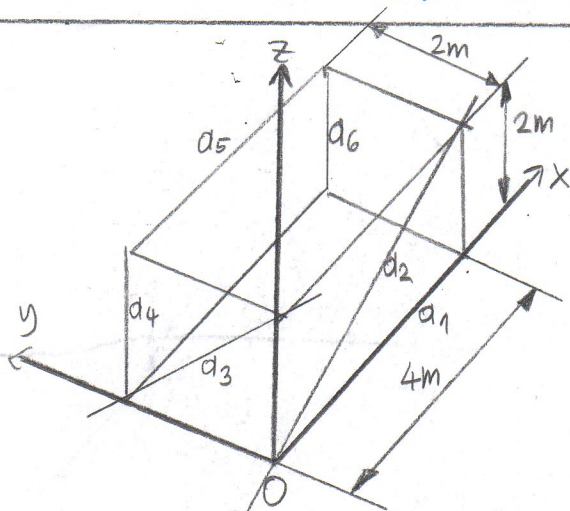


# TENGELYEK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE



• adott:  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  tengelyek

• Feladat:

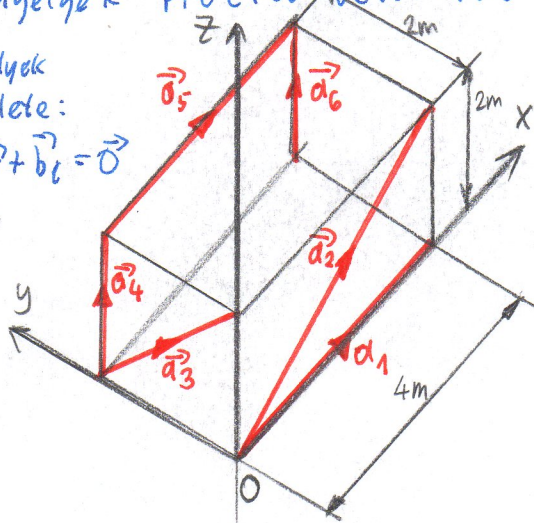
- Plücker vektorok meghatározása
- $a_1, a_2, \dots, a_6$  lin. független-e?
- $a_1, a_2, z$  lin. független-e

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$$

a) tengelyek plücker vektorai:

tengelyek egyenlete:

$$\vec{d}_i \times \vec{r} + \vec{b}_i = \vec{0}$$



• a tengelyek irányvektorai:

$$\vec{a}_1 = (4\vec{e}_x)m \quad \vec{a}_4 = (2\vec{e}_z)m$$

$$\vec{a}_2 = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_z)m \quad \vec{a}_5 = (4\vec{e}_x)m$$

$$\vec{a}_3 = (-2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z)m \quad \vec{a}_6 = (2\vec{e}_z)m$$

• irányvektorok O pontban számított nyomatékai:

$$\vec{b}_1 = \vec{r}_{A1} \times \vec{a}_1 = \vec{0} \times 4\vec{e}_x = \vec{0}$$

$$\vec{b}_2 = \vec{r}_{A2} \times \vec{a}_2 = \vec{0} \times (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_z) = \vec{0}$$

$$\vec{b}_3 = \vec{r}_{A3} \times \vec{a}_3 = 2\vec{e}_y \times (-2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) = (4\vec{e}_x)m^2$$

$$\vec{b}_4 = \vec{r}_{A4} \times \vec{a}_4 = 2\vec{e}_y \times 2\vec{e}_z = (4\vec{e}_x)m^2$$

$$\vec{b}_5 = \vec{r}_{A5} \times \vec{a}_5 = (2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \times 4\vec{e}_x = (8\vec{e}_y - 8\vec{e}_z)m^2$$

$$\vec{b}_6 = \vec{r}_{A6} \times \vec{a}_6 = (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \times 2\vec{e}_z = (4\vec{e}_x - 8\vec{e}_y)m^2$$

b)  $a_1, a_2, \dots, a_6$  tengelyek lineáris függetlensége:

$$\begin{vmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{vmatrix} =$$

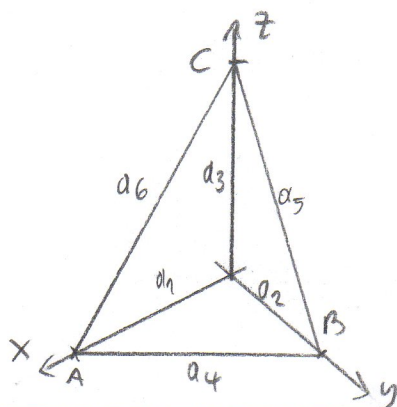
$$= 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (8 \cdot 0 - (-8) \cdot (-8)) = -8^4 \neq 0$$

$\rightarrow$  lineárisan függetlenek

c)  $a_1, a_2, z$  tengelyek lineáris függetlensége

1 síkba esnek  $\rightarrow$  lineárisan nem függetlenek

# TENGELYEK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE



• adott:  $a_1, a_2, \dots, a_6$  tengelyek

$$A(4, 0, 0)$$

$$B(0, 3, 0)$$

$$C(0, 0, 4)$$

• Feladat: a) Plücker vektorok felírása

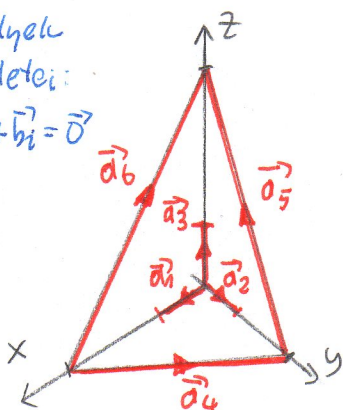
b)  $a_1, a_2, \dots, a_6$  lin. függetlenek-e?

a) tengelyek plücker vektorai: • a tengelyek irányvektorai:

tengelyek

egyenletei:

$$\vec{a}_i \times \vec{r} + \vec{b}_i = \vec{0}$$



$$\vec{a}_1 = \vec{e}_x$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_y$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_z$$

$$\vec{a}_4 = (-4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)$$

$$\vec{a}_5 = (-3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z)$$

$$\vec{a}_6 = (-4\vec{e}_x + 4\vec{e}_z)$$

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$$

• irányvektorok 0 ponton szűritött nyomatékai:

$$\vec{b}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{b}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{b}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{b}_4 = 4\vec{e}_x \times (-4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) = 12\vec{e}_z$$

$$\vec{b}_5 = 3\vec{e}_y \times (-3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) = 12\vec{e}_x$$

$$\vec{b}_6 = 4\vec{e}_x \times (-4\vec{e}_x + 4\vec{e}_z) = -16\vec{e}_y$$

b)  $a_1, a_2, \dots, a_6$  tengelyek lineáris függetlensége

$$\begin{vmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

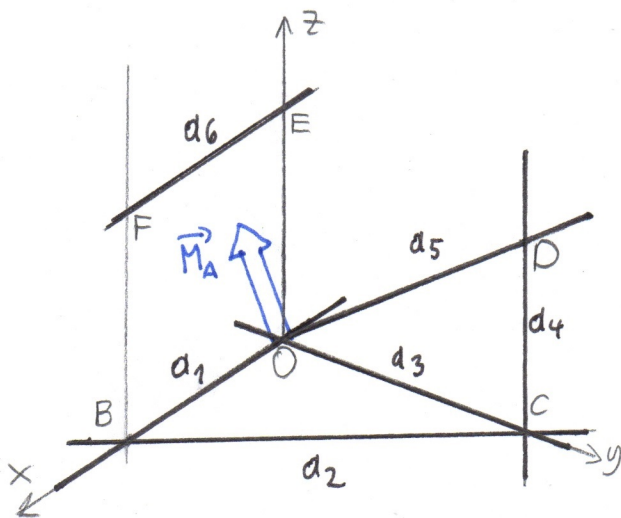
$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \\ 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 12 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -16 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 12 \cdot 12 \cdot (-16) \neq 0$$

