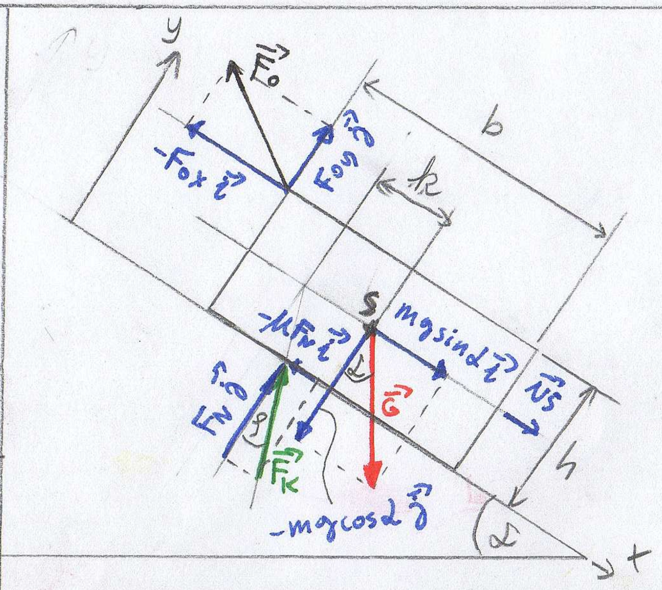
HASÁBOS FELADATOK

1. TÍPUS

adott: m, g, μ, $\vec{F}_0$, α, h, b, $\vec{v}_s$

feladat: $\vec{a}_s$, $\vec{F}_K$, k



- **impulzus tétel:** $m\vec{a}_s = \vec{G} + \vec{F}_K + \vec{F}_0 \quad /\cdot\vec{i}/\cdot\vec{j}$

  (1) $m a_s = mg\sin\alpha - \mu F_N - F_{0x}$

  (2) $0 = -mg\cos\alpha + F_N + F_{0y}$

- **perdület tétel:** $\dot{\Pi}_S = M_S$

  (3) $0 = k \cdot F_N + \frac{h}{2}F_{0x} - \frac{b}{2}F_{0y}$

- **megoldás menete:**

  (2) $\rightarrow F_N$

  (1) $\rightarrow a_s$

  (3) $\rightarrow k$

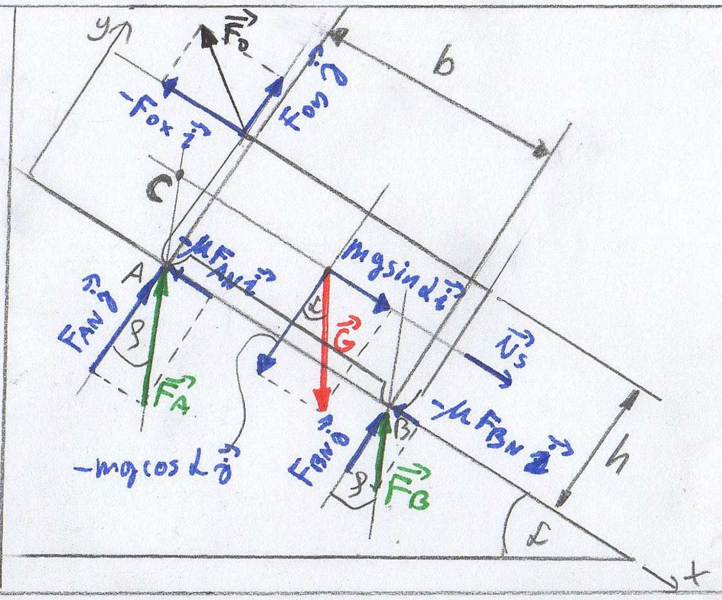
  $\vec{a}_s = a_s\vec{i}$

  $\vec{F}_K = -\mu F_N\vec{i} + F_N\vec{j}$

2. TÍPUS

adott: m, g, μ, α, h, b, $\vec{v}_s$, $\vec{F}_0$

feladat: $\vec{a}_s$, $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$



- **impulzus tétel:** $m\vec{a}_s = \vec{G} + \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_0 \quad /\cdot\vec{i}/\cdot\vec{j}$

