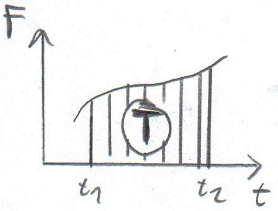
5. KONZULTÁCIÓ

MOZGÁSTAN

KINETIKA ÖSSZEFOGLALÓ



$$\vec{I}_2-\vec{I}_1=\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\,dt}_{T}$$ → integrál alak

IMPULZUS TÉTEL

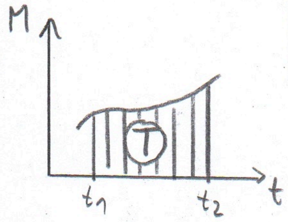
$$\vec{F}=\dot{\vec{I}}$$ → differenciál alak

STATIKA		KINETIKA	tömegpont	merev test	merev test súlypontja	
• erő:	$\vec{F}$ (N)	• impulzus:	$\vec{I}=m\vec{v}$	$\vec{I}=\int_{(m)}\vec{v}\,dm$	$\vec{I}=m\vec{v}_s$	(Ns)
• nyomaték:	$\vec{M}_A=\vec{r}_{AP}\times\vec{F}$ (Nm)	• perdület:	$\vec{\Pi}_A=\vec{r}_{AP}\times\vec{I}$	$\vec{\Pi}_A=\int_{(m)}\vec{r}_{AP}\times\vec{v}_P\,dm$	$\vec{\Pi}_A=\underline{\underline{J}}_s\cdot\vec{\omega}$	(Nsm)

$$\vec{M}_A=\dot{\vec{\Pi}}_A$$ → differenciál alak

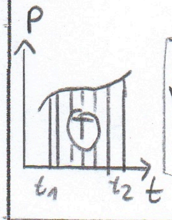
PERDÜLET TÉTEL

$$\vec{\Pi}_A(t_2)-\vec{\Pi}_A(t_1)=\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_A\,dt}_{T}$$ → integrál alak



$$P=\dot{E}$$ → **ENERGIATÉTEL**

• kinetikai energia			• teljesítmény		
$E=\frac{1}{2}mv^2$	$E=\frac{1}{2}mv_s^2+\frac{1}{2}\vec{\omega}\,\underline{\underline{J}}_s\,\vec{\omega}$	$(N\cdot m=J)$	$P=\vec{F}\cdot\vec{v}$	$P=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\vec{v}_i+\sum_{j=1}^{m}\vec{M}_j\cdot\vec{\omega}_j$	$\left(\frac{J}{s}=W\right)$
tömegpont	merev test súlypontja		tömegpont	merev test	



$$W_{12}=E_2-E_1=\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}P(t)\,dt}_{T}=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\,d\vec{r}\underset{\text{ha } \vec{F}=\text{áll.}}{=}\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}_{12}$$ → **MUNKATÉTEL**

LAGRANGE-FÉLE MÁSODFAJÚ MOZGÁSEGYENLET

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial E}{\partial q}=Q}\Rightarrow m_{red}\,\ddot{q}=Q$$

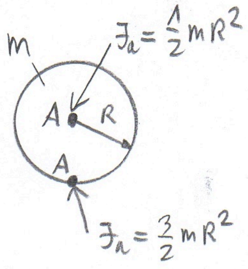
• baloldal: $E=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_i v_{si}^2+\frac{1}{2}J_{si}\,\omega_i^2\right)=\frac{1}{2}m_{red}\,\dot{q}^2$

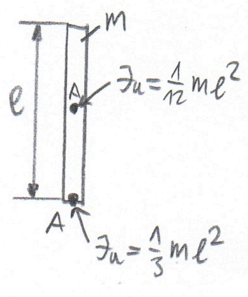
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{q}}\right)=m_{red}\,\ddot{q}\,,\quad \frac{\partial E}{\partial q}=0$$

• jobboldal: $Q=\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\cdot\vec{\beta}_j+\sum_{k=1}^{M}\vec{M}_k\cdot\vec{b}_k$

$$\vec{\beta}_j=\frac{\partial\vec{v}_j}{\partial\dot{q}}\qquad \vec{b}=\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\dot{q}}$$

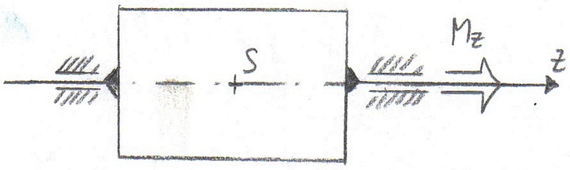
tehetetlenségi nyomatékok:

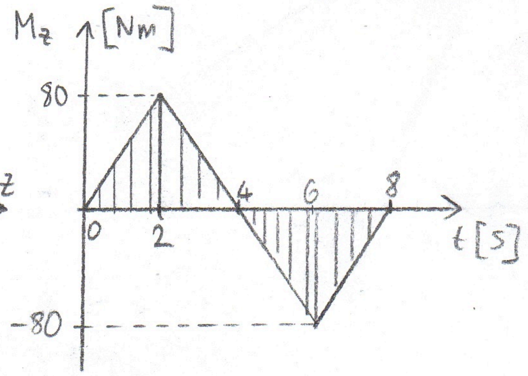




5.1 JÁRÁSI EGYENLŐTLENSÉG

adott:





$J_z = 40\ kgm^2 \quad \vec{\omega}_0 = (48\vec{e}_z)\frac{rad}{s}$

Feladat: a) $\omega(t)$ szögsebesség függvény felrajzolása

b) ω_k közepes szögsebesség

δ egyenlőtlenségi fok

a)

