8740    1.9478
```

```
stats =
```

```
  tstat: 0.7465
```

```
   df: 1.3295e+03
```

```
   sd: [12.5804 13.6746]
```

A kapott eredményből kiolvasható, hogy a nullhipotézist elfogadjuk az adott szignifikancia szinten, a várható értékek különbségére vonatkozó konfidencia intervallum $(-0,8740; 1,9478)$, a próbastatisztika értéke 0,7465, a Student-eloszlás szabdasági foka 1329 (tehát gyakorlatilag standard normális eloszlásról van szó), a korrigált tapasztalati szórás kedden 12,5804, pénteken pedig 13,674.

4.6. A sebesség várható értékére vonatkozó vizsgálatok

4.6.1. A sebesség összehasonlítása a két haladási irányban

A 4.4. és a 4.5. ábrán az látszik, hogy a sebesség nagyjából 50 km/h körül ingadozik. Először azt vizsgáljuk meg mindkét irányra, hogy elfogadható-e 95%-os szignifikancia szinten az az állítás, hogy a sebesség várható értéke 50 km/h . Emlékezzünk arra, hogy az elhaladó járművek sebességét a beolvasás után létrehozott `adat1.txt`, illetve `adat2.txt` fájl harmadik oszlopa tartalmazza, a haladási iránynak megfelelően. A hipotézis vizsgálatára a `ttest` függvény használható (ugyanúgy, mint a már látott kétmintás esetben), ennek első argumentuma az adatokat tartalmazó vektor, a második a feltételezett várható érték.

```
>> ttest( adat1(:,3),50)
```

```
ans =
```

```
1
```

Tehát 95%-os szignifikancia szinten nem igaz, hogy a sebesség várható értéke 50 km/h . Hasonló eredményt kapunk a másik haladási irányra is. A `mean` paranccsal a mért sebességek átlagára $47,9696$ (1-es irány), illetve $46,1623$ (2-es irány) adódik, érdemes tehát megvizsgálni, hogy az 1-es irányban mért sebesség várható értéke nagyobb-e, mint a 2-es irányban mérté. Ezt a már ismert `ttest2` függvénnyel tesszük meg, ahol nem tételezzük fel a szórások egyenlőségét, az elutasítási tartomány pedig bal oldali:

```
>> ttest2( adat1(:,3),adat2(:,3),'Vartype','unequal','Tail','left')
```

```
ans =
```

```
0
```

Tehát 95%-os szignifikancia szinten elfogadható az az állítás, hogy az 1-es irányban nagyobb a sebesség várható értéke, mint a 2-es irányban.

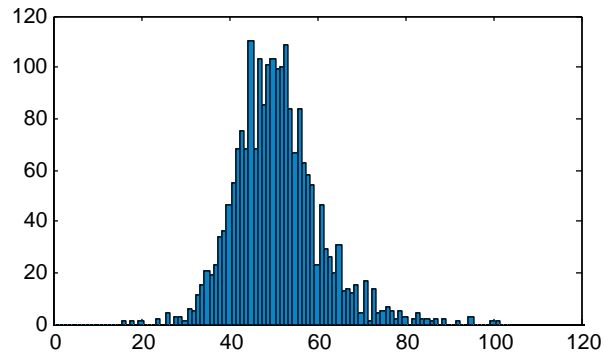
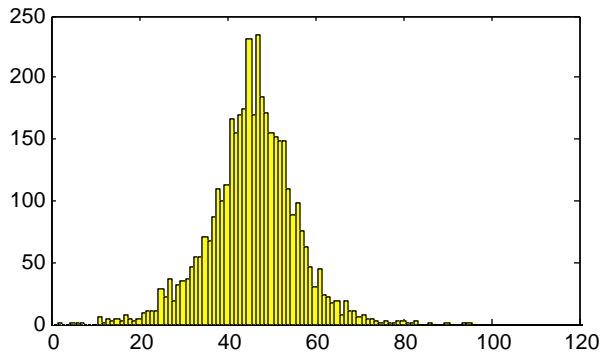
4.6.2. Egy hétköznap és egy vasárnap adatainak összehasonlítása

A hétvégével kapcsolatban azt gondolhatjuk, hogy akkor nyugodtabbak az emberek, ezért lassabban is vezetnek. Másrészt tudjuk azt is, hogy olyankor kisebb a forgalom, tehát lehetőség nyílik a nagyobb sebességű haladásra.

Most egy szerda (04.10.) és egy vasárnap (04.14.) esetében hasonlítjuk össze a sebességek várható értékét. Mindkét napon 7 és 19 óra között tekintjük a mérési adatokat, a választott haladási irány legyen az 1-es. Ekkor a sebességek átlaga (km/h) szerdán 45,7929 (a 2-es irányban 46,6068), vasárnap pedig 51,0713 (a 2-es irányban 51,1750). A hipotézisünk tehát az, hogy a sebesség várható értéke vasárnap szignifikánsan nagyobb, mint szerdán.

A hipotézist ismét `ttest2` függvénnyel vizsgáljuk a `'Vartype'`, `'unequal'` és `'Tail'`, `'left'` beállításokkal.

Mivel a kapott eredmény 0, ezért 95%-os szignifikancia szinten elfogadható, hogy az adott időszakban vasárnap nagyobb a sebesség várható értéke, mint szerdán (ugyanazt az eredményt kapjuk a másik irányra is).



4.9. ábra. A km/h -ban mért sebességre vonatkozó gyakorisági hisztogram 04.10-én szerdán (balra), és 04.14-én vasárnap (jobbra), mindkét napon 7 és 19 óra között.

4.7. Eloszlások vizsgálata Kolmogorov–Szmirnov-próbával

4.7.1. A Kolmogorov–Szmirnov-próba

A Kolmogorov–Szmirnov-próba egy nem paraméteres statisztikai próba, amellyel ellenőrizhető, hogy egy valószínűségi változónak tényleg az-e az eloszlása, amelyet feltételeztünk (ez az egymintás eset), illetve két valószínűségi változó eloszlása megegyezik-e (ez a kétmintás eset).

Egymintás eset: Az ismeretlen eloszlású X valószínűségi változóra vonatkozó X_1, X_2, \dots, X_n minta származhat-e az $F_0(x)$ eloszlásfüggvénnyel rendelkező sokaságból? Az X valószínűségi változó ismeretlen eloszlásfüggvénye $F(x)$, a feltételezett eloszlásfüggvény pedig $F_0(x)$. Ekkor a nullhipotézis és az ellenhipotézis:

$$H_0 : F(x) = F_0(x)$$

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x)$$

A próba során a minta alapján meghatározott $F_n(x)$ tapasztalati eloszlásfüggvényt hasonlítjuk össze a feltételezett elméleti $F_0(x)$ eloszlásfüggvénnyel a

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$$

próbatasztika segítségével.

Kétmintás eset: Az ismeretlen eloszlású X és Y valószínűségi változókra vonatkozó X_1, X_2, \dots, X_n és Y_1, Y_2, \dots, Y_m minta származhat-e azonos eloszlásfüggvénnyel rendelkező sokaságból? Az X valószínűségi változó ismeretlen eloszlásfüggvénye $F(x)$, az Y valószínűségi változó szintén ismeretlen eloszlásfüggvénye $G(x)$. Ekkor a nullhipotézis és az ellenhipotézis:

$$H_0 : F(x) = G(x)$$

$$H_1 : F(x) \neq G(x)$$

A próba hasonló az egymintás esethez, csak itt a próbatasztikában $F_0(x)$ helyét a $G_m(x)$ tapasztalati eloszlásfüggvény veszi át.

4.7.2. A sebesség eloszlásának vizsgálata

A 4.4. ábrán láttuk, hogy a sebességek mindkét irányban 50 km/h körül koncentrálnak. A 4.6.1. részben azt is láttuk, hogy a két irányban mért sebesség várható értéke nem egyenlő, így természetesen ezek az adatok nem származhatnak ugyanolyan eloszlásból. A gyakorisági hisztogramok emlékeztetnek a normális eloszlás sűrűségfüggvényére, érdemes tehát megvizsgálni, hogy a két irányban mért sebesség adatok származhatnak-e (nyilván két különböző) normális eloszlásból. A feltételezett normális eloszlás várható értékét a mintából számolt átlaggal, szórását a korrigált tapasztalati szórással azonosítjuk. A vizsgálatot a `kstest` függvénnyel végezzük el.

Ha a függvényt `kstest(y)` formában alkalmazzuk, akkor azt ellenőrzi 95%-os szignifikancia szinten, hogy az y vektorban szereplő értékek származhatnak-e standard normális eloszlásból. Ha a kapott érték 0, akkor a hipotézist elfogadjuk, ha 1, akkor elutasítjuk. Tudjuk azt is, hogy ha X normális eloszlású valószínűségi változó m várható értékkel és σ szórással, akkor $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ standard normális eloszlású lesz. Elég tehát azt megvizsgálnunk, hogy a standardizálással kapott értékek származhatnak-e standard normális eloszlásból.

```
>> kstest( ( adat1(:,3)-mean(adat1(:,3)) ) / sqrt( var(adat1(:,3)) ) )
ans =
     1
```

Ezek szerint 95%-os szignifikancia szinten nem igaz, hogy az 1-es irányban mért sebességek normális eloszlásból származnak. Hasonló eredményt kapunk a 2-es irányra is.

Úgy is eljárhattunk volna (és ha nem normális eloszlásról van szó, akkor ezt kell tennünk), hogy megadunk egy eloszlást és annak eloszlásfüggvényével hasonlítjuk össze az adatokból készített tapasztalati eloszlásfüggvényt. Eloszlást a `makedist` paranccsal adhatunk meg. Esetünkben ez így festene:

```
>> eloszlas = makedist('Normal','mu',mean(adat1(:,3)), 'sigma', sqrt( var(adat1(:,3)) ) );
```

Ezután ennek az eloszlásfüggvényével hasonlítjuk össze a tapasztalati eloszlásfüggvényt:



```
>> kstest( adat1(:,3), 'CDF', eloszas)
```

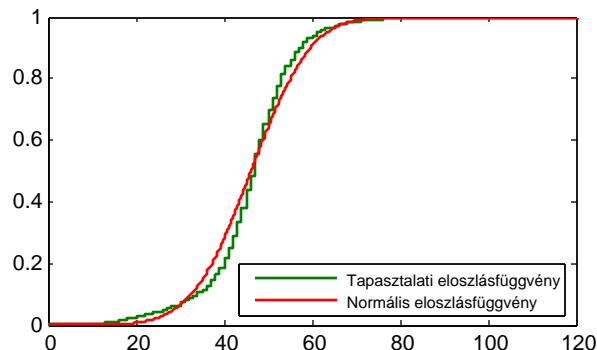
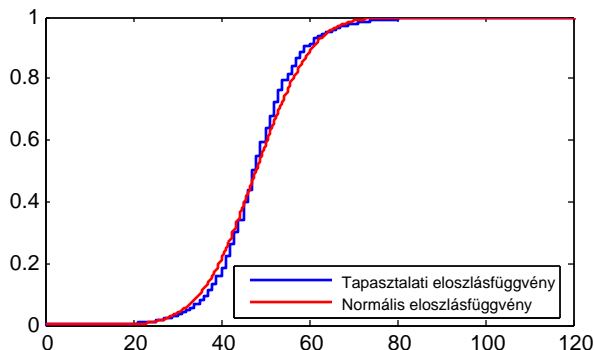
```
ans =
```

```
1
```

A kapott eredmény (és így a következtetés is) nyilván ugyanaz, mint előbb.

A tapasztalati eloszlásfüggvényt a `cdfplot` paranccsal rajzoltathatjuk ki. Ennek argumentuma az adatokat tartalmazó vektor. A bal oldali ábrát például az alábbi módon kaphatjuk:

```
>> cdfplot( adat1(:,3) )  
>> hold;  
>> plot( 0:0.1:120, normcdf(0:0.1:120, mean(adat1(:,3)), sqrt(var(adat1(:,3))), 'r') );  
>> legend('Tapasztalati eloszlásfüggvény', 'Normális eloszlásfüggvény');
```



4.10. ábra. A km/h -ban mért sebesség adatokból meghatározott tapasztalati eloszlásfüggvény és a mintából számolt átlagnak és szórásnak megfelelő normális eloszlásfüggvény az 1-es (bal oldalon) és a 2-es (jobb oldalon) irányra.

4.7.3. Követési idők eloszlásának összehasonlítása

A 4.5.1. részben láttuk, hogy a 04.05-én és a 04.12-én reggel 7 és 9 között mért követési idők várható értéke 95%-os szignifikancia szinten megegyezik. Érdekes azt is megvizsgálni, hogy ugyanolyan eloszlásból származnak-e az adatok. Igaz-e tehát 95%-os szignifikancia szinten, hogy a két minta elméleti eloszlásfüggvénye azonos? A kérdésre a Kolmogorov–Szmirnov-próba kétmintás esetével adhatunk választ. Ekkor a `kstest2` függvényt alkalmazzuk, melynek egyik argumentuma az egyik adatsor, a másik pedig a másik adatsor. Ha a `reggel1` vektor tartalmazza az egyik adatsort, a `reggel2` vektor a másikat, akkor:

```
>> kstest2(reggel1, reggel2)
```

```
ans =  
0
```

Tehát 95%-os szignifikancia szinten igaz, hogy az adatok azonos eloszlásból származnak.

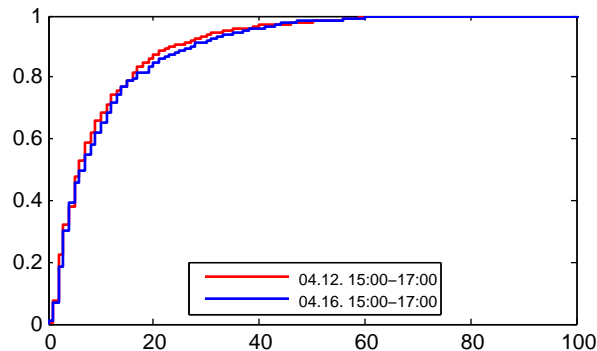
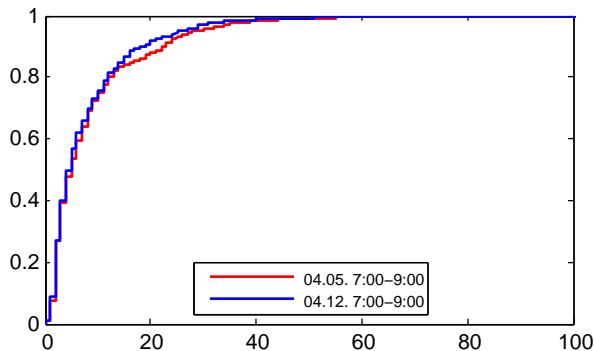
A 4.5.4. részben láttuk, hogy a 04.12-én (pénteken) és a 04.16-án (kedden), délután 3 és 5 óra között mért követési idők várható értéke 95%-os szignifikancia szinten megegyezik. Most is megvizsgáljuk, hogy elfogadható-e az az állítás 95%-os szignifikancia szinten, hogy az adatok azonos eloszlásból származnak. Ha a `kedd` vektor tartalmazza az egyik adatsort, a `pentek` vektor a másikat, akkor:

```
>> kstest2(kedd, pentek)
```

```
ans =  
0
```

Tehát most is igaz 95%-os szignifikancia szinten, hogy az adatok azonos eloszlásból származnak. Az egymintás esethez hasonló itt is kirajzoltatjuk a tapasztalati eloszlásfüggvényeket. A bal oldali ábrát például az alábbi módon kaptuk:

```
>> cdfplot(reggel1);  
>> hold;  
>> cdfplot(reggel2);  
>> legend('04.05. 7:00-9:00', '04.12. 7:00-9:00');
```



4.11. ábra. A másodpercben mért követési időközökre vonatkozó tapasztalati eloszlásfüggvények 04.05-én és 04.12-én reggel 7 és 9 óra között (balra), 04.12-én és 04.16-án délután 3 és 5 óra között (jobbra).

4.8. Önálló feladatok

1. Keressünk egy csekély forgalmú útszakaszt és jegyezzük fel a percenként áthaladó autók számát. Vizsgáljuk meg, hogy a kapott értékek Poisson-eloszlásból származnak-e!
2. Ismételjük meg a mérést egy másik napszakban (vagy másik napon), majd vizsgáljuk meg, hogy a két adatsor azonos eloszlásból származik-e!
3. A rendelkezésünkre álló [forgalmiadatok.txt](#) fájl adatai alapján keressünk hasonló statisztikai jellemzőkkel rendelkező időszakokat! A vélt hasonlóságot ellenőrizzük a várható értékek és az eloszlások összehasonlításával!

5. Ékszíjhajtás tervezése

5.1. Feladat

A alábbi fényképen látható dugattyús kompresszort egy villanymotor ékszíjjal hajt.

Tervezze meg a hajtást az üzemi körülmények és az alábbi adatok alapján.



Üzemi körülmények

- a hajtó gép egyfázisú villanymotor , dinamikus indulás után egyenletes fordulatszámmal
- a kompresszor a levegő felhasználástól függően szakaszos üzemű

Adatok:

- az átvienő teljesítmény $P = 1,5kW$
- a motor fordulatszáma $n = 1440 \frac{1}{min}$

- az üzemi tényező $c_2 = 1,2$
- a hajtó tárcsa átmérője $d = 80mm$
- a szíjsebesség $v = 20 \frac{m}{sec}$
- az áttétel $i = 3$
- a tengelytáv $a = 400mm$

Feladatok:

1. Határozza meg a hajtott tárcsaátmérőt!
2. Válasszon ékszíjat!
3. Állapítsa meg a használandó szíj darabszámot!
4. Határozza meg a jellemző és a közelítő ékszíjhosszt!
5. Számítsa ki a szükséges előfeszítő erőt!
6. Készítsen alkatrészrajzot a hajtó és a hajtott tárcsáról!

Kiviteli szempontok

- A számítást a feladatot kiadó Tanszék által meghatározott formai követelmények betartásával készítse el.
- A számításokban az értékeket megfelelő mértékegységekben behelyettesítve használja.
- Az eredmények csak mértékegységekkel elfogadhatók.
- A számítások rendezett kézírással vagy számítógépes támogatással készíthetők.

Mellékletek:

- Ellenőrző program EXCEL-ben [Melléklet megnyitása](#)

5.2. Megoldás

1. A hajtott tárcsaátmérő meghatározása

Az áttétel fogalma alapján $i = \frac{d_{\text{hajtott}}}{d_{\text{hajtó}}} = \frac{d_2}{d_1}$ képletből

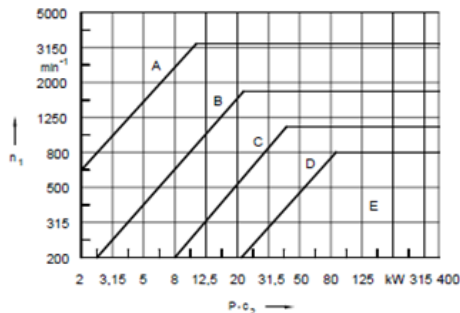
$$d_2 = i \cdot d_1 = 3 \cdot 80 = 240 \text{ mm}$$

2. Ékszj választása

Az átvindó teljesítmény és a hajtó fordulatszám ismeretében az alábbi diagram alapján választható ékszj.

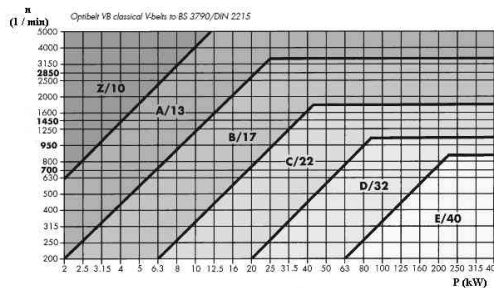
Az üzemi tényezővel növelt átvindó teljesítmény $P \cdot c_2 = 1,5 \cdot 1,2 = 1,8 \text{ kW}$ figyelembevételével az „A” jelű ékszj választása javasolt. Szakirodalmi adatok szerint ezzel a típussal 1 db szj névleges teljesítmény

$$P_n = 1,8 \text{ kW}$$

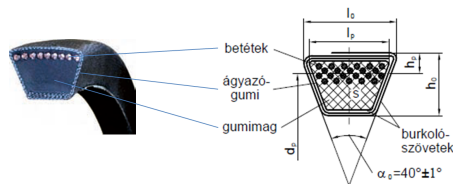


Az interneten több hazai és külföldi hajtóelemeket gyártó és forgalmazó cég termékkatalógusa található. A típusok és a méretek jelölésében több hasonlóság és eltérés is tapasztalható.

Az alábbi kép az előzőhöz hasonló diagramot mutat.



Az ékszíjak keresztmetszete



3. Az ékszíjak darabszámának meghatározása

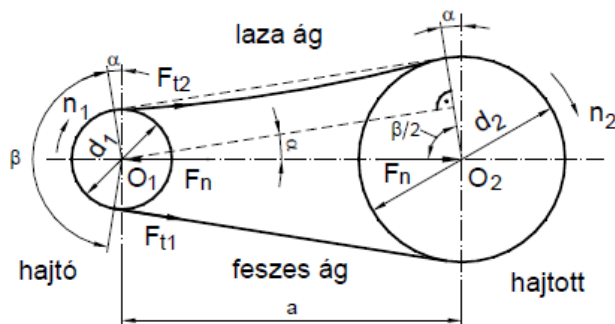
Szakirodalmi ajánlások figyelembevételével az átfogási szögtől függő tényező $c_1 = 0,8$ és a szíj jellemző hosszától függő tényező $c_3 = 1,1$ előzetesen felvett értékkel számolva a szükséges darabszám

$$z = \frac{P \cdot c_2}{P_n \cdot c_1 \cdot c_3} = \frac{1,5 \cdot 1,2}{1,8 \cdot 0,8 \cdot 1,1}$$

A választás legyen 1 db „A” jelű ékszíj. Ez biztonsággal megfelel, mert a fenti diagram szerint a kisebb keresztmetszetű „Z” is elegendő lenne.

4. Ékszíjhosszak meghatározása

Az átfogási szög a kisebbik tárcsán az alábbi ábra szerinti jelölésekkel



$$\alpha = \arcsin \frac{d_2 - d_1}{2 \cdot a} = \arcsin \frac{240 - 80}{2 \cdot 400} = 11,53^\circ$$

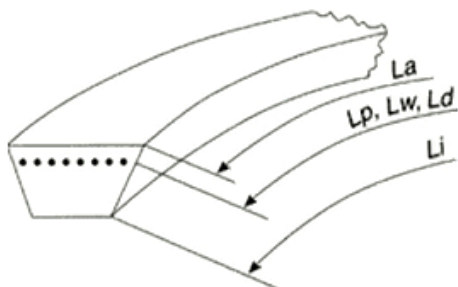
$$\beta = 180^\circ - 2 \cdot \alpha = 180^\circ - 2 \cdot 11,53^\circ = 156,94^\circ$$

A számított belső szíjhossz jó közelítéssel

$$L \approx 2 \cdot a + \frac{\pi}{2} \cdot (d_2 + d_1) + \frac{d_2 - d_1}{4 \cdot a} = 2 \cdot 400 + \frac{\pi}{2} \cdot (240 + 80) + \frac{240 - 80}{2 \cdot 400} = 1302,5 \text{ mm}$$

A választott hossz a „Melléklet”-ben található egyik gyártó termék katalógusa alapján 1320 mm lehet.

A szíjak különböző hosszának értelmezését a következő ábra szemlélteti.

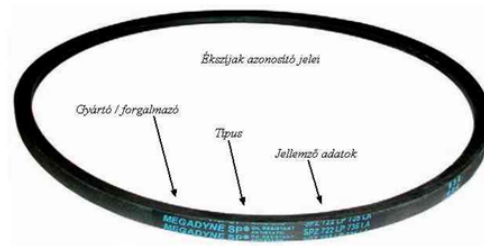


- L_a : külső hossz
- L_p, L_w, L_d : jellemző hossz
- L_i, L : belső hossz

A választott szabványos hossz 1320 mm. A nagyobb méret miatt a villanymotor rögzítését állíthatóra, sőt utánállíthatóra kell tervezni! Több lehetőség választható. Pl.:

- a hajtó motor tartójában a lefogató csavaroknál hosszirányú horony készítenőd. A szükséges szíj feszesség beállítása után a csavarkötés rögzíthető
- a motor egy olyan csúsztatható alátételre rögzítenőd, amelyik egy csavarorsóval mozgatható és egy csavaranyával az orsó biztosítható
- rugós szíj feszítő egység

A gyártók az ékszíjakon általában a következő jellemzőket adják meg:



5. A szükséges előfeszítő erő számítása

A nyomatékátvitelből származó kerületi erő

$$F_k = \frac{P}{v} = \frac{1500[w = Nm/s]}{6,02[m/s]} = 249,17N$$

A feszítőerő, amely a csapágyaknak sugárirányú terhelést jelent

$$F_e \approx 2 \cdot F_k = 2 \cdot 249,17 = 498,34N$$

Ellenőrző számítás

A szíjfrequencia, azaz a másodpercenkénti hajlítások száma $z = 2$ tárcsa esetén $f = \frac{v \cdot z}{L} = \frac{6,02[m/s] \cdot 2}{1,32[m]} = 9,12 \frac{1}{s}$, ami a szakirodalom 15...20 1/s ajánlási tartománya alatt van ahol a szíjsebesség:

$$v = \frac{d_1 \cdot \pi \cdot n_1}{1000} = \frac{80 \cdot \pi \cdot 1440}{1000 \cdot 60} = 6,02 \frac{m}{s}$$

6. Alkatrészrajzok készítése

Kiviteli szempontok

- A tárcsák horonyméretei a választott ékszíjnak megfelelően a vonatkozó szabvány szerintiek legyenek.
- A tárcsák csatlakozó méretei (furat és reteszhorony méretek, bordázat, stb.) az adott motortól és kompresszortól függenek.
- A szabad felületek kialakítása a gazdaságos gyárthatóság figyelembevételével önálló lehet.

5.3. Felhasznált irodalom

1. Gépszerkezettan III
2. <http://powerbelt.hu>
3. www.optibelt.de
4. www.capribelt.hu

5.4. Mellékletek

(Ha területi lehetőség van, a szíjválasztást segítő „optibelt” cég katalógusának 6 lapja csatolható. Ezek közül egyet bemutatok)

optibelt V/B Classical V-Belts

BS 3790/DIN 2215/ISO 4184



A/13

Section A/13

Belt no.	Outside length ISO L _o (mm)	Inside length L _i (mm)	Belt no.	Outside length ISO L _o (mm)	Inside length L _i (mm)	Belt no.	Outside length ISO L _o (mm)	Inside length L _i (mm)	Belt no.	Outside length ISO L _o (mm)	Inside length L _i (mm)
A 16	437	407	A 41	1071	1041	A 69	1780	1750	A 105	2697	2667
A 18	487	457	A 41½	1080	1050	A 70	1805	1775	A 107	2755	2725
A 19	510	480	A 42	1090	1060	A 71	1830	1800	A 108	2773	2743
A 20	538	508	A 42½	1105	1075	A 72	1855	1825	A 110	2850	2820
A 21	565	535	A 43	1130	1100	A 73	1884	1854	A 112	2875	2845
A 22	590	560	A 43½	1135	1105	A 74	1910	1880	A 114	2926	2896
A 23	605	575	A 44	1150	1120	A 75	1930	1900	A 116	2976	2946
A 23½	630	600	A 44½	1173	1143	A 76	1960	1930	A 118	3050	3020
A 24	640	610	A 45	1180	1150	A 77	1984	1954	A 120	3078	3048
A 25	660	630	A 46	1198	1168	A 78	2010	1980	A 124	3180	3150
A 26	680	650	A 46½	1210	1180	A 79	2030	2000	A 128	3280	3250
A 26½	700	670	A 47	1230	1200	A 80	2062	2032	A 132	3380	3350
A 27	716	686	A 47½	1245	1215	A 81	2090	2060	A 136	3484	3454
A 27½	730	700	A 48	1250	1220	A 82	2113	2083	A 140	3560	3530
A 28	740	710	A 48½	1255	1225	A 83	2130	2100	A 144	3688	3658
A 29	760	730	A 49	1280	1250	A 83½	2150	2120	A 148	3780	3750
A 29½	780	750	A 50	1300	1270	A 84	2164	2134	A 158	4030	4000
A 30	797	767	A 51	1330	1300	A 84½	2180	2150	A 167	4280	4250
A 31	805	775	A 52	1350	1320	A 85	2190	2160	A 187	4780	4750
A 31½	830	800	A 53	1380	1350	A 86	2230	2200	A 197	5030	5000
A 32	843	813	A 54	1405	1375	A 87	2240	2210			
A 32½	855	825	A 55	1430	1400	A 88	2270	2240			
A 33	871	841	A 56	1452	1422	A 89	2291	2261			
A 34	880	850	A 57	1480	1450	A 90	2316	2286			
A 34½	905	875	A 58	1505	1475	A 91	2341	2311			
A 35	919	889	A 59	1530	1500	A 92	2367	2337			
A 35½	930	900	A 60	1555	1525	A 93	2390	2360			
A 36	944	914	A 61	1580	1550	A 94	2418	2388			
A 37	955	925	A 62	1605	1575	A 95	2443	2413			
A 37½	980	950	A 63	1630	1600	A 96	2468	2438			
A 38	995	965	A 64	1655	1625	A 97	2494	2464			
A 38½	1005	975	A 65	1680	1650	A 98	2530	2500			
A 39	1030	1000	A 66	1706	1676	A 100	2570	2540			
A 40	1046	1016	A 67	1730	1700	A 102	2621	2591			
A 40½	1060	1030	A 68	1755	1725	A 104	2680	2650			

6. Szilárd illesztésű kötés méretezése

6.1. Feladat

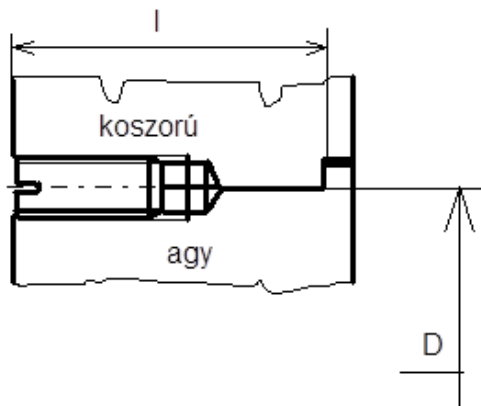
Szilárd illesztésű kötés két technológiával készíthető:

- hidegen sajtolással
- melegítéssel vagy mélyhűtéssel

Az alábbi mintafeladat a hőfok-különbséggel történő szereléshez kapcsolódó számításokat mutatja be.

Egy nagy méretű csigakerék bronzból készült, fogazott koszorúját anyagtakarékosság miatt zsugorkötéssel szerelik az acél agyra. Biztonsági okból elfordulás ellen hernyócsavarral is rögzítik.

A beépítés vázlata:



Adatok:

- az átvíendő teljesítmény $P = 50kW$
- a fordulatszám $n = 31/sec$
- az illesztett átmérő $D = 250mm$
