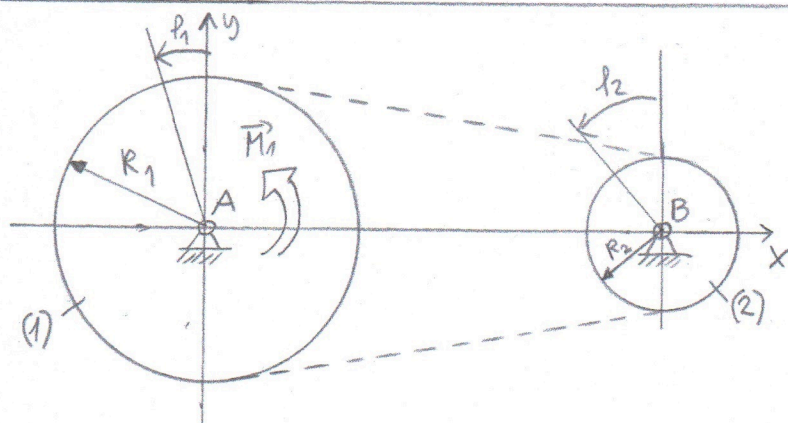


ÖSSZETETT SZERKEZET



adott:

$$J_a = 200 \text{ kg m}^2$$

$$J_b = 100 \text{ kg m}^2$$

$$R_1 = 0,3 \text{ m}$$

$$R_2 = 0,15 \text{ m}$$

$$M_1 = 300 \text{ Nm}$$

Feladat:

$$\vec{E}_2 = ? \quad \vec{E}_1 = ?$$

• általános koordináta:

$$q = \varphi_2$$

$$\dot{q} = \dot{\varphi}_2 = \omega_2$$

$$\ddot{q} = \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon_2$$

• áttétel miatt:

$$R_1 \varphi_1 = R_2 \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{R_2}{R_1} \varphi_2$$

$$R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2 \Rightarrow \omega_1 = \frac{R_2}{R_1} \omega_2$$

$$R_1 \varepsilon_1 = R_2 \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{R_2}{R_1} \varepsilon_2$$

• előjel Feltételezés:

$$\vec{l}_1 = l_1 \vec{e}_z \quad l_2 = l_2 \vec{e}_z$$

$$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{e}_z \quad \vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{e}_z$$

$$\vec{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \vec{e}_z \quad \vec{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 \vec{e}_z$$

Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q$

• baloldali:

→ rendszer kinetikai energiája:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} J_a \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_b \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_a \left(\frac{R_2}{R_1} \omega_2 \right)^2 + \frac{1}{2} J_b \omega_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[J_a \frac{R_2^2}{R_1^2} + J_b \right] \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_{\text{red}} \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_{\text{red}} \dot{q}^2$$

→ redukált tehetetlenségi nyomaték: $J_{\text{red}} = J_a \frac{R_2^2}{R_1^2} + J_b = 200 \frac{0,15^2}{0,3^2} + 100 = 150 \text{ kg m}^2$

→ kinetikai energia deriváltja:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) = J_{\text{red}} \ddot{q} \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0$$

• jobboldali: (az általános erő)

$$Q = \vec{M}_1 \cdot \vec{b}_1 + \vec{G}_1 \cdot \vec{P}_1 + \vec{F}_A \cdot \vec{P}_A + \vec{G}_2 \cdot \vec{P}_2 + \vec{F}_B \cdot \vec{P}_B = \vec{M}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}} = M_1 \vec{e}_z \cdot \frac{\partial \omega_1 \vec{e}_z}{\partial \omega_2} =$$

$$= M_1 \vec{e}_z \cdot \frac{\partial \frac{R_1}{R_2} \omega_2 \vec{e}_z}{\partial \omega_2} = M_1 \vec{e}_z \cdot \frac{R_1}{R_2} \vec{e}_z = M_1 \frac{R_1}{R_2} = 300 \cdot \frac{0,15}{0,3} = 150 \text{ Nm}$$