  (1) $m a_s = mg\sin\alpha - \mu F_{AN} - \mu F_{BN} - F_{0x}$

  (2) $0 = -mg\cos\alpha + F_{AN} + F_{BN} + F_{0y}$

- **perdület tétel:** $\dot{\Pi}_C = M_C$

  (3) $0 = -mg\cos\alpha\left(\frac{b}{2} + \mu\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}F_{0x} + b F_{BN}$

- **megoldás menete:**

  (3) $\rightarrow F_{BN}$

  (2) $\rightarrow F_{AN}$

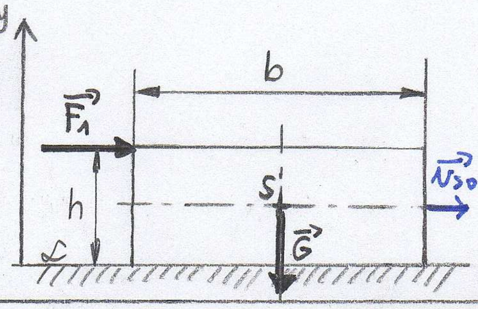
  (1) $\rightarrow a_s$

  $\vec{a}_s = a_s\vec{i}$

  $\vec{F}_A = -\mu F_{AN}\vec{i} + F_{AN}\vec{j}$

  $\vec{F}_B = -\mu F_{BN}\vec{i} + F_{BN}\vec{j}$

hasáb vízszintes pályán mozgása – billenési határeset



• adott

$\vec{v}_{S0} = (3\vec{i})\,\frac{m}{s}$

$\vec{F}_1 = (0,6\vec{i})$ kN

$\vec{G} = (-0,8\vec{j})$ kN

$b = 2$ m

$h = 0,8$ m

• Feladat

1) $\mu = 0$ esetén

a) $\vec{a}_S = ?$

$\vec{v}_S = ?$

$\vec{F}_\alpha$ + hatásvonal

b) F_{1max} (→bill.)

2) $\mu = 0,2$ esetén

a) $\vec{a}_S = ?$

$\vec{v}_S = ?$

$\vec{F}_\alpha$ + hatásvonal

b) $F_{1max} = ?$ (→bill.)

1) $\mu = 0$ esete

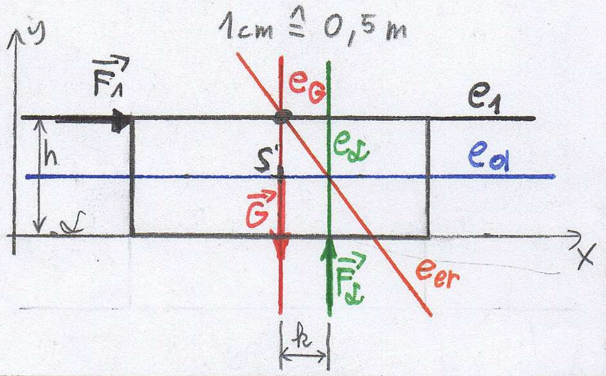
a) $\vec{F}_1 = (0,2\vec{i})$ kN esete

szerkesztéssel (→ $\vec{F}_\alpha$, e_α)

impulzus tétel: $m\vec{a}_S = \vec{F} \Rightarrow m\vec{a}_S = \overbrace{\vec{F}_1 + \vec{G}}^{\vec{F}_{er}} + \vec{F}_\alpha$