- a felületek közötti súrlódási tényező $\mu = 0.1$
- a megengedett felületi nyomás bronzra $p_{meg} = 50MPa$
- a felületek közötti illeszkedés $H7/s6$
- a bronz hővezetési együtthatója $\alpha = 17,5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}C}$
- a környezeti hőmérséklet $t_0 = 20^{\circ}C$

Feladatok:

1. Határozza meg az agy felfekvő felületének hosszát!
2. Ábrázolja célszerűen választott léptékkal a tűrésmezőket, a határméreteket és a fedéseket!
3. Milyen hőfokúra kell hevíteni a fogazott koszorút a zsugorkötés létrehozásához?
4. Készítsen összeállítási rajzot a szerelt csigakerékről!

Mellékletek:

- Ellenőrző program EXCEL-ben [Melléklet megnyitása](#)

6.2. Megoldás

1. Az agy felfekvő felületének hossza

Az átvendő csavarónyomaték

$$M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} = \frac{50 \cdot 10^3 [W = Nm/s]}{2 \cdot \pi \cdot 3 [1/s]} = 2653,92 Nm$$

A nyomatékátvitelből származó kerületi erő az agyon, amellyel a súrlódó erő határesetben egyező

$$F_k = F_s = \frac{2 \cdot M}{D} = \frac{2 \cdot 2653,92 [Nm]}{0,25 [m]} = 21231,36 N$$

A kötést összeszorító, a palástra merőleges ún. normál irányú erő

$$F_N = \frac{F_s}{\mu} = \frac{21231,36}{0,1} = 212313,6 N$$

A paláston fellépő felületi nyomás

$$p = \frac{F_N}{A} = \frac{F_N}{D \cdot \pi \cdot l}$$

A fenti képletből a szükséges hossz

$$l = \frac{F_N}{D \cdot \pi \cdot p} = \frac{212313,6}{250 \cdot \pi \cdot 50} = 5,4 mm$$

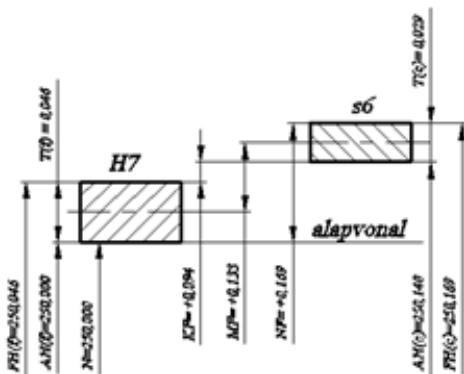
2. Tűréstechnikai számítások

Az illeszkedő felületek a furat és az agy tűrésének választása: $H7/s6$

A mintafeladatban a névleges méret 250 mm, így a

- 250 H7 méret eltérései: $FE_f = +0,046$ mm és $AE_f = 0$
- 250 s6 méret eltérései: $FE_c = +0,169$ mm és $AE_c = +0,140$ mm.

A fenti méretekkel a tűrésmezők elhelyezkedése és a szilárd illeszkedésre jellemző adatok:



Az ábrából látható, hogy az összeszerelése normál hőfokon lehetetlen, mert az agy átmérőjének mindegyik határmérete nagyobb, mint a fogazott koszorú furatának határméretei. Ilyen esetben két technológia választható:

- hidegen sajtolással
- melegen a koszorú melegítésével vagy az agy mélyhűtésével. Szénsavjéggel -70°C , cseppfolyós levegővel -190°C biztosítható.

A következő feladatpontban a melegítéssel történő szerelés hőfok-különbsége számítható

3. A hőfok-különbség meghatározása

Szerelhetőség szempontjából a legkedvezőtlenebb eset, ha a furat az alsó, a csap a felső határméretére készül. Ekkor ún. nagy fedés jön létre, amelynél melegítés hatására a koszorú átmérőjének nagyobb mértékben kell növekedni. Biztonsági okból a számítottnál nagyobb hőfokra célszerű hevíteni.

Ez a következő képlettel biztosítható:

$$\Delta D = \alpha \cdot D \cdot \Delta t = NF + 0,0004 \cdot D$$

A képletből kifejezve

$$\Delta t = \frac{NF + 0,0004 \cdot D}{\alpha \cdot D} = \frac{0,169[mm] + 0,0004 \cdot 250[mm]}{17,5 \cdot 10^{-6}[1/^\circ C] \cdot 250[mm]} = 61,5^\circ C$$

A környezeti hőfok általában $20^\circ C$, így a felmelegítés hőmérséklete $t = 61,5 + 20 = 81,5^\circ C$ legyen.

6.3. Mellékletek

TÁJÉKOZTATÓ ADATOK

Dinamikai tényező(=üzemtényező): a lökészerűen fellépő dinamikus hatások esetén

- nyugodt üzemnél $x = 1,5 \dots 2,0$
- lökészerű terheléseknél $x = 2,2 \dots 3,0$

Megengedhető felületi nyomás anyagpáronként

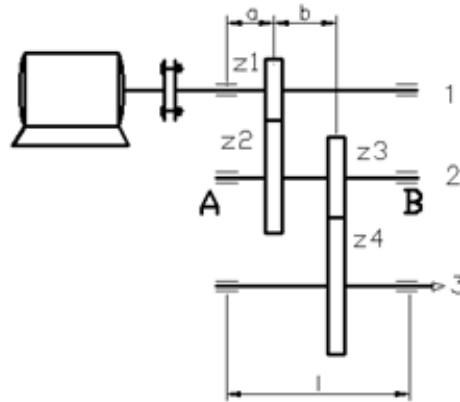
- acél tengely/csap – öntöttvas agy $p_{meg} = 30 \dots 50$ MPa
- acél tengely/csap - acél agy/gyűrű $p_{meg} = 50 \dots 100$ MPa

Anyagminőségek	Kötési technológia	
	hideg sajtolás	melegen felhúzás vagy mélyhűtés
Acél öntöttvason	0,07...0,13 olajjal	0,13...0,18 szárazon
Acél acélöntvényen	0,08...0,14 olajjal	0,1...0,17 olajban
Acél acélon	0,08...0,17 olajjal	0,17...0,36 olajban 0,35...0,4 szárazon
Edzett acél edzett köszörült acélon	0,1...0,2 olajjal	0,2...0,3 szárazon
Acél bronzon vagy sárgarézen	0,05...0,1 szárazon	0,17...0,25 szárazon
Acél alumínium öntvényen	0,03...0,09 szárazon	0,1...0,15 szárazon
Acél acélon korund csiszolóporral	-	0,65

7. Hajtóműrészlet méretezése

7.1. Feladat

Egy hajtómű elrendezését mutatja az ábra.



Adatok:

- az átvitendő teljesítmény $P = 2,5 \text{ kW}$
- a motor fordulatszáma $n = 1440 \text{ 1/min}$
- a fogsámok $z_1 = 24$, $z_2 = 48$, $z_3 = 28$, $z_4 = 84$
- a modul $m = 3 \text{ mm}$
- a távolságok $a = 120 \text{ mm}$ $b = 100 \text{ mm}$ $l = 350 \text{ mm}$
- a tengely anyagára megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 60 \text{ MPa}$

Feladatok:

- Határozza meg a „2” számú közvetítő tengely veszélyes keresztmetszetében az átmérőt.
- A számított érték figyelembevételével tervezze meg a tengelyt (Tervezési szempontok: kétoldalról indulva lépcsős kialakítás, csapágyazási és nyomtatékviteli szempontok figyelembevétele, szerelhetőség, . . .)
- Tervezze meg a csapágyazást! (Kiválasztás számítás alapján, beépítési rajz)
- Készítsen alkatrészrajzot a tengelyről!
- („z₂” kerék geometriai adatainak számítása?)

A tengelyméretezés lépései a „2” tengelynél ([Melléklet megnyitása](#))

(A szövegben utalás a többirányú és síkú erőkkel való számítás lehetőségére, de ez a mintafeladat az alapvető mechanikai ismeretekkel rendelkező hallgatónak ad egy tervezési irányvonalat)

- Áttételek számítása
- Csavarónyomaték „2” tengelyen
- Terhelő erők számítása(2 azonos irányú kerületi erővel)
- Támasztóerők meghatározása
- M_{hmax} meghat.
- M_{red}
- Keresztmetszeti tényező
- Tengelyátmérő a veszélyes keresztmetszetben

7.2. Megoldás

1. A tengely átmérőjének meghatározása

Az áttételek számításának általános képlete

$$i = \frac{n_{hajtó}}{n_{hajtott}} = \frac{z_{hajtott}}{z_{hajtó}} = \frac{d_{hajtott}}{d_{hajtó}}$$

A fenti adatok alapján az áttételek

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{48}{24} = 2 \quad \text{és} \quad i_{34} = \frac{z_4}{z_3} = \frac{84}{28} = 3$$

A „2” számú közvetítő tengely fordulatszáma az áttétel ismeretében

$$n_2 = \frac{n_1}{i_1 2} = \frac{1440}{2} = 720 \frac{1}{min} = 12 \frac{1}{sec}$$

A közvetítő tengelyt terhelő csavarónyomaték

$$M_{c2} = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n_2} = \frac{2,5 \cdot 10^3 [W = Nm/s]}{2 \cdot \pi \cdot 12 [1/s]} = 33,17 Nm$$

A terhelő erők számítása

A fogazaton fellépő erők helyzete és iránya több tényezőtől függ:

A tengelyek egymáshoz viszonyított helyzete Pl: lehetnek azonos vagy más síkban a fogazattól függően több irányú erő ébred. Ebben a mintafeladatban csak a fogaskerek osztkörén fellépő kerületi erők szerepelnek.



Oka: a feladat a tengely- és csapágyméretezés logikai rendszerét kívánja bemutatni, amelyhez alapvető mechanikai és gépszerkezettani / gépelem ismeretek elegendőek. A több síkban és irányban ható erők figyelembevétele egy másik feladatban található, de ehhez már szélesebb mechanikai és a fogazatokkal kapcsolatos ismeretek szükségesek.

A „z₂” – ön fellépő kerületi erő

$$F_{k2} = \frac{2 \cdot M_{c2}}{d_2} = \frac{2 \cdot 33,17}{0,144} = 460,69N$$

ahol a fogaskerék osztókörének átmérője

$$d_2 = m \cdot z_2 = 3 \cdot 48 = 144mm$$

A „z₃” – ön fellépő kerületi erő

$$F_{k3} = \frac{2 \cdot M_{c2}}{d_3} = \frac{2 \cdot 33,17}{0,084} = 789,76N$$

ahol a fogaskerék osztókörének átmérője

$$d_3 = m \cdot z_3 = 3 \cdot 28 = 84mm$$

A támasztóerők számítása



A tengely kéttámaszú tartónak tekinthető, amelyet a támaszközökön belül két azonos irányú koncentrált erő terhel. Az erők azonos iránya a következő ábrából következik.

A terhelő erőkkel szemben ellentétes irányú támasztóerők lépnek fel, amelyek a csapágyakat sugárirányban terhelik.

A támasztóerők a tengely egyensúlyi feltételei alapján határozhatók meg.

Statikai szabály: egy rendszer akkor van egyensúlyban, ha az erők és nyomatékok eredője nulla.

Nyomatéki egyenlet az „A” pontra:

$$M_A = -F_{k2} \cdot a - F_{k3} \cdot (a + b) + F_B \cdot l = 0$$

egyenletből

$$F_B = F_{k2} \cdot a + \frac{F_{k3} \cdot (a + b)}{l} = 460,69 \cdot 120 + \frac{768,76 \cdot 220}{350} = 654,37 N$$

Az erők egyensúlya alapján

$$F_A = -(F_{k2} + F_{k3}) + F_B = -(460,69 + 789,76) + 654,37 = 596,08 N$$

A hajlítónyomatékok számítása

A „z₂” keréknél

$$M_{h2} = F_A \cdot a = -F_{k3} \cdot b + F_B \cdot (l - a - b) = -596,08 \cdot 0,12 = -71,53 Nm$$



A „z₃” keréknél

$$M_{h3} = F_B \cdot (l - a - b) = 654,37 \cdot 0,13 = 85,07 Nm = M_{hmax}$$

tehát a „veszélyes keresztmetszet” itt van

Az eredő (redukált nyomaték) meghatározása

$$M_{red} = \sqrt{M_{c2}^2 + M_{h3}^2} = \sqrt{33,17^2 + 85,07^2} = 91,3 Nm$$

A keresztmetszeti tényező számítása

Az eredő (redukált) feszültség határesetben a fent megadott megengedhető feszültséggel egyenlő.

$$\sigma_{red} = \frac{M_{red}}{K} = \sigma_{meg}$$

képletből kifejezve

$$K = \frac{M_{red}}{\sigma_{meg}} = \frac{91,3 \cdot 10^3}{60} = 1521,66 mm^3$$

Tengelyátmérő meghatározása a „veszélyes keresztmetszet”-ben

A keresztmetszeti tényező kör esetén



$$K = \frac{d_t^3 \cdot \pi}{32}$$

képletből a tengelyátmérő

$$d_t = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot K}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1521,36}{\pi}} = 24,9mm$$

ami a fogaskerekék osztóköréhez viszonyítva arányos.

Konstrukciós okból – a lépcsős tengelykialakítást figyelembe véve - a választott átmérő legyen

$$d_t = 30mm$$

3. Csapágyak méretezése és kiválasztása

A gördülőcsapágyak nagy sorozatban gyártott , szabványos méretekkel készülő gépelemek. Méretezésük az előírt („ várható ”) élettartam és geometriai méretek figyelembevételével a gyártók katalógusaiból történő kiválasztást előzi meg.