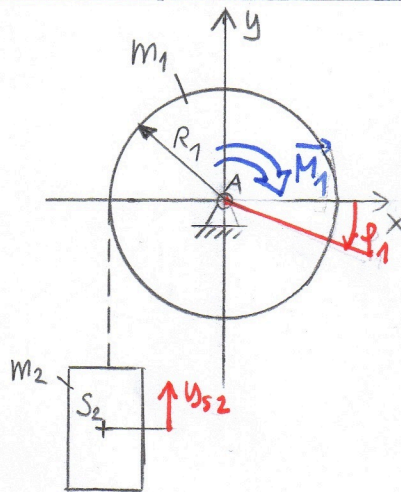
• visszahelyettesítve a Lagrange egyenletbe

$$J_{\text{red}} \ddot{q} = Q$$

$$J_{\text{red}} \varepsilon_2 = Q \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{Q}{J_{\text{red}}} = \frac{150}{150} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow \vec{\varepsilon}_2 = (1 \vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{R_2}{R_1} \varepsilon_2 = \frac{0,15}{0,3} \cdot 1 = 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow \vec{\varepsilon}_1 = (0,5 \vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

ÖSSZETETT SZERKEZET



Adott:
 $R_1 = 1\text{ m}$
 $m_1 = 10\text{ kg}$
 $M_0 = 40\text{ Nm}$
 $m_2 = 5\text{ kg}$

Feladat:
 $\vec{E}_1, \vec{a}_{s2}$
 $\vec{K}, \vec{F}_A$

Általános koordináta:

$$q = y_{s2} \quad \dot{q} = \dot{y}_{s2} = v_{s2} \quad \ddot{q} = \ddot{y}_{s2} = a_{s2}$$

Összefüggés általános koordináták között:

$$y_{s2} = -R_1 \varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{y_{s2}}{R_1}$$

$$v_{s2} = -R_1 \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = -\frac{v_{s2}}{R_1}$$

$$a_{s2} = -R_1 \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = -\frac{a_{s2}}{R_1}$$

$$\vec{v}_{s2} = v_{s2} \vec{e}_y \quad \vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{e}_z$$

$$\vec{a}_{s2} = a_{s2} \vec{e}_y \quad \vec{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \vec{e}_z$$

Lagrange - féle másodfajú mozgásegyenlet: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q$

• baloldal:

→ kinetikai energia:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} J_A \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{s2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_1 R_1^2 \right) \left(\frac{v_{s2}}{R_1} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{s2}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_1 R_1^2 \right) \frac{v_{s2}^2}{R_1^2} + \frac{1}{2} m_2 v_{s2}^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left[\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right]}_{m_{red}} v_{s2}^2 = \frac{1}{2} m_{red} \dot{q}^2$$

→ redukált tömeg:

$$m_{red} = \frac{1}{2} m_1 + m_2 = \frac{1}{2} \cdot 10 + 5 = 10\text{ kg}$$

→ kinetikai energia deriválása:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) = m_{red} \ddot{q} \quad / \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0$$

• jobboldal: (az általános erő)

$$Q = \vec{M}_1 \cdot \vec{b}_1 + \underbrace{\vec{F}_A \cdot \vec{r}_A}_{=0} + \underbrace{\vec{G}_1 \cdot \vec{r}_A}_{=0} + \vec{G}_2 \cdot \vec{r}_{s2} = \vec{M}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial \dot{q}} + \vec{G}_2 \cdot \frac{\partial \vec{v}_{s2}}{\partial \dot{q}} =$$

$$= -M_1 \vec{e}_z \cdot \frac{\partial \left(-\frac{v_{s2}}{R_1} \right) \vec{e}_z}{\partial v_{s2}} + (-m_2 g) \vec{e}_y \cdot \frac{\partial v_{s2} \vec{e}_y}{\partial v_{s2}} =$$

$$= -M_1 \vec{e}_z \cdot \left(-\frac{1}{R_1} \right) \vec{e}_z - m_2 g \vec{e}_y \cdot 1 \cdot \vec{e}_y = \frac{M_1}{R_1} - m_2 g = \frac{40}{1} - 5 \cdot 10 = -10\text{ N}$$

