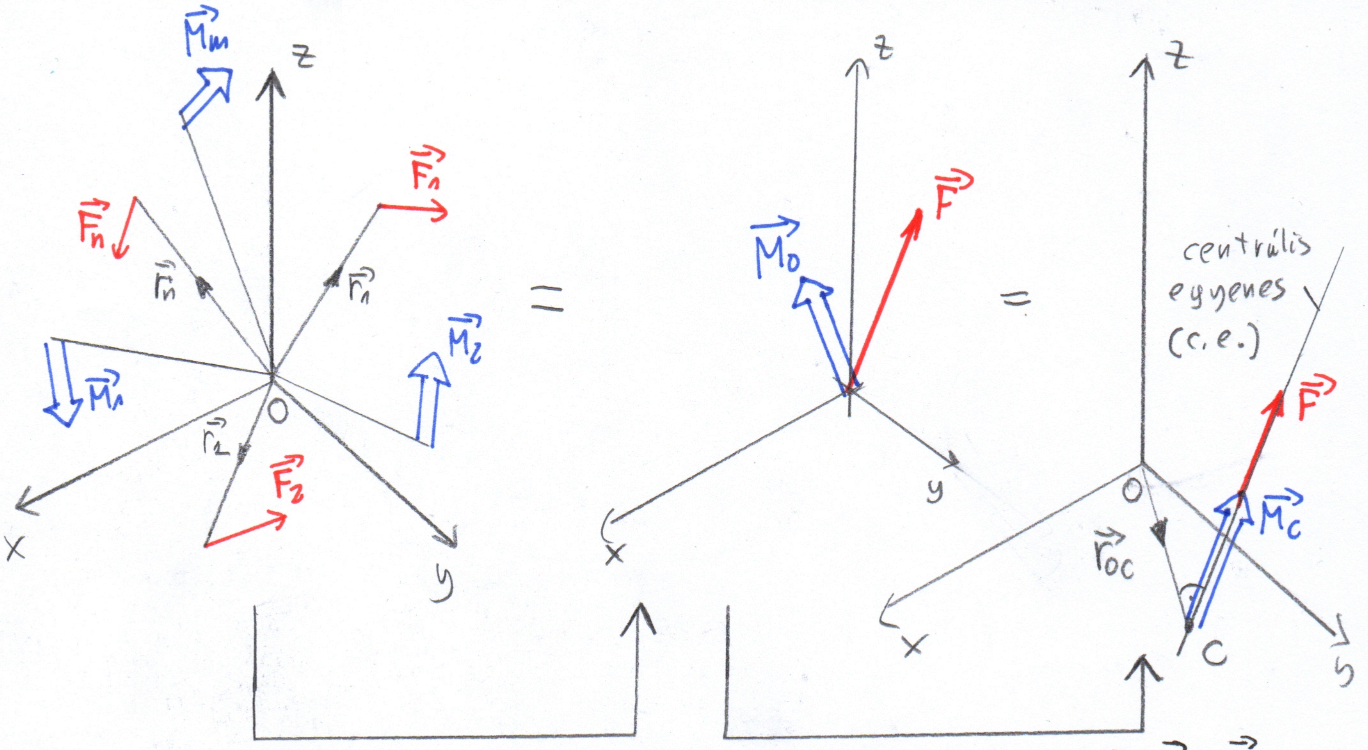
1. KONZULTÁCIÓ

STATIKA

CENTRÁLIS EGYENES



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

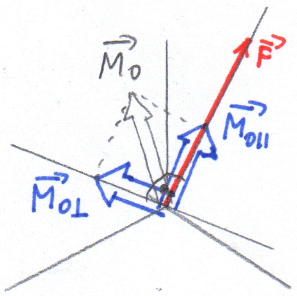
$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j$$

c.e. egyenlete: $\vec{a} \times \vec{r} + \vec{b} = \vec{0}$

$$\vec{a} = \vec{F}$$

$$\vec{b} = \vec{r}_{OC} \times \vec{F} \quad (= \vec{M}_{O\perp})$$

$$\vec{r}_{OC} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{F^2}$$



$$\vec{M}_C = \vec{M}_O - \vec{M}_{O\perp} = \vec{M}_O - \vec{b}$$

vagy

$$\vec{M}_C = \vec{M}_{O\parallel} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{M}_O}{F^2} \vec{F}$$

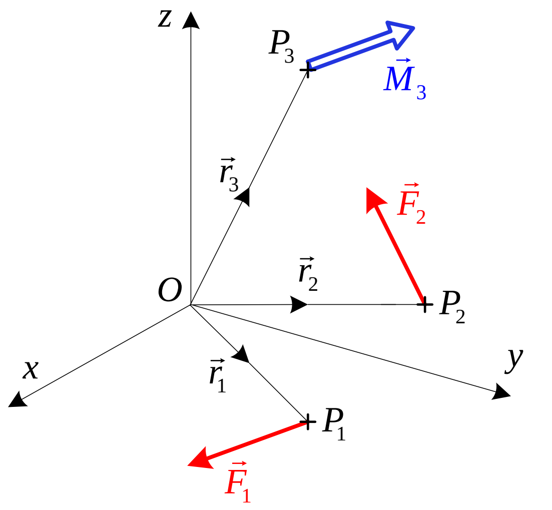
2D esetén: $\vec{M}_O \perp \vec{F} \Rightarrow \vec{M}_O = \vec{M}_{O\perp} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{r} + \vec{b} = \vec{0}$

$$\vec{M}_{O\parallel} = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{F} \times \vec{r} + \vec{M}_O = \vec{0}$$

