

# MEGFOGÁS ELSŐFOKÚ KÉNYSZEREKKEL

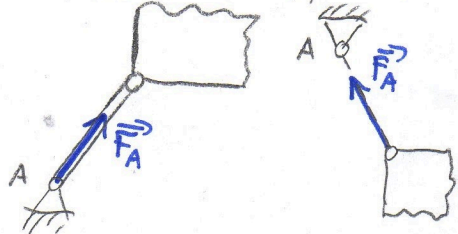
- Szabadság fok: azon skálár adatok száma, melyek a test helyzetét / mozgását egyértelműen meghatározzák

szabadság fok számok:

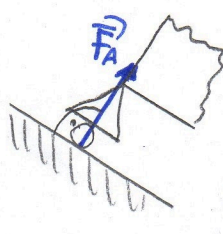
|             | 2D | 3D |
|-------------|----|----|
| anyagi pont | 2  | 3  |
| merev test  | 3  | 6  |

- első fokú kényszer: 1db szabadság fokot lekötő kényszer
  - egy adott irányú elmozdulást akadályoz meg
  - 1 ismert irányú támasztóerő koordináta lép fel

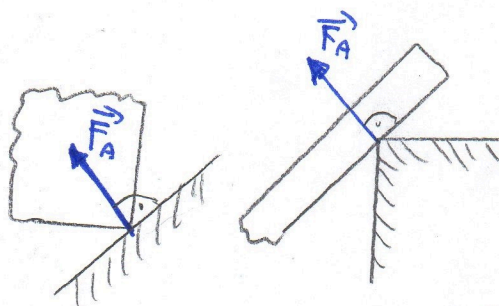
pl: rudas megtámasztás / köteles felfüggesztés



görgő



súrlódásmentes megtámasztás



- statikailag határozott szerkezet:

$$\text{szabadság fok szám} = \text{lekötött szabadság fok szám} - \text{ismeretlen támasztóerő koordináta szám}$$

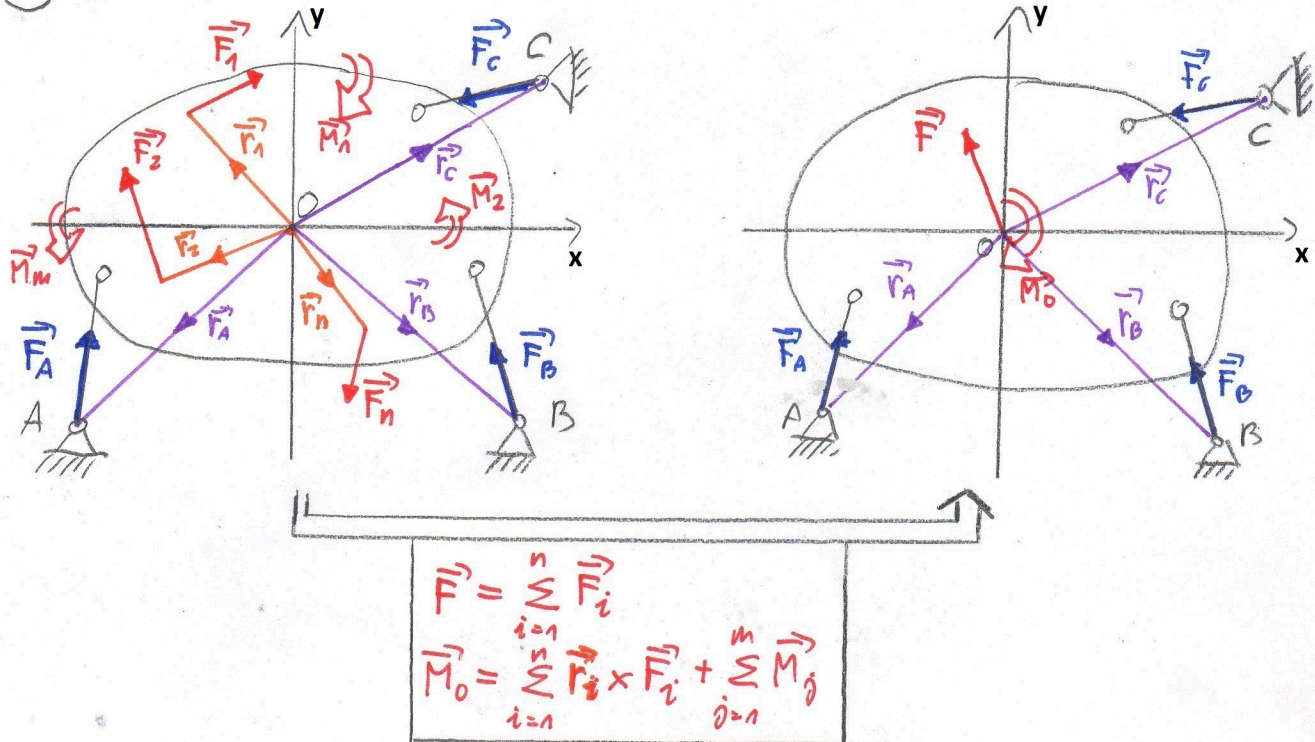
Amennyi db első fokú kényszer kell a megtámasztáshoz amennyi a szabadság fok szám