Összefüggés a fentiek között:

$$C^p \cdot 10^6 = \text{állandó} = P^p \cdot 3600 \cdot n \cdot L_h$$

más alakban

$$\sqrt[p]{L} = \frac{C}{P} = \frac{3600 \cdot n \cdot L_h}{10^6}$$

ahol:



- L az élettartam alatti körülfordulások száma („élettartam szám”, millió fordulat)
- C alapterhelés, ami csapágyanként változó (N)
- p csapágytípustól függő tényező
- 10^6 viszonyszám
- P egyenértékű terhelés, amelyik figyelembe veszi a radiális és tengelyirányú erőket (N)
- 3600 váltószám „óra és másodperc” időegységek között
- n a csapágy fordulatszáma (1/s)
- L_h tervezett élettartam (üzemóra; géptípustól és üzemeltetési körülményektől függő becsült adat). Lásd: szakirodalmi ajánlott értékek

Ebben a feladatban

- $p = 3$ a tengelyeknél az egysorú mélyhornyú golyóscsapágy megfelelő
- $P = F_B = 654,37$ N csak a nagyobbik sugárirányú terhelés lép fel
- $n_2 = 12$ 1 /s a közvetítő tengely fordulatszáma
- $L_h = 15\ 000$ óra szakirodalmi ajánlás nyugodt üzemű, folyamatosan működő hajtóművekre

Az élettartam szám

$$L = \frac{3600 \cdot 12 \cdot 15000}{10^6} = 648$$

Az alapterhelés



$$C = P \cdot \sqrt[3]{L} = 654,37 \cdot \sqrt[3]{648} = 5660,3N$$

Gyártóművi katalógusból választható csapágy, ahol figyelembe kell venni a szerelhetőség miatti lépcsőzetes tengely kialakítást , irányadó értéknek tekintve a „ veszélyes keresztmetszet ”- ben számított átmérőt.

A választott csapágy az SKF katalógusból legyen

6205 sorozatszámú egysorú mélyhornyú golyóscsapágy, amelynek fő méretei: 25 x 52 x15



8. Parallelogramma emelő méretezése

8.1. Feladat

Adatok:

- a terhelés $G = 7500 \text{ N}$
- az emelési magasság $h = 200 \text{ mm}$
- a karok keresztmetszeti méretei $a = 5 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$
- karok anyagára a rugalmassági modulus $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
- súrlódási tényező az emelőorsónál $\mu = 0,1$
- a forgatókaron kifejtendő kézi erő $F_k = 200 \text{ N}$

Feladatok:

- Számítsa ki a karok hosszát!
- Végezze el a karok szilárdsági méretezését!
- Méretezze a mozgatóorsót!
- Határozza meg a menetes persely hosszát és felfekvő peremének szélességét!
- Méretezze a csapokat!
- Határozza meg a forgatókar méreteit!
- Határozza meg a talplemez és a tartófej méreteit!
- Készítse el az emelő összeállítási rajzát és készítsen alkatrészrajzokat!

Mellékletek:

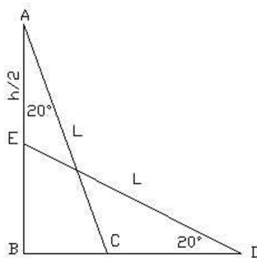
- Ellenőrző program EXCEL-ben [Melléklet megnyitása](#)

8.2. Megoldás

1. A karok hosszának meghatározása

A karok hosszúságát a határ-feltételekből határozhatjuk meg. Az emelés kezdetén a karok a vízszintes helyzetű orsóval legalább 20° -os szöget zárjanak be, kisebb szög esetén ugyanis a karok terhelése túlságosan nagy lesz. Az emelés végén a teljes emelési magasság megtétele után a karok a függőlegeshez képest legalább 20° -os szöget zárjanak be. Ennél kisebb szög esetén ugyanis az emelő stabilitása csökken.

A karok L hosszát az emelés határainál javasolt állásszögből számíthatjuk.



$$AB = h/2 + EB$$

$$AB = L \cdot \cos 20^\circ$$

$$EB = L \cdot \sin 20^\circ$$

$$L = h / 2(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)$$

A példa adataival

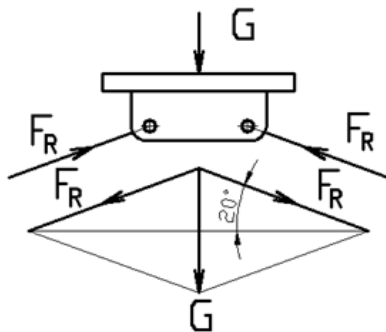
$$L = \frac{200}{2 \cdot (\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)} = 167,3 \text{ mm}$$

egész számra kerekítve

$$L = 170 \text{ mm}$$

2. A karok szilárdsági méretezése

A kar két vége csuklós, ezért a karokban csak rúdírányú erő keletkezik. Az alábbi ábra alapján számítható a karban ébredő erő.



$$F_R = \frac{G}{2} \cdot \sin 20^\circ$$

A feladat adataival

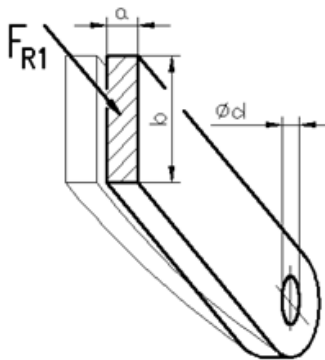
$$F_R = \frac{7500}{2} \cdot \sin 20^\circ = 10967 \text{ N}$$

amely két egymás mellett levő karon hat.

Egy kart $F_{R1} = \frac{F_R}{2} = 5484 \text{ N}$ nyomóerő terhel.



A karok igénybevétele nyomás és kihajlás. Az emelés felső helyzete különösen kedvezőtlen az oldalirányú kihajlás miatt, ezért erre kell ellenőrizni. A karok csuklós befogásúnak tekinthetők.



A ellenőrzés lépései:

A keresztmetszet

$$A = a \cdot b = 5 \cdot 20 = 100 \text{mm}^2$$

Az inercianyomaték

$$I = \frac{b \cdot a^3}{12} = \frac{20 \cdot 5^3}{12} = 208,33 \text{mm}^4$$

Az inerciasugár



$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{208,33}{100}} = 1,44mm$$

A karcsúsági tényező

$$\lambda = \frac{L}{i} = \frac{170}{1,44} = 118,05$$

Kihajlásra rugalmas tartományban az Euler szerinti összefüggés alkalmazható.

A kritikus törőfeszültség

$$\sigma_t = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{118,05^2} = 149,26MPa$$

Egy kar keresztmetszetében ébredő nyomófeszültség

$$\sigma_{ny} = \frac{F_{R1}}{A} = \frac{5484}{100} = 54,84MPa$$

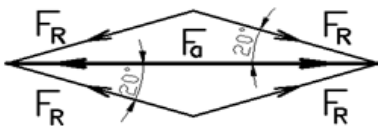
A biztonsági tényező

$$n = \frac{\sigma_t}{\sigma_{ny}} = \frac{149,26}{54,84} = 2,72$$

ami biztonságosnak tekinthető.

3. Mozgatóorsó méretezése

A mozgatóorsó jobb-balmenetű, a legnagyobb terhelése a karok alsó helyzetében keletkezik.



$$F_a = 2 \cdot F_R \cdot \cos 20^\circ$$

A feladat adataival

$$F_a = 2 \cdot 10969,6 \cdot 0,9397 = 20617,43\text{N}$$

Szakirodalmi ajánlások figyelembevételével a választható anyagminőség lehet C10 E jelű betétben edzhető szerkezeti acél.

Kiegészítés:

Az acélok jelölési rendszerében több változás volt. Összehasonlításként a szabványból kivonatolva:

	MSZ 31: 1985 (megszűnt)	MSZ EN 10084	MSZ EN 10072-2
Régi jelölés	C 10		
Aktuális jelölés		C 10 E	1,1121
Szakítószilárdság (N / mm ²)		490...630	
Folyáshatár (N / mm ²)		296	

Az anyagszabványokban a szilárdsági jellemzők egyes mértékegységei „N/mm²”, a számításokban is így találhatók.



A trapézmenetű csavarorsó igénybevétele húzás és csavarás. Az összetett igénybevétel a mechanikában tanultak szerint 1,32 szorzótényezővel vehető figyelembe és így számítható a teherviselő magátmérő.

A megengedhető feszültség a szakirodalom ajánlása szerint $n = 2$ biztonsági tényezővel a folyáshatárból számítható

$$\sigma_{meg} = \frac{R_{eH}}{n} = \frac{296}{2} = 148 \frac{N}{mm^2}$$

A magátmérő minimális értéke

$$d_3 = \sqrt{\frac{1,32 \cdot 4 \cdot F_a}{\sigma_{meg} \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{1,32 \cdot 4 \cdot 20617,43}{148 \cdot \pi}} = 15,3mm$$

A választott menet az alábbi táblázat alapján: **Tr 20 x 4**

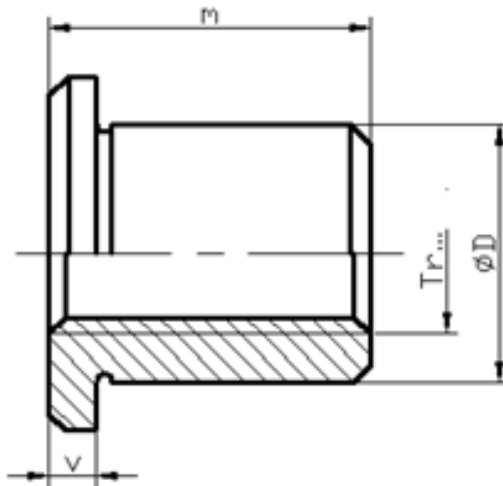
Csavarok													
Trapézmenet						MSZ 207/2							
						Néveleges átmérő	d						
						Menetemelkedés	P						
						Menetemelkedés (többszörös)	P_n						
						Bekezdésszám	$n = \frac{P_n}{P}$						
						Orsómenet magátmérője	$d_3 = d - (P + 2 \cdot a_c)$						
						Anyamenet külső átmérője	$D_2 = d + 2 \cdot a_c$						
						Anyamenet magátmérője	$D_1 = d - P$						
						Középméret	$d_2 = D_2 = d - 0,5 \cdot P$						
						Menetmélység	$h_2 = H_2 = 0,5 \cdot P + a_c$						
						Működő szelvénymagasság	$H_1 = 0,5 \cdot P$						
						Menethézag	a_c						
						Lekerekítés	R_1, R_2						
						Menetárok szélesség	$b = 0,366 \cdot P - 0,54 \cdot a_c$						
						Profiliszög	30°						
Méret													
P, mm													
	1,5	2...5	6...12	14...44									
a_c	0,15	0,25	0,5	1									
R_1	0,075	0,125	0,25	0,5									
R_2	0,15	0,25	0,5	1									
Néveleges átmérő s x P	Közép d = D ₂	Magátmérő Orsó d ₃	Magátmérő Anya D ₁	Külső átmérő D ₂	Mélység h ₂ = H ₂	M. árok sz b	Néveleges átmérő s x P	Közép d = D ₂	Magátmérő Orsó d ₃	Magátmérő Anya D ₁	Külső átmérő D ₂	Mélység h ₂ = H ₂	M. árok sz b
Tr10x2	9	7,5	8	10,5	1,25	0,60	Tr40x7	36,5	32	33	41	4	2,29
Tr12x3	10,5	8,5	9	12,5	1,75	0,96	Tr44x7	40,5	36	37	45	4	2,29
Tr16x4	14	11,5	12	16,5	2,25	1,33	Tr48x8	44	39	40	49	4,5	2,66
Tr20x4	18	15,5	16	20,5	2,25	1,33	Tr52x8	48	43	44	53	4,5	2,66
Tr24x5	21,5	18,5	19	24,5	2,75	1,70	Tr60x9	55,5	50	51	61	5	3,02
Tr28x5	25,5	22,5	23	28,5	2,75	1,70	Tr70x10	65	59	60	71	5,5	3,39
Tr32x6	29	25	26	33	3,5	1,93	Tr80x10	75	69	70	81	5,5	3,39
Tr36x3	34,5	32,5	33	36,5	2,0	0,83	Tr90x12	84	77	78	91	6,5	4,12
Tr36x6	33	29	30	37	3,5	1,93	Tr100x12	94	87	88	101	6,5	4,12
Tr36x10	31	25	26	37	5,5	3,39	Tr140x14	133	124	126	142	8	4,58



Az orsó hossza legfeljebb az emelési magasság kétszerese legyen!

4. Menetes persely méretezése

Egy lehetséges kialakítása a rajz szerinti lehet. A meneteit felületi nyomás és a felfekvő vállat nyírás terheli.



A kis súrlódás miatt anyagminőségként Vöt 5 (MSZ 8579) ónbronz ötvözet javasolt, amelynek szabvány szerinti szakítószilárdsága 190... 240 N/mm².

Szakirodalmi adatként acél és bronz anyagok esetén a megengedett felületi nyomás $p_{meg} = 12,5$ MPa. Az orsó terhelése több menetek körgyűrű felületein oszlik meg. Határesetben

$$p_{meg} = p = \frac{4 \cdot F_a}{z \cdot \pi \cdot (d^2 - D_1^2)}$$

ahol:

- z: menetszám
- d: az orsómenet külső átmérője
- D_1 : az anyamenet magátmérője (a fenti táblázat jelölésével)

A szükséges menetszám a fenti képletből

$$z = \frac{4 \cdot F_a}{p_{meg} \cdot \pi \cdot (d^2 - D_1^2)} = \frac{4 \cdot 20617,43}{12,5 \cdot \pi \cdot (20^2 - 16^2)} = 14,6$$

A persely hossza a $P = 4$ mm menetemelkedéssel

$$m = z \cdot P = 14,6 \cdot 4 = 65,6mm$$

kerekítve 66 mm

A váll igénybevétele nyírás, amely egy hengerpalástot terhel.

A választott persely anyagának szabvány szerinti szakítószilárdsága $190 \dots 240 \text{ N/mm}^2$. A biztonsági tényező $n = 10$ esetén a megengedhető nyírófeszültség az alsó szakítószilárdsági értéket választva