• visszahelyettesítve a Lagrange egyenletbe:

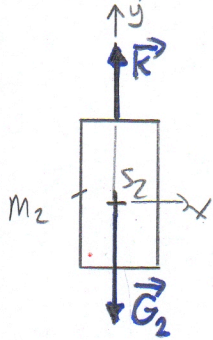
$$m_{red} \ddot{q} = Q$$

$$m_{red} a_{s2} = Q \Rightarrow a_{s2} = \frac{Q}{m_{red}} = \frac{-10}{10} = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \vec{a}_{s2} = (-1 \vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{a_{s2}}{R_1} = -\frac{-1}{1} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow \vec{\varepsilon}_1 = (1 \vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

• Kötélevő meghatározása:

→ impulzus tétel a 2. testre



$$\dot{\vec{T}} = \vec{F}$$

$$m_2 \vec{a}_{sz} = \vec{G}_2 + \vec{K}$$

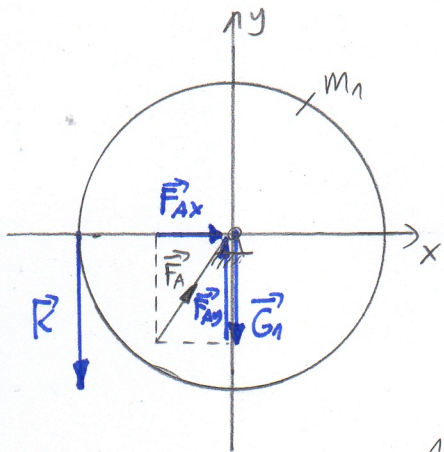
$$m_2 a_{sz} \vec{e}_y = -m_2 g \vec{e}_y + K \vec{e}_y \quad / \cdot \vec{e}_y$$

$$m_2 a_{sz} = -m_2 g + K$$

$$K = m_2 (a_{sz} + g) = 5 \cdot (-1 + 10) = 45 \text{ N}$$

• A ponti csapgyűrő meghatározása:

→ impulzus tétel az 1. testre



$$\dot{\vec{T}} = \vec{F}$$

$$m_1 \vec{a}_{sz1} = \vec{G}_1 + \vec{K} + \vec{F}_A$$

$$\vec{0} = -m_1 g \vec{e}_y - K \vec{e}_y + F_{Ax} \vec{e}_x + F_{Ay} \vec{e}_y \quad / \cdot \vec{e}_x / \cdot \vec{e}_y$$

$$/ \cdot \vec{e}_x \rightarrow 1) \quad 0 = F_{Ax}$$

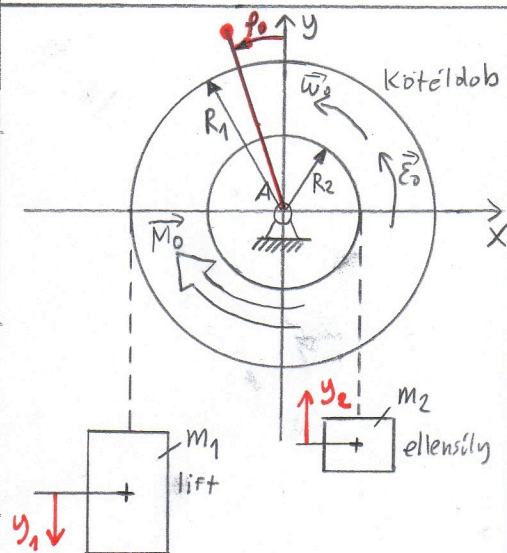
$$/ \cdot \vec{e}_y \rightarrow 2) \quad 0 = -m_1 g - K + F_{Ay}$$

$$1) \rightarrow F_{Ax} = 0 \text{ N}$$

$$2) \rightarrow F_{Ay} = m_1 g + K = 10 \cdot 10 + 45 = 145 \text{ N}$$

$$\vec{F}_A = F_{Ax} \vec{e}_x + F_{Ay} \vec{e}_y = (0 \vec{e}_x + 145 \vec{e}_y) \text{ N}$$

