

3. KONZULTÁCIÓ

ELEMI SZILÁRDSÁGTAN

Elmozdulás állapot:

$$\vec{u} = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_y + w \cdot \vec{e}_z$$



Derivált tenzor: fajiagos, relatív elmozdulás:

$$[\underline{D}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

kinematikai egyenlet:

$$\underline{A} = \frac{1}{2}(\underline{D} + \underline{D}^T)$$

$$[\underline{A}] =$$

$$\underline{\Psi} = \frac{1}{2}(\underline{D} - \underline{D}^T)$$

Forgató tenzor: merev test szerű elfordulás (ferdeszimmetrikus tenzor)

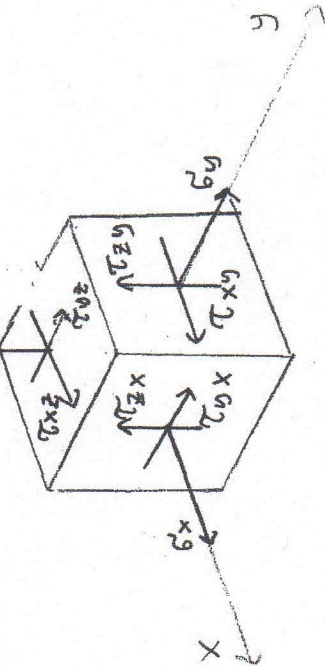
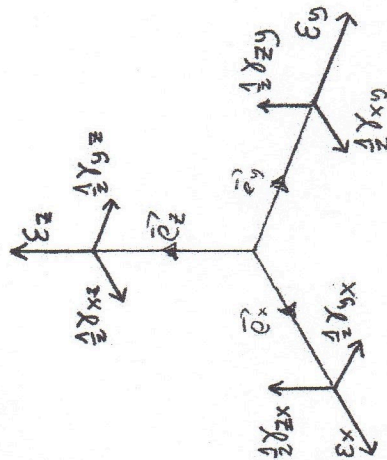
Alakváltozási tenzor:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

anyag egyenletek:

$$\underline{F} = 2G \left(\underline{A} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \cdot \underline{E} \right)$$

$$\underline{A} = \frac{1}{2G} \left(\underline{F} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \cdot \underline{E} \right)$$



Feszültségi tenzor:

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

alakváltozási vektor tetszőleges $\vec{n}$ irányú esetén:

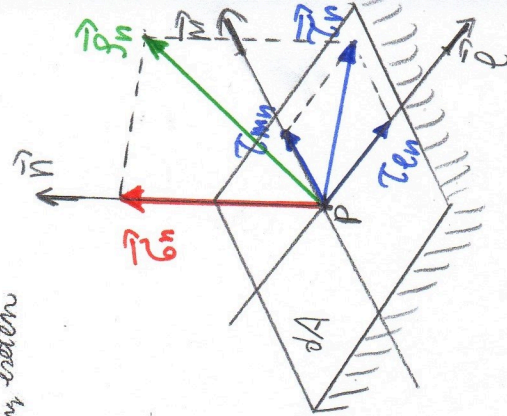
$$\vec{\epsilon}_n = [\underline{A}] \cdot \vec{n}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \vec{n} \cdot \vec{\epsilon}_n = \vec{n} \cdot [\underline{A}] \cdot \vec{n} \\ \frac{1}{2}\gamma_{mn} &= \vec{m} \cdot \vec{\epsilon}_n = \vec{m} \cdot [\underline{A}] \cdot \vec{n} \\ \frac{1}{2}\gamma_{en} &= \vec{e} \cdot \vec{\epsilon}_n = \vec{e} \cdot [\underline{A}] \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

feszültségi vektor tetszőleges $\vec{n}$ irányú esetén

$$\vec{\sigma}_n = [\underline{F}] \cdot \vec{n}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \vec{n} \cdot \vec{\sigma}_n = \vec{n} \cdot [\underline{F}] \cdot \vec{n} \\ \tau_{mn} &= \vec{m} \cdot \vec{\sigma}_n = \vec{m} \cdot [\underline{F}] \cdot \vec{n} \\ \tau_{en} &= \vec{e} \cdot \vec{\sigma}_n = \vec{e} \cdot [\underline{F}] \cdot \vec{n} \end{aligned}$$



RUGALMASSÁGTANI EGYENLETEK

ADOTT:

- méret
- alak
- anyag
- terhelés
- megtámasztás

KERESSET: rugalmas test állapotjellemzői:

- $\vec{u}(x, y, z)$: elmozdulásvektor tetszőleges pontban
- $\underline{\underline{F}}(x, y, z)$: feszültség tenzor tetszőleges pontban
- $\underline{\underline{A}}(x, y, z)$: alakváltozási tenzor tetszőleges pontban

Az állapotjellemzők között a rugalmasságtani egyenletek teremtik meg a kapcsolatot:

① egyensúlyi egyenletek $\Rightarrow$ 3 db skálár egyenlet

egyensúly feltétele: $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{M}_0 = \vec{0}$

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0} \quad \text{ahol } \vec{q}: \text{ térfogaton megoszló E.K.}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

② kinematikai egyenletek $\Rightarrow$ 6 db skálár egyenlet

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\vec{u} \circ \nabla}_{\underline{\underline{D}}} + \underbrace{\nabla \circ \vec{u}}_{\underline{\underline{D}}^T} \right)$$

alakváltozási mező és
elmozdulásmező közötti kapcsolat

③ anyagegyenlet $\Rightarrow$ 6 db skálár egyenlet

lineárisan rugalmas, izotrop anyag esetén: Hooke törvény:

$$\underline{\underline{F}} = 2G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{E}} \right) ; \quad \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}} \right)$$

④ kinematikai peremfeltételek

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \quad \text{adott felületen}$$

⑤ dinamikai peremfeltétel

$$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0 \quad \text{adott felületen}$$

3.1 - RUGALMASSÁGTANI EGYENLETEK

• Adott: elmozdulásmező: $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x, y, z) = u(x, y, z)\vec{e}_x + v(x, y, z)\vec{e}_y + w(x, y, z)\vec{e}_z$

ahol: $u = -\frac{1}{2}xy/R$

$v = (2x^2 - 2y^2 - z^2)/(2R)$

$w = yz/R$

$R = 10 \text{ m}$

$\nu = 0,25$, $G = 0,4 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

$\vec{r}_p = (4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z) \text{ mm}$

$\Downarrow$

$x_p = 4 \text{ mm} = 0,004 \text{ m}$

$y_p = -2 \text{ mm} = -0,002 \text{ m}$

$z_p = 5 \text{ mm} = 0,005 \text{ m}$

• Feladat: a) $\underline{D}(x, y, z)$; $\underline{D}_p$ + szemléltetés

b) $\underline{\Psi}(x, y, z)$; $\underline{\Psi}_p$ + szemléltetés

c) $\underline{A}(x, y, z)$; $\underline{A}_p$ + szemléltetés

d) $\underline{E}(x, y, z)$; $\underline{E}_p$ + szemléltetés

e) ellenőrzés: fesz. mező kielégíti-e az egyensúlyi egyenleteket, ha $\vec{q} = \vec{0}$

a) elmozdulásmező $\rightarrow$ derivált tenzor

$$\underline{D} = \vec{u} \cdot \nabla = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R}y & -\frac{1}{R}x & 0 \\ \frac{1}{R}x & -\frac{1}{R}y & -\frac{1}{R}z \\ 0 & \frac{1}{R}z & \frac{1}{R}y \end{bmatrix}$$

• a derivált tenzor transzponáltja:

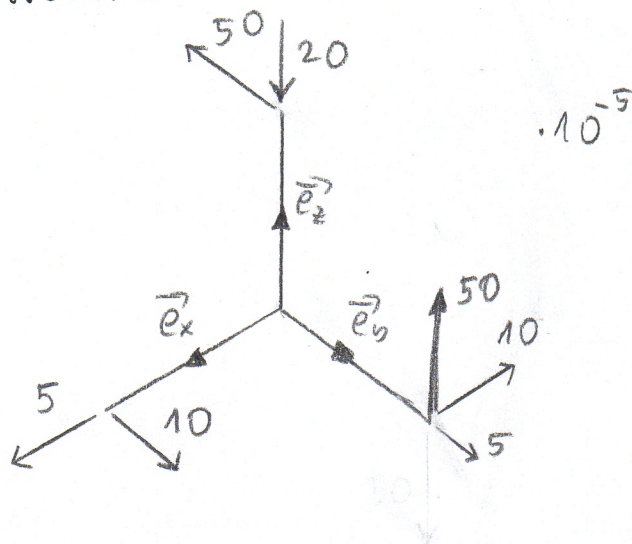
$$\underline{D}^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R}y & \frac{1}{R}x & 0 \\ -\frac{1}{R}x & -\frac{1}{R}y & \frac{1}{R}z \\ 0 & -\frac{1}{R}z & \frac{1}{R}y \end{bmatrix}$$

• a derivált tenzor a p pontban

$$\underline{D}_p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R}y_p & -\frac{1}{R}x_p & 0 \\ \frac{1}{R}x_p & -\frac{1}{R}y_p & -\frac{1}{R}z_p \\ 0 & \frac{1}{R}z_p & \frac{1}{R}y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{0,25}{10} \cdot (-0,002) & -\frac{0,25}{10} \cdot 0,004 & 0 \\ \frac{0,25}{10} \cdot 0,004 & -\frac{0,25}{10} \cdot (-0,002) & -\frac{1}{10} \cdot 0,005 \\ 0 & \frac{1}{10} \cdot 0,005 & \frac{1}{10} \cdot (-0,002) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 10 & 5 & -50 \\ 0 & 50 & -20 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

• szemléltetés:



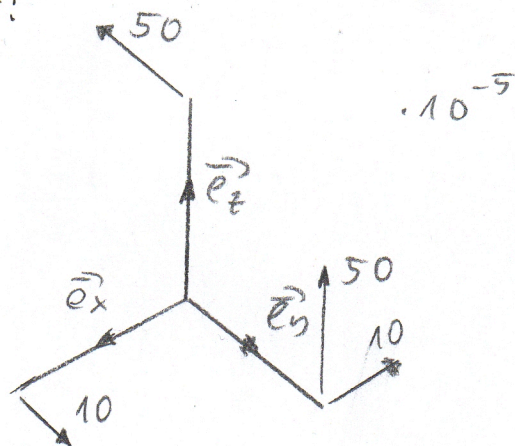
b) derivált tenzor $\rightarrow$ forgató tenzor

$$\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} -\frac{v}{R}y & -\frac{v}{R}x & 0 \\ \frac{v}{R}x & -\frac{v}{R}y & -\frac{1}{R}z \\ 0 & \frac{1}{R}z & \frac{1}{R}y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{v}{R}y & \frac{v}{R}x & 0 \\ -\frac{v}{R}x & -\frac{v}{R}y & \frac{1}{R}z \\ 0 & -\frac{1}{R}z & \frac{1}{R}y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{v}{R}x & 0 \\ \frac{v}{R}x & 0 & -\frac{1}{R}z \\ 0 & \frac{1}{R}z & 0 \end{bmatrix}$$

• a forgató tenzor a pontban:

$$\underline{\underline{\Psi}}_P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{v}{R}x_P & 0 \\ \frac{v}{R}x_P & 0 & -\frac{1}{R}z_P \\ 0 & \frac{1}{R}z_P & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{0,25}{10} \cdot 0,004 & 0 \\ \frac{0,25}{10} \cdot 0,004 & 0 & -\frac{1}{10} \cdot 0,005 \\ 0 & \frac{1}{10} \cdot 0,005 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 10 & 0 & -50 \\ 0 & 50 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

• szemléltetés:



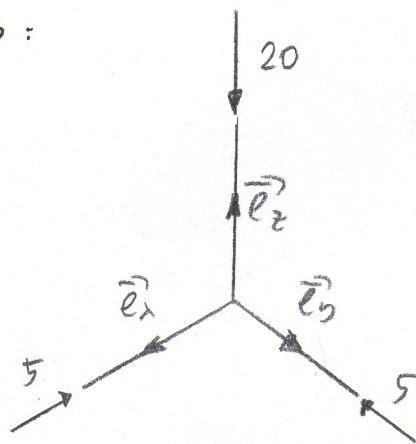
c) derivált tenzor $\rightarrow$ alakváltozási tenzor

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} -\frac{\nu}{R} y & -\frac{\nu}{R} x & 0 \\ \frac{\nu}{R} x & -\frac{\nu}{R} y & -\frac{1}{R} z \\ 0 & \frac{1}{R} z & \frac{1}{R} y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{R} y & \frac{\nu}{R} x & 0 \\ -\frac{\nu}{R} x & -\frac{\nu}{R} y & \frac{1}{R} z \\ 0 & -\frac{1}{R} z & \frac{1}{R} y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{R} y & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{R} y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} y \end{bmatrix}$$

• alakváltozási tenzor a p pontban:

$$\underline{\underline{A}}_p = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{R} y_p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{R} y_p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{0,25}{10} \cdot (-0,002) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{0,25}{10} \cdot (-0,002) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \cdot (-0,002) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

• szemléltetés:



d) alakváltozási tenzor $\rightarrow$ feszültség tenzor

anyagegyenlet (Hooke törvény): $\underline{\underline{F}} = 2G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{E}} \right)$

$$A_I = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -\frac{\nu}{R} y - \frac{\nu}{R} y + \frac{1}{R} y = -\frac{\nu}{R} y \left(1 + 1 - \frac{1}{\nu} \right) = -\frac{\nu}{R} y \frac{2\nu - 1}{\nu} = \frac{\nu}{R} y \frac{1 - 2\nu}{\nu}$$

$$\sigma_x = 2G \left(-\frac{\nu}{R} y + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\nu}{R} y \frac{1-2\nu}{\nu} \right) = 0$$

$$\sigma_y = 2G \left(-\frac{\nu}{R} y + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\nu}{R} y \frac{1-2\nu}{\nu} \right) = 0$$

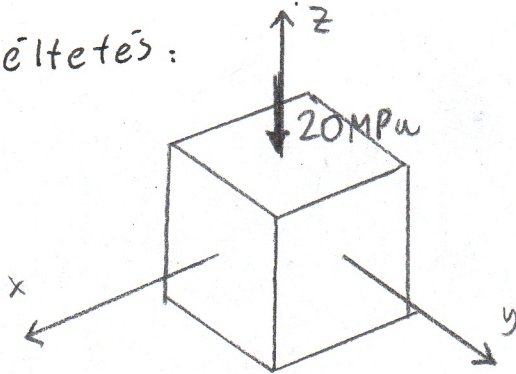
$$\sigma_z = 2G \left(\frac{1}{R} y + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\nu}{R} y \frac{1-2\nu}{\nu} \right) = 2G \left(\frac{1}{R} y + \frac{\nu}{R} y \right) = 2G y \frac{1+\nu}{R}$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2G y \frac{1+\nu}{R} \end{bmatrix}$$

• feszültség tenzor a P pontban

$$\underline{\underline{F}}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2Gy_P \frac{1+\nu}{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 0,4 \cdot 10^5 \cdot (-2) \frac{1+0,25}{10000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

• szemléltetés:



e) egyensúlyi egyenletek ellenőrzése:

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0$$

$$\frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} + 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} + 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial 2Gy \frac{1+\nu}{R}}{\partial z} + 0 = 0 \quad \checkmark$$