|             | 2D | 3D |
|-------------|----|----|
| anyagi pont |    |    |
| merev test  |    |    |



### 3 RUDAS 2D FELADAT - MEGOLDÁSI SÉMA

① terhelőerők redukált vektorkettősségének kiszámítása



② rudak tengelyeinek plücker vektorai

- $\vec{a}_i \Rightarrow i$ -edik rúd irányvektora (bármilyen rúdirányú vektor)
- $\vec{b}_i = \vec{r}_i \times \vec{a}_i$   $\vec{r}_i$ :  $i$ -edik rúd egyenesének bármelyik pontjába mutató vektor

- támasztóerők rúdirányúak  $\Rightarrow \vec{F}_i = \lambda_i \vec{a}_i$  ( $i = A, B, C$ )  
 ismeretlen együttható  
 ↓  
 egyensúlyi egyenletekből számítható

③ egyensúlyi egyenletek

- erők egyensúlya:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum_{i=A}^C \vec{F}_i = -\vec{F}$$

$$\sum_{i=A}^C \lambda_i \vec{a}_i = -\vec{F}$$

- nyomatékok egyensúlya:

$$\vec{r}_A \times \vec{F}_A + \vec{r}_B \times \vec{F}_B + \vec{r}_C \times \vec{F}_C + \vec{M}_O = \vec{0}$$

$$\sum_{i=A}^C \vec{r}_i \times \vec{F}_i = -\vec{M}_O$$

$$\sum_{i=A}^C \underbrace{\vec{r}_i \times \vec{a}_i}_{\vec{b}_i} \lambda_i = -\vec{M}_O$$

$$\sum_{i=A}^C \lambda_i \vec{b}_i = -\vec{M}_O$$

egyensúlyi vektoregyenletek:

egyensúlyi skalár egyenletek:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum_{i=A}^C \lambda_i \vec{a}_i = -\vec{F} \\ 2) \sum_{i=A}^C \lambda_i \vec{b}_i = -\vec{M}_O \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum_{i=A}^C \lambda_i a_{ix} = -F_x \\ 2) \sum_{i=A}^C \lambda_i a_{iy} = -F_y \\ 3) \sum_{i=A}^C \lambda_i b_{iz} = -M_{Oz} \end{array} \right\}$$

④ egyensúlyi egyenlet mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{Ax} & a_{Bx} & a_{Cx} \\ a_{Ay} & a_{By} & a_{Cy} \\ b_{Az} & b_{Bz} & b_{Cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -M_{Oz} \end{bmatrix}$$

⑤ egyenletrendszer megoldása

$$\Rightarrow \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$$

⑥ támasztó erők kiszámítása:

$$\vec{F}_A = \lambda_A \vec{a}_A$$

$$\vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B$$

$$\vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C$$

3D, merev test esetén:  $\left. \begin{array}{l} \bullet 6 \text{ erő } (\Rightarrow \sum_{i=A}^F \dots) \\ \bullet 6 \text{ skalár egyenlet} \end{array} \right\} \Rightarrow 6 \times 6\text{-os az együtthatómátrix}$