ÖSSZETETT SZERKEZET



adott:

$$\begin{aligned} J_A &= 1 \text{ kgm}^2 \\ m_1 &= 400 \text{ kg} \\ m_2 &= 500 \text{ kg} \\ M_0 &= 50 \text{ Nm} \\ R_1 &= 0,2 \text{ m} \\ R_2 &= 0,15 \text{ m} \\ M_0 &= 200 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Feladat:

$$\vec{E}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2$$

általános koordináta:

$$q = \varphi_0, \dot{q} = \omega_0, \ddot{q} = \varepsilon_0$$

összefüggés az általános koordináták között:

$$y_1 = -R_1 \varphi_0 \quad y_2 = R_2 \varphi_0$$

$$v_1 = -R_1 \omega_0 \quad v_2 = R_2 \omega_0$$

$$a_1 = -R_1 \varepsilon_0 \quad a_2 = R_2 \varepsilon_0$$

előjel feltételezés:

$$\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_z; \quad \vec{v}_1 = v_1 \vec{e}_y; \quad \vec{v}_2 = v_2 \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_0 = \varepsilon_0 \vec{e}_z; \quad \vec{a}_1 = a_1 \vec{e}_y; \quad \vec{a}_2 = a_2 \vec{e}_y$$

Lagrange - Féle másod fajú mozgásegyenlet: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q$

• baloldal:

→ kinetikai energia:

$$E = E_0 + E_1 + E_2 = \frac{1}{2} J_A \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} J_A \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_1 (R_1 \omega_0)^2 + \frac{1}{2} m_2 (R_2 \omega_0)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{[J_A + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2]}_{J_{\text{red}}} \omega_0^2 = \frac{1}{2} J_{\text{red}} \dot{q}^2$$

→ a redukált tehetetlenségi nyomaték:

$$J_{\text{red}} = J_A + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 = 1 + 400 \cdot 0,2^2 + 500 \cdot 0,15^2 = 28,25 \text{ kgm}^2$$

→ kinetikai energia deriválása:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) = J_{\text{red}} \ddot{q} \quad , \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0$$

• jobboldal: (az általános erő)

$$Q = \vec{M}_0 \cdot \vec{b}_0 + \vec{G}_1 \cdot \vec{P}_1 + \vec{G}_2 \cdot \vec{P}_2 + \vec{G}_0 \cdot \vec{P}_A + \vec{F}_A \cdot \vec{P}_A = \vec{M}_0 \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_0}{\partial \dot{q}} + \vec{G}_1 \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial \dot{q}} + \vec{G}_2 \cdot \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial \dot{q}}$$

$$= -M_0 \vec{e}_z \cdot \frac{\partial \omega_0 \vec{e}_z}{\partial \omega_0} + (-m_1 g \vec{e}_y) \cdot \frac{\partial (-R_1 \omega_0) \vec{e}_y}{\partial \omega_0} + (-m_2 g \vec{e}_y) \cdot \frac{\partial R_2 \omega_0 \vec{e}_y}{\partial \omega_0} =$$

$$= -M_0 \vec{e}_z \cdot 1 \cdot \vec{e}_z + (-m_1 g \vec{e}_y) \cdot (-R_1) \vec{e}_y + (-m_2 g \vec{e}_y) \cdot R_2 \vec{e}_y =$$

$$= -M_0 + m_1 g R_1 - m_2 g R_2 = -200 + 400 \cdot 10 \cdot 0,2 - 500 \cdot 10 \cdot 0,15 = -150 \text{ Nm}$$