1.1 - CENTRÁLIS EGYENES



Adott:

$\vec{r}_1 = (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z)\,\mathrm{m}$

$\vec{r}_2 = (-2\vec{e}_x + \vec{e}_y)\,\mathrm{m}$

$\vec{r}_3 = (-5\vec{e}_x - 3\vec{e}_y - \vec{e}_z)\,\mathrm{m}$

$\vec{F}_1 = (2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z)\,\mathrm{N}$

$\vec{F}_2 = (\vec{e}_x + 3\vec{e}_z)\,\mathrm{N}$

$\vec{M}_3 = (-2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z)\,\mathrm{Nm}$

Feladat:

a) Centrális egyenes Plücker vektorai ($\vec{a}, \vec{b}$)

b) Centrális egyenes tetszőleges pontjának nyomatéka ($\vec{M}_C$)

1. Origóba redukált vektorkettős

- Eredő erő:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z) + (\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) = (3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z)\,\mathrm{N}$$

- Origóba redukált nyomaték:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{M}_3$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) \times (2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x \underbrace{(2\cdot 1 - (-2)\cdot(-1))}_{0} - \vec{e}_y \underbrace{(1\cdot 1 - 2\cdot(-1))}_{3} + \vec{e}_z \underbrace{(1\cdot(-2) - 2\cdot 2)}_{-6} = (-3\vec{e}_y - 6\vec{e}_z)\,\mathrm{Nm}$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (-2\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times (\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) = -2\cdot 1 \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_x}_{\vec{0}} + (-2)\cdot 3 \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} + 1\cdot 1 \underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_x}_{\vec{e}_z} + 1\cdot 3 \underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_z}_{\vec{e}_x} =$$

$$= (3\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z)\,\mathrm{Nm}$$

$$\vec{M}_O = (-3\vec{e}_y - 6\vec{e}_z) + (3\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z) + (-2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z) = (\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 3\vec{e}_z)\,\mathrm{Nm}$$

2. Centrális egyenes Plücker vektorai

A centrális egyenes Plücker vektoros egyenlete: $\vec{a} \times \vec{r} + \vec{b} = \vec{0}$

2.1 A centrális egyenes irányvektora:

$$\vec{a} = \vec{F} = \underline{\underline{(3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z)\,\mathrm{N}}}$$

2.2 A centrális egyenes origóhoz legközelebbi C pontjának meghatározása:

$$\vec{r}_{OC} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{F^2}$$

$$\vec{F} \times \vec{M}_O = (3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) \times (\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x \underbrace{((-2)\cdot(-3) - 4\cdot 4)}_{-10} - \vec{e}_y \underbrace{(3\cdot(-3) - 1\cdot 4)}_{-13} + \vec{e}_z \underbrace{(3\cdot 4 - 1\cdot(-2))}_{14} = (-10\vec{e}_x + 13\vec{e}_y + 14\vec{e}_z)\,\mathrm{N^2m}$$

$$F^2 = (3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z)\cdot(3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) = 3\cdot 3 + (-2)\cdot(-2) + 4\cdot 4 = 29\,\mathrm{N^2}$$

$$\vec{r}_{OC}=\frac{\left(-10\vec{e}_x+13\vec{e}_y+14\vec{e}_z\right)}{29}=\left(-0,345\vec{e}_x+0,448\vec{e}_y+0,483\vec{e}_z\right)m$$

2.3 A centrális egyenes irányvektorának nyomatéka az origóra:

$$\vec{b}=\vec{r}_{OC}\times\vec{F}=\frac{1}{29}\left(-10\vec{e}_x+13\vec{e}_y+14\vec{e}_z\right)\times\left(3\vec{e}_x-2\vec{e}_y+4\vec{e}_z\right)=\frac{1}{29}\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ -10 & 13 & 14\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{29}\left[\vec{e}_x\underbrace{(13\cdot 4-(-2)\cdot 14)}_{80}-\vec{e}_y\underbrace{((-10)\cdot 4-3\cdot 14)}_{-82}+\vec{e}_z\underbrace{((-10)\cdot(-2)-3\cdot 13)}_{-19}\right]=$$

$$=\frac{1}{29}\left(80\vec{e}_x+82\vec{e}_y-19\vec{e}_z\right)=\underline{\underline{\left(2,759\vec{e}_x+2,828\vec{e}_y-0,655\vec{e}_z\right)\mathrm{Nm}}}$$