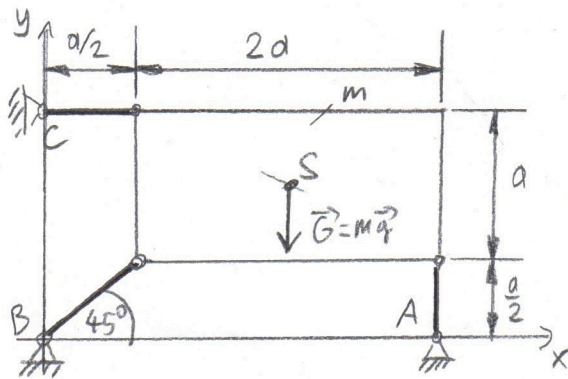
3D, anyagi pont esetén  $\rightarrow$  csak erők egyensúlyát kell vizsgálni

$$\sum_{i=A}^C \lambda_i \vec{a}_i = -\vec{F}$$

↑  
közös pontba  
ható erő



### 3 RUDAS 2D FELADAT



• adott:  $m = 100 \text{ kg}$   
 $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$   
 $d = 1 \text{ m}$

• Feladat:

támastevék meghatározása

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

• Origóhoz redukált vektoroktűs:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{G} = -m\vec{g} = -100 \cdot 10 \vec{e}_y = (-1000 \vec{e}_y) \text{ N}$$

$$\vec{M}_B = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_{BS} \times \vec{G} = (1.5 \vec{e}_x + 1 \vec{e}_y) \times -1000 \vec{e}_y = (-1500 \vec{e}_z) \text{ Nm}$$

• A szerkezet támastevéi irányvektorai:  $\vec{F}_A = \lambda_A \vec{a}_A$ ,  $\vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B$ ,  $\vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C$

• A támastevék irányvektorai:

$$\vec{a}_A = \vec{e}_y \quad \vec{b}_A = \vec{r}_{BA} \times \vec{a}_A = 2.5 \vec{e}_x \times \vec{e}_y = 2.5 \vec{e}_z$$

$$\vec{a}_B = \vec{e}_x + \vec{e}_y \quad \vec{b}_B = \vec{r}_{BB} \times \vec{a}_B = \vec{0} \times \vec{a}_B = \vec{0}$$

$$\vec{a}_C = \vec{e}_x \quad \vec{b}_C = \vec{r}_{BC} \times \vec{a}_C = 1.5 \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -1.5 \vec{e}_z$$

• Az egyensúlyi egyenletek:

$$\sum_{i=A}^C \vec{F}_i = \sum_{i=A}^C \lambda_i \vec{a}_i = -\vec{F}$$

$$\sum_{i=A}^C \vec{r}_{Bi} \times \vec{F}_i = \sum_{i=A}^C \lambda_i \vec{b}_i = -\vec{M}_B$$

• Az egyensúlyi egyenlet mátrixos alakban

$$\begin{bmatrix} a_{Ax} & a_{Bx} & a_{Cx} \\ a_{Ay} & a_{By} & a_{Cy} \\ b_{Az} & b_{Bz} & b_{Cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -M_{Bz} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2.5 & 0 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

• Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{cases} 1) \lambda_B + \lambda_C = 0 \\ 2) \lambda_A + \lambda_B = 1000 \\ 3) 2.5 \lambda_A - 1.5 \lambda_C = 1500 \end{cases} \Rightarrow \lambda_B = -\lambda_C \Rightarrow \begin{cases} \lambda_A - \lambda_C = 1000 \\ 2.5 \lambda_A - 1.5 \lambda_C = 1500 \end{cases} \Rightarrow \lambda_A = 1000 + \lambda_C$$

$$2.5(1000 + \lambda_C) - 1.5 \lambda_C = 1500$$

$$2500 + 2.5 \lambda_C - 1.5 \lambda_C = 1500$$

$$\lambda_C = -1000$$

$$\lambda_A = 1000 + (-1000) = 0$$

$$\lambda_B = -\lambda_C = +1000$$

• A támastevék:

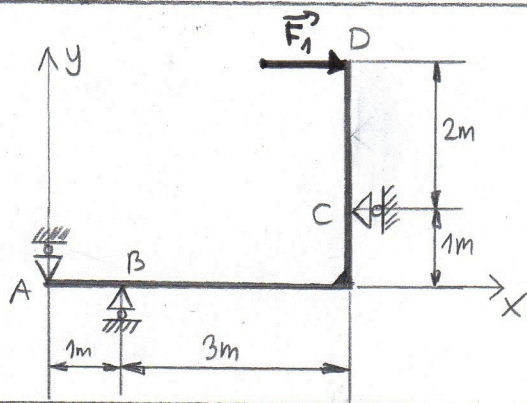
$$\vec{F}_A = \lambda_A \vec{a}_A = 0 \vec{e}_y = 0 \text{ N}$$

$$\vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B = +1000 (\vec{e}_x + \vec{e}_y) = (1000 \vec{e}_x + 1000 \vec{e}_y) \text{ N}$$

$$\vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C = (-1000 \vec{e}_x) \text{ N}$$