$$\tau = \frac{R_m}{n} = \frac{190}{10} = 19 \frac{N}{mm^2}$$

A persely külső átmérője a menet méretét és oldalanként 5 mm falvastagsággal számolva $D = 30$ mm-re választható.

Határesetben



$$\tau_{meg} = \tau = \frac{F_a}{v \cdot D \cdot \pi}$$

képletből a váll szükséges mérete

$$v = \frac{F_a}{\tau_{meg} \cdot D \cdot \pi} = \frac{20617,43}{19 \cdot 30 \cdot \pi} = 11,5 \text{ mm}$$

kerekítve $v = 12 \text{ mm}$

5. A csuklók csapjainak méretezése

A csapok igénybevétele nyírás és hajlítás. A hajlító igénybevételre történő méretezés az ábrán látható rövid karok miatt nem szükséges, de hatását egy mechanikából ismert tényezővel figyelembe kell venni. Az ábra különböző csukló kialakításokat mutat.

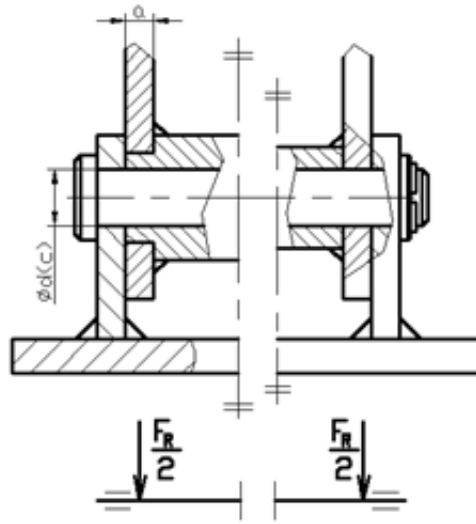
A csap anyaga szerkezeti acél. A „Melléklet”-ben található táblázat segít a választásban. A feladatban E 295 (MSZ EN 10025) ötvözetlen szerkezeti acélt választva a minimális szakítószilárdsága $R_m = 490 \text{ N/mm}^2$ és a folyáshatára $R_{eH} = 294 \text{ N/mm}^2$.

A megengedhető feszültség összetett igénybevételre $n = 2$ biztonsági tényezővel számolva

$$\sigma_{meg} = \frac{R_{eH}}{n} = \frac{284}{2} = 142 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

A nyírószilárdság

$$\tau_{meg} = 0,65 \cdot R_{eH} = 0,65 \cdot 142 = 92,03 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



Határesetben

$$\tau_{meg} = \tau = \frac{4}{3} \frac{F_R}{d^2 \cdot \pi}$$

képletből a csap átmérője

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 4 \cdot F_R}{3 \cdot 2 \cdot \tau_{meg}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4 \cdot 10969,6}{3 \cdot 2 \cdot 92,03}} = 17,8 \text{ mm}$$

kerekítve $d_c = 18 \text{ mm}$

6. A forgatókar méretezése

A kar igénybevétele hajlítás és csavarás. Legnagyobb csavarónyomatékot az emelő alsó helyzetében kell kifejezni. Ennek számítóképlete

$$M_c = \frac{2 \cdot F_a \cdot d_2}{2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \rho')} = \frac{2 \cdot 20617,43 \cdot 18}{2 \cdot \operatorname{tg}(4,05 + 5,91)} = 65,16 \text{ Nm}$$

ahol:

- a menetemelkedés szöge $\alpha = \operatorname{arctg} P / (d_2 \cdot \pi) = \operatorname{arctg} 4 / (18 \cdot \pi) = 4,05^\circ$
- a súrlódási félkúpszög $\rho' = \operatorname{arctg} \mu / \cos(\beta/2) = \operatorname{arctg} 0,1 / \cos 15^\circ = 5,91^\circ$

A karon $F_k = 200 \text{ N}$ kézierővel számolva a forgatókar sugara

$$r = \frac{M_c}{F_k} = \frac{65,16}{200} = 0,325 \text{ m} = 325 \text{ mm}$$

ami eléggé nagy.

A mérete mégis elfogadható, mert az emelendő súly $G = 7500 \text{ N}$, ami egy közép kategóriás személygépkocsit emelve súlyának a fele.

Emeléskor a kar igénybevétele csavarás. Anyaga legyen E 295 (MSZ EN 10025) ötvözetlen szerkezeti acél, amelynek a méretezés szempontjából fontos az $R_{eH} = 294 \text{ N/mm}^2$ folyáshatára.

A biztonságos használat érdekében $n = 3$ tényezővel számolva a megengedhető csavarófeszültség

$$\tau_{meg} = \frac{R_{eH}}{n} = \frac{294}{3} = 98 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



Határesetben

$$\tau_{cmeg} = \tau = \frac{M_c}{K_p}$$

ahol a poláris keresztmetszeti tényező kör keresztmetszetnél

$$K_p = \frac{d_k^3 \cdot \pi}{16}$$

képletből a kar átmérője

$$d_k = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_c}{\pi \cdot \tau_{cmeg}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 65,16 \cdot 10^6}{\pi \cdot 98}} = 15mm$$

7. A talplemez méretei

A lemez méretei a várható használati körülmények és gyakorlati érzék alapján határozhatók meg. Tájékoztató adatként a szakirodalomban átlagos keménységű talajnál $p_{meg} = 1..2 \text{ N} / \text{mm}^2$ felületi nyomás található.

A talplemez mérete az emelő többi adatát is figyelembe véve $150 \times 200 \text{ mm}$ legyen. A terhelésből számolva az emelő önsúlyát elhanyagolva a talajon

$$p = \frac{G}{A} = \frac{7500}{150 \cdot 200} = 0,25 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

nyomás hat.



A számított kisebb a megengedettnél, ami felveti a talplemez méreteinek csökkentését pl.: tárolási szempont miatt.

8. Összeállítási és alkatrészrajzok készítése

Kiviteli szempontok:

- az öá. rajzot az emelő számított fő méreteitől függően M 1:1, de legfeljebb
- M 1:2 méretarányban rajzolja.
- rész öá. rajzokon ábrázolja a következő szerkezeti megoldásokat:
 - menetes orsóvég kialakítása
 - menetes persely elfordulás elleni biztosítása
 - csuklók kialakítása
 - forgatókar orsóvégbe helyezésének biztonságos megoldása
- az alkatrészrajzok tartalmazzák a formai követelményeken túl a mérethálózatot a gazdaságos gyárthatóság és mérhetőségi szempontok figyelembevételével, valamint a felületek érdességi előírásait

8.3. Felhasznált irodalom

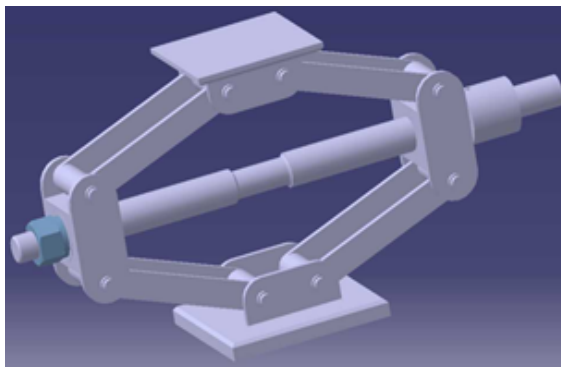
1. Gépszerkezettan II. példatár
2. Magyar Szabvány
3. Internetes honlapok

8.4. Melléklet

MSZ EN 10025	MSZ EN 10027-2:1994	MSZ 500:1989	MSZ 500:1981	MSZ 6280:1982	DIN 17100
Rövid jel	Szám jel				
S185	1.0035	Fe 310-0	A0		St 33
S235JR	1.0038	Fe 235 B	A 38 B	37 B	RSt 37-2
S235J0	1.0114	Fe 235 C		37 C	St 37-3U
S235J2	1.0117	Fe 235 D			
S275JR	1.0044	Fe 275 B	A 44	45 B	St 44-2
S275J0	1.0143	Fe 275 C		45 C	St 44-3U
S275J2	1.0145	Fe 275 D			
S355JR	1.0045	Fe 355 B			
S355J0	1.0553	Fe 355 C		52 C	St 52-3U
S355J2	1.0577				
S355K2	1.0596	Fe 355 D			
S450J0	1.0590				
E295	1.0050	Fe 490-2	A 50		St 50-2
E335	1.0060	Fe 590-2	A 60		St 60-2
E360	1.0070	Fe 690-2	A 70		St 70-2

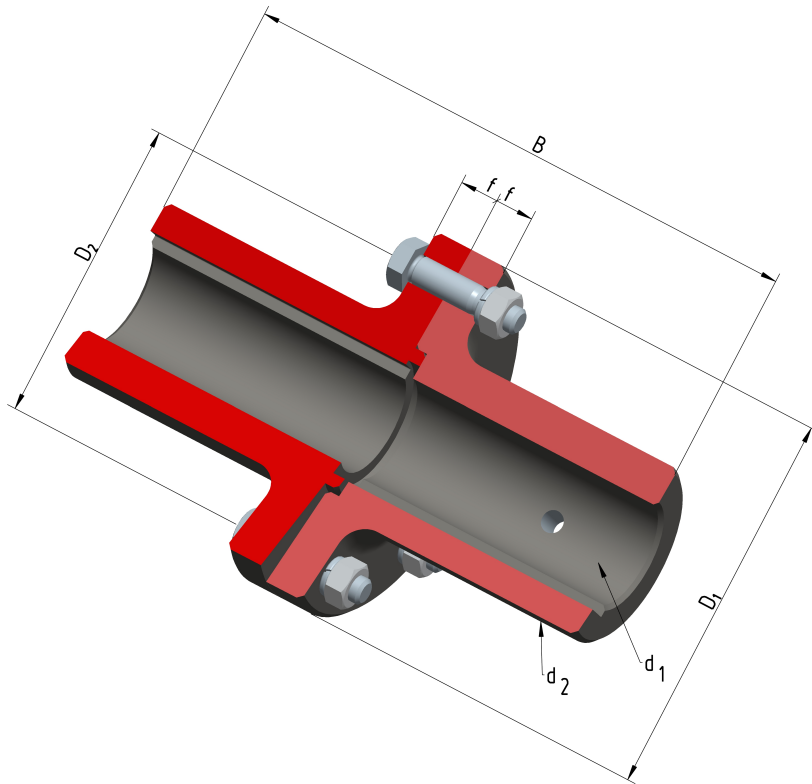


Mintarajz (másolása megoldásként nem fogadható el!)



9. Alakzáró tárcsás tengelykapcsoló

Adott egy tárcsás tengelykapcsoló, az alábbi geometriai méretekkel:





Sor-szám	Névleges nyomaték [Nm]	b [mm]	D ₁ [mm]	D ₂ [mm]	B [mm]	d ₁ H7 [mm]	d ₂ [mm]	f [mm]	D k6 csavar [mm]	Csavarok mérete	Csavarok száma [db]
1.	49	40	130	80	150	20	40	18	13	M 12	4
2.	57	45	160	100	175	25	50	20	17	M 16	4
3.	75	45	160	100	175	30	50	20	17	M 16	5
4.	92	55	180	120	220	35	65	25	21	M 20	5

9.1. Feladat

- Határozza meg az átvihető nyomatékot a csavarok nyíró igénybevétele alapján!
- Válasszon reteszeket a tárcsák tengelyre való rögzítéséhez és ellenőrizze ezeket nyírásra valamint palástnyomásra!
- Készítse el a tengelykapcsoló tárcsák és a csavar méretezett vázlatát!
- Szerkessze meg a tengelykapcsoló összeállítási rajzát M 1:1 méretarányban A3 méretű rajzlapra! Adja meg a befoglaló méreteket, a csatlakozó méreteket és az illesztett méreteket! Tüntesse fel a rajzon a tételszámokat és készítse el a darabjegyzéket!

További adatok:

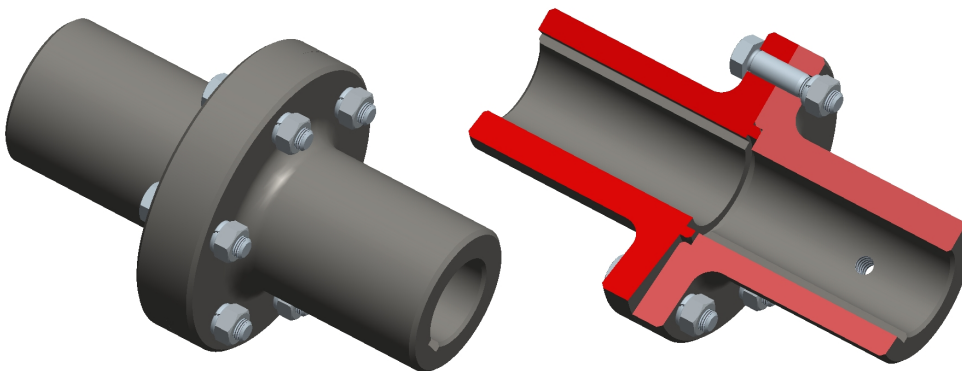
- A tárcsák anyaga öntöttvas: EN-GJL 200, a megengedett feszültség $\tau_{meg} = 30 \text{ N/mm}^2$, a megengedett palástnyomás pedig $p_{meg} = 50 \text{ N/mm}^2$;
- A csavarok anyaga: 5.6;
- Az elvárt biztonság 2-szeres;
- A retesz anyagára a szabvány azt írja elő, hogy folyáshatára legalább $R_{eH} = 590 \text{ N/mm}^2$ legyen. Ennek a feltételnek több anyag is megfelel, válasszuk az E335 jelűt, amelyre a megengedett palástnyomás értéke $p_{meg} = 80\text{-}100 \text{ N/mm}^2$.

9.2. Segédlet a „Tárcsás tengelykapcsoló 1” feladathoz

A tengelykapcsolók általában forgó mozgást végző tengelyek között visznek át csavaró nyomatékot. A tárcsás tengelykapcsolók egyszerű felépítésű merev kapcsolók. Több típusban is készülnek, de közös jellemzőjük, hogy a két összekötendő tengelyvégre egy-egy tárcsát erősítenek, majd a tárcsákat csavarokkal fogják össze. Alakzáró kivételnél az összeszorító csavarok illesztett szárúak, amelyeket az ébredő kerületi erő alapján nyírásra kell ellenőrizni.

9.3. Felépítés

A nyomatékot a tárcsák és a tengelyvégek között reteszkötések továbbítják. A tengelyvégek azonos átmérőjűek, bennük a reteszhorony keresztmetszete és hossza is azonos. Az azonos tengelyátmérők miatt a tárcsák furata és a horony keresztmetszete is megegyezik, ami a 9.1. ábrán látható.



9.1. ábra. Az alakzáró tárcsás tengelykapcsoló felépítése, tengelyek nélkül

Az ide kerülő retesz szabványos gépelem. Adott átmérőhöz nem vehető fel szabadon a keresztmetszete.



Hosszát a tengelyszakasz határozza meg, szélességét és magasságát pedig a tengelyátmérők alapján választjuk meg a szabványból.

A reteszhorony mélységét a tengelyben és az agyban szintén szabvány írja elő. Megfelelő kialakítás esetén a retesz felső síkja nem érhet hozzá a tárcsafél hornyának felületéhez.

A jobb oldali tárcsafélben látható kis menetes furat a tárcsa axiális rögzítéséhez szükséges kúpos végű hernyócsavar helye.

9.4. Kialakítás

A tárcsák agyfuratának tűrése H7. A reteshornyok élettörése egységesen R 0,4 ill. $0,6 \times 45^\circ$. A horonymélység tűrése 0, + 0,2. A reteszeket szilárdan illesztjük, a horony szélességi tűrése P9.

A tárcsafelek összefogására illesztett szárú csavarokat használunk, amelyek szintén szabványos kialakításúak. A csavarokat az ébredő kerületi erő alapján nyírásra ellenőrizzük.

9.5. Számítás

a) Első lépésben ellenőrizzük, hogy az átvendő nyomaték szempontjából megfelel-e a mérete és a választott csavarszám!

Legyen a feladat az 1. adatsor szerinti:

- $D = 13 \text{ mm}$ – az M12 illesztett szárú csavar illesztett átmérője (segédletből),
- $\tau_{meg} = 0,65 \times \sigma_{meg}$ – a csavar nyírószilárdsága,
- $T = 49 \text{ Nm}$ – a tengelykapcsoló névleges nyomatéka,
- $D_2 = 80 \text{ mm}$ – a súrlódó felületek közepes átmérője (a csavarok elhelyezkedési lyukkör átmérője),