• vissza helyettesítve a Lagrange egyenletbe

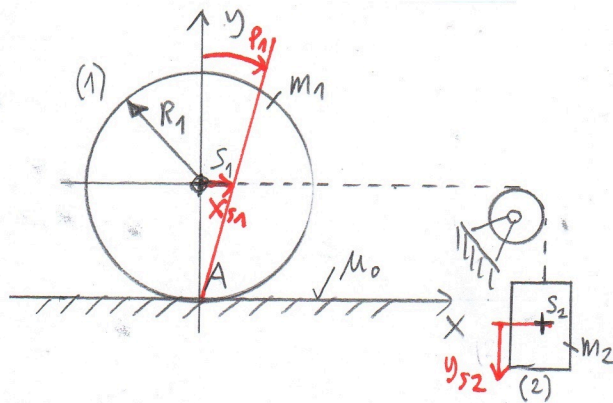
$$J_{\text{red}} \ddot{q} = Q$$

$$J_{\text{red}} \varepsilon_0 = Q \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{Q}{J_{\text{red}}} = \frac{-150}{28,25} = -5,31 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow \vec{\varepsilon}_0 = (-5,31 \vec{e}_z) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\text{lift gyorsulása: } a_1 = -R_1 \varepsilon_0 = -0,2 \cdot (-5,31) = 1,062 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \vec{a}_1 = a_1 \vec{e}_y = (1,062 \vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{ellensúly gyorsulása: } a_2 = R_2 \varepsilon_0 = 0,15 \cdot (-5,31) = -0,796 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \vec{a}_2 = a_2 \vec{e}_y = (-0,796 \vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

ÖSSZETETT SZERKEZET



adott:

$$R_1 = 2 \text{ m}$$

$$m_1 = 10 \text{ kg}$$

$$m_2 = 20 \text{ kg}$$

feladat:

$$\vec{a}_{S1} = ?$$

$$\vec{a}_{S2} = ?$$

$$\mu_0^{\min} = ?$$

általános koordinata

$$q = x_{S1}$$

$$\dot{q} = \dot{x}_{S1} = v_{S1}$$

$$\ddot{q} = \ddot{x}_{S1} = a_{S1}$$

összefüggés általános koordináták között:

$$x_{S1} = -y_{S2} = R_1 \phi_1 \Rightarrow \phi_1 = -\frac{x_{S1}}{R_1}$$

$$v_{S1} = -v_{S2} = R_1 \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = -\frac{v_{S1}}{R_1}$$

$$a_{S1} = -a_{S2} = R_1 \epsilon_1 \Rightarrow \epsilon_1 = -\frac{a_{S1}}{R_1}$$

$$\vec{v}_{S1} = v_{S1} \vec{e}_x \quad \vec{v}_{S2} = v_{S2} \vec{e}_y$$

$$\vec{a}_{S1} = a_{S1} \vec{e}_x \quad \vec{a}_{S2} = a_{S2} \vec{e}_y$$

Lagrange - Féle másodfajú mozgásegyenlet: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q$

• baloldal:

→ kinetikus energia:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} I_A \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{S2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_1 R_1^2 \right) \left(\frac{v_{S1}}{R_1} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{S1}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_1 R_1^2 \right) \frac{v_{S1}^2}{R_1^2} + \frac{1}{2} m_2 v_{S1}^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left[\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right]}_{m_{\text{red}}} v_{S1}^2 = \frac{1}{2} m_{\text{red}} \dot{q}^2$$

→ a redukált tömeg: $m_{\text{red}} = \frac{3}{2} m_1 + m_2 = \frac{3}{2} \cdot 10 + 20 = 35 \text{ kg}$

→ kinetikus energia deriválása:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) = m_{\text{red}} \ddot{q} \quad , \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0$$