A tengelyek lineárisan függetlenek

# Nyomaték helyettesítése



• adott:

$$\vec{M}_A = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$$

$$A(0,0,0)m \quad D(0,3,4)m$$

$$B(4,0,0)m \quad E(0,0,5)m$$

$$C(0,3,0)m \quad F(4,0,5)m$$

• Feladat:

$\vec{M}_A$  helyettesítése  $a_1, a_2, \dots, a_6$  hatásvonalakon

• Az egyenértékűség feltétele:

$$\sum_{i=1}^6 \vec{F}_i = \vec{F} = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^6 \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_0 = \vec{M}_A$$

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$$

• A helyettesítőerők:  $\vec{F}_i = \lambda_i \vec{a}_i \quad (i=1,2,\dots,6)$

• A hatásvonalak irányvektorai:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{e}_x \\ \vec{a}_2 &= (-4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \\ \vec{a}_3 &= \vec{e}_z \\ \vec{a}_4 &= \vec{e}_z \\ \vec{a}_5 &= 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z \\ \vec{a}_6 &= \vec{e}_x \end{aligned}$$

• Az irányvektorok nyomatéka az origóra

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= \vec{0} \\ \vec{b}_2 &= \vec{r}_{OB} \times \vec{a}_2 = 4\vec{e}_x \times (-4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) = 4 \cdot (-4) \vec{e}_x \times \vec{e}_x + 4 \cdot 3 \vec{e}_x \times \vec{e}_y = 12\vec{e}_z \\ \vec{b}_3 &= \vec{0} \\ \vec{b}_4 &= \vec{r}_{OC} \times \vec{a}_4 = 3\vec{e}_y \times \vec{e}_z = 3\vec{e}_x \\ \vec{b}_5 &= \vec{0} \\ \vec{b}_6 &= \vec{r}_{OE} \times \vec{a}_6 = 5\vec{e}_z \times \vec{e}_x = 5\vec{e}_y \end{aligned}$$

• A lineáris algebrai egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{bmatrix}$$

~~ezek~~

• behelyettesítve az adatokat:

$$\begin{array}{l} 1) \\ 2) \\ 3) \\ 4) \\ 5) \\ 6) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

• Az egyenletrendszer megoldása:

$$4) \rightarrow 3\lambda_4 = 1 \Rightarrow \lambda_4 = \frac{1}{3}$$

$$5) \rightarrow 5\lambda_6 = -2 \Rightarrow \lambda_6 = -\frac{2}{5}$$

$$6) \rightarrow 12\lambda_2 = 4 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} 3) \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{3} + 4\lambda_5 &= 0 \\ 4\lambda_5 &= -\frac{1}{3} \\ \lambda_5 &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \rightarrow 3 \cdot \frac{1}{3} + \lambda_3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) &= 0 \\ \lambda_3 &= -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \rightarrow 1 \cdot \lambda_1 - 4 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) &= 0 \\ \lambda_1 &= \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{26}{15} \end{aligned}$$

• A helyettesítő erőrendszer:

$$\vec{F}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1 = \frac{26}{15} \vec{e}_x = (1,73 \vec{e}_x) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2 = \frac{1}{3} (-4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) = (-1,33\vec{e}_x + \vec{e}_y) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_3 = \lambda_3 \vec{a}_3 = -\frac{3}{4} \vec{e}_y = (-0,75\vec{e}_y) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_4 = \lambda_4 \vec{a}_4 = \frac{1}{3} \vec{e}_z = (0,33\vec{e}_z) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_5 = \lambda_5 \vec{a}_5 = -\frac{1}{12} (3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) = (-0,25\vec{e}_y - 0,33\vec{e}_z) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_6 = \lambda_6 \vec{a}_6 = -\frac{2}{5} \vec{e}_x = (-0,4\vec{e}_x) \text{ kN}$$