- $z = 4$ – a csavarok száma.

Az átvihető nyomaték:

$$T = \frac{F_t \cdot D_2}{2},$$

ahol az F_t a csavarokra jutó kerületi erő.

A csavarok nyírószilárdságából:

$$\tau_{meg} = \frac{F_{t1}}{A} = \frac{4 \cdot F_{t1}}{D^2 \cdot \pi} \Rightarrow F_{t1} = \frac{\tau_{meg} \cdot D^2 \cdot \pi}{4}$$

$$\tau_{meg} = 0,65 \cdot \sigma_{meg} = 0,65 \cdot \frac{R_{eH}}{n} = 0,65 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 10}{2} = 97,5 \frac{N}{mm^2}$$

$$F_{t1} = \frac{97,5 \cdot 13^2 \cdot \pi}{4} = 12934,84N$$

A kerületi erő:

$$F_t = z \cdot F_{t1} = 4 \cdot 12934,84N = 51739,36N$$

Az átvihető nyomaték:

$$T = \frac{F_t \cdot D_2}{2} = \frac{51739,36 \cdot 80}{2} = 2069574,4Nm \cong 2069Nm$$

Látható, hogy az átvihető nyomaték szempontjából a csavarok megfelelnek.



b) Válasszunk most reteszt és vizsgáljuk meg a reteszkötés terhelhetőségét:

A mértékadó igénybevétel palástnyomás. Nyírás is fellép, de a szabványos reteszek esetén a nyírófeszültség kisebb.

$$p = \frac{2 \cdot T}{d_t \cdot l \cdot (h - t_1)} \leq p_{meg},$$

- T: a tengelyt terhelő csavarónyomaték,
- d_t : a tengely átmérője,
- l: a retesz hossza,
- b: a retesz szélessége,
- h: a retesz magassága,
- t_1 : a reteszhorony mélysége a tengelyben,
- i: a reteszek száma, ha 1 nem elegendő).

Adatok:

- $d_t = 20$ mm
- $l_{agy} = B/2 = 75$ mm
- $t_1 = 3,5$ mm (táblázatból)
- $b \times h = 6 \times 6$ (táblázatból)
- $l = 60$ mm (táblázatból)



- $p_{meg} = 80 \text{ N/mm}^2$
- $\tau_{meg} = 190 \text{ N/mm}^2$
- $T = 49 \text{ Nm}$

Behelyettesítve:

$$p = \frac{2 \cdot 49 \cdot 1000}{20 \cdot 60 \cdot (6 - 3,5)} = 32,66 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < p_{meg},$$

tehát a választott retesz palástnyomás szempontjából megfelel.

Ellenőrizzük a reteszt nyírásra:

$$\tau = \frac{2 \cdot T}{d_t \cdot l \cdot b} = \frac{2 \cdot 49000}{20 \cdot 60 \cdot 6} = 13,61 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

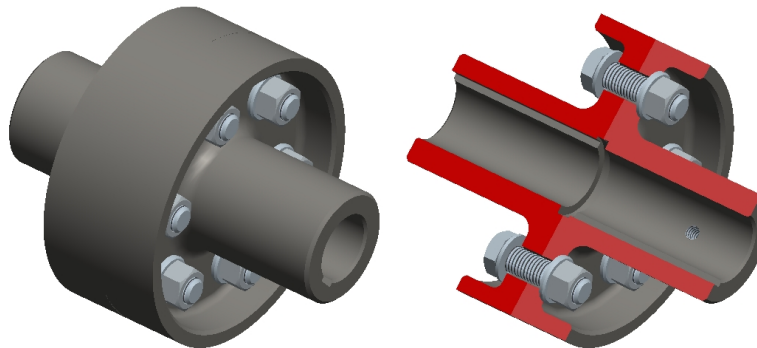
ami jóval kisebb, mint a retesz anyagára megengedett nyíró feszültség.

10. Erőzáró tárcsás tengelykapcsoló

Mint már említettük, a tengelykapcsolók általában forgó mozgást végző tengelyek között visznek át csavaró nyomatékokat. A tárcsás tengelykapcsolók egyszerű felépítésű merev kapcsolók. Több típusban is készülnek, de közös jellemzőjük, hogy a két összekötendő tengelyvégre egy-egy tárcsát erősítenek, majd a tárcsákat csavarokkal fogják össze. Erőzáró kivitelnél a csavarok húzó igénybevételnek vannak kitéve, erre történik a magátmérő ellenőrzése.

10.1. Felépítés

A nyomaték átvitele a tárcsák között fellépő súrlódó erő következtében valósul meg. A tengelyvégek azonos átmérőjűek, bennük a reteszhorony keresztmetszete és hossza is azonos. Az azonos tengelyátmérők miatt a tárcsák furata és a horony keresztmetszete is megegyezik, ami a 10.1. ábrán látható.



10.1. ábra. Az erőzáró tárcsás tengelykapcsoló felépítése, tengelyek nélkül



Az ide kerülő retesz szabványos gépelem. Adott átmérőhöz nem vehető fel szabadon a keresztmetszete. Hosszát a tengelyszakasz határozza meg, szélességét és magasságát pedig a tengelyátmérők alapján választjuk meg a szabványból.

A reteszhorony mélységét a tengelyben és az agyban szintén szabvány írja elő. Megfelelő kialakítás esetén a retesz felső síkja nem érhet hozzá a tárcsafél hornyának felületéhez.

A jobb oldali tárcsafélben látható kis menetes furat a tárcsa axiális rögzítéséhez szükséges kúpos végű hernyócsavar helye.

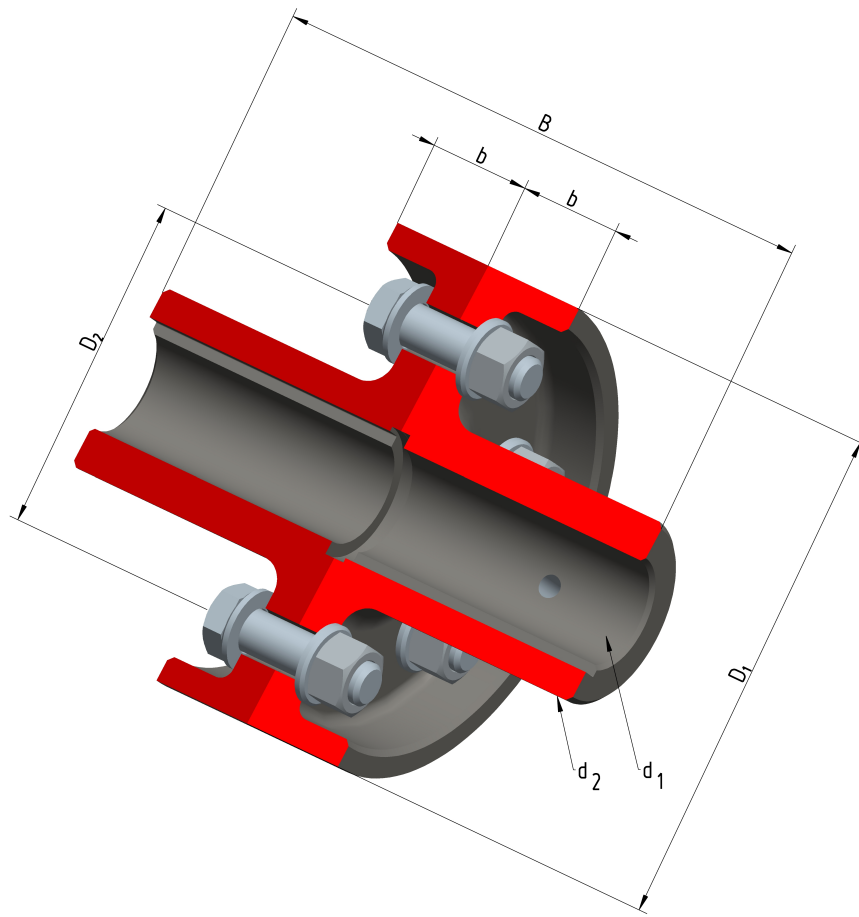
10.2. Kialakítás

A tárcsák agyfuratának tűrése H7. A reteszhornyok élettörése egységesen R 0,4 ill. $0,6 \times 45^\circ$. A horonymélység tűrése 0, + 0,2. A reteszeket szilárdan illesztjük, a horony szélességi tűrése P9.

A tárcsafelek összefogására hatlapfejű tövigmenetes csavarokat használunk, amiket hatlapú anyával rögzítünk. Csavarbiztosításként használjunk szabványos alátétet az anya és a csavarfej alá is. Egy ilyen tengelykapcsoló látható a következő ábrán (10.2. ábra).

A tengelykapcsoló jelölt, szabványos méreteinek sora a következő táblázatban látható:

Sor-szám	Névleges nyomaték [Nm]	b [mm]	D ₁ [mm]	D ₂ [mm]	B [mm]	d ₁ H7 [mm]	d ₂ [mm]	f [mm]	d ₃ csavar [mm]	Csavarok mérete	Csavarok száma [db]
1.	49	40	130	80	150	20	40	18	9,853	M 12	4
2.	63	45	160	100	175	25	50	20	13,546	M 16	4
3.	75	45	160	100	175	30	50	20	13,546	M 16	5
4.	92	55	180	120	220	35	65	25	16,933	M 20	5



10.2. ábra. Tárcsás tengelykapcsoló geometriai méretei

Feladatunk:

- Az átvendő nyomaték alapján határozzuk meg a csavarok húzó terhelését!
- Vizsgáljuk meg, hogy a csavarok száma elég-e az előírt nyomaték átvitelére!
- Válasszunk reteszeket a tárcsák tengelyre való rögzítéséhez és ellenőrizzük ezeket nyírásra valamint palástnyomásra!
- Készítsük el a tengelykapcsoló tárcsák és a csavar méretezett vázlatát!
- Szerkesszük meg a tengelykapcsoló összeállítási rajzát M 1:1 méretarányban A3 méretű rajzlapra! Adjuk meg a befoglaló méreteket, a csatlakozó méreteket és az illesztett méreteket! Tüntessük fel a rajzon a tétele számokat és készítsük el a darabjegyzéket!

További adatok:

- A tárcsák anyaga öntöttvas: EN-GJL 200 a megengedett feszültség $\tau_{meg} = 30 \text{ N/mm}^2$, a megengedett palástnyomás pedig $p_{meg} = 50 \text{ N/mm}^2$;
- A csavarok anyaga: 5.6;
- A tárcsafelek közötti súrlódási tényező értéke öv-öv esetén: $\mu = 0,15$;
- A retesz anyagára a szabvány azt írja elő, hogy folyáshatára legalább $R_{eH} = 590 \text{ N/mm}^2$ legyen. Ennek a feltételnek több anyag is megfelel, válasszuk az E 335 jelűt, amelyre a megengedett palástnyomás értéke $p_{meg} = 80-100 \text{ N/mm}^2$.

A csavarokat az ébredő tengelyirányú erő alapján húzásra ellenőrizzük.

10.3. Számítás

a) Első lépésben ellenőrizzük, hogy az átviendő nyomaték szempontjából megfelel-e a csavarok mérete és a választott csavarszám!

Legyen a feladat az 1. adatsor szerinti:

- $T = 49 \text{ Nm}$ – a tengelykapcsoló névleges nyomatéka,
- $D_2 = 80 \text{ mm}$ – a súrlódó felületek közepes átmérője (a csavarok elhelyezkedési lyukkör átmérője),
- $d_3 = 9,853 \text{ mm}$ – a csavarok magátmérője,
- $\mu = 0,15$ – a tárcsafelek közötti súrlódási tényező,
- $z = 4$ – a csavarok száma,
- $n = 2$ – az elvárt biztonság.

A csavarok húzó terhelésének meghatározásához ismernünk kell az összes tengelyirányú erőt, ami az átvitt nyomatékból:

$$T = \frac{d_k}{2} \cdot \mu \cdot F_a \Rightarrow F_a = \frac{2 \cdot T}{d_k \cdot \mu} = \frac{2 \cdot 49000}{80 \cdot 0,15} = 8166,66 \text{ N}$$

Mivel 4 csavarunk van:

$$F_{a1} = \frac{F_a}{z} = \frac{8166,66}{4} = 2041,66 \text{ N}$$

A megengedett húzó feszültségből:

$$\sigma_{meg} = \frac{R_{eH}}{n} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 10}{2} = 150 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{meg} = \frac{F_{a1}}{A_3} = \frac{4 \cdot F_{a1}}{d_3^2 \cdot \pi} \Rightarrow d_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot F_{a1}}{\pi \cdot \sigma_{meg}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2041,6}{\pi \cdot 150}} = 4,164mm$$

Mivel a csavarok szükséges magátmérője $4,164 \text{ mm} <$ mint a szabványos magátmérő $9,853 \text{ mm}$, ezért a csavarok száma és mérete is megfelelő.

b) Válasszunk most reteszt és vizsgáljuk meg a reteszkötés terhelhetőségét:

A mértékadó igénybevétel palástnyomás. Nyírás is fellép, de a szabványos reteszek esetén a nyírófeszültség kisebb.

$$p = \frac{2 \cdot T}{d_t \cdot l \cdot (h - t_1)} \leq p_{meg},$$

ahol:

- T: a tengelyt terhelő csavarónyomaték,
- d_t : a tengely átmérője,
- l: a retesz hossza,
- b: a retesz szélessége,
- h: a retesz magassága,
- t_1 : a reteszhorony mélysége a tengelyben,



- (i: a reteszek száma, ha 1 nem elegendő).

Adatok:

- $d_t = 20 \text{ mm}$
- $\text{lagy} = B/2 = 75 \text{ mm}$
- $t_1 = 3,5 \text{ mm}$ (táblázatból)
- $b \times h = 6 \times 6$ (táblázatból)
- $l = 60 \text{ mm}$ (táblázatból)
- $p_{meg} = 80 \text{ N/mm}^2$
- $\tau_{meg} = 190 \text{ N/mm}^2$
- $T = 49 \text{ Nm}$

Behelyettesítve:

$$p = \frac{2 \cdot 49 \cdot 1000}{20 \cdot 60 \cdot (6 - 3,5)} = 32,66 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < p_{meg},$$

tehát a választott retesz palástnyomás szempontjából megfelel.

Ellenőrizzük a reteszt nyírásra:

$$\tau = \frac{2 \cdot T}{d_t \cdot l \cdot b} = \frac{2 \cdot 49000}{20 \cdot 60 \cdot 6} = 13,61 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

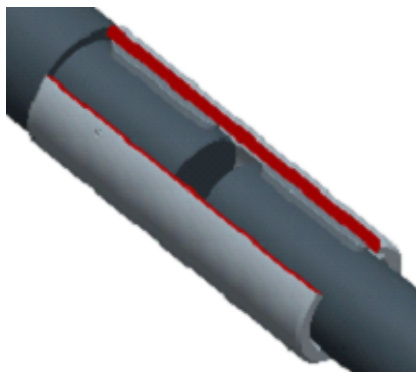
ami jóval kisebb, mint a retesz anyagára megengedett nyíró feszültség.

11. Tokos tengelykapcsoló

Az erőátviteli és mozgásátalakító rendszerek kinematikai láncolatában a forgatónyomaték továbbítására alkalmas szerkezetek a tengelykapcsolók. A tengelykapcsolók feladata a forgó- vagy lengőmozgást végző tengelyek összekapcsolása nyomaték átvitele céljából. A tengelykapcsolók segítségével általában erőgépekről (motorokról) munkagépekre (pl. szivattyúra, szerszámgépre) visznek át forgatónyomatékot. A kapcsoló összeköti az erőgépet a munkagéppel. Kialakításuk az összekapcsolandó tengelyek viszonylagos helyzetétől és az ideálisnak feltételezett üzem igényeitől függően igen változatos.

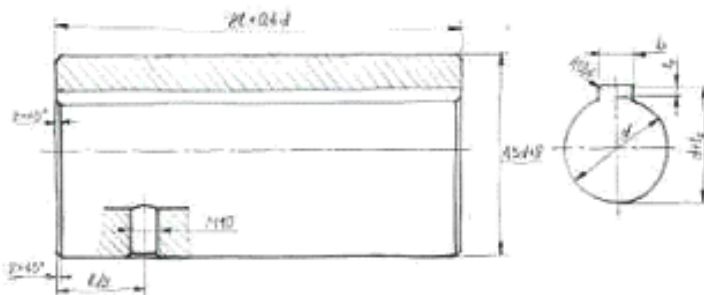