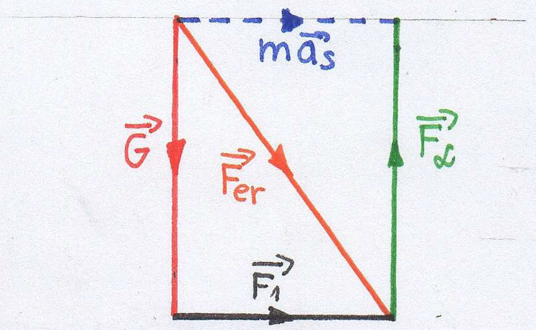
szerkezetábra

1cm ≙ 0,5 m



vektorábra

1cm ≙ 0,2 kN



• kiindulások:	$\vec{F}_1$	$\vec{G}$	$\vec{F}_\alpha$	$m\vec{a}_S$
hatásvonal	✓	✓	×	✓
vektor nagysága	✓	✓	×	×

• szerkesztés menete:

① SZÁ: e_G, e_1, e_a

② VÁ: $\vec{G}, \vec{F}_1$

③ VÁ: $\vec{F}_{er} = \vec{G} + \vec{F}_1$

④ SZÁ: $e_{er} \Rightarrow$ • e_G és e_1 metszéspontján keresztül
• $\vec{F}_{er}$-rel ∥

⑤ SZÁ: $e_\alpha \Rightarrow$ • e_a és e_{er} metszéspontján keresztül
• iránya függőleges, mivel $\mu = 0 \Rightarrow \rho = 0°$

⑥ VÁ: $\vec{F}_{er}$ végpontjain keresztül e_α-val és e_a-val ∥

$\Rightarrow \vec{F}_\alpha$ és $m\vec{a}_S$

számítással ($\to \vec{F}_\alpha, e_\alpha, \vec{a}_s(t), \vec{v}_s(t)$)

impulzus tétel: $m\vec{a}_s = \vec{F}$

$\downarrow$ $\vec{a}_s$; $\vec{F}_\alpha$ $\qquad m\vec{a}_s = \vec{F}_1 + \vec{G} + \vec{F}_\alpha$

$$m a_s \vec{i} = F_1 \vec{i} - G\vec{j} + F_\alpha \vec{j} \quad /\cdot\vec{i} \;/\cdot\vec{j}$$

$/\cdot\vec{i} \Rightarrow m a_s = F_1$

$\left[m = \frac{G}{g} = \frac{800}{10} = 80\,kg \right]$

$a_s = \frac{F_1}{m} = \frac{600}{80} = 7{,}5\,\frac{m}{s^2}$

$\vec{a}_s = (7{,}5\,\vec{i})\,\frac{m}{s^2} = \text{áll.}$

$/\cdot\vec{j} \Rightarrow 0 = -G + F_\alpha$

$F_\alpha = G = 0{,}8\,kN$

$\vec{F}_\alpha = (0{,}8\,\vec{j})\,kN$

sebességtörvény: $\vec{v}_s = \vec{v}_s(t) = \vec{v}_{s0} + \vec{a}_s \cdot t = (3\vec{i}) + (7{,}5\,\vec{i})\,t \;\left(\frac{m}{s}\right)$