• Perdület tétel:

$$\dot{\Pi}_z = M_z$$

$$J_z \varepsilon_z = M_z$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_z(t) = \frac{M_z(t)}{J_z} = \frac{M_z(t)}{40}$$

• gyorsulás törvény:

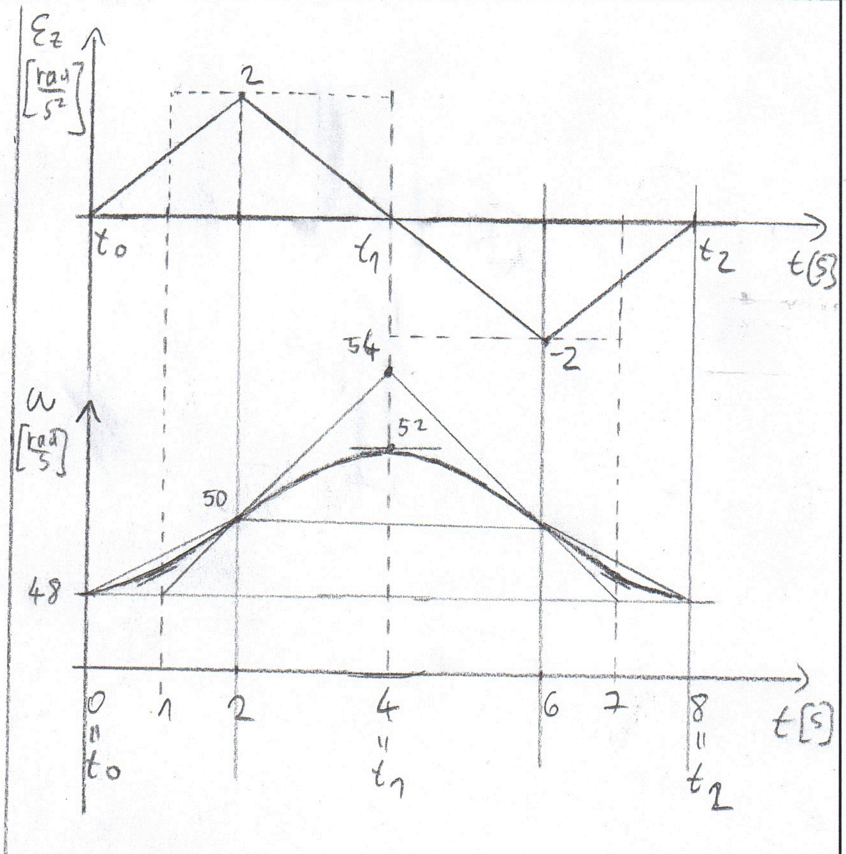
$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \varepsilon(t)$$

$$d\omega(t) = \varepsilon(t)dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega_2} d\omega(t) = \int_{t_0}^{t_2} \varepsilon(t)dt$$

$$\omega_1 - \omega_0 = \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon(t)dt$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon(t)dt$$



b)

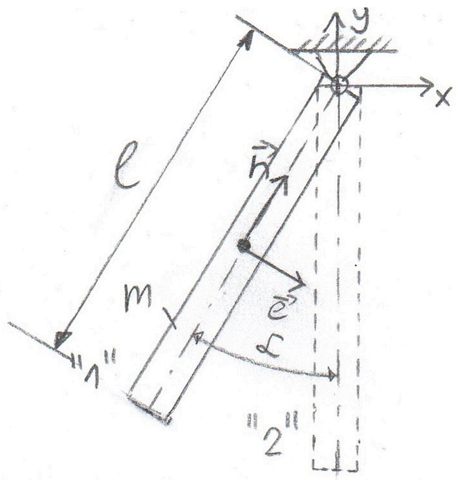
$$\omega_{max} = \omega_0 + \frac{(t_1 - t_0)\cdot\frac{M_{z\,max}}{J_z}}{2} = 48 + \frac{(4-0)\cdot\frac{80}{40}}{2} = 48 + \frac{4\cdot 2}{2} = 52\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_{min} = \omega_0 = 48\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_k = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} = \frac{52+48}{2} = 50\ \frac{rad}{s}$$

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_k} = \frac{52-48}{50} = \frac{4}{50} = 0{,}08 \Rightarrow \delta_{\%} = 8\%$$

5.2 - FIZIKAI INGA



• adott

$m = 2\ kg$

$\ell = 2\ m$

$g = 10\ \frac{m}{s^2}$

$\alpha = 30°$

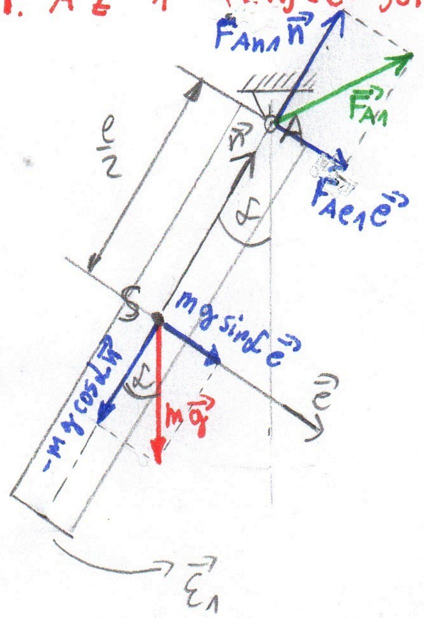
$v_{S1} = 0\ \frac{m}{s}$

• Feladat

a) $\vec{a}_{S1} = ?\quad \vec{F}_{A1} = ?$

b) $\vec{a}_{S2} = ?\quad \vec{F}_{A2} = ?$

1. Az "1" helyzet jellemzői:



• Az ingára ható erők:

$$\vec{F}_{A1} = F_{A1}\vec{e} + F_{A1}\vec{n}$$

$$m\vec{g} = mg\sin\alpha\,\vec{e} - mg\cos\alpha\,\vec{n}$$

• A súlypont gyorsulása:

$$\vec{a}_{S1} = a_{se1}\vec{e} + a_{sn1}\vec{n}$$

szöggyorsulás

$$\vec{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1\vec{k}$$

$$\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{k} = \vec{0}$$

szögsebesség

$$\boxed{a_{se1} = \frac{\ell}{2}\varepsilon_1}$$

[Mivel a ⊕ érintő irányú gyorsuláshoz ⊕ szöggyorsulás tartozik. Ellenkező esetben $a_{se1} = -\frac{\ell}{2}\varepsilon_1$ lenne]

$$\boxed{a_{sn1} = \frac{v_{S1}^2}{\ell/2} = \frac{2v_{S1}^2}{\ell}} = \frac{2\cdot 0^2}{2} = 0\ \frac{m}{s^2}$$

[Ha ω_1 lenne adott akkor: $a_{sn1} = \frac{2v_{S1}^2}{\ell} = \frac{2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\omega_1^2}{\ell} = \frac{2\frac{\ell^2}{4}\omega_1^2}{\ell} = \boxed{\frac{\ell}{2}\omega_1^2}$]

1.1: $\vec{\varepsilon}_1$ meghatározása → perdület tétel A pontra

$$\dot{\vec{\Pi}}_{A1} = \vec{M}_{A1}$$

$$\underline{\underline{J}}_A\vec{\varepsilon}_1 + \underbrace{\vec{\omega}_1 \times \vec{\Pi}_{A1}}_{=\vec{0}} = \vec{M}_{A1}\ /\cdot\vec{e}_z$$

$$J_a\varepsilon_1 = M_{a1}$$

$$\frac{m\ell^{\cancel{2}}}{3}\varepsilon_1 = \frac{\cancel{\ell}}{2}mg\sin\alpha$$

$$\varepsilon_1 = \frac{3g\sin\alpha}{2\ell} = \frac{3\cdot 10\cdot\sin 30°}{2\cdot 2} = 3{,}75\ \frac{rad}{s^2}$$

1.2: $\vec{a}_{S1}$ meghatározása

$$a_{Se1} = \frac{l}{2}\varepsilon_1 = \frac{2}{2}\cdot 3{,}75 = 3{,}75\ \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a}_S = a_{Se1}\vec{e} + a_{Sn1}\vec{n} = \underline{\underline{(3{,}75\vec{e} + 0\vec{n})\ \frac{m}{s^2}}}$$

1.3: $\vec{F}_{A1}$ meghatározása → impulzus tétel

$$\dot{\vec{I}} = \vec{F}$$

$$m\vec{a}_{S1} = \vec{F}_{A1} + m\vec{g}$$

$$m a_{Se1}\vec{e} = F_{Ae1}\vec{e} + F_{An1}\vec{n} + mg\sin\alpha\,\vec{e} - mg\cos\alpha\,\vec{n} \quad /\cdot\vec{e} /\cdot\vec{n}$$

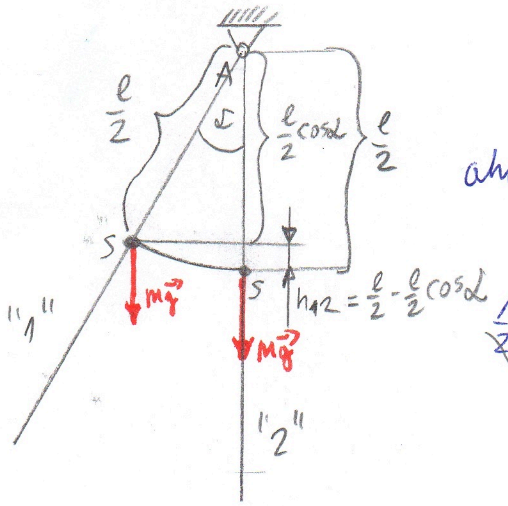
$$\left.\begin{aligned}(1)\quad m a_{Se1} &= F_{Ae1} + mg\sin\alpha\\ (2)\quad 0 &= F_{An1} - mg\cos\alpha\end{aligned}\right\}$$

$$(1) \to F_{Ae1} = m a_{Se1} - mg\sin\alpha = m(a_{Se1} - g\sin\alpha) =$$
$$= 2\cdot(3{,}75 - 10\cdot\sin 30^\circ) = -2{,}5\,N$$

$$(2) \to F_{An1} = mg\cos\alpha = 2\cdot 10\cdot\cos 30^\circ = 17{,}32\,N$$

$$\vec{F}_{A1} = F_{Ae1}\vec{e} + F_{An1}\vec{n} = \underline{\underline{(-2{,}5\vec{e} + 17{,}32\vec{n})\,N}}$$

2. "1" helyzet → "2" helyzet ($\vec{\omega}_2$ meghatározása)