A feladatban villamos motorról tokos tengelykapcsoló segítségével munkagépet hajtunk meg. A tokos tengelykapcsoló egy igen egyszerű felépítésű merev tengelykapcsoló. Több típusa létezik, de mindegyikre jellemző, hogy a tengelyeket egy csőszerű darabbal, ún. tokkal kötik össze. A tok lehet két részes, hasított vagy egybefüggő, a nyomatékátvitel megvalósulhat bordás kötéssel, keresztzszeges kötéssel vagy reteszkötéssel.

Esetünkben a tok egy csőszerű elem, a nyomatékot pedig reteszkötések továbbítják a tok és a tengelyvégek között (11.1. ábra):



11.1. ábra. A tokos tengelykapcsoló 3D-s modellje

A tok egy furatos henger, amelyben a reteszhorony végig fut (11.2. ábra).



11.2. ábra. A tok

A tok bal oldalán látható a kis keresztfurat ill. menet, a kúpos végű hernyócsavar (11.4. ábra) helye, ami megakadályozza a tok tengelyirányú elmozdulását. A menetes furat a tengelyben 120° -os süllyesztéssel „végződik”, ide csatlakozik a hernyócsavar vége (11.3. ábra).



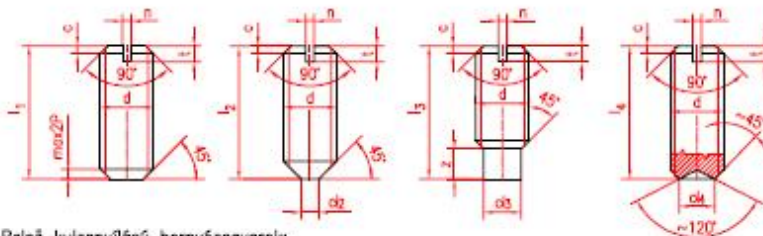
11.3. ábra. A tok axiális rögzítése

Hornycsavarok:
tompa végződésű
MSZ EN 24766

kúpos végződésű
MSZ EN 27434

csapos végződésű
MSZ EN 27435

süllyesztett végződésű
MSZ EN 27436



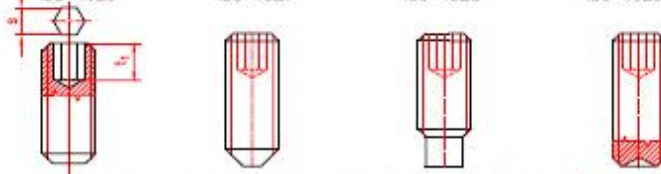
Belső kulcsnyílású hernycsavarok:

tompa végződésű
ISO 4026

kúpos végződésű
ISO 4027

csapos végződésű
ISO 4028

süllyesztett végződésű
ISO 4029



Szilárdsági csoportok: 14H, 15H, 22H, A1-50 (korrózióálló)

d	c	n	t max	s nélv	t ₁	d ₂	d ₃ max	z	d ₄	l ₁		l ₂		l ₃		l ₄	
										-től	-ig	-től	-ig	-től	-ig	-től	-ig
M3	0,5	0,4	1,05	1,5	1,2	0	2	2,5	1,4	3-16	4-16	5-16	3-16				
M4	0,5	0,6	1,42	2	2,5	0	2,5	3	2	4-20	6-20	6-20	4-20				
M5	1,0	0,8	1,63	2,5	3,0	1	3,5	3	2,5	5-25	8-25	8-25	5-25				
M6	1,0	1,0	2	3	3,5	2	4	3,5	3	6-30	8-30	8-30	6-30				
MB	1,4	1,2	2,5	4	5,0	2	5,5	5	5	8-40	10-40	10-40	8-40				
M10	1,6	1,6	3	5	6,0	2	7	5,5	6	10-50	12-50	12-50	10-50				
M12	1,6	2,0	3,6	6	8,0	2	8,5	7	8	12-60	14-50	14-60	12-60				

l₁ hosszak méretsora: l=4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60mm
Megnevezés: Hernycsavar ISO 4766-M5x12-14H

Belső kulcs

11.4. ábra. A hernycsavar

11.1. Feladat

- Készítse el az adott méretű tokos tengelykapcsoló összeállítási rajzát!
- Határozza meg a tengelykapcsoló terhelhetőségét!

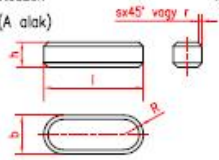
Adatok:

- A tok anyaga öntöttvas: EN-GJL 200 a megengedett feszültség $\tau_{meg} = 30 \text{ N/mm}^2$, a megengedett palástnyomás pedig $p_{meg} = 50 \text{ N/mm}^2$;
- A tengely anyaga legyen E295, az alkalmazott retesz anyaga E335.
- A retesz hosszát a tengelyszakasz hossza határozza meg. Az l-0,3d számítás után a következő táblázatból válasszuk:

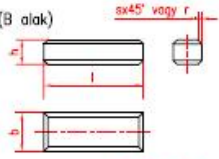
Tengely- átmérő d		A retesz méretei és tűrései								A reteszhorony											
		szelvény mérete		szélessége b		magassága h		Lekereklítés vagy állomptörés r vagy s×45°		Reteszhossz l		b szélességének tűrése				mélysége és tűrése				lekeretítés f ₁	
				Néves mérete	Tűrés (H9)	Néves mérete	Tűrés (H11)	min.	max.	-tól	-ig	laza reteszkötés	normál reteszkötés	szilárd reteszkötés	tengelyben		furatban				
felett	-ig	b×h								tengely- ben (H9)	furatban (D10)	tengely- ben (H9)	furatban (J9)	tengelyben és furatban (P9)	t ₁ névleges tűrése	d-t ₁ tűrése	t ₂ névleges mérete	d+t ₂ tűrése	min.	max.	
6	8	2x2	2	0	2	0			6	20	+0,025	+0,060	-0,004	+0,012	-0,006	1,2		1,0		0,08	0,16
8	10	3x3	3	-0,025	3	-0,025	0,16	0,25	6	36	0	+0,020	-0,029	-0,012	-0,031	1,8		1,4			
10	12	4x4	4	0	4	0			8	45	+0,030	+0,078	0	+0,015	-0,012	2,5	-0,1	1,8	+0,1	0,16	0,25
12	17	5x5	5	-0,030	5	-0,030	0,25	0,40	10	56	0	+0,030	-0,030	-0,015	-0,042	3,0		2,3			
17	22	6x6	6	0	6	0			14	70					3,5		2,8				
22	30	8x7	8	0	7	0			18	90	+0,036	+0,098	0	+0,018	-0,015	4,0		3,3			
30	38	10x8	10	-0,036	8	0	0,40	0,60	22	110	0	+0,040	-0,036	-0,018	-0,051	5,0		3,3			
38	44	12x8	12	0	8	-0,090			28	140					5,0		3,3				
44	50	14x9	14	0	9	0	0,40	0,60	36	160	+0,043	+0,120	0	+0,021	-0,018	5,5	-0,2	3,6	+0,2	0,25	0,4
50	58	16x10	16	-0,043	10	0			45	180	0	+0,050	-0,043	-0,021	-0,061	6,0		4,3			
58	65	18x11	18	0	11	0			50	200					7,0		4,4				
65	75	20x12	20	0	12	0	0,60	0,80	56	220					7,5		4,9				
85	95	22x14	22	0	14	-0,110			63	250	+0,052	+0,149	0	+0,026	-0,022	9,0		5,4		0,4	0,6
85	95	25x14	25	-0,052	14	0			70	280	0	+0,065	-0,052	-0,026	-0,074	9,0		5,4			
95	110	28x16	28	0	16	0			80	320					10,0		6,4				

Fészkés reteszek MSZ 12868

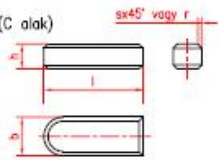
1 alak (A alak)



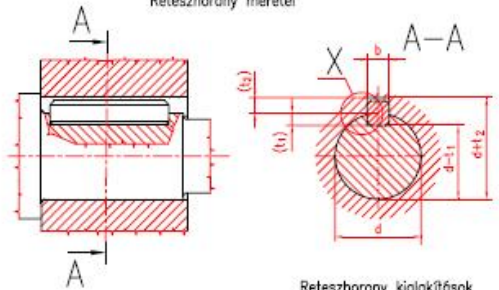
2 alak (B alak)



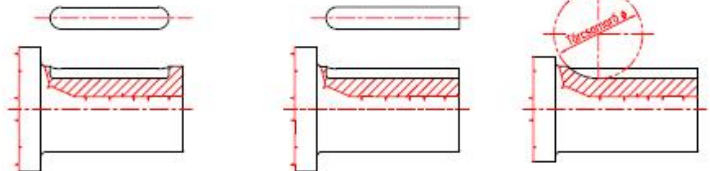
3 alak (C alak)



Reteszhorony méretei



Reteszhorony kialakítások



Ha a tengelycsonkok választott átmérője 50 mm:

- a tengelycsonk átmérője: $d = 50$ mm, tűrése k6 (a fenti táblázatból);
- a retesz méretei az 50 mm átmérőhöz: $b \times h$: 14 x 9 (a fenti táblázatból);
- a $b = 14$ tűrése: 0, -0,043; a h tűrése pedig: 0, -0,090 mm;
- t_1 : a reteszhorony mélysége a tengelyben: 5,5 mm, tűrése: 0, -0,2 mm;
- t_2 : a reteszhorony mélysége a furatban: 3,8 mm, tűrése: 0, +0,2 mm;
- a tengelyvég hossza: $l = 110$ mm;

A retesz hossza: $l - 0,3d = 110 - 0,3 \times 50 = 95$ mm, ami az ajánlott reteszhosszúságba befér, tehát a hosszt nem változtatjuk.



A tengelyváll átmérője: $1,3d = 1,3 \times 50 = 65 \text{ mm}$

A tok külső átmérője: $1,3d + 8 = 1,3 \times 50 + 8 = 73 \text{ mm}$, válasszuk 75 mm-re.

A reteshornyok kialakítása után a

- $d-t_1 = 50 - 5,5 = 44,5 \text{ mm}$
- $d+t_2 = 50 + 3,8 = 53,8 \text{ mm}$

A hernyócsavarunk legyen M10-es, a tok falvastagságának ($v = 0,15d + 4 = 0,15 \times 50 + 4 = 10,5 \text{ mm}$) figyelembe vételével a hossza pedig: 12 mm és $l/2 = 120/2 = 60 \text{ mm}$ -re kerül a tengelyváltól.

A tok hossza: $2 \cdot l + 0,4 d = 2 \times 110 + 0,4 \times 50 = 240 \text{ mm}$.

A fenti számított, ill. felvett adatokkal a tengelykapcsoló már megszerkeszthető.

A szerkesztési munka megkezdése előtt végezzük el a szilárdsági ellenőrzést.

11.2. A tengelykapcsoló terhelhetősége

A tengelyek és a tok is csavaró igénybevételt szenvednek. A reteszek és a velük érintkező horonyfelületek igénybevétele palástnyomás.

A tengelykapcsoló nyomatékot visz át. Az ismert adatokkal ennek nagysága számítható a tengelyekre, a tokra és a reteszkötésekre. Ezek közül a tengelykapcsoló által átvihető nyomaték a számított legkisebb lesz.

11.3. Számítás

Határozzuk meg mindhárom esetre ezt a nyomatékot!

a) A tengely terhelhetősége:

Igénybevétel: csavarás

Az alapösszefüggés: $\tau_{max} \leq \tau_{meg}$

$$\tau_{meg} = 0,65 \cdot \sigma_{meg}$$

A tengely anyagára

$$R_{eH} = 255 N/mm^2; \quad n = 2 \Rightarrow \tau_{meg} = 0,65 \cdot \frac{R_{eH}}{n} = 0,65 \cdot \frac{255}{2} = 82,875 N/mm^2$$

A $\tau_{meg} = \frac{T_{max}}{K_p}$ összefüggésből $\Rightarrow T = \tau_{meg} \cdot K_p$, ahol a K_p a tengely poláris keresztmetszeti tényezője. A számításhoz a reteszhoronnyal gyengített átmérőt vesszük figyelembe (11.5. ábra):



11.5. ábra. A tengely átmérője

$$d - t_1 = 50 - 5,5 = 44,5 mm$$

$$K_p = \frac{d^3 \cdot \pi}{16} = \frac{44,5^3 \cdot \pi}{16} = 17293,77 mm^3$$

A nyomaték tehát:

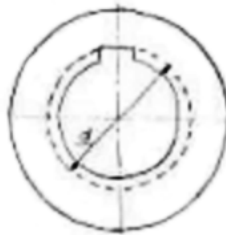
$$T_{max} = \tau_{meg} \cdot K_p = 88,875[N/mm^2] \cdot 17293,77[mm^3] = 1433221,189Nmm = 1433Nm$$

b) A tok terhelhetősége:

Itt is csúsztató feszültség lép fel, aminek megengedett értéke ismert: $\tau_{meg} = 30N/mm^2$

$$T = \tau_{meg} \cdot K_p \quad ahol : \quad K_p = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{16 \cdot d}$$

A belső átmérőt : $d + 2t_2 = 50 + 2 \cdot 3,8 = 57,6mm$ értékkel vesszük figyelembe (11.6. ábra):



11.6. ábra. A tok átmérőjének meghatározása

D = 75 mm – a korábban felvett D = 57,6 mm



$$K_p = \frac{(75^4 - 57,6^4) \cdot \pi}{16 \cdot 57,6} = \frac{31640625 - 11007531,42}{921,6} = 70299,38 \text{ mm}^3$$

$$T = 30 \cdot 70299,38 = 2108981,57 \text{ Nmm} = 2109 \text{ Nm}$$

b) A reteszkötés terhelhetősége:

Az igénybevétel felületi nyomás (nyírás is fellép, de nem ez a mértékadó igénybevétel).

A megengedett értékek:

- a reteszre: $p_{meg} = 80 \text{ N/mm}^2$
- a tengelyre: $p_{meg} = 80 \text{ N/mm}^2$
- a tokra: $p_{meg} = 50 \text{ N/mm}^2$

Látható, hogy a tok bírja legkevésbé a fellépő igénybevételt, ezért elég csak erre meghatározni az átvihető nyomatékot.

A 11.7. ábra szerint, a tok hornyával érintkező felület nagysága: $A = h/2 \cdot (l-b)$, mivel a retesz végén levő hengeres felületek nem érintkeznek a tokban levő horony egyenes felületével.

Így a $p_{max} \leq p_{meg}$ összefüggéssel, ha

$$p_{meg} \frac{F_{meg}}{A}$$

$$T_{meg} = F_{meg} \cdot \frac{d}{2} = A \cdot p_{meg} \cdot \frac{d}{2} = \frac{h}{2} \cdot (l-b) \cdot p_{meg} \cdot \frac{d}{2} = \frac{h \cdot (l-b) \cdot d}{4} \cdot p_{meg}$$



11.7. ábra. A retesz és a tok érintkező felülete

Behelyettesítve, ha

- $h = 9 \text{ mm}$
- $b = 14 \text{ mm}$
- $l = 95 \text{ mm}$
- $p_{meg} = 50 \text{ N/mm}^2$
- $d = 50 \text{ mm}$

$$T_{meg} = \frac{9 \cdot (95 - 14) \cdot 50}{4} \cdot 50 = 9112 \text{ Nmm} = 9,1 \text{ Nm}$$

A tengelykapcsolóval átvihető nyomatékot a számított 3 érték legkisebbje adja:



$$T_{tengely} = 1433 \text{ Nm}$$

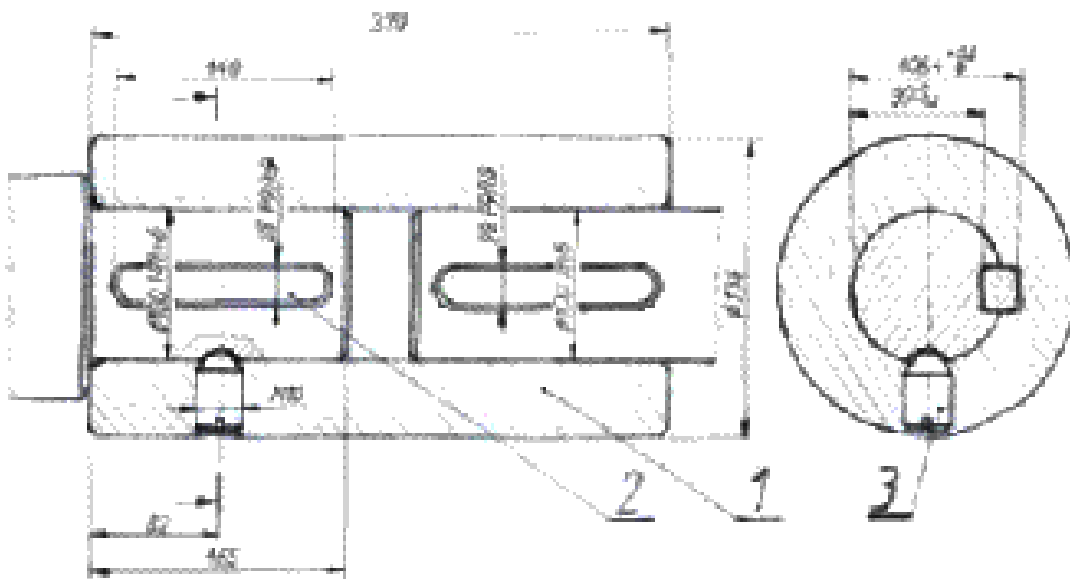
$$T_{tok} = 2108 \text{ Nm}$$

$$T_{retesz} = 9,1 \text{ Nm}$$

Látható, hogy a reteszkötés képes a legkisebb nyomaték átvitelére, tehát ez határozza meg a mértékadó terhelést, vagyis a tengelykapcsolóval átvihető nyomaték nagyságát, ami esetünkben:

$$T_{meg} = 9,1 \text{ Nm}$$

A tengelykapcsoló összeállítási rajza:



11.8. ábra. A tengelykapcsoló összeállítási rajza