• jobboldal: (az általános erő)

$$Q = \underbrace{\vec{G}_1 \cdot \vec{P}_{S1}}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_k \cdot \vec{P}_A}_{=0} + \vec{G}_2 \cdot \vec{P}_{S2} = \vec{G}_2 \cdot \frac{\partial v_{S2}}{\partial \dot{q}} = -m_2 g \vec{e}_y \cdot \frac{\partial v_{S2} \vec{e}_y}{\partial v_{S1}} =$$

$$= -m_2 g \vec{e}_y \cdot \frac{-\partial v_{S1} \vec{e}_y}{\partial v_{S1}} = -m_2 g \vec{e}_y \cdot (-1) \vec{e}_y = m_2 g = 20 \cdot 10 = 200 \text{ N}$$

• Visszahelyettesítve a Lagrange - egyenletbe:

$$m_{\text{red}} \ddot{q} = Q$$

$$m_{\text{red}} a_{S1} = Q \Rightarrow a_{S1} = \frac{Q}{m_{\text{red}}} = \frac{200}{35} = 5,71 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow a_{S1}$$

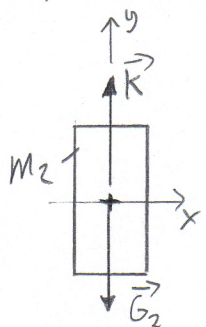
$$\vec{a}_{S1} = a_{S1} \vec{e}_x = (5,71 \vec{e}_x) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{S2} = -a_{S1} = -5,71 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}_{S2} = a_{S2} \vec{e}_y = (-5,71 \vec{e}_y) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A csúszásmentes gördüléshez szükséges minimális nyugalási súrlódási tényező ($\mu_0^{\min}$) meghatározása:

- impulzus tétel a 2. testre:



$$\vec{T} = \vec{F}$$

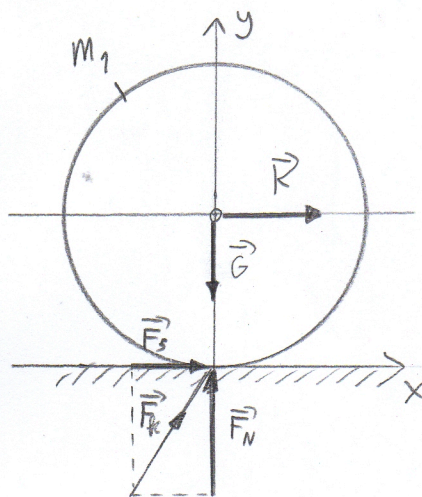
$$\vec{K} + \vec{G}_2 = m_2 \vec{a}_{s2}$$

$$K \vec{e}_y - m_2 g \vec{e}_y = m_2 a_{s2} \vec{e}_y \quad / \cdot \vec{e}_y$$

$$K - m_2 g = m_2 a_{s2}$$

$$K = m_2 (g + a_{s2}) = 20 \cdot (10 + 5,71) = 85,8 \text{ N}$$

- impulzus tétel az 1. testre:



$$\vec{T} = \vec{F}$$

$$m_1 \vec{a}_{s1} = \vec{F}_k + \vec{G} + \vec{K}$$

$$m_1 a_{s1} \vec{e}_x = F_s \vec{e}_x + F_N \vec{e}_y - m_1 g \vec{e}_y + K \vec{e}_x \quad / \cdot \vec{e}_x / \cdot \vec{e}_y$$

$$/ \cdot \vec{e}_x \rightarrow 1) \quad m_1 a_{s1} = F_s + K \quad \left\{ \right.$$

$$/ \cdot \vec{e}_y \rightarrow 2) \quad 0 = F_N - m_1 g \quad \left\{ \right.$$

$$1) \rightarrow F_s = m_1 a_{s1} - K = 10 \cdot 5,71 - 85,8 = -28,7 \text{ N} (\leftarrow)$$

$$2) \rightarrow F_N = m_1 g = 10 \cdot 10 = 100 \text{ N} (\uparrow)$$

$$\vec{F}_k = F_s \vec{e}_x + F_N \vec{e}_y = (-28,7 \vec{e}_x + 100 \vec{e}_y) \text{ N}$$

$$\mu_0^{\min} = \frac{|F_s|}{|F_N|} = \frac{|-28,7|}{100} = 0,287$$