### 3 RUDAS 2D FELADAT

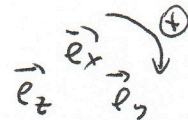


adott:

$$\vec{F}_1 = (30 \vec{e}_x) \text{ kN}$$

Feladat:

támasztóerők meghatározása



• Origóba redukált vektorkeplet:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 = (30 \vec{e}_x) \text{ kN}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \times (30\vec{e}_x) = 4 \cdot 30 \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_x}_{=0} + 3 \cdot 30 \underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_x}_{=-\vec{e}_z} = (-90 \vec{e}_z) \text{ kNm}$$

• A szerkezet támasztóerői:

$$\vec{F}_A = \lambda_A \vec{a}_A; \vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B; \vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C$$

• A támasztóerők irányvektorai: • irányvektorok nyomatékai az origóba:

$$\vec{a}_A = \vec{e}_y$$

$$\vec{a}_B = \vec{e}_y$$

$$\vec{a}_C = \vec{e}_x$$

$$\vec{b}_A = \vec{r}_{AA} \times \vec{a}_A = 0$$

$$\vec{b}_B = \vec{r}_{AB} \times \vec{a}_B = \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_C &= \vec{r}_{AC} \times \vec{a}_C = (4\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times \vec{e}_x = \\ &= 4 \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_x}_{=0} + \underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_x}_{=-\vec{e}_z} = -\vec{e}_z \end{aligned}$$

• Az egyensúlyi egyenlet:

$$\sum_{i=A}^C \vec{F}_i = \sum_{i=A}^C \lambda_i \vec{a}_i = -\vec{F}$$

$$\sum_{i=A}^C \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i = \sum_{i=A}^C \lambda_i \vec{b}_i = -\vec{M}_A$$

• Az egyensúlyi egyenlet mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{Ax} & a_{Bx} & a_{Cx} \\ a_{Ay} & a_{By} & a_{Cy} \\ b_{Ax} & b_{Bx} & b_{Cx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -M_{Az} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \\ 90 \end{bmatrix}$$

• Az egyenlet rendszer megoldása:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \lambda_C = -30 \\ 2) \lambda_A + \lambda_B = 0 \\ 3) \lambda_B - \lambda_C = 90 \end{array} \right\}$$

$$1) \rightarrow \lambda_C = -30$$

$$3) \rightarrow \lambda_B - (-30) = 90 \\ \lambda_B = 60$$

$$2) \rightarrow \lambda_A + 60 = 0 \\ \lambda_A = -60$$

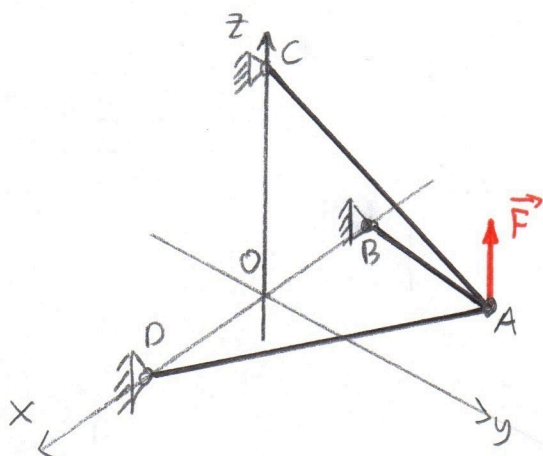
• A támasztóerők:

$$\vec{F}_A = \lambda_A \vec{a}_A = (-60 \vec{e}_y) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B = (60 \vec{e}_y) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C = (-30 \vec{e}_x) \text{ kN}$$

### 3 RUDAS 3D FELADAT



• adott:

$$\vec{r}_A = (4\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ m}$$

$$\vec{r}_B = (-4\vec{e}_x) \text{ m}$$

$$\vec{r}_C = (4\vec{e}_z) \text{ m}$$

$$\vec{r}_D = (2\vec{e}_x) \text{ m}$$

$$\vec{F} = (12\vec{e}_y) \text{ kN}$$

• feladat:

$$\vec{F}_B, \vec{F}_C, \vec{F}_D$$

támasztóerők

• az egyensúlyi egyenlet:  $\vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = -\vec{F}$