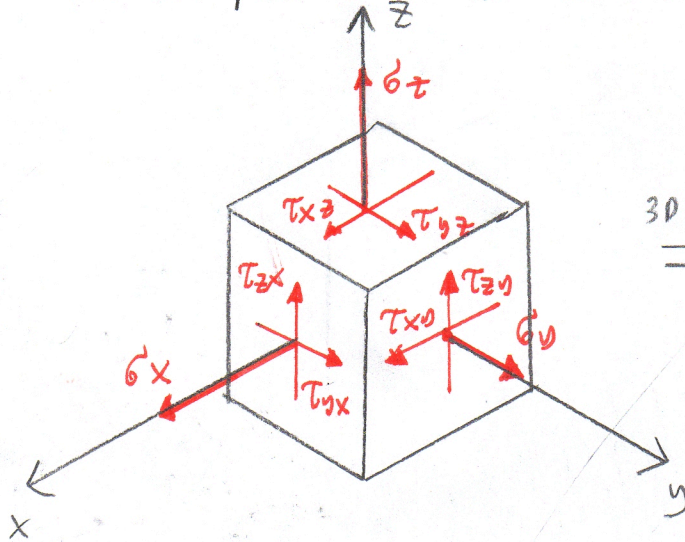
FŐFESZÜLTSGEK, FŐIRÁNYOK

ha egy $\vec{e}$ normális felületen $\vec{T}_e = \vec{0}$ akkor $\vec{s}_e = \sigma_e \vec{e}$

$\Rightarrow \vec{e}$ egy főirány

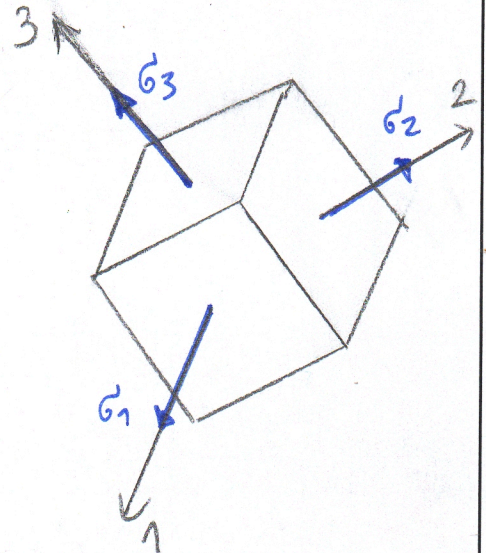
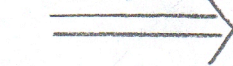
σ_e egy főfeszültség

Minden pontban 3 egymásra merőleges főirány van



$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

3D Forgatás



$$\underline{\underline{F}}_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

3.2 - FŐFESZÜLTSÉGEK (MOHR-KÖR + SAJÁTÉRTÉK FELADAT)

• adott

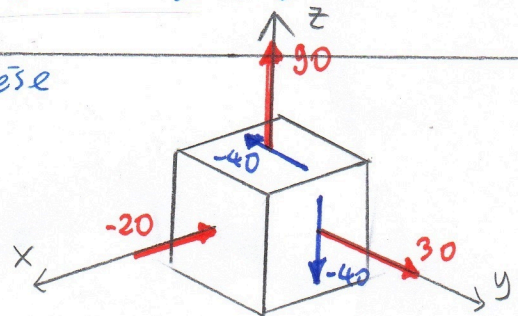
$$\begin{aligned}\sigma_x &= -20 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 30 \text{ MPa} \\ \sigma_z &= 90 \text{ MPa} \\ \tau_{yz} &= -40 \text{ MPa} \\ \tau_{xz} &= \tau_{xy} = 0 \text{ MPa} \\ \nu &= 0,3 \\ G &= 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

• feladat

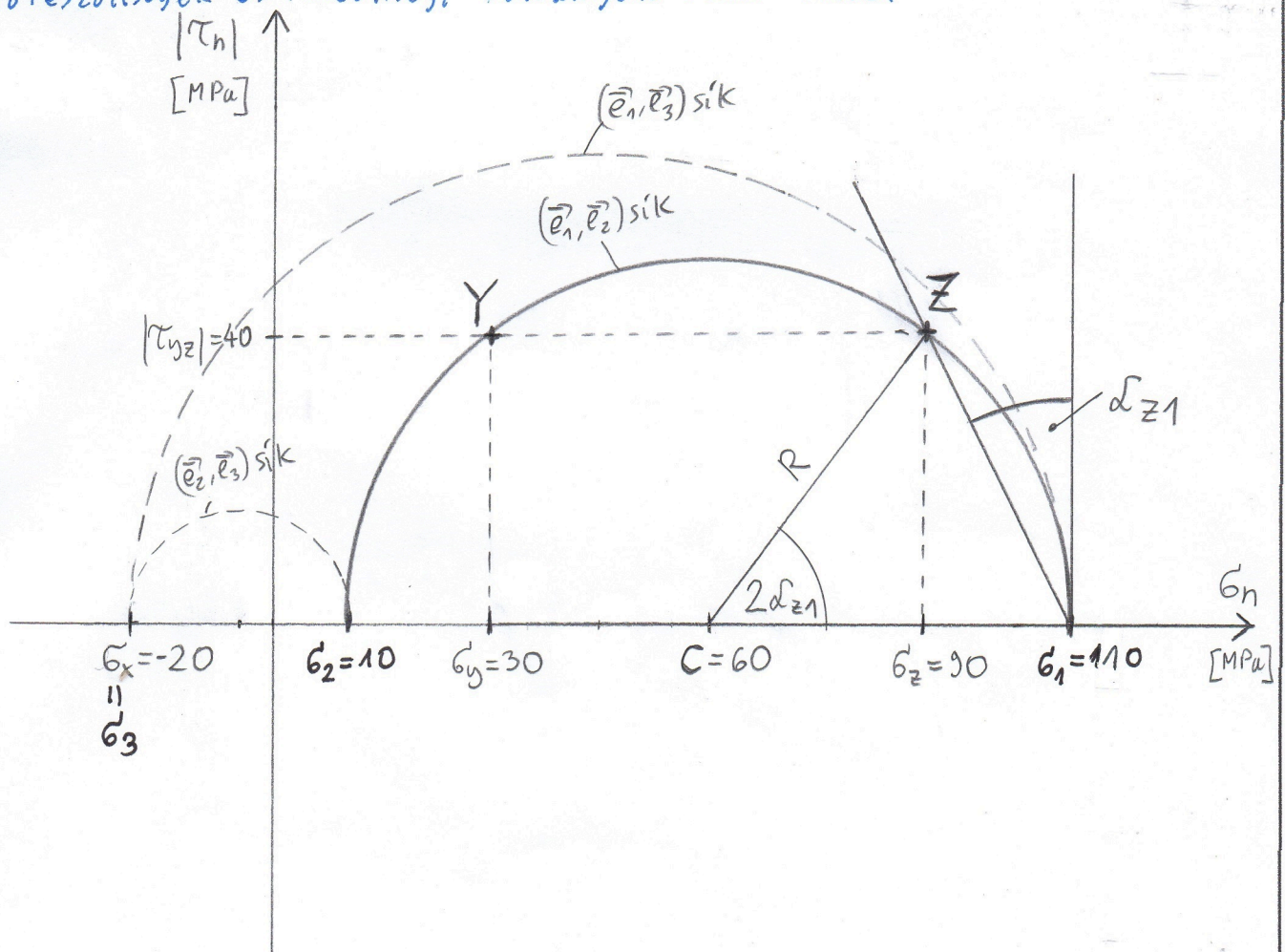
- feszültségi tenzor felírása és szemléltetése
- főfeszültségek és feszültségi főirányok Mohr-körrel
- főfeszültségek és feszültségi főirányok sajátérték-feladattal
- Mohr, Coulomb és MMH szerinti redukált feszültségek
- feszültségi tenzor skalár invariánsai
- feszültségi tenzor deviátoros és gömbi része
- alakváltozási tenzor előállítása és szemléltetése
- főnyúlások és alakváltozási főirányok Mohr-körrel
- alakváltozási tenzor deviátoros és gömbi része

a) feszültségi tenzor felírása és szemléltetése

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



b) főfeszültségek és feszültségi főirányok Mohr-körrel



szekesztés lépései:

- ① $\sigma_n, |\tau_n|$ koordináta-rendszer felvétele
- ② vízszintes tengelyen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ felvétele
- ③ azokhoz a σ -khoz, melyekhez tartozik $\tau, |\tau|$ felvétele
 $\rightarrow$ jelen esetben: $\sigma_y \rightarrow |\tau_{zy}| \Rightarrow Y$ pont (σ_x főfeszültség, mert nincs τ -ja)
 $\sigma_z \rightarrow |\tau_{yz}| \Rightarrow Z$ pont
- ④ Mohr kör középpontjának felvétele: $C = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2}$ $\leftarrow$ a 2 τ -val rendelkező σ összege
- ⑤ Y és Z pontokon átmenő C középpontú félkör megrajzolása
- ⑥ a félkör vízszintes tengellyel vett metszete kiadja a σ_x -en kívüli másik 2 főfeszültséget. A főfeszültségeket a vízszintes tengelyen jobbról balra haladva növekvő sorrendben indexeljük, mivel:
 $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$
- ⑦ a főfeszültségek ismeretében megrajzoljuk a másik 2 félkört

- A főfeszültségek meghatározása a Mohr-kör alapján:

• A Mohr-kör középpontja: $C = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} = \frac{30 + 90}{2} = 60 \text{ MPa}$

• A Mohr-kör sugara: $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = \sqrt{\left(\frac{90 - 30}{2}\right)^2 + 40^2} = 50 \text{ MPa}$

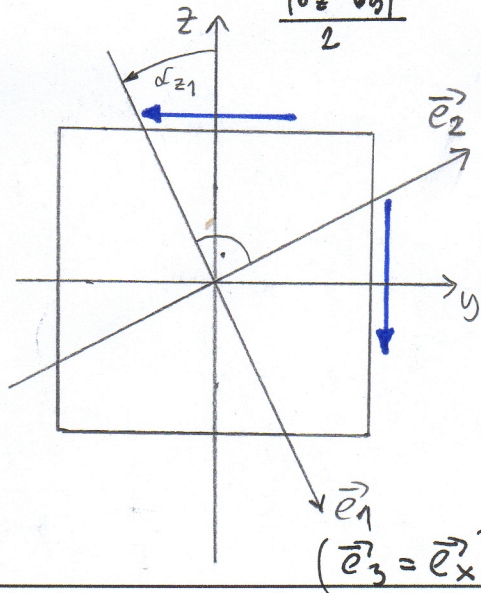
• A főfeszültségek: $\sigma_1 = C + R = 60 + 50 = 110 \text{ MPa}$

$\sigma_2 = C - R = 60 - 50 = 10 \text{ MPa}$

$\sigma_3 = \sigma_x = -20 \text{ MPa}$

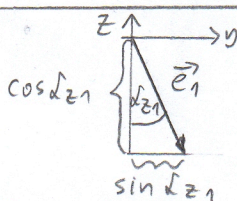
- A főirányok meghatározása a Mohr-kör alapján:

$$\tan 2\alpha_{z1} = \frac{|\tau_{yz}|}{\frac{|\sigma_z - \sigma_y|}{2}} = \frac{2|\tau_{yz}|}{|\sigma_z - \sigma_y|} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha_{z1} = \frac{\arctan \frac{4}{3}}{2} = 26,57^\circ$$

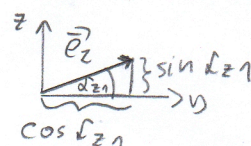


szabály: A τ csúsztató feszültségek mindig a nagyobb σ felé mutatnak

• α_{z1} szöget a τ irányába mérjük fel (mivel $\sigma_1 > \sigma_2$)



$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (\sin \alpha_{z1} \vec{e}_y - \cos \alpha_{z1} \vec{e}_z) = \\ &= (0,447 \vec{e}_y - 0,894 \vec{e}_z) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \vec{e}_2 &= (\cos \alpha_{z1} \vec{e}_y + \sin \alpha_{z1} \vec{e}_z) = \\ &= (0,994 \vec{e}_y + 0,447 \vec{e}_z) \end{aligned}$$

szekesztés lépései:

- ① $\sigma_n, |\tau_n|$ koordináta-rendszer felvétele
- ② vízszintes tengelyen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ felvétele
- ③ azokhoz a σ -khoz, melyekhez tartozik $\tau, |\tau|$ felvétele
 $\rightarrow$ jelen esetben: $\sigma_y \rightarrow |\tau_{zy}| \Rightarrow Y$ pont (σ_x főfeszültség, mert nincs τ -ja)
 $\sigma_z \rightarrow |\tau_{yz}| \Rightarrow Z$ pont
- ④ Mohr kör középpontjának felvétele: $C = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \leftarrow$ a 2 τ -val rendelkező σ összege
- ⑤ Y és Z pontokon átmenő C középpontú félkör megrajzolása
- ⑥ a félkör vízszintes tengellyel vett metszete kiadja a σ_x -en kívüli másik 2 főfeszültséget. A főfeszültségeket a vízszintes tengelyen jobbról balra haladva növekvő sorrendben indexeljük, mivel:
 $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$
- ⑦ a főfeszültségek ismeretében megrajzoljuk a másik 2 félkört

- A főfeszültségek meghatározása a Mohr-kör alapján:

• A Mohr-kör középpontja: $C = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} = \frac{30 + 90}{2} = 60 \text{ MPa}$

• A Mohr-kör sugara: $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = \sqrt{\left(\frac{90 - 30}{2}\right)^2 + 40^2} = 50 \text{ MPa}$

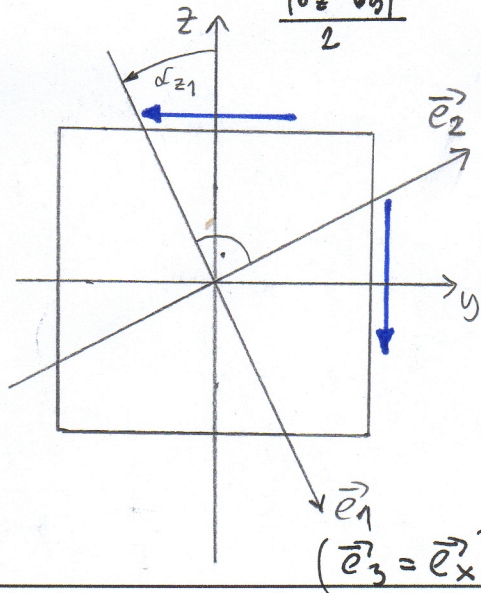
• A főfeszültségek: $\sigma_1 = C + R = 60 + 50 = 110 \text{ MPa}$

$\sigma_2 = C - R = 60 - 50 = 10 \text{ MPa}$

$\sigma_3 = \sigma_x = -20 \text{ MPa}$

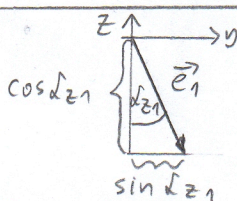
- A főirányok meghatározása a Mohr-kör alapján:

$$\tan 2\alpha_{z1} = \frac{|\tau_{yz}|}{\frac{|\sigma_z - \sigma_y|}{2}} = \frac{2|\tau_{yz}|}{|\sigma_z - \sigma_y|} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha_{z1} = \frac{\arctan \frac{4}{3}}{2} = 26,57^\circ$$

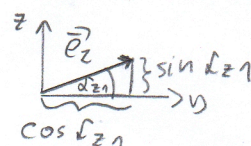


szabály: A τ csúsztató feszültségek mindig a nagyobb σ felé mutatnak

• α_{z1} szöget a τ irányába mérjük fel (mivel $\sigma_1 > \sigma_2$)