3. A centrális egyenes tetszőleges pontjának nyomatéka

egyik módszerrel:

$$\vec{M}_C=\vec{M}_O-\vec{M}_{O\perp}=\vec{M}_O-\vec{b}=\left(\vec{e}_x+4\vec{e}_y-3\vec{e}_z\right)-\left(2,759\vec{e}_x+2,828\vec{e}_y-0,655\vec{e}_z\right)=$$

$$=\left(-1,759\vec{e}_x+1,172\vec{e}_y-2,345\vec{e}_z\right)\mathrm{Nm}$$

másik módszerrel:

$$\vec{M}_C=\vec{M}_{O\parallel}=\frac{\vec{F}\cdot\vec{M}_O}{F^2}\vec{F}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{M}_O=\left(3\vec{e}_x-2\vec{e}_y+4\vec{e}_z\right)\cdot\left(\vec{e}_x+4\vec{e}_y-3\vec{e}_z\right)=3\cdot 1-2\cdot 4+4\cdot(-3)=-17\mathrm{N}^2\mathrm{m}$$

$$F^2=\vec{F}\cdot\vec{F}=29\mathrm{N}^2$$

$$\vec{M}_C=-\frac{17}{29}\left(3\vec{e}_x-2\vec{e}_y+4\vec{e}_z\right)=\left(-1,759\vec{e}_x+1,172\vec{e}_y-2,345\vec{e}_z\right)\mathrm{Nm}$$

RUDAS MEGTÁMASZTÁSOK

• origóba redukált vektorkettős:

$$\vec F = \sum_{i=1}^{n} \vec F_i$$

$$\vec M_O = \sum_{i=1}^{n} \vec r_i \times \vec F_i + \sum_{j=1}^{m} \vec M_j$$

• rudak tengelyeinek Plücker vektorai

$\vec a_i$: i-edik rúd irányvektora
(bármilyen rúdirányú vektor)

$\vec b_i = \vec r_i \times \vec a_i$: i-edik irányvektor nyomatéka az origóra

$\vec r_i$: i-edik rúd hatásvonalának bármelyik pontjába mutató vektor

• A támasztóerők rúdirányúak, így az i-edik támasztóerő:

$$\vec F_i = \lambda_i \vec a_i$$

↳ ismeretlen együttható

⇓

egyensúlyi egyenletekből számítható:

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i \vec a_i}_{\vec F_i} = -\vec F$$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\vec r_i \times \vec a_i}_{\vec b_i} \lambda_i = \vec b_i \lambda_1 = -\vec M_0$$

3 rudas 2D feladat
⇓
$n = 3$

6 rudas 3D feladat
⇓
$n = 6$

---

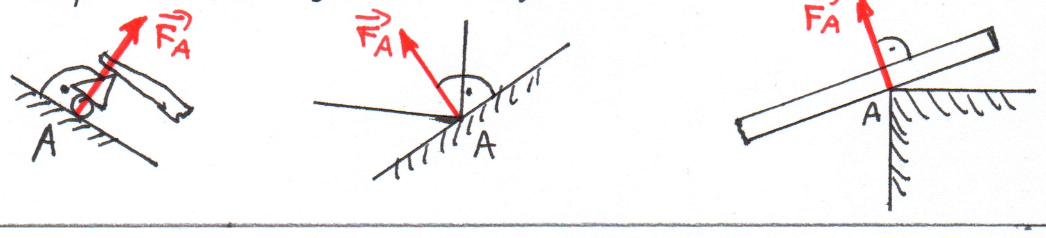
1 pontba csatlakozó 3 rudas 3D feladatnál:

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \vec a_i = -\vec F$$

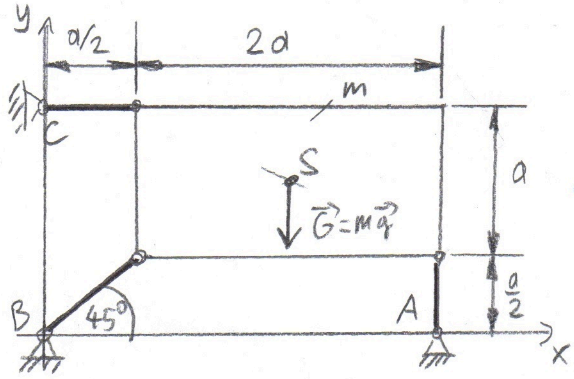
↖ csatlakozó pontra ható erő

---

rúd helyett lehet görgő vagy súrlódásmentes megtámasztás is:



1.2 - 3 RUDAS 2D FELADAT



- adott: $m = 100\ kg$
  $g = 10\ \frac{m}{s^2}$
  $a = 1\ m$
- Feladat:
  támasztóerők meghatározása

$\vec{e}_x$ $\vec{e}_z$ $\vec{e}_y$ (+)

- Origóba redukált vektorkettős:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{1} \vec{F}_i = \vec{G} = -m\vec{g} = -100 \cdot 10\, \vec{e}_y = (-1000\, \vec{e}_y)\ N$$

$$\vec{M}_B = \sum_{i=1}^{1} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_{BS} \times \vec{G} = (1{,}5\vec{e}_x + 1\ \vec{e}_y) \times -1000\vec{e}_y = (-1500\vec{e}_z)\ Nm$$

- A szerkezet támasztó erői rúdirányúak: $\vec{F}_A = \lambda_A \vec{a}_A,\ \vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B,\ \vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C$
- A támasztóerők irányvektorai:

$\vec{a}_A = \vec{e}_y \qquad \vec{b}_A = \vec{r}_{BA} \times \vec{a}_A = 2{,}5\,\vec{e}_x \times \vec{e}_y = 2{,}5\vec{e}_z$