• a támasztóerők irányvektorai:  $\vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B = \lambda_B \vec{r}_{BA}$

$$\vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C = \lambda_C \vec{r}_{CA}$$

$$\vec{F}_D = \lambda_D \vec{a}_D = \lambda_D \vec{r}_{DA}$$

• a támasztóerők irányvektorai:

$$\vec{a}_B = \vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = (4\vec{e}_y + \vec{e}_z) - (-4\vec{e}_x) = (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ m}$$

$$\vec{a}_C = \vec{r}_{CA} = \vec{r}_A - \vec{r}_C = (4\vec{e}_y + \vec{e}_z) - 4\vec{e}_z = (4\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \text{ m}$$

$$\vec{a}_D = \vec{r}_{DA} = \vec{r}_A - \vec{r}_D = (4\vec{e}_y + \vec{e}_z) - 2\vec{e}_x = (-2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ m}$$

• az egyensúlyi egyenlet az új jelölésekkel:  $\lambda_B \vec{a}_B + \lambda_C \vec{a}_C + \lambda_D \vec{a}_D = -\vec{F}$

• az egyensúlyi egyenlet mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} & a_{Cx} & a_{Dx} \\ a_{By} & a_{Cy} & a_{Dy} \\ a_{Bz} & a_{Cz} & a_{Dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_B \\ \lambda_C \\ \lambda_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -F_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_B \\ \lambda_C \\ \lambda_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$4\lambda_B - 2\lambda_D = 0 \Rightarrow \lambda_D = 2\lambda_B$$

$$4\lambda_B + 4\lambda_C + 4\lambda_D = 0 \Rightarrow \lambda_B + \lambda_C + 2\lambda_D = 0$$

$$\lambda_B - 3\lambda_C + \lambda_D = -12 \Rightarrow \lambda_C = -3\lambda_B$$

⇓

$$\lambda_B - 3(-3\lambda_B) + 2\lambda_D = -12$$

$$12\lambda_B = -12 \Rightarrow \lambda_B = -1 \Rightarrow \lambda_D = 2(-1) = -2; \lambda_C = -3(-1) = 3$$

• A támasztóerő vektorok:

$$\vec{F}_B = \lambda_B \vec{a}_B = -1 \cdot (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + \vec{e}_z) = (-4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y - \vec{e}_z) \text{ kN}$$

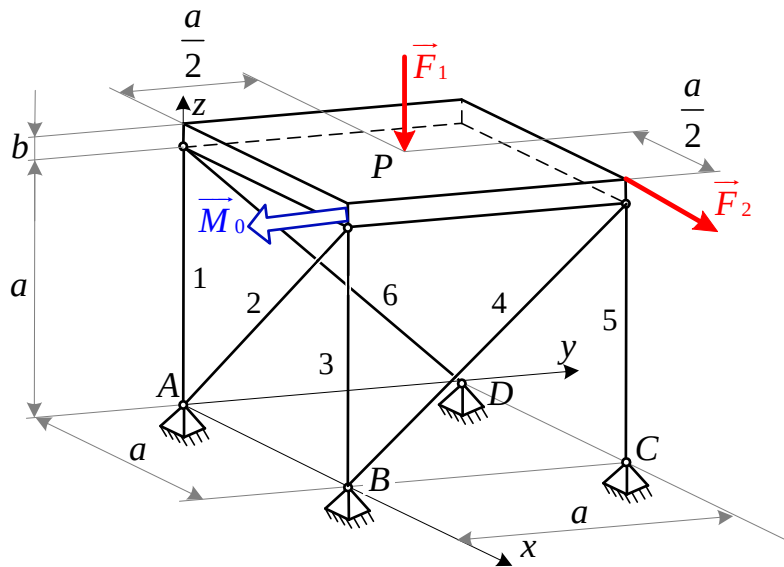
$$\vec{F}_C = \lambda_C \vec{a}_C = 3 \cdot (4\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) = (12\vec{e}_y - 9\vec{e}_z) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_D = \lambda_D \vec{a}_D = -2 \cdot (-2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + \vec{e}_z) = (4\vec{e}_x - 8\vec{e}_y - 2\vec{e}_z) \text{ kN}$$



# 6 RUDAS 3D FELADAT

Az ábrán látható merev lapot az 1, 2, 3, 4, 5, 6 jelű egyenes rudak támasztják meg. A lapot az  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  erők és  $\vec{M}_0$  nyomatékok terhelik.