<u>Munkatétel</u>

$$E_2 - E_1 = W_{12}$$

ahol: $W_{12} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = mg(-\vec{e}_y)\cdot h_{12}(-\vec{e}_y) = mgh_{12}$

$$E_2 - E_1 = mgh_{12}$$

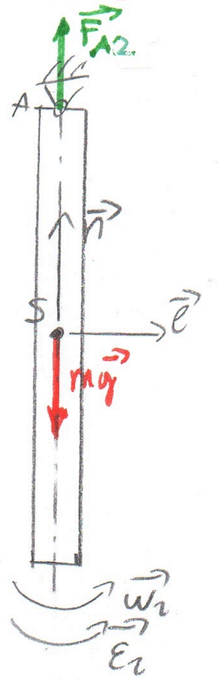
$$\frac{1}{\cancel{2}}J_a\omega_2^2 - \underbrace{\frac{1}{2}J_a\omega_1^2}_{=0} = mg\frac{l}{\cancel{2}}(1-\cos\alpha)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{mgl(1-\cos\alpha)}{J_a}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 2(1-\cos 30^\circ)}{2{,}\dot{6}}} = 1{,}418\ \frac{rad}{s}$$

$$J_a = \frac{ml^2}{3} = \frac{2\cdot 2^2}{3} = 2{,}\dot{6}$$

3. A "2" helyzet jellemzői:



3.1: $\vec{\varepsilon}_2$ meghatározása → perdülettétel A pontra

$$\dot{\vec{\Pi}}_{A2} = \vec{M}_{A2}$$

$$\underline{\underline{J}}_A \vec{\varepsilon}_2 + \underbrace{\vec{\omega}_2 \times \vec{\Pi}_{A2}}_{=\vec{0}} = \vec{M}_{A2} \quad / \cdot \vec{e}_z$$

$$J_a \varepsilon_2 = M_a$$

$$J_a \varepsilon_2 = 0$$

$$\varepsilon_2 = 0 \; \frac{rad}{s^2}$$

3.2: $\vec{a}_{S2}$ meghatározása

$$a_{se2} = \frac{l}{2}\varepsilon_2 = \frac{2}{2} \cdot 0 = 0 \; \frac{m}{s^2}$$

$$a_{sn2} = \frac{2 v_{S2}^2}{l} = \frac{l}{2}\omega_2^2 = \frac{2}{2} \cdot 1{,}418^2 = 2{,}01 \; \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a}_{S2} = a_{se2}\vec{e} + a_{sn2}\vec{n} = \underline{\underline{(0\vec{e} + 2{,}01\vec{n}) \; \frac{m}{s^2}}}$$

3.3: $\vec{F}_{A2}$ meghatározása → impulzustétel

$$\dot{\vec{I}} = \vec{F}$$

$$m\vec{a}_{S2} = \vec{F}_{A2} + m\vec{g}$$

$$m a_{sn2}\vec{n} = F_{Ae2}\vec{e} + F_{An2}\vec{n} - mg\vec{n} \quad / \cdot \vec{e} / \cdot \vec{n}$$

$$(1) \quad 0 = F_{Ae2}$$

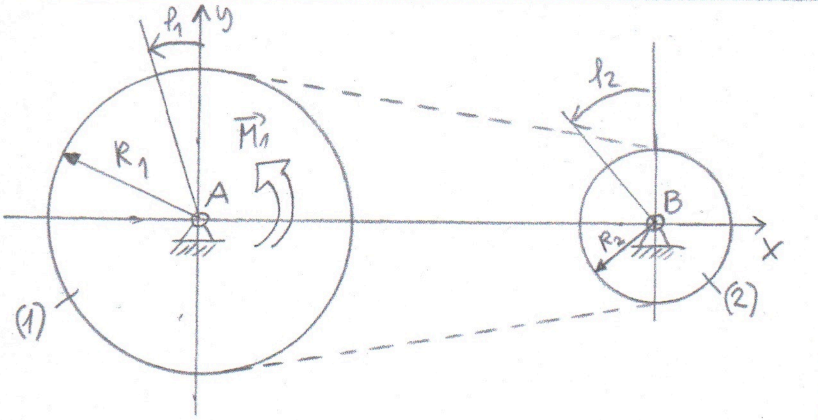
$$(2) \quad m a_{sn2} = F_{An2} - mg$$

$$(1) \rightarrow F_{Ae2} = 0 \; N$$

$$(2) \rightarrow F_{An2} = m a_{sn2} + mg = m(a_{sn2} + g) = 2 \cdot (2{,}01 + 10) = 24{,}02 N$$

$$\vec{F}_{A2} = F_{Ae2}\vec{e} + F_{An2}\vec{n} = \underline{\underline{(0\vec{e} + 24{,}02\vec{n}) \; N}}$$

5.3 - ÖSSZETETT SZERKEZET



adott:

$J_a = 200\ kgm^2$

$J_b = 100\ kgm^2$

$R_1 = 0{,}3\,m$

$R_2 = 0{,}15\,m$

$M_1 = 300\,Nm$

Feladat:

$\vec{\varepsilon}_2 = ?\ \vec{\varepsilon}_1 = ?$

- általános koordináta:

$$q = \varphi_2$$
$$\dot{q} = \dot{\varphi}_2 = \omega_2$$
$$\ddot{q} = \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon_2$$

- áttétel miatt:

$$R_1 \varphi_1 = R_2 \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{R_2}{R_1}\varphi_2$$
$$R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2 \Rightarrow \omega_1 = \frac{R_2}{R_1}\omega_2$$
$$R_1 \varepsilon_1 = R_2 \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{R_2}{R_1}\varepsilon_2$$

- előjel feltételezés:

$$\vec{\varphi}_1 = \varphi_1 \vec{e}_z \qquad \vec{\varphi}_2 = \varphi_2 \vec{e}_z$$
$$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{e}_z \qquad \vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{e}_z$$
$$\vec{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \vec{e}_z \qquad \vec{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 \vec{e}_z$$

Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q$

- baloldal:

$\Rightarrow$ rendszer kinetikai energiája:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} J_a \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_b \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_a \left(\frac{R_2}{R_1}\omega_2\right)^2 + \frac{1}{2} J_b \omega_2^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left[J_a \frac{R_2^2}{R_1^2} + J_b\right]\omega_2^2 = \frac{1}{2} J_{red}\,\omega_2^2 = \frac{1}{2} J_{red}\,\dot{q}^2$$

$\Rightarrow$ redukált tehetetlenségi nyomaték: $J_{red} = J_a \frac{R_2^2}{R_1^2} + J_b = 200 \frac{0{,}15^2}{0{,}3^2} + 100 = 150\ kgm^2$

$\Rightarrow$ kinetikai energia deriválása:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) = J_{red}\,\ddot{q} \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0$$

- jobboldal: (az általános erő)

$$Q = \vec{M}_1 \cdot \vec{b}_1 + \vec{G}_1 \cdot \underbrace{\vec{\beta}_A}_{=\vec{0}} + \vec{F}_A \cdot \underbrace{\vec{\beta}_A}_{=\vec{0}} + \vec{G}_2 \cdot \underbrace{\vec{\beta}_B}_{=\vec{0}} + \vec{F}_B \cdot \underbrace{\vec{\beta}_B}_{=\vec{0}} = \vec{M}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}} = M_1 \vec{e}_z \cdot \frac{\partial \omega_1 \vec{e}_z}{\partial \omega_2} =$$

$$= M_1 \vec{e}_z \cdot \frac{\partial \frac{R_2}{R_1}\omega_2 \vec{e}_z}{\partial \omega_2} = M_1 \vec{e}_z \frac{R_2}{R_1} \vec{e}_z = M_1 \frac{R_2}{R_1} = 300 \cdot \frac{0{,}15}{0{,}3} = 150\,Nm$$

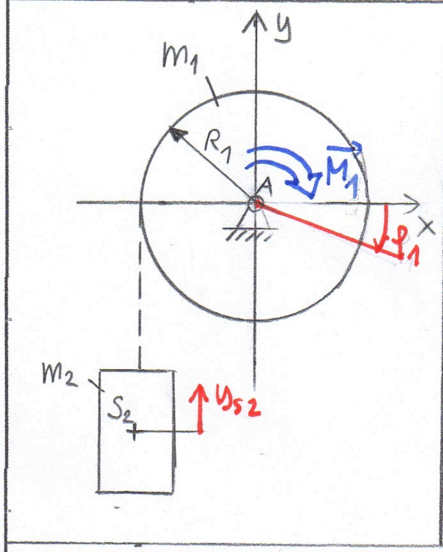
- visszahelyettesítve a Lagrange egyenletbe

$$J_{red}\,\ddot{q} = Q$$

$$J_{red}\,\varepsilon_2 = Q \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{Q}{J_{red}} = \frac{150}{150} = 1\,\frac{rad}{s^2} \Rightarrow \vec{\varepsilon}_2 = (1\vec{e}_z)\,\frac{rad}{s^2}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{R_2}{R_1}\varepsilon_2 = \frac{0{,}15}{0{,}3} \cdot 1 = 0{,}5\,\frac{rad}{s} \Rightarrow \vec{\varepsilon}_1 = (0{,}5\vec{e}_z)\,\frac{rad}{s^2}$$

5.4 - ÖSSZETETT SZERKEZET



adott:

$R_1 = 1\,m$

$m_1 = 10\,kg$

$M_q = 40\,Nm$

$m_2 = 5\,kg$

Feladat:

$\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{a}_{S2}$

$\vec{K}$, $\vec{F}_A$

általános koordináta:

$q = y_{S2} \quad \dot{q} = \dot{y}_{S2} = v_{S2} \quad \ddot{q} = \ddot{y}_{S2} = a_{S2}$

összefüggés általános koordináták közt:

$y_{S2} = -R_1 \varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 = -\dfrac{y_{S2}}{R_1}$

$v_{S2} = -R_1 \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = -\dfrac{v_{S2}}{R_1}$ $\qquad \vec{v}_{S2} = v_{S2}\vec{e}_y \qquad \vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{e}_z$

$a_{S2} = -R_1 \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = -\dfrac{a_{S2}}{R_1}$ $\qquad \vec{a}_{S2} = a_{S2}\vec{e}_y \qquad \vec{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \vec{e}_z$

Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \dfrac{\partial E}{\partial q} = Q$

- baloldal:

→ kinetikai energia:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} J_A \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{S2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_1 R_1^2\right)\left(\frac{v_{S2}}{R_1}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{S2}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_1 \cancel{R_1^2}\right)\frac{v_{S2}^2}{\cancel{R_1^2}} + \frac{1}{2} m_2 v_{S2}^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{1}{2} m_1 + m_2\right]}_{m_{red}} v_S^2 = \frac{1}{2} m_{red}\, \dot{q}^2$$

→ redukált tömeg:

$$m_{red} = \frac{1}{2} m_1 + m_2 = \frac{1}{2}\cdot 10 + 5 = 10\,kg$$

→ kinetikai energia deriválása:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) = m_{red}\,\ddot{q} \quad / \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0$$