perdület tétel S tengelyre: $\dot{\Pi}_S = M_S$

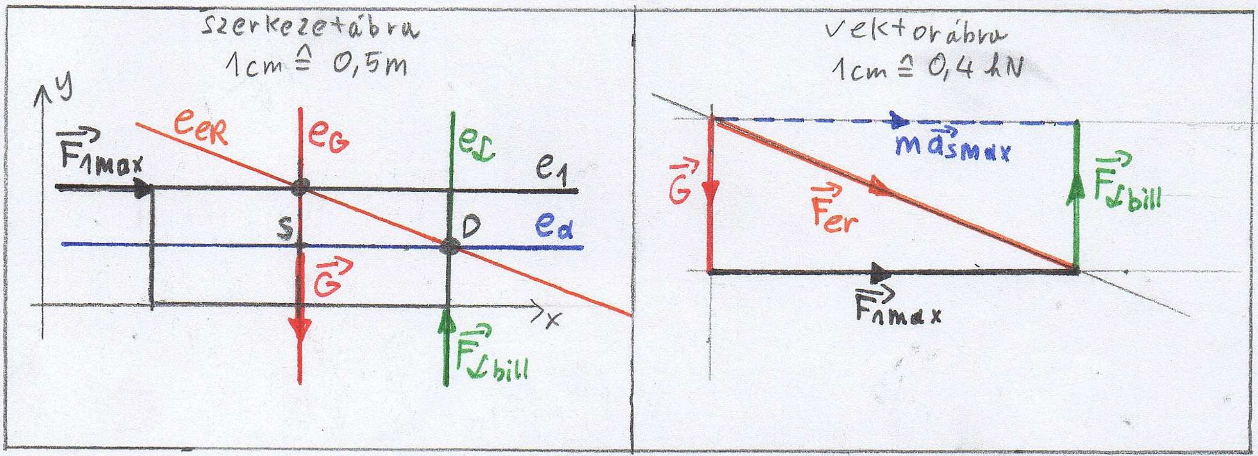
$\hookrightarrow k$

$$0 = k\cdot F_\alpha - hF_1 \Rightarrow k = \frac{hF_1}{F_\alpha} = \frac{0{,}8\cdot 0{,}6}{0{,}8} = 0{,}6\,m$$

---

b) billenés $\Rightarrow e_\alpha$ nem metszi az érintkezési felületet ($\to$ határesetben jobb alsó sarkon keresztül)

szerkesztéssel $\quad m\vec{a}_{s\max} = \underbrace{\vec{F}_{1\max} + \vec{G}}_{\vec{F}_{er}} + \vec{F}_{\alpha\,bill}$



• szerkesztés menete

	$\vec{F}_1$	$\vec{G}$	$\vec{F}_\alpha$	$m\vec{a}_s$
e	✓	✓	✓	✓
$\lvert F\rvert$	✗	✓	✗	✗

① SZÁ: e_G, e_1, e_d, e_α

② SZÁ: $e_{er} \Rightarrow$ • e_G és e_1 metszéspontján keresztül
• e_d és e_α metszéspontján keresztül

③ VÁ: $\vec{G}$

④ VÁ: $\vec{G}$ végpontjain $\Rightarrow$ • e_1-gyel $\parallel$ • e_{er}-rel $\parallel$ $\Rightarrow$ $\vec{F}_{er}$, $\vec{F}_{1max}$

⑤ VÁ: $\vec{F}_{er}$ végpontjain $\Rightarrow$ • e_α-val $\parallel$ • e_d-vel $\parallel$ $\Rightarrow$ $\vec{F}_{\alpha bill}$, $m\vec{a}_{smax}$

számítással:

perdület tétel d tengelyre

$$\dot{\Pi}_d = M_d$$

$$0 = -\frac{h}{2} F_{1max} + \frac{b}{2} G$$

$$F_{1max} = \frac{G\cdot b}{h} = \frac{0{,}8\cdot 2}{0{,}8} = 2\,kN$$

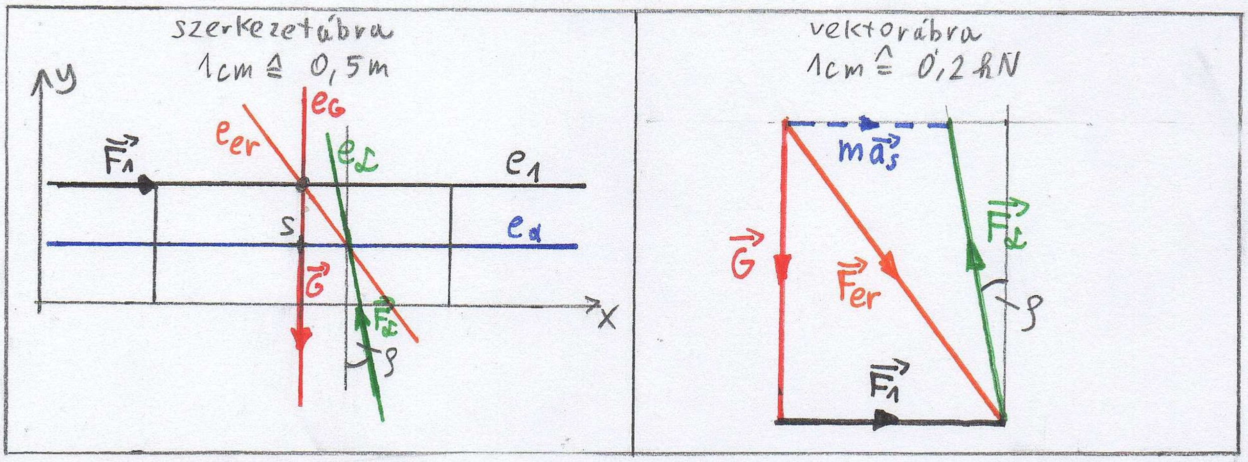
$$\vec{F}_{1max} = (2\,\vec{i})\,kN$$

2) $\mu = 0{,}2$ esete

a) $\vec{F}_1 = (0{,}2\vec{i})$ kN esete

szerkesztéssel ($\rightarrow \vec{F}_\alpha, e_\alpha$)

impulzus tétel: $m\vec{a}_s = \vec{F} \Rightarrow m\vec{a}_s = \overbrace{\vec{F}_1 + \vec{G}}^{\vec{F}_{er}} + \vec{F}_\alpha$



- szerkesztés menete:

① SZÁ: e_G, e_1, e_a

② VÁ: $\vec{G}, \vec{F}_1$

③ VÁ: $\vec{F}_{er} = \vec{G} + \vec{F}_1$

④ SZÁ: $e_{er} \Rightarrow$ • e_G és e_1 metszéspontján keresztül
• $\vec{F}_{er}$-rel $\parallel$

⑤ SZÁ: $e_\alpha \Rightarrow$ • e_a és e_{er} metszéspontján keresztül
• függőlegessel ρ szöget zár be

⑥ VÁ: $\vec{F}_{er}$ végpontjain $\left.\begin{array}{l} \bullet\ e_\alpha\text{-val} \parallel \\ \bullet\ e_a\text{-val} \parallel \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{F}_\alpha \\ m\vec{a}_s \end{array}$

számítással

impulzus tétel: $m\vec{a}_s = \vec{F}$

$$m\vec{a}_s = \vec{F}_1 + \vec{G} + \vec{F}_\alpha$$

$$m a_s \vec{i} = F_1\vec{i} - G\vec{j} + \overbrace{(-\mu F_N \vec{i} + F_N \vec{j})}^{\vec{F}_\alpha} \quad / \cdot\vec{i} / \cdot\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l} /\cdot\vec{i} \Rightarrow 1)\ m a_s = F_1 - \mu F_N \\ /\cdot\vec{j} \Rightarrow 2)\ 0 = -G + F_N \end{array}\right\} \Rightarrow F_N = G = 0{,}8\ \text{kN}$$

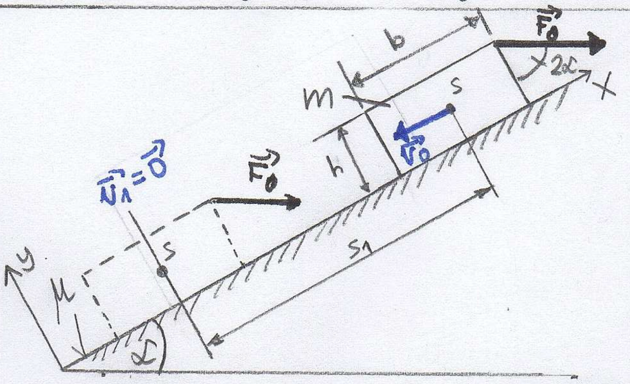
$$2) \Rightarrow m a_s = F_1 - \mu F_N \Rightarrow a_s = \frac{F_1 - \mu F_N}{m} = \frac{600 - 0{,}2\cdot 800}{80} = 5{,}5\ \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a}_s = (0{,}5\vec{i})\ \frac{m}{s^2} = \text{áll.}$$