$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (\sin \alpha_{z1} \vec{e}_y - \cos \alpha_{z1} \vec{e}_z) = \\ &= (0,447 \vec{e}_y - 0,894 \vec{e}_z) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \vec{e}_2 &= (\cos \alpha_{z1} \vec{e}_y + \sin \alpha_{z1} \vec{e}_z) = \\ &= (0,994 \vec{e}_y + 0,447 \vec{e}_z) \end{aligned}$$

c) Főfeszültségek és főirányok sajátérték feladattal

$$\vec{\sigma}_e = \sigma_e \vec{e}$$

$$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{e} = \sigma_e \underline{\underline{E}} \cdot \vec{e}$$

$$(\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{e} = \vec{0}$$

nem triviális megoldás:

$$\det | \underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}} | = 0$$

$$\begin{vmatrix} -20 - \sigma_e & 0 & 0 \\ 0 & 30 - \sigma_e & -40 \\ 0 & -40 & 90 - \sigma_e \end{vmatrix} = 0$$

$$(-20 - \sigma_e) [(30 - \sigma_e)(90 - \sigma_e) - (-40)(-40)] = 0$$

$$(-20 - \sigma_e) (2700 - 30\sigma_e - 90\sigma_e + \sigma_e^2 - 1600) = 0$$

$$(-20 - \sigma_e) (\sigma_e^2 - 120\sigma_e + 1100) = 0 \quad (\Rightarrow \text{Karakterisztikus egyenlet})$$

$$\downarrow \quad \sigma_e = -20 \quad \sigma_{e_{1,2}} = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1100}}{2} = \begin{cases} 110 \\ 10 \end{cases}$$

- A főfeszültségek: $\sigma_1 = 110 \text{ MPa}$
 $\sigma_2 = 10 \text{ MPa}$
 $\sigma_3 = -20 \text{ MPa}$

- Főirányok meghatározása:

• mivel $\sigma_x = \sigma_3 = -20 \text{ MPa} \Rightarrow \vec{e}_3 = \vec{e}_x$

• $\sigma_1 = 110 \text{ MPa}$ -hoz tartozó főirány:

$$(\underline{\underline{F}} - \sigma_1 \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{e}_1 = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -20 - 110 & 0 & 0 \\ 0 & 30 - 110 & -40 \\ 0 & -40 & 90 - 110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-130 e_{1x} = 0 \quad \rightarrow e_{1x} = 0$$

$$-80 e_{1y} - 40 e_{1z} = 0 \quad \rightarrow e_{1z} = -2 e_{1y}$$

$$-40 e_{1y} - 20 e_{1z} = 0 \quad \rightarrow e_{1z} = -2 e_{1y}$$

$$|\vec{e}_1| = 1 = \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2} = \sqrt{e_{1y}^2 + 4e_{1y}^2} = \sqrt{5} e_{1y} \Rightarrow e_{1y} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

↓

$$e_{1z} = -2e_{1y} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{e}_1 = (e_{1x}\vec{e}_x + e_{1y}\vec{e}_y + e_{1z}\vec{e}_z) = (0\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_y - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_z) = (0,447\vec{e}_y - 0,894\vec{e}_z)$$

• a második főirány:

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_x \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_y - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_z \right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_z = (0,894\vec{e}_y + 0,447\vec{e}_z)$$

$$\begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 & \vec{e}_1 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ \vec{e}_z & \vec{e}_x \end{matrix} \oplus$$

d) Mohr, Coulomb és HMM-féle redukált feszültségek:

$$\sigma_{red} (Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = 110 - (-20) = 130 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red} (Coulomb) = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) = |\sigma_1| = 110 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red} (HMM) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[(110 - 10)^2 + (10 - (-20))^2 + (-20 - 110)^2]} = 117,9 \text{ MPa}$$

e) Feszültségi tenzor skalár invariánsai:

• feszültségi tenzor xyz k.v.-ben:

$$\underline{\underline{F}}_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

• feszültségi tenzor 123 k.v.-ben:

$$\underline{\underline{F}}_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

(Az invariánsok olyan mennyiségek, melyek a koordináta-transzformáció során nem változnak)

• első skalár invariáns:

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 110 + 10 - 20 = 100 \text{ MPa}$$

• második skalár invariáns:

$$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 =$$

$$= 10 \cdot (-20) + 110 \cdot (-20) + 110 \cdot 10 = -1300 \text{ MPa}^2$$

$$|\vec{e}_1| = 1 = \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2} = \sqrt{e_{1y}^2 + 4e_{1y}^2} = \sqrt{5} e_{1y} \Rightarrow e_{1y} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

↓

$$e_{1z} = -2e_{1y} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{e}_1 = (e_{1x}\vec{e}_x + e_{1y}\vec{e}_y + e_{1z}\vec{e}_z) = (0\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_y - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_z) = (0,447\vec{e}_y - 0,894\vec{e}_z)$$

• a második főirány:

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_x \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_y - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_z \right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_z = (0,894\vec{e}_y + 0,447\vec{e}_z)$$

$$\begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 & \vec{e}_1 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ \vec{e}_z & \vec{e}_x \end{matrix} \oplus$$

d) Mohr, Coulomb és HMM-féle redukált feszültségek:

$$\sigma_{red} (Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = 110 - (-20) = 130 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red} (Coulomb) = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) = |\sigma_1| = 110 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red} (HMM) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[(110 - 10)^2 + (10 - (-20))^2 + (-20 - 110)^2]} = 117,9 \text{ MPa}$$

e) Feszültségi tenzor skalár invariánsai:

• feszültségi tenzor xyz k.v.-ben:

$$\underline{\underline{F}}_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

• feszültségi tenzor 123 k.v.-ben:

$$\underline{\underline{F}}_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

(Az invariánsok olyan mennyiségek, melyek a koordináta-transzformáció során nem változnak)

• első skalár invariáns:

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 110 + 10 - 20 = 100 \text{ MPa}$$

• második skalár invariáns:

$$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 =$$

$$= 10 \cdot (-20) + 110 \cdot (-20) + 110 \cdot 10 = -1300 \text{ MPa}^2$$

• harmadik skalár invariáns:

$$F_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 110 \cdot 10 \cdot (-20) = -22000 \text{ MPa}^3$$

megjegyzés: A karakterisztikus egyenlet felírható a skalár invariánsokkal:

$$\sigma_e^3 - F_I \sigma_e^2 + F_{II} \sigma_e - F_{III} = 0$$

f) feszültségi tenzor deviatoros és gömbi része

$$\underline{\underline{F}} = \underbrace{\underline{\underline{F}}_d}_{\substack{\text{deviatoros} \\ \text{rész} \\ \Downarrow \\ \text{tiszta torzió-} \\ \text{lőshöz tartozók}}} + \underbrace{\sigma_k \underline{\underline{E}}}_{\substack{\text{gömbi} \\ \text{rész} \\ \Downarrow \\ \text{tiszta térfogat-} \\ \text{változások tartozók}}}$$

ahol: $\sigma_k = \frac{F_I}{3}$

$$\sigma_k = \frac{F_I}{3} = \frac{100}{3} = 33,3 \text{ MPa}$$

• gömbi rész: $\sigma_k \underline{\underline{E}} = 33,3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33,3 & 0 & 0 \\ 0 & 33,3 & 0 \\ 0 & 0 & 33,3 \end{bmatrix} \text{ MPa}$

• deviatoros rész: $\underline{\underline{F}}_d = \underline{\underline{F}} - \sigma_k \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 33,3 & 0 & 0 \\ 0 & 33,3 & 0 \\ 0 & 0 & 33,3 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -53,3 & 0 & 0 \\ 0 & -3,3 & -40 \\ 0 & -40 & 56,6 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

g) alakváltozási tenzor előállítása, szemléltetése

anyagegyenlet (általános Hooke-törvény).