- jobboldal: (az általános erő)

$$Q = \vec{M}_1 \cdot \vec{b}_1 + \vec{F}_A \cdot \underbrace{\vec{\beta}_A}_{=\vec{0}} + \vec{G}_1 \cdot \underbrace{\vec{\beta}_A}_{=\vec{0}} + \vec{G}_2 \cdot \vec{\beta}_{S2} = \vec{M}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial \dot{q}} + \vec{G}_2 \cdot \frac{\partial \vec{v}_{S2}}{\partial \dot{q}} =$$

$$= -M_1 \vec{e}_z \cdot \frac{\partial\left(-\frac{v_{S2}}{R_1}\right)\vec{e}_z}{\partial v_{S2}} + (-m_2 g)\vec{e}_y \cdot \frac{\partial v_{S2}\vec{e}_y}{\partial v_{S2}} =$$

$$= -M_1 \vec{e}_z \cdot \left(-\frac{1}{R_1}\right)\vec{e}_z - m_2 g\, \vec{e}_y \cdot 1 \cdot \vec{e}_y = \frac{M_1}{R_1} - m_2 g = \frac{40}{1} - 5\cdot 10 = -10\,N$$

- visszahelyettesítve a Lagrange egyenletbe:

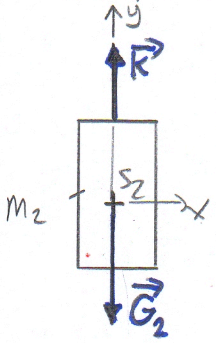
$$m_{red}\,\ddot{q} = Q$$

$$m_{red}\, a_{S2} = Q \Rightarrow a_{S2} = \frac{Q}{m_{red}} = \frac{-10}{10} = -1\,\frac{m}{s^2} \Rightarrow \vec{a}_{S2} = (-1\vec{e}_y)\,\frac{m}{s^2}$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{a_{S2}}{R_1} = -\frac{-1}{1} = 1\,\frac{rad}{s^2} \Rightarrow \vec{\varepsilon}_1 = (1\vec{e}_z)\,\frac{rad}{s^2}$$

• Kötélerő meghatározása:

→ impulzus tétel a 2. testre



$$\dot{\vec{I}} = \vec{F}$$

$$m_2\vec{a}_{s2} = \vec{G}_2 + \vec{K}$$

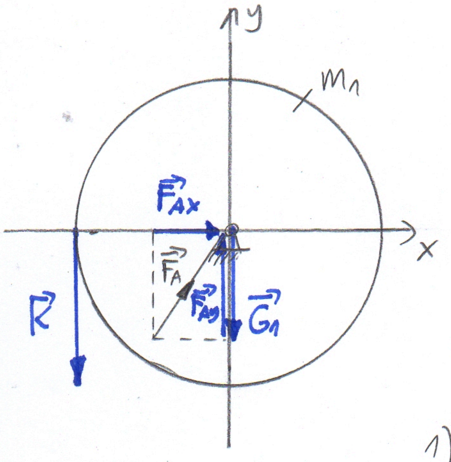
$$m_2 a_{s2}\vec{e}_y = -m_2 g\,\vec{e}_y + K\vec{e}_y \quad /\cdot\vec{e}_y$$

$$m_2 a_{s2} = -m_2 g + K$$

$$K = m_2(a_{s2}+g) = 5\cdot(-1+10) = 45\,N$$

• A ponti csapágyerő meghatározása:

→ impulzus tétel az 1. testre



$$\dot{\vec{I}} = \vec{F}$$

$$m_1\vec{a}_{s1} = \vec{G}_1 + \vec{K} + \vec{F}_A$$

$$\vec{0} = -m_1 g\,\vec{e}_y - K\vec{e}_y + F_{Ax}\vec{e}_x + F_{Ay}\vec{e}_y \quad /\cdot\vec{e}_x \; /\cdot\vec{e}_y$$

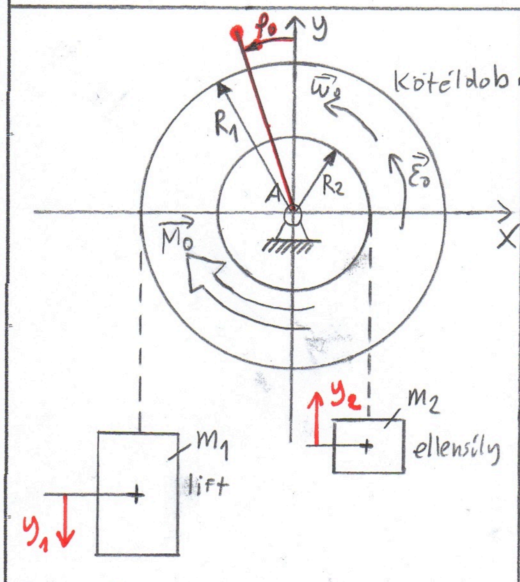
$$\left.\begin{array}{ll} /\cdot\vec{e}_x \rightarrow 1) & 0 = F_{Ax} \\ /\cdot\vec{e}_y \rightarrow 2) & 0 = -m_1 g - K + F_{Ay} \end{array}\right\}$$

$$1) \rightarrow F_{Ax} = 0\,N$$

$$2) \rightarrow F_{Ay} = m_1 g + K = 10\cdot 10 + 45 = 145\,N$$

$$\vec{F}_A = F_{Ax}\vec{e}_x + F_{Ay}\vec{e}_y = (0\vec{e}_x + 145\vec{e}_y)\,N$$

5.5 - ÖSSZETETT SZERKEZET



adott:

$J_A = 1\ kgm^2$
$m_1 = 400\ kg$
$m_2 = 500\ kg$
$m_0 = 50\ kg$
$R_1 = 0{,}2\ m$
$R_2 = 0{,}15\ m$
$M_0 = 200\ Nm$

Feladat:

$\vec{\varepsilon}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2$

általános koordináta:

$q = \varphi_0,\quad \dot{q} = \omega_0,\quad \ddot{q} = \varepsilon_0$

összefüggés az általános koordináták között:

$y_1 = -R_1 \varphi_0 \qquad y_2 = R_2 \varphi_0$
$v_1 = -R_1 \omega_0 \qquad v_2 = R_2 \omega_0$
$a_1 = -R_1 \varepsilon_0 \qquad a_2 = R_2 \varepsilon_0$

előjel feltételezés:

$\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_z;\ \vec{v}_1 = v_1 \vec{e}_y;\ \vec{v}_2 = v_2 \vec{e}_y$
$\vec{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 \vec{e}_z;\ \vec{a}_1 = a_1 \vec{e}_y;\ \vec{a}_2 = a_2 \vec{e}_y$

Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q$

- baloldal:

→ kinetikai energia:

$$E = E_0 + E_1 + E_2 = \frac{1}{2} J_A \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} J_A \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_1 (R_1\omega_0)^2 + \frac{1}{2} m_2 (R_2 \omega_0)^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left[J_A + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2\right]}_{J_{red}} \omega_0^2 = \frac{1}{2} J_{red}\, \dot{q}^2$$

→ a redukált tehetetlenségi nyomaték:

$$J_{red} = J_A + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 = 1 + 400 \cdot 0{,}2^2 + 500 \cdot 0{,}15^2 = 28{,}25\ kg\,m^2$$

→ kinetikai energia deriválása:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) = J_{red}\, \ddot{q} \qquad , \qquad \frac{\partial E}{\partial q} = 0$$

- jobboldal: (az általános erő)

$$Q = \vec{M}_0 \cdot \vec{b}_0 + \vec{G}_1 \cdot \vec{\beta}_1 + \vec{G}_2 \cdot \vec{\beta}_2 + \vec{G}_0 \cdot \underbrace{\vec{\beta}_A}_{=\vec{0}} + \vec{F}_A \cdot \underbrace{\vec{\beta}_A}_{=\vec{0}} = \vec{M}_0 \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_0}{\partial \dot{q}} + \vec{G}_1 \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial \dot{q}} + \vec{G}_2 \cdot \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial \dot{q}} =$$

$$= -M_0 \vec{e}_z \cdot \frac{\partial \omega_0 \vec{e}_z}{\partial \omega_0} + (-m_1 g \vec{e}_y) \cdot \frac{\partial (-R_1 \omega_0)\vec{e}_y}{\partial \omega_0} + (-m_2 g \vec{e}_y) \cdot \frac{\partial R_2 \omega_0 \vec{e}_y}{\partial \omega_0} =$$

$$= -M_0 \vec{e}_z \cdot 1 \cdot \vec{e}_z + (-m_1 g \vec{e}_y) \cdot (-R_1)\vec{e}_y + (-m_2 g \vec{e}_y) \cdot R_2 \vec{e}_y =$$

$$= -M_0 + m_1 g R_1 - m_2 g R_2 = -200 + 400 \cdot 10 \cdot 0{,}2 - 500 \cdot 10 \cdot 0{,}15 = -150\ Nm$$

- vissza helyettesítve a Lagrange egyenletbe

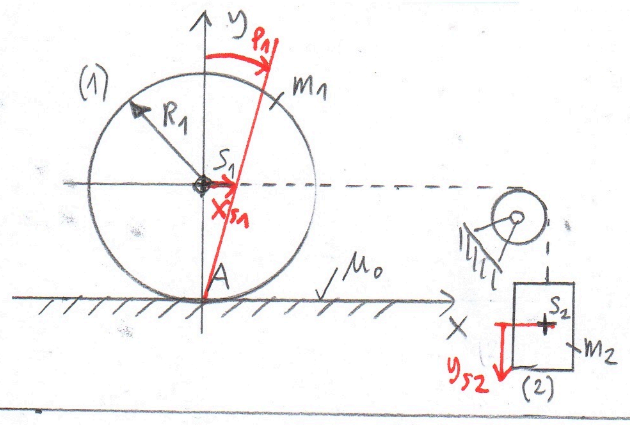
$$J_{red}\, \ddot{q} = Q$$

$$J_{red}\, \varepsilon_0 = Q \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{Q}{J_{red}} = \frac{-150}{28{,}25} = -5{,}31\ \frac{rad}{s^2} \Rightarrow \vec{\varepsilon}_0 = (-5{,}31 \vec{e}_z)\ \frac{rad}{s^2}$$

lift gyorsulása: $a_1 = -R_1 \varepsilon_0 = -0{,}2 \cdot (-5{,}31) = 1{,}062\ \frac{m}{s^2} \qquad \vec{a}_1 = a_1 \vec{e}_y = (1{,}062 \vec{e}_y)\ \frac{m}{s^2}$

ellensúly gyorsulása: $a_2 = R_2 \varepsilon_0 = 0{,}15 \cdot (-5{,}31) = -0{,}796\ \frac{m}{s^2} \qquad \vec{a}_2 = a_2 \vec{e}_y = (-0{,}796 \vec{e}_y)\ \frac{m}{s^2}$

5.6 - ÖSSZETETT SZERKEZET



adott:	Feladat:	általános koordináta
$R_1 = 2\,m$	$\vec{a}_{S1} = ?$	$q = x_{S1}$
$m_1 = 10\,kg$	$\vec{a}_{S2} = ?$	$\dot{q} = \dot{x}_{S1} = v_{S1}$
$m_2 = 20\,kg$	$\mu_0^{min} = ?$	$\ddot{q} = \ddot{x}_{S1} = a_{S1}$

összefüggés általános koordináták között:

$x_{S1} = -y_{S2} = -R_1 \varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{x_{S1}}{R_1}$