**Adott:**

$$\vec{F}_1 = (-3\vec{e}_z) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_2 = (5\vec{e}_x) \text{ kN}$$

$$\vec{M}_0 = (-4\vec{e}_y) \text{ kNm}$$

$$a = 2 \text{ m}$$

$$b = 0,2 \text{ m}$$

**Feladat:**

A támasztóerők meghatározása

Origóba redukált vektorkettős

- Eredő erő:

$$\vec{F}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -3\vec{e}_z + 5\vec{e}_x = (5\vec{e}_x - 3\vec{e}_z) \text{ kN}$$

- Origóba redukált nyomaték:

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= \vec{M}_0 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = -4\vec{e}_y + (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times (-3\vec{e}_z) + (2\vec{e}_y + 2,2\vec{e}_z) \times 5\vec{e}_x = \\ &= -4\vec{e}_y - 3\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} - 3\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_z}_{\vec{e}_x} + \underbrace{2 \cdot 5}_{10} \underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_x}_{-\vec{e}_z} + \underbrace{2,2 \cdot 5}_{11} \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_x}_{\vec{e}_y} = \\ &= -4\vec{e}_y + 3\vec{e}_y - 3\vec{e}_x - 10\vec{e}_z + 11\vec{e}_y = (-3\vec{e}_x + 10\vec{e}_y - 10\vec{e}_z) \text{ kNm} \end{aligned}$$

A rudak tengelyeinek Plücker vektorai:

A rudak irányvektorai:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_z$$

$$\vec{a}_2 = 2\vec{e}_x + 2\vec{e}_z$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_z$$

$$\vec{a}_4 = 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$$

$$\vec{a}_5 = \vec{e}_z$$

$$\vec{a}_6 = -2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$$

Az irányvektorok nyomatékai az origóra:

$$\vec{b}_1 = \vec{r}_{AA} \times \vec{a}_1 = \vec{0} \times \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\vec{b}_2 = \vec{r}_{AA} \times \vec{a}_2 = \vec{0} \times (2\vec{e}_x + 2\vec{e}_z) = \vec{0}$$

$$\vec{b}_3 = \vec{r}_{AB} \times \vec{a}_3 = 2\vec{e}_x \times \vec{e}_z = (-2\vec{e}_y)$$

$$\vec{b}_4 = \vec{r}_{AB} \times \vec{a}_4 = 2\vec{e}_x \times (2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) = \underbrace{2 \cdot 2}_{4} \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}_{\vec{e}_z} + \underbrace{2 \cdot 2}_{4} \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} = (-4\vec{e}_y + 4\vec{e}_z)$$

$$\vec{b}_5 = \vec{r}_{AC} \times \vec{a}_5 = (2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \times \vec{e}_z = \underbrace{2 \cdot 1}_{-2} \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} + \underbrace{2 \cdot 1}_{2} \underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_z}_{\vec{e}_x} = (2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y)$$

$$\vec{b}_6 = \vec{r}_{AD} \times \vec{a}_5 = 2\vec{e}_y \times (-2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) = \underbrace{2 \cdot (-2)}_{-4} \underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_y}_{\vec{0}} + \underbrace{2 \cdot 2}_{4} \underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_z}_{\vec{e}_x} = (4\vec{e}_x)$$

A szerkezet támasztóerői rúdirányúak, így az alábbi alakban írhatók fel:

$$\vec{F}_i = \lambda_i \vec{a}_i \quad (i=1,2,3,4,5,6)$$

Az egyensúlyi egyenlet:

$$\sum_{i=1}^6 \vec{F}_i = \sum_{i=1}^6 \lambda_i \vec{a}_i = -\vec{F}_A$$

$$\sum_{i=1}^6 \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^6 \lambda_i \vec{b}_i = -\vec{M}_A$$

Az egyensúlyi egyenlet mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{Ax} \\ -F_{Ay} \\ -F_{Az} \\ -M_{Ax} \\ -M_{Ay} \\ -M_{Az} \end{bmatrix}$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -0 \\ 3 \\ 3 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