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{E}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}} \right)$$

Kibontva:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2G} \left(\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right) = \frac{1}{2 \cdot 0,8 \cdot 10^5} \left(-20 - \frac{0,3}{1+0,3} \cdot 100 \right) = -2,69 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2G} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right) = \frac{1}{2 \cdot 0,8 \cdot 10^5} \left(30 - \frac{0,3}{1+0,3} \cdot 100 \right) = 4,33 \cdot 10^{-5}$$

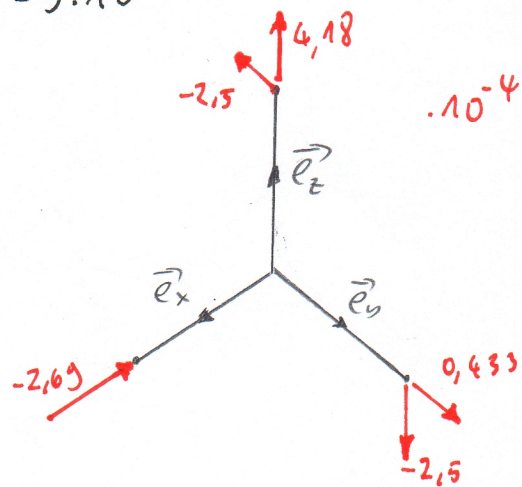
$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left(\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right) = \frac{1}{2 \cdot 0,8 \cdot 10^5} \left(30 - \frac{0,3}{1+0,3} \cdot 100 \right) = 4,18 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\tau_{yx}}{G} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{\tau_{zx}}{G} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{\tau_{zy}}{G} = \frac{-40}{0,8 \cdot 10^5} = -5 \cdot 10^{-4}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -2,69 & 0 & 0 \\ 0 & 0,433 & -2,5 \\ 0 & -2,5 & 4,18 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$



g) alakváltozási tenzor előállítása, szemléltetése

anyagegyenlet (általános Hooke-törvény).

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{E}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}} \right)$$

Kibontva:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2G} \left(\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right) = \frac{1}{2 \cdot 0,8 \cdot 10^5} \left(-20 - \frac{0,3}{1+0,3} \cdot 100 \right) = -2,69 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2G} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right) = \frac{1}{2 \cdot 0,8 \cdot 10^5} \left(30 - \frac{0,3}{1+0,3} \cdot 100 \right) = 4,33 \cdot 10^{-5}$$

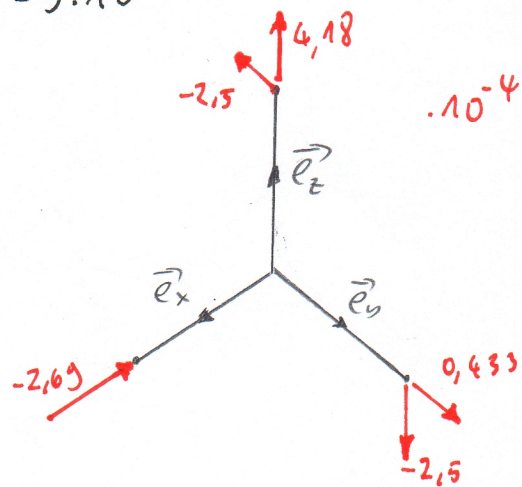
$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left(\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \right) = \frac{1}{2 \cdot 0,8 \cdot 10^5} \left(30 - \frac{0,3}{1+0,3} \cdot 100 \right) = 4,18 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\tau_{yx}}{G} = 0$$

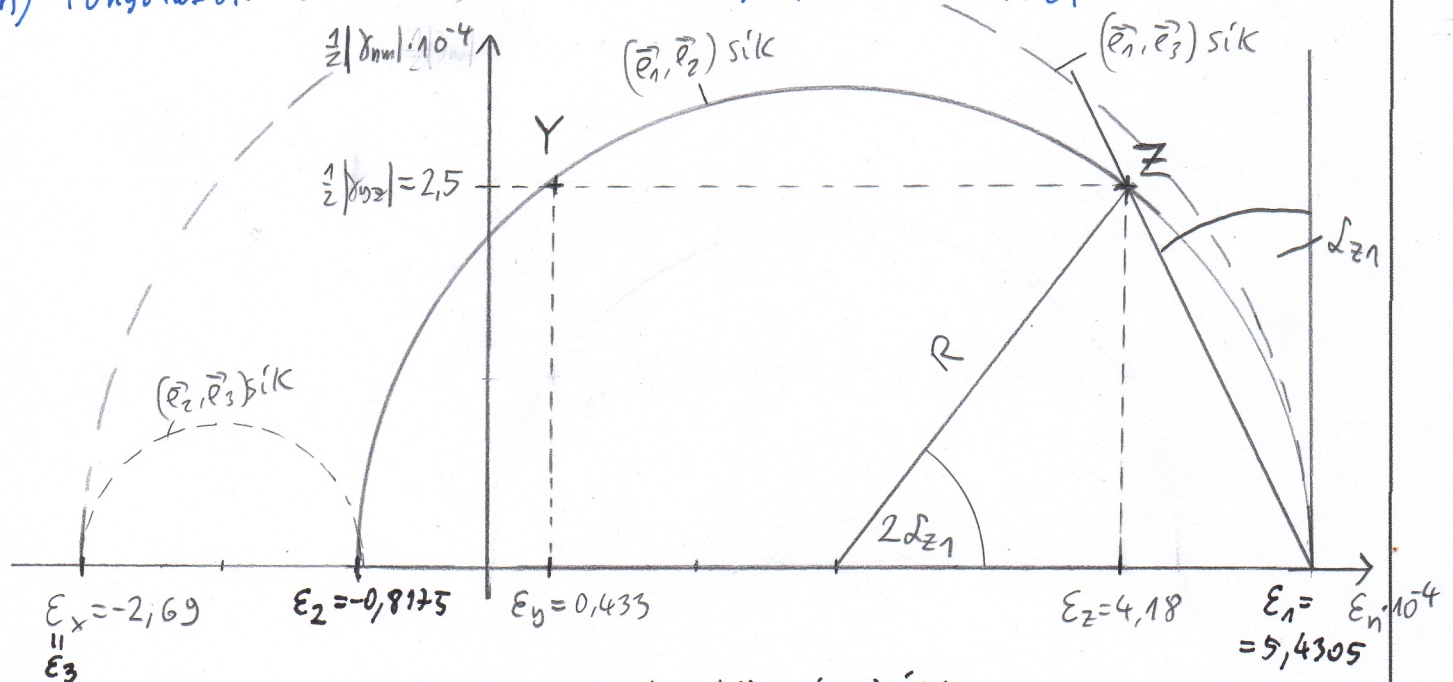
$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{\tau_{zx}}{G} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{\tau_{zy}}{G} = \frac{-40}{0,8 \cdot 10^5} = -5 \cdot 10^{-4}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -2,69 & 0 & 0 \\ 0 & 0,433 & -2,5 \\ 0 & -2,5 & 4,18 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$



h) Főnyúlások és alakváltozási főirányok Mohr-körrel



- A Főnyúlások meghatározása a Mohr-kör alapján:

• A Mohr-kör középpontja: $C = \frac{\epsilon_y + \epsilon_z}{2} = \frac{0,433 + 4,18}{2} \cdot 10^{-4} = 2,3065 \cdot 10^{-4}$

• A Mohr-kör sugara: $R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_z - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4,18 - 0,433}{2}\right)^2 + 2,5^2} \cdot 10^{-4} = 3,124 \cdot 10^{-4}$

• A Főnyúlások: $\epsilon_1 = C + R = (2,3065 + 3,124) \cdot 10^{-4} = 5,4305 \cdot 10^{-4}$

$\epsilon_2 = C - R = (2,3065 - 3,124) \cdot 10^{-4} = -0,8175 \cdot 10^{-4}$

$\epsilon_3 = \epsilon_x = -2,69 \cdot 10^{-4}$

- Az alakváltozási főirányok a Mohr-kör alapján:

$\tan 2\alpha_{z1} = \frac{\frac{1}{2} \gamma_{yz}}{\frac{\epsilon_z - \epsilon_y}{2}} = \frac{|\gamma_{yz}|}{|\epsilon_z - \epsilon_y|} = \frac{5}{3,747} \Rightarrow \alpha_{z1} = \frac{\arctan \frac{5}{3,747}}{2} = 26,57^\circ$

tehát az alakváltozási és feszültségi főirányok megegyeznek

$\vec{e}_1 = 0,447 \vec{e}_y - 0,894 \vec{e}_z$

$\vec{e}_2 = 0,894 \vec{e}_y + 0,447 \vec{e}_z$

$\vec{e}_3 = \vec{e}_x$

i) alakváltóási tenzor deviátoros és gömbi része

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\underline{\underline{A}}_d}_{\text{deviátoros rész}} + \underbrace{\varepsilon_{kk} \underline{\underline{E}}}_{\text{gömbi rész}}$$

$$\text{ahol } \varepsilon_{kk} = \frac{A_{II}}{3}$$

$\Downarrow$
tiszta torzuláshoz
tartozik

$\Downarrow$
tiszta térfogat-
változáshoz tartozik

$$\varepsilon_{kk} = \frac{A_{II}}{3} = \frac{-2,69 + 0,433 + 4,18}{3} \cdot 10^{-4} = 0,641 \cdot 10^{-4}$$

$$\bullet \text{ gömbi rész: } \varepsilon_{kk} \underline{\underline{E}} = 0,641 \cdot 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,641 & 0 & 0 \\ 0 & 0,641 & 0 \\ 0 & 0 & 0,641 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\bullet \text{ deviátoros rész: } \underline{\underline{A}}_d = \underline{\underline{A}} - \varepsilon_{kk} \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} -2,69 & 0 & 0 \\ 0 & 0,433 & -2,5 \\ 0 & -2,5 & 4,18 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} - \begin{bmatrix} 0,641 & 0 & 0 \\ 0 & 0,641 & 0 \\ 0 & 0 & 0,641 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3,331 & 0 & 0 \\ 0 & -0,208 & -2,5 \\ 0 & -2,5 & 3,539 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

3.3 - FŐFESZÜLTSÉGEK (MOHR-KÖR + SAJÁTÉRTÉK FELADAT)

• Adott:

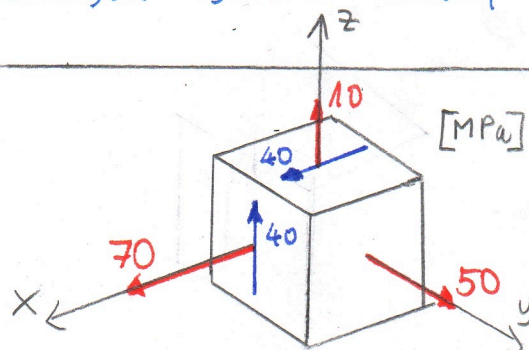
$$\begin{aligned}\sigma_x &= 70 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 50 \text{ MPa} \\ \sigma_z &= 10 \text{ MPa} \\ \tau_{xz} &= 40 \text{ MPa}\end{aligned}$$

• Feladat:

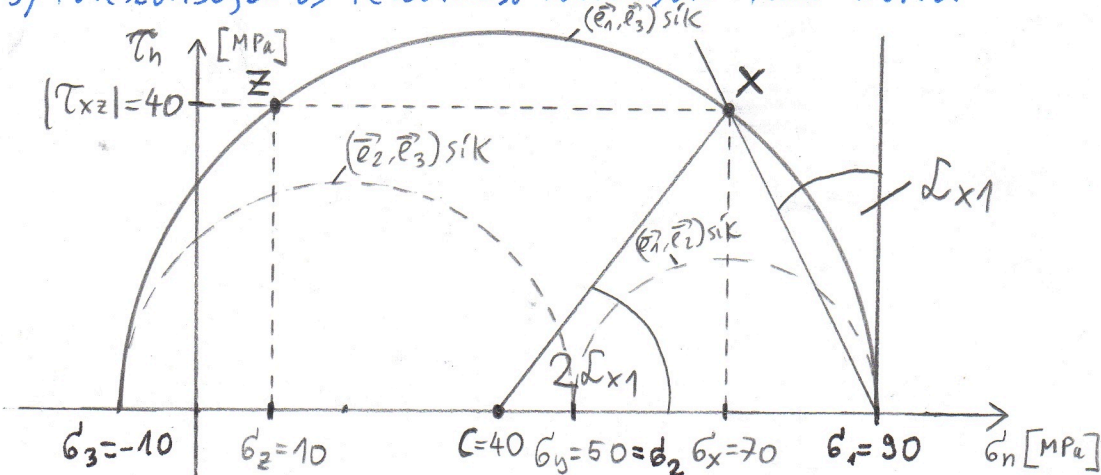
- Feszültségi tenzor felírása és szemléltetése
- Főfeszültségek és feszültségi főirányok Mohr-körrel
- Főfeszültségek és feszültségi főirányok sajátérték feladattal

a) Feszültségi tenzor felírása és szemléltetése

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 40 \\ 0 & 50 & 0 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



b) Főfeszültségek és feszültségi főirányok Mohr-körrel



– A főfeszültségek meghatározása a Mohr-kör alapján:

• A Mohr-kör középpontja: $C = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = \frac{70 + 10}{2} = 40 \text{ MPa}$

• A Mohr-kör sugara: $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{70 - 10}{2}\right)^2 + 40^2} = 50 \text{ MPa}$

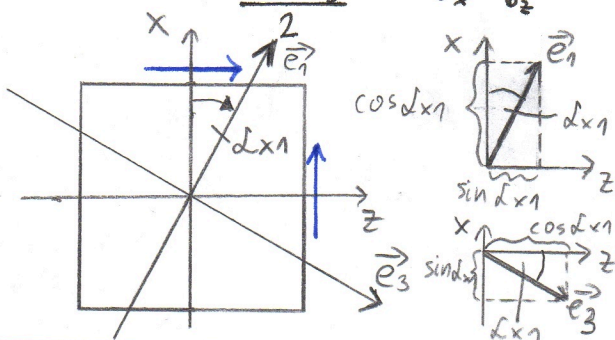
• A főfeszültségek: $\sigma_1 = C + R = 40 + 50 = 90 \text{ MPa}$

$\sigma_2 = \sigma_y = 50 \text{ MPa}$

$\sigma_3 = C - R = 40 - 50 = -10 \text{ MPa}$

– A főirányok meghatározása a Mohr-kör alapján:

$$\tan 2\alpha_{x1} = \frac{|\tau_{xz}|}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2|\tau_{xz}|}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2 \cdot 40}{70 - 10} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha_{x1} = \frac{\arctan \frac{4}{3}}{2} = 26,57^\circ$$



$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= (\cos \alpha_{x1} \vec{e}_x + \sin \alpha_{x1} \vec{e}_z) = \\ &= (0,894 \vec{e}_x + 0,447 \vec{e}_z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_3 &= (-\sin \alpha_{x1} \vec{e}_x + \cos \alpha_{x1} \vec{e}_z) = \\ &= (-0,447 \vec{e}_x + 0,894 \vec{e}_z)\end{aligned}$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_y$$

c) Főfeszültségek és feszültségi főirányok sajátérték feladattal

$$\vec{\sigma}_e = \sigma_e \vec{e}$$

$$\underline{\underline{E}} \cdot \vec{e} = \sigma_e \underline{\underline{E}} \vec{e}$$

$$(\underline{\underline{E}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{e} = \vec{0}$$

nem triviális megoldás:

$$\det(\underline{\underline{E}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 70 - \sigma_e & 0 & 40 \\ 0 & 50 - \sigma_e & 0 \\ 40 & 0 & 10 - \sigma_e \end{vmatrix} = 0$$

$$(50 - \sigma_e)[(70 - \sigma_e)(10 - \sigma_e) - 40 \cdot 40] = 0$$

$$(50 - \sigma_e)(700 - 70\sigma_e - 10\sigma_e + \sigma_e^2 - 1600) = 0$$

$$(50 - \sigma_e)(\sigma_e^2 - 80\sigma_e - 900) = 0$$

$$\sigma_e = 50 \quad \sigma_{e1,2} = \frac{80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-900)}}{2 \cdot 1} = \frac{80 \pm 100}{2} = \begin{cases} 90 \\ -10 \end{cases}$$