$v_{S1} = -v_{S2} = -R_1 \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = -\frac{v_{S1}}{R_1}$ $\qquad \vec{v}_{S1} = v_{S1}\vec{e}_x \quad \vec{v}_{S2} = v_{S2}\vec{e}_y$

$a_{S1} = -a_{S2} = -R_1 \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = -\frac{a_{S1}}{R_1}$ $\qquad \vec{a}_{S1} = a_{S1}\vec{e}_x \quad \vec{a}_{S2} = a_{S2}\vec{e}_y$

Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q$

- baloldal:

$\Rightarrow$ kinetikai energia:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} J_A \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{S2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m_1 R_1^2\right)\left(\frac{v_{S1}}{R_1}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{S1}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m_1 \cancel{R_1^2}\right)\frac{v_{S1}^2}{\cancel{R_1^2}} + \frac{1}{2} m_2 v_{S1}^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{3}{2} m_1 + m_2\right]}_{m_{red}} v_{S1}^2 = \frac{1}{2} m_{red}\, \dot{q}^2$$

$\Rightarrow$ a redukált tömeg: $m_{red} = \frac{3}{2} m_1 + m_2 = \frac{3}{2}\cdot 10 + 20 = 35\,kg$

$\Rightarrow$ kinetikai energia deriválása:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) = m_{red}\,\ddot{q} \quad , \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0$$

- jobboldal: (az általános erő)

$$Q = \vec{G}_1 \cdot \underbrace{\vec{\beta}_{S1}}_{=\vec{0}} + \vec{F}_k \cdot \underbrace{\vec{\beta}_A}_{=\vec{0}} + \vec{G}_2 \cdot \vec{\beta}_{S2} = \vec{G}_2 \cdot \frac{\partial \vec{v}_{S2}}{\partial \dot{q}} = -m_2 g \vec{e}_y \cdot \frac{\partial\, v_{S2}\vec{e}_y}{\partial v_{S1}} =$$

$$= -m_2 g \vec{e}_y \cdot \frac{-\partial\, v_{S1}\vec{e}_y}{\partial v_{S1}} = -m_2 g \vec{e}_y \cdot (-1)\vec{e}_y = m_2 g = 20\cdot 10 = 200\,N$$

- Visszahelyettesítve a Lagrange-egyenletbe:

$$m_{red}\,\ddot{q} = Q$$

$$m_{red}\, a_{S1} = Q \Rightarrow a_{S1} = \frac{Q}{m_{red}} = \frac{200}{35} = 5{,}71\,\frac{m}{s^2}$$

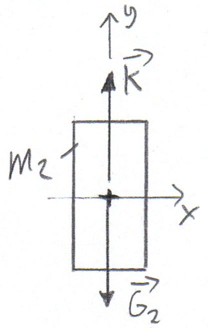
$$\vec{a}_{S1} = a_{S1}\vec{e}_x = (5{,}71\,\vec{e}_x)\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_{S2} = -a_{S1} = -5{,}71\,\frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a}_{S2} = a_{S2}\vec{e}_y = (-5{,}71\,\vec{e}_y)\,\frac{m}{s^2}$$

A csúszásmentes gördüléshez szükséges minimális nyugvásbeli súrlódási tényező (μ_0^{min}) meghatározása:

- impulzus tétel a 2. testre:



$$\dot{\vec{I}} = \vec{F}$$

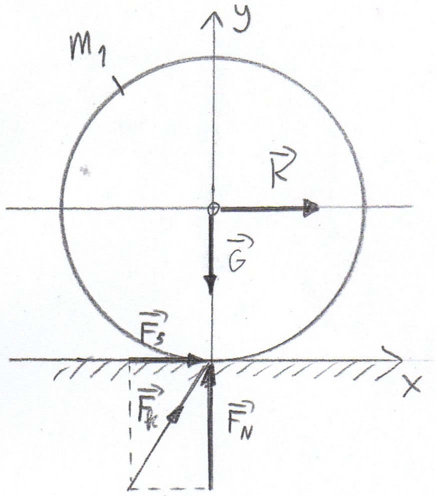
$$\vec{K}+\vec{G}_2 = m_2 \vec{a}_{s2}$$

$$K\vec{e}_y - m_2 g \vec{e}_y = m_2 a_{s2} \vec{e}_y \quad /\cdot \vec{e}_y$$

$$K - m_2 g = m_2 a_{s2}$$

$$K = m_2 (g + a_{s2}) = 20\cdot(10+(-5,71)) = 85,8 N$$

- impulzus tétel az 1. testre:



$$\dot{\vec{I}} = \vec{F}$$

$$m_1 \vec{a}_{s1} = \vec{F}_k + \vec{G} + \vec{K}$$

$$m_1 a_{s1} \vec{e}_x = F_s \vec{e}_x + F_N \vec{e}_y - m_1 g \vec{e}_y + K\vec{e}_x \quad /\cdot\vec{e}_x /\cdot\vec{e}_y$$

$$\left.\begin{aligned} /\cdot\vec{e}_x \to 1) \quad & m_1 a_{s1} = F_s + K \\ /\cdot\vec{e}_y \to 2) \quad & 0 = F_N - m_1 g \end{aligned}\right\}$$

$$1) \to F_s = m_1 a_{s1} - K = 10\cdot 5,71 - 85,8 = -28,7 N (\leftarrow)$$

$$2) \to F_N = m_1 g = 10\cdot 10 = 100 N (\uparrow)$$

$$F_k = F_s \vec{e}_x + F_N \vec{e}_y = (-28,7 \vec{e}_x + 100 \vec{e}_y) N$$

$$\mu_0^{min} = \frac{|F_s|}{|F_N|} = \frac{|-28,7|}{|100|} = 0,287$$