6. egyenletből:  $4\lambda_4 = 10 \Rightarrow \lambda_4 = 2,5$

2. egyenletből:  $2 \cdot 2,5 - 2\lambda_6 = 0 \Rightarrow \lambda_6 = 2,5$

1. egyenletből:  $2\lambda_2 = -5 \Rightarrow \lambda_2 = -2,5$

4. egyenletből:  $2\lambda_5 + 4 \cdot 2,5 = 3 \Rightarrow \lambda_5 = 3,5$

5. egyenletből:  $-2\lambda_3 - 4 \cdot 2,5 - 2 \cdot (-3,5) = -10 \Rightarrow -2\lambda_3 - 10 + 7 = -10$   
 $\lambda_3 = 3,5$

3. egyenletből:  $\lambda_1 + 2 \cdot (-2,5) + 1 \cdot 3,5 + 2 \cdot 2,5 + 1 \cdot (-3,5) + 2 \cdot 2,5 = 3 \Rightarrow \lambda_1 - 5 + 3,5 + 5 + -3,5 + 5 = 3$   
 $\lambda_1 = -2$

A támasztóerő vektorok:

$$\vec{F}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1 = (-2\vec{e}_z) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2 = -2,5(2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) = (-5\vec{e}_x - 5\vec{e}_y) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_3 = \lambda_3 \vec{a}_3 = (3,5\vec{e}_z) \text{ kN}$$

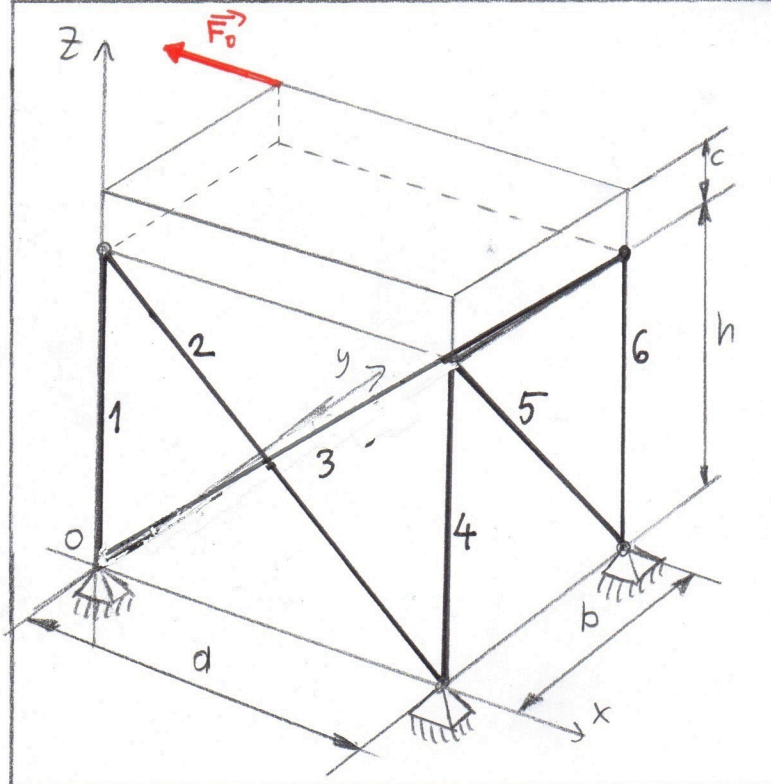
$$\vec{F}_4 = \lambda_4 \vec{a}_4 = 2,5(2\vec{e}_x + 2\vec{e}_z) = (5\vec{e}_x + 5\vec{e}_z) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_5 = \lambda_5 \vec{a}_5 = (-3,5\vec{e}_z) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_6 = \lambda_6 \vec{a}_6 = 2,5(-2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) = (-5\vec{e}_y + 5\vec{e}_z) \text{ kN}$$



# 6 RUDAS 3D FELADAT



• adott:

$$d = 4\text{m}, b = 2\text{m}, c = 1\text{m}, h = 5\text{m}$$

$$\vec{F}_0 = 1\text{ kNm}$$

• feladat:

támaztóerők

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$$

- origóba redukált vektorketők

$$\vec{F} = \vec{F}_0 = (-\vec{e}_x) \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= (2\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \times (-\vec{e}_x) = \\ &= 2(-1)\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_x}_{-\vec{e}_z} + 6(-1)\underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_x}_{\vec{e}_y} = \\ &= (-6\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \text{ kNm} \end{aligned}$$