$\vec{a}_B = \vec{e}_x + \vec{e}_y \qquad \vec{b}_B = \vec{r}_{BB} \times \vec{a}_B = \vec{0} \times \vec{a}_B = \vec{0}$

$\vec{a}_C = \vec{e}_x \qquad \vec{b}_C = \vec{r}_{BC} \times \vec{a}_C = 1{,}5\,\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -1{,}5\,\vec{e}_z$

- Az egyensúlyi egyenlet:

$$\sum_{i=A}^{C} \vec{F}_i = \sum_{i=A}^{C} \lambda_i \vec{a}_i = -\vec{F}$$

$$\sum_{i=A}^{C} \vec{r}_{Bi} \times \vec{F}_i = \sum_{i=A}^{C} \lambda_i \vec{b}_i = -\vec{M}_B$$

- Az egyensúlyi egyenlet mátrixos alakban

$$\begin{bmatrix} a_{Ax} & a_{Bx} & a_{Cx} \\ a_{Ay} & a_{By} & a_{Cy} \\ b_{Az} & b_{Bz} & b_{Cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -M_{Bz} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2{,}5 & 0 & -1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

- Az egyenletrendszer megoldása:

1) $\lambda_B + \lambda_C = 0$
2) $\lambda_A + \lambda_B = 1000$
3) $2{,}5\lambda_A - 1{,}5\lambda_C = 1500$

$\Rightarrow \lambda_B = -\lambda_C \Rightarrow$ $\lambda_A - \lambda_C = 1000$, $2{,}5\lambda_A - 1{,}5\lambda_C = 1500$ $\Rightarrow \lambda_A = 1000 + \lambda_C$

$2{,}5(1000 + \lambda_C) - 1{,}5\lambda_C = 1500$

$2500 + 2{,}5\lambda_C - 1{,}5\lambda_C = 1500$

$\lambda_C = -1000$

$\lambda_A = 1000 + (-1000) = 0$

$\lambda_B = -\lambda_C = +1000$

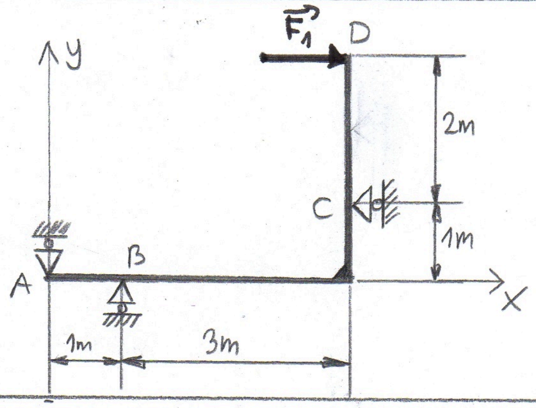
- A támasztóerők:

$\vec{F}_A = \lambda_A \vec{a}_A = 0\,\vec{e}_y = 0\ N$

$\vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B = +1000\,(\vec{e}_x + \vec{e}_y) = (1000\vec{e}_x + 1000\vec{e}_y)\ N$

$\vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C = (-1000\,\vec{e}_x)\ N$

1.3 - 3 RUDAS 2D FELADAT

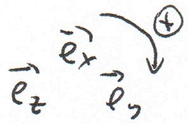


adott:

$\vec{F}_1 = (30\,\vec{e}_x)$ kN

Feladat:

támasztóerők meghatározása



• Origóba redukált vektorkettős:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 = (30\,\vec{e}_x)\ \text{kN}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \times (30\vec{e}_x) = 4\cdot 30\,\overbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_x}^{=\vec{0}} + 3\cdot 30\,\overbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_x}^{-\vec{e}_z} = (-90\,\vec{e}_z)\ \text{kNm}$$

• A szerkezet támasztóerői:

$$\vec{F}_A = \lambda_A \vec{a}_A \ ;\ \vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B \ ;\ \vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C$$

• A támasztóerők irányvektorai:

$$\vec{a}_A = \vec{e}_y$$
$$\vec{a}_B = \vec{e}_y$$
$$\vec{a}_C = \vec{e}_x$$

• irányvektorok nyomatékai az origóra:

$$\vec{b}_A = \vec{r}_{AA} \times \vec{a}_A = \vec{0}$$
$$\vec{b}_B = \vec{r}_{AB} \times \vec{a}_B = \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$
$$\vec{b}_C = \vec{r}_{AC} \times \vec{a}_C = (4\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times \vec{e}_x =$$
$$= 4\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_x}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_x}_{-\vec{e}_z} = -\vec{e}_z$$

• Az egyensúlyi egyenlet:

$$\sum_{i=A}^{C} \vec{F}_i = \sum_{i=A}^{C} \lambda_i \vec{a}_i = -\vec{F}$$

$$\sum_{i=A}^{C} \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i = \sum_{i=A}^{C} \lambda_i \vec{b}_i = -\vec{M}_A$$

• Az egyensúlyi egyenlet mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{Ax} & a_{Bx} & a_{Cx} \\ a_{Ay} & a_{By} & a_{Cy} \\ b_{Az} & b_{Bz} & b_{Cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -M_{Az} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \\ 90 \end{bmatrix}$$

• Az egyenletrendszer megoldása:

$$\left.\begin{aligned} 1)\ & \lambda_C = -30 \\ 2)\ & \lambda_A + \lambda_B = 0 \\ 3)\ & \lambda_B - \lambda_C = 90 \end{aligned}\right\}$$