- A főfeszültségek: $\sigma_1 = 90 \text{ MPa}$

$$\sigma_2 = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -10 \text{ MPa}$$

- Főirányok meghatározása:

• mivel $\sigma_2 = \sigma_3 = 50 \text{ MPa} \Rightarrow \vec{e}_2 = \vec{e}_y$

• $\sigma_1 = 90 \text{ MPa}$ -hoz tartozó főirány:

$$(\underline{\underline{E}} - \sigma_1 \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{e}_1 = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 70 - 90 & 0 & 40 \\ 0 & 50 - 90 & 0 \\ 40 & 0 & 10 - 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-20 e_{1x} + 40 e_{1z} = 0 \rightarrow e_{1x} = 2 e_{1z}$$

$$-40 e_{1y} = 0 \rightarrow e_{1y} = 0$$

$$40 e_{1x} - 80 e_{1z} = 0 \rightarrow e_{1x} = 2 e_{1z}$$

$$|\vec{e}_1| = 1 = \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2} = \sqrt{4e_{1z}^2 + 0^2 + e_{1z}^2} = \sqrt{5} e_{1z} \Rightarrow e_{1z} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Downarrow$$

$$e_{1x} = 2e_{1z} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{e}_1 = (e_{1x} \vec{e}_x + e_{1y} \vec{e}_y + e_{1z} \vec{e}_z) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_z \right) = (0,894 \vec{e}_x + 0,447 \vec{e}_z)$$

• a harmadik főirány:

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = (0,894 \vec{e}_x + 0,447 \vec{e}_z) \times \vec{e}_y = \\ &= 0,894 \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}_{\vec{e}_z} + 0,447 \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_y}_{-\vec{e}_x} = (-0,447 \vec{e}_x + 0,894 \vec{e}_z) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 & \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \end{array} \quad \oplus$$

A feszültségi tenzor a főirányok koordinátarendszerében:

$$\underline{\underline{F}}_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

3.4 - FŐFESZÜLTTSÉGEK (SAJÁTÉRTÉK FELADAT)

• adott

$$\underline{\underline{\underline{F}}} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 0 \\ 6 & 40 & -8 \\ 0 & -8 & 30 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

• Feladat

Főfeszültségek és feszültségi főirányok sajátérték feladattal

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}_e = \sigma_e \underline{\underline{\underline{e}}}$$

$$\underline{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{\underline{e}}} = \sigma_e \underline{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{\underline{e}}}$$

$$(\underline{\underline{\underline{F}}} - \sigma_e \underline{\underline{\underline{F}}}) \cdot \underline{\underline{\underline{e}}} = \underline{\underline{\underline{0}}}$$

nem triviális megoldás:

$$\det |\underline{\underline{\underline{F}}} - \sigma_e \underline{\underline{\underline{F}}}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 30 - \sigma_e & 6 & 0 \\ 6 & 40 - \sigma_e & -8 \\ 0 & -8 & 30 - \sigma_e \end{vmatrix} = 0$$

$$(30 - \sigma_e) [(40 - \sigma_e)(30 - \sigma_e) - (-8)(-8)] - 6 [6(30 - \sigma_e) - 0 \cdot (-8)] = 0$$

$$(30 - \sigma_e) [1200 - 40\sigma_e - 30\sigma_e + \sigma_e^2 - 64 - 36] = 0$$

$$(30 - \sigma_e) (\sigma_e^2 - 70\sigma_e + 1100) = 0$$

$$\downarrow \quad \sigma_{e1,2} = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1100}}{2} = \begin{cases} 23,82 \\ 46,18 \end{cases}$$

- A Főfeszültségek: $\sigma_1 = 46,18 \text{ MPa}$
 $\sigma_2 = 30 \text{ MPa}$
 $\sigma_3 = 23,82 \text{ MPa}$

– Főirányok meghatározása:

- $\sigma_1 = 46,18 \text{ MPa}$ -hoz tartozó főirány:

$$(\underline{\underline{\underline{F}}} - \sigma_1 \underline{\underline{\underline{F}}}) \cdot \underline{\underline{\underline{e}}}_1 = \underline{\underline{\underline{0}}}$$

$$\begin{bmatrix} 30 - 46,18 & 6 & 0 \\ 6 & 40 - 46,18 & -8 \\ 0 & -8 & 30 - 46,18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) -16,18 e_{1x} + 6 e_{1y} = 0 \\ 2) 6 e_{1x} - 6,18 e_{1y} - 8 e_{1z} = 0 \\ 3) -8 e_{1y} - 16,18 e_{1z} = 0 \end{array} \right\}$$

legyen $e_{1x} = 1$

$$1) \rightarrow e_{1y} = \frac{16,18}{6} e_{1x} = 2,69\dot{6}$$

$$3) \rightarrow e_{1z} = -\frac{8}{16,18} e_{1y} = -\frac{8}{16,18} \cdot 2,69\dot{6} = -1,3$$

a kapott vektor hossza: $S = \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2} = \sqrt{1^2 + 2,69\dot{6}^2 + 1,3^2} = 3,17$

ezzel normálva az egységvektor:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \frac{e_{1x}}{S} \vec{e}_x + \frac{e_{1y}}{S} \vec{e}_y + \frac{e_{1z}}{S} \vec{e}_z = \frac{1}{3,17} \vec{e}_x + \frac{2,69\dot{6}}{3,17} \vec{e}_y + \frac{-1,3}{3,17} \vec{e}_z = \\ &= 0,3154 \vec{e}_x + 0,8506 \vec{e}_y - 0,4206 \vec{e}_z\end{aligned}$$

• $\vec{b}_2 = 30 \text{ mA}$ -hoz tartozó főirány:

$$(\underline{F} - b_2 \underline{E}) \vec{e}_2 = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 30-30 & 6 & 0 \\ 6 & 40-30 & -8 \\ 0 & -8 & 30-30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}1) \quad 6e_{2y} &= 0 \\ 2) \quad 6e_{2x} + 10e_{2y} - 8e_{2z} &= 0 \\ 3) \quad -8e_{2y} &= 0\end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow e_{2y} = 0 \\ \rightarrow e_{2y} = 0 \end{array} \right\}$$

legyen $e_{2x} = 1$

$$2) \rightarrow e_{2z} = \frac{6}{8} e_{2x} = 0,75$$

a kapott vektor hossza: $S = \sqrt{e_{2x}^2 + e_{2y}^2 + e_{2z}^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0,75^2} = 1,25$

ezzel normálva az egységvektor:

$$\vec{e}_2 = \frac{e_{2x}}{S} \vec{e}_x + \frac{e_{2y}}{S} \vec{e}_y + \frac{e_{2z}}{S} \vec{e}_z = \frac{1}{1,25} \vec{e}_x + \frac{0}{1,25} \vec{e}_y + \frac{0,75}{1,25} \vec{e}_z = (0,8 \vec{e}_x + 0,6 \vec{e}_z)$$

• $\vec{b}_3 = 27,82 \text{ mA}$ -hoz tartozó főirány:

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0,3154 & 0,8506 & -0,4206 \\ 0,8 & 0 & 0,6 \end{vmatrix} = \vec{e}_x(0,8506 \cdot 0,6) -$$

$$\begin{aligned}& -\vec{e}_y(0,3154 \cdot 0,6 - 0,8 \cdot (-0,4206)) + \vec{e}_z(-0,8 \cdot 0,8506) = \\ & = (0,5104 \vec{e}_x - 0,5257 \vec{e}_y - 0,6805 \vec{e}_z)\end{aligned}$$