• A szerkezet támasztási irányvonalak:  $\vec{F}_i = \lambda_i \vec{a}_i$  ( $i = 1, 2, 6$ )

• A támasztási irányvektorok:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_z$$

$$\vec{a}_2 = -4\vec{e}_x + 5\vec{e}_z$$

$$\vec{a}_3 = 4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$$

$$\vec{a}_4 = \vec{e}_z$$

$$\vec{a}_5 = -2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$$

$$\vec{a}_6 = \vec{e}_z$$

• Az irányvektorok nyomatékai O pontra

$$\vec{b}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{b}_2 = (4\vec{e}_x) \times (-4\vec{e}_x + 5\vec{e}_z) = 4 \cdot (-4)\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_x}_{\vec{0}} + 4 \cdot 5\vec{e}_x \times \vec{e}_z = (20\vec{e}_y)$$

$$\vec{b}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{b}_4 = 4\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -4\vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_5 &= (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \times (-2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z) = 4 \cdot (-2)\vec{e}_x \times \vec{e}_y + \\ &+ 4 \cdot 5\vec{e}_x \times \vec{e}_z + 2 \cdot (-2)\vec{e}_y \times \vec{e}_y + 2 \cdot 5\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \\ &= -8\vec{e}_z - 20\vec{e}_y + 10\vec{e}_x = (10\vec{e}_x - 20\vec{e}_y - 8\vec{e}_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_6 &= (4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \times \vec{e}_z = 4\vec{e}_x \times \vec{e}_z + 2\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \\ &= (-4\vec{e}_y - 2\vec{e}_x) \end{aligned}$$

• Az egyensúlyi egyenlet mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -F_z \\ -M_{0x} \\ -M_{0y} \\ -M_{0z} \end{bmatrix}$$

behelyettesítve az adatokat:

$$\begin{array}{l} \checkmark 1) \\ \checkmark 2) \\ 3) \\ \checkmark 4) \\ \checkmark 5) \\ \checkmark 6) \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$6) \rightarrow -8\lambda_5 = -2 \Rightarrow \lambda_5 = \frac{1}{4}$$

$$4) \rightarrow 10 \cdot \frac{1}{4} + 2\lambda_6 = 0 \Rightarrow 2\lambda_6 = -\frac{10}{4} \\ \lambda_6 = -\frac{5}{4}$$

$$2) \rightarrow 2\lambda_3 - 2 \cdot \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 2\lambda_3 = \frac{1}{2} \\ \lambda_3 = \frac{1}{4}$$

$$1) \rightarrow -4\lambda_2 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$$5) \rightarrow -20 \cdot 0 - 4\lambda_4 - 20 \cdot \frac{1}{4} - 4 \left(-\frac{5}{4}\right) = 6 \\ -4\lambda_4 - 5 + 5 = 6 \\ \lambda_4 = -\frac{3}{2}$$

$$3) \rightarrow \lambda_1 + 5 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 5 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = 0$$

$$\lambda_1 + \frac{5}{4} - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{5}{4} = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}$$

• A támasztóerő vektorok:

$$\vec{F}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1 = \frac{1}{4} (\vec{e}_2) = (0, 25 \vec{e}_2) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2 = 0 \cdot (-4 \vec{e}_x + 5 \vec{e}_z) = \vec{0}$$

$$\vec{F}_3 = \lambda_3 \vec{a}_3 = \frac{1}{4} \cdot (4 \vec{e}_x + 2 \vec{e}_y + 5 \vec{e}_z) = (\vec{e}_x + 0,5 \vec{e}_y + 1,25 \vec{e}_z) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_4 = \lambda_4 \vec{a}_4 = -\frac{3}{2} (\vec{e}_z) = (-1,5 \vec{e}_z) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_5 = \lambda_5 \vec{a}_5 = \frac{1}{4} (-2 \vec{e}_y + 5 \vec{e}_z) = (-0,5 \vec{e}_y + 1,25 \vec{e}_z) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_6 = \lambda_6 \vec{a}_6 = -\frac{5}{4} (\vec{e}_z) = (-1,25 \vec{e}_z) \text{ kN}$$