$1) \rightarrow \lambda_C = -30$

$3.) \rightarrow \lambda_B - (-30) = 90$

$\lambda_B = 60$

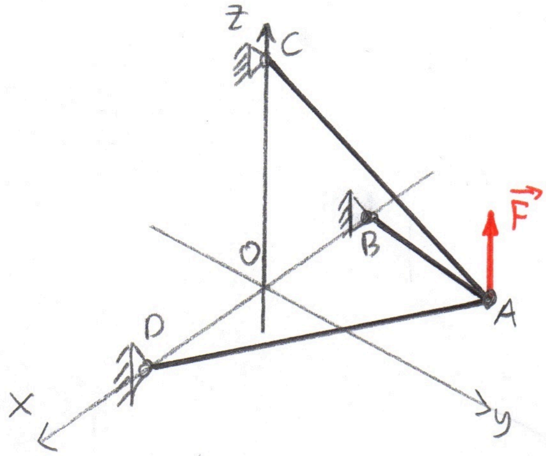
$2) \rightarrow \lambda_A + 60 = 0$

$\lambda_A = -60$

• A támasztóerők:

$$\vec{F}_A = \lambda_A \vec{a}_A = (-60\,\vec{e}_y)\ \text{kN}$$
$$\vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B = (60\,\vec{e}_y)\ \text{kN}$$
$$\vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C = (-30\,\vec{e}_x)\ \text{kN}$$

1.4 - 3 RUDAS 3D FELADAT



• adott:

$\vec{r_A} = (4\vec{e_y} + \vec{e_z})\,m$

$\vec{r_B} = (-4\vec{e_x})\,m$

$\vec{r_C} = (4\vec{e_z})\,m$

$\vec{r_D} = (2\vec{e_x})\,m$

$\vec{F} = (12\vec{e_z})\,kN$

• Feladat:

$\vec{F_B}, \vec{F_C}, \vec{F_D}$ támasztóerők

• az egyensúlyi egyenlet: $\vec{F_B} + \vec{F_C} + \vec{F_D} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F_B} + \vec{F_C} + \vec{F_D} = -\vec{F}$

• a támasztóerők rúdirányúak: $\vec{F_B} = \lambda_B \vec{a_B} = \lambda_B \vec{r_{BA}}$

$$\vec{F_C} = \lambda_C \vec{a_C} = \lambda_C \vec{r_{CA}}$$

$$F_D = \lambda_D \vec{a_D} = \lambda_D \vec{r_{DA}}$$

• a támasztóerők irányvektorai:

$$\vec{a_B} = \vec{r_{BA}} = \vec{r_A} - \vec{r_B} = (4\vec{e_y} + \vec{e_z}) - (-4\vec{e_x}) = (4\vec{e_x} + 4\vec{e_y} + \vec{e_z})\,m$$

$$\vec{a_C} = \vec{r_{CA}} = \vec{r_A} - \vec{r_C} = (4\vec{e_y} + \vec{e_z}) - 4\vec{e_z} = (4\vec{e_y} - 3\vec{e_z})\,m$$

$$\vec{a_D} = \vec{r_{DA}} - \vec{r_A} - \vec{r_D} = (4\vec{e_y} + \vec{e_z}) - 2\vec{e_x} = (-2\vec{e_x} + 4\vec{e_y} + \vec{e_z})\,m$$

• az egyensúlyi egyenlet az új jelölésekkel: $\lambda_B \vec{a_B} + \lambda_C \vec{a_C} + \lambda_D \vec{a_D} = -\vec{F}$

• az egyensúly egyenlet mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} & a_{Cx} & a_{Dx} \\ a_{By} & a_{Cy} & a_{Dy} \\ a_{Bz} & a_{Cz} & a_{Dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_B \\ \lambda_C \\ \lambda_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -F_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_B \\ \lambda_C \\ \lambda_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$4\lambda_B - 2\lambda_D = 0 \Rightarrow \lambda_D = 2\lambda_B$$

$$4\lambda_B + 4\lambda_C + 4\lambda_D = 0 \Rightarrow \lambda_B + \lambda_C + 2\lambda_B = 0$$

$$\lambda_C = -3\lambda_B$$

$$\lambda_B - 3\lambda_C + \lambda_D = -12$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_B - 3(-3\lambda_B) + 2\lambda_B = -12$$

$$12\lambda_B = -12 \Rightarrow \lambda_B = -1 \Rightarrow \lambda_D = 2(-1) = -2\,;\ \lambda_C = -3(-1) = 3$$

• A támasztó erő vektorok:

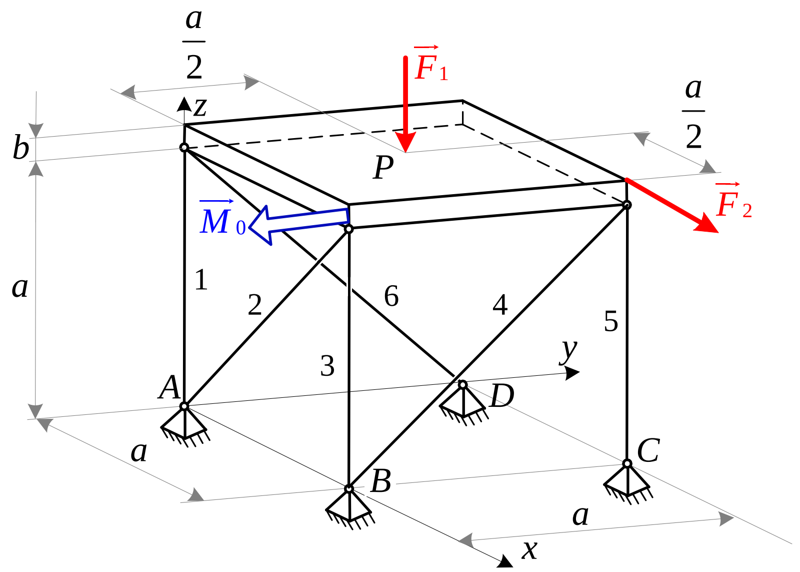
$$\vec{F_B} = \lambda_B \vec{a_B} = -1 \cdot (4\vec{e_x} + 4\vec{e_y} + \vec{e_z}) = (-4\vec{e_x} - 4\vec{e_y} - \vec{e_z})\,kN$$

$$\vec{F_C} = \lambda_C \vec{a_C} = 3 \cdot (4\vec{e_y} - 3\vec{e_z}) = (12\vec{e_y} - 9\vec{e_z})\,kN$$

$$\vec{F_D} = \lambda_D \vec{a_D} = -2 \cdot (-2\vec{e_x} + 4\vec{e_y} + \vec{e_z}) = (4\vec{e_x} - 8\vec{e_y} - 2\vec{e_z})\,kN$$

1.5 - 6 RUDAS 3D FELADAT

Az ábrán látható merev lapot az 1, 2, 3, 4, 5, 6 jelű egyenes rudak támasztják meg. A lapot az $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ erők és $\vec{M}_0$ nyomatékok terhelik.



Adott:

$\vec{F}_1 = (-3\vec{e}_z)\,\text{kN}$

$\vec{F}_1 = (5\vec{e}_x)\,\text{kN}$

$\vec{M}_0 = (-4\vec{e}_y)\,\text{kNm}$

$a = 2\text{m}$

$b = 0,2\text{m}$

Feladat:

A támasztóerők meghatározása

Origóba redukált vektorkettős

- Eredő erő:

$$\vec{F}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -3\vec{e}_z + 5\vec{e}_x = (5\vec{e}_x - 3\vec{e}_z)\,\text{kN}$$

- Origóba redukált nyomaték:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_0 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = -4\vec{e}_y + (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times (-3\vec{e}_z) + (2\vec{e}_y + 2,2\vec{e}_z) \times 5\vec{e}_x =$$

$$= -4\vec{e}_y - 3\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} - 3\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_z}_{\vec{e}_x} + \underbrace{2\cdot 5}_{10}\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_x}_{-\vec{e}_z} + \underbrace{2,2\cdot 5}_{11}\underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_x}_{\vec{e}_y} =$$

$$= -4\vec{e}_y + 3\vec{e}_y - 3\vec{e}_x - 10\vec{e}_z + 11\vec{e}_y = (-3\vec{e}_x + 10\vec{e}_y - 10\vec{e}_z)\,\text{kNm}$$

A rudak tengelyeinek Plücker vektorai:

A rudak irányvektorai:

$\vec{a}_1 = \vec{e}_z$

$\vec{a}_2 = 2\vec{e}_x + 2\vec{e}_z$

$\vec{a}_3 = \vec{e}_z$

$\vec{a}_4 = 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$

$\vec{a}_5 = \vec{e}_z$

$\vec{a}_6 = -2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$

Az irányvektorok nyomatékai az origóra:

$\vec{b}_1 = \vec{r}_{AA} \times \vec{a}_1 = \vec{0} \times \vec{e}_z = \vec{0}$

$\vec{b}_2 = \vec{r}_{AA} \times \vec{a}_2 = \vec{0} \times (2\vec{e}_x + 2\vec{e}_z) = \vec{0}$

$\vec{b}_3 = \vec{r}_{AB} \times \vec{a}_3 = 2\vec{e}_x \times \vec{e}_z = (-2\vec{e}_y)$

$\vec{b}_4 = \vec{r}_{AB} \times \vec{a}_4 = 2\vec{e}_x \times (2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) = \underbrace{2\cdot 2}_{4}\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}_{\vec{e}_z} + \underbrace{2\cdot 2}_{4}\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} = (-4\vec{e}_y + 4\vec{e}_z)$

$\vec{b}_5 = \vec{r}_{AC} \times \vec{a}_5 = (2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \times \vec{e}_z = 2\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} + 2\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_z}_{\vec{e}_x} = (2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y)$

$\vec{b}_6 = \vec{r}_{AD} \times \vec{a}_5 = 2\vec{e}_y \times (-2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) = \underbrace{2\cdot(-2)}_{-4}\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_y}_{\vec{0}} + \underbrace{2\cdot 2}_{4}\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_z}_{\vec{e}_x} = (4\vec{e}_x)$

A szerkezet támasztóerői rúdirányúak, így az alábbi alakban írhatók fel:

$\vec{F}_i = \lambda_i \vec{a}_i \quad (i = 1,2,3,4,5,6)$

Az egyensúlyi egyenlet:

$$\sum_{i=1}^{6}\vec{F}_i=\sum_{i=1}^{6}\lambda_i\vec{a}_i=-\vec{F}_A$$

$$\sum_{i=1}^{6}\vec{r}_{Ai}\times\vec{F}_i=\sum_{i=1}^{6}\lambda_i\vec{b}_i=-\vec{M}_A$$

Az egyensúlyi egyenlet mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-F_{Ax}\\ -F_{Ay}\\ -F_{Az}\\ -M_{Ax}\\ -M_{Ay}\\ -M_{Az}\end{bmatrix}$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\ -0\\ 3\\ 3\\ -10\\ 10\end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

6. egyenletből: $4\lambda_4=10 \quad\Rightarrow\quad \lambda_4=2,5$

2. egyenletből: $2\cdot 2,5-2\lambda_6=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_6=2,5$

1. egyenletből: $2\lambda_2=-5 \quad\Rightarrow\quad \lambda_2=-2,5$

4. egyenletből: $2\lambda_5+4\cdot 2,5=3 \quad\Rightarrow\quad \lambda_5=3,5$

5. egyenletből: $-2\lambda_3-4\cdot 2,5-2\cdot(-3,5)=-10 \quad\Rightarrow\quad -2\lambda_3-10+7=-10$

$\lambda_3=3,5$

3. egyenletből: $\lambda_1+2\cdot(-2,5)+1\cdot 3,5+2\cdot 2,5+1\cdot(-3,5)+2\cdot 2,5=3 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1-5+3,5+5+-3,5+5=3$

$\lambda_1=-2$

A támasztóerő vektorok:

$$\vec{F}_1=\lambda_1\vec{a}_1=\left(-2\vec{e}_z\right)\mathrm{kN}$$

$$\vec{F}_2=\lambda_2\vec{a}_2=-2,5\left(2\vec{e}_x+2\vec{e}_y\right)=\left(5\vec{e}_x+5\vec{e}_y\right)\mathrm{kN}$$

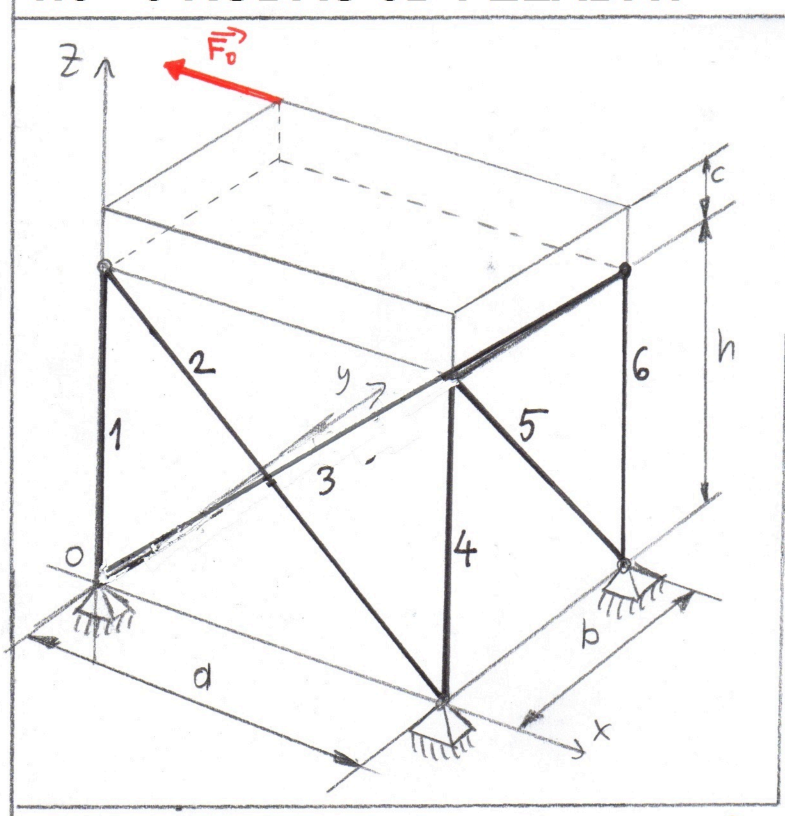
$$\vec{F}_3=\lambda_3\vec{a}_3=\left(3,5\vec{e}_z\right)\mathrm{kN}$$

$$\vec{F}_4=\lambda_4\vec{a}_4=2,5\left(2\vec{e}_x+2\vec{e}_z\right)=\left(5\vec{e}_x+5\vec{e}_z\right)\mathrm{kN}$$

$$\vec{F}_5=\lambda_5\vec{a}_5=\left(-3,5\vec{e}_z\right)\mathrm{kN}$$

$$\vec{F}_6=\lambda_6\vec{a}_6=2,5\left(-2\vec{e}_y+2\vec{e}_z\right)=\left(-5\vec{e}_y+5\vec{e}_z\right)\mathrm{kN}$$

1.6 - 6 RUDAS 3D FELADAT



• adott:

$a = 4\,m,\ b = 2\,m,\ c = 1\,m,\ h = 5\,m$

$\vec{F_0} = 1$ kNm

• Feladat:

támasztóerők

- Origóba redukált vektorkettős

$$\vec{F} = \vec{F_0} = (-\vec{e}_x)\ \text{kN}$$

$$\vec{M}_0 = (2\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \times (-\vec{e}_x) =$$

$$= 2(-1)\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_x}_{-\vec{e}_z} + 6(-1)\underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_x}_{\vec{e}_y} =$$

$$= (-6\vec{e}_y + 2\vec{e}_z)\ \text{kNm}$$

• A szerkezet támasztóerői rúdirányúak: $\vec{F}_i = \lambda_i \vec{a}_i \quad (i = 1, 2, \ldots 6)$

• A támasztóerők irányvektorai:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_z$$
$$\vec{a}_2 = -4\vec{e}_x + 5\vec{e}_z$$
$$\vec{a}_3 = 4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$$
$$\vec{a}_4 = \vec{e}_z$$
$$\vec{a}_5 = -2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$$
$$\vec{a}_6 = \vec{e}_z$$

• Az irányvektorok nyomatékai O pontra

$$\vec{b}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{b}_2 = (4\vec{e}_x) \times (-4\vec{e}_x + 5\vec{e}_z) = 4\cdot(-4)\overbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_x}^{\vec{0}} + 4\cdot 5\overbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}^{-\vec{e}_y} = (-20\vec{e}_y)$$

$$\vec{b}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{b}_4 = 4\overbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}^{-\vec{e}_y} = -4\vec{e}_y$$

$$\vec{b}_5 = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \times (-2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z) = 4\cdot(-2)\overbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}^{\vec{e}_z} +$$

$$+ 4\cdot 5\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} + 2(-2)\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_y}_{\vec{0}} + 2\cdot 5\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_z}_{\vec{e}_x} =$$

$$= -8\vec{e}_z - 20\vec{e}_y + 10\vec{e}_x = (10\vec{e}_x - 20\vec{e}_y - 8\vec{e}_z)$$

$$\vec{b}_6 = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \times \vec{e}_z = 4\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} + 2\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_z}_{\vec{e}_x} =$$

$$= (2\vec{e}_x - 4\vec{e}_y)$$

• Az egyensúlyi egyenlet mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -F_z \\ -M_{0x} \\ -M_{0y} \\ -M_{0z} \end{bmatrix}$$

behelyettesítve az adatokat:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1) & 2)\checkmark & 3)\checkmark & 4)\checkmark & 5)\checkmark & 6)\checkmark \end{matrix} \\
\begin{matrix} \checkmark 1) \\ \checkmark 2) \\ 3) \\ \checkmark 4) \\ \checkmark 5) \\ \checkmark 6) \end{matrix} &
\begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & -20 & 0 & -4 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$6) \Rightarrow -8\lambda_5 = -2 \Rightarrow \lambda_5 = \frac{1}{4}$$

$$4) \Rightarrow 10 \cdot \frac{1}{4} + 2\lambda_6 = 0 \Rightarrow 2\lambda_6 = -\frac{10}{4}$$

$$\lambda_6 = -\frac{5}{4}$$

$$2) \Rightarrow 2\lambda_3 - 2 \cdot \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 2\lambda_3 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4}$$

$$1) \Rightarrow -4\lambda_2 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$$5) \Rightarrow -20 \cdot 0 - 4\lambda_4 - 20\frac{1}{4} - 4\left(-\frac{5}{4}\right) = 6$$

$$-4\lambda_4 - \cancel{5} + \cancel{5} = 6$$

$$\lambda_4 = -\frac{3}{2}$$

$$3) \Rightarrow \lambda_1 + 5 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 5 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = 0$$

$$\lambda_1 + \frac{5}{4} - \frac{3}{2} + \cancel{\frac{5}{4}} - \cancel{\frac{5}{4}} = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}$$

- A támasztóerő vektorok:

$$\vec{F_1} = \lambda_1 \vec{a_1} = \frac{1}{4}\left(\vec{e_z}\right) = \left(0{,}25\,\vec{e_z}\right) \text{ kN}$$

$$\vec{F_2} = \lambda_2 \vec{a_2} = 0 \cdot \left(-4\vec{e_x} + 5\vec{e_z}\right) = \vec{0}$$

$$\vec{F_3} = \lambda_3 \vec{a_3} = \frac{1}{4} \cdot \left(4\vec{e_x} + 2\vec{e_y} + 5\vec{e_z}\right) = \left(\vec{e_x} + 0{,}5\,\vec{e_y} + 1{,}25\,\vec{e_z}\right) \text{ kN}$$

$$\vec{F_4} = \lambda_4 \vec{a_4} = -\frac{3}{2}\left(\vec{e_z}\right) = \left(-1{,}5\,\vec{e_z}\right) \text{ kN}$$

$$\vec{F_5} = \lambda_5 \vec{a_5} = \frac{1}{4}\left(-2\vec{e_y} + 5\vec{e_z}\right) = \left(-0{,}5\,\vec{e_y} + 1{,}25\,\vec{e_z}\right) \text{ kN}$$

$$\vec{F_6} = \lambda_6 \vec{a_6} = -\frac{5}{4}\left(\vec{e_z}\right) = \left(-1{,}25\,\vec{e_z}\right) \text{ kN}$$