$$\vec{F}_\alpha = -\mu F_N \vec{i} + F_N \vec{j} = -0{,}2\cdot 0{,}8\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j} = (-0{,}16\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j})\ \text{kN}$$

sebességtörvény: $\vec{v}_s = \vec{v}_s(t) = \vec{v}_{s0} + \vec{a}_s \cdot t = (3\vec{i}) + (5{,}5\vec{i})\,t \ \left(\frac{m}{s}\right)$

hasáb lejtőn mozgása - billenési határeset



• adott:

$\vec{v_0}=(-20\vec{i})\frac{m}{s}$

$m = 30\,kg$

$\mu = 0,25$

$F_0 = 200N$

$\alpha = 30^\circ$

$h = 1m$

$b = 2m$

• Feladat:

a) $\vec{a}=?$, $\vec{F_K}=?$

b) $t_1=?$, $s_1=?$

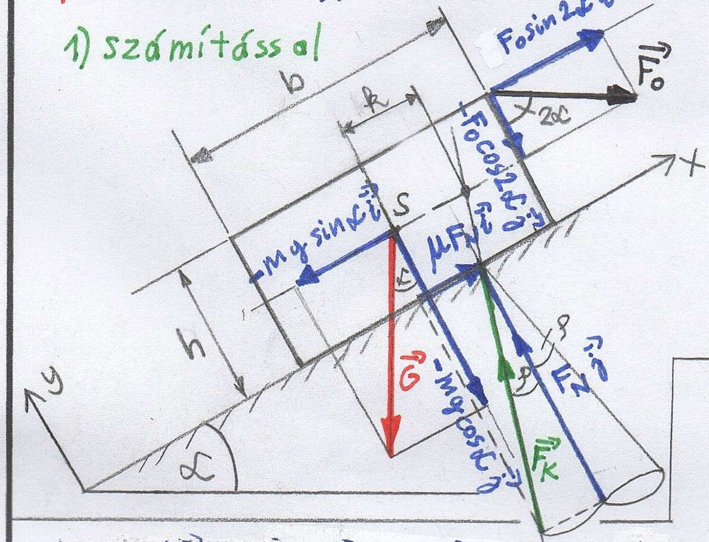
c) $F_{0max}=?$

$\vec{a}_{max}=?$, $\vec{F}_{Kmax}=?$

d) $t_{1min}=?$, $s_{1min}=?$

a) A hasáb $\vec{a}$ gyorsulása és a hasábra ható $\vec{F_K}$ kényszererő

1) számítással



• a hasábra ható erők:

$\vec{G}=-mg\sin\alpha\,\vec{i}-mg\cos\alpha\,\vec{j}$

$\vec{F_K}=\mu F_N\vec{i}+F_N\vec{j}$

$\vec{F_0}=F_0\sin 2\alpha\,\vec{i}-F_0\cos 2\alpha\,\vec{j}$

• Impulzus tétel → $\vec{a}$, $\vec{F_K}$

$$\vec{F}=m\vec{a}$$

$$\vec{G}+\vec{F_K}+\vec{F_0}=m\vec{a}$$

$$-mg\sin\alpha\,\vec{i}-mg\cos\alpha\,\vec{j}+\mu F_N\vec{i}+F_N\vec{j}+F_0\sin 2\alpha\,\vec{i}-F_0\cos 2\alpha\,\vec{j}=ma\vec{i} \quad /\cdot\vec{i}\,/\cdot\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l} /\cdot\vec{i} \Rightarrow 1)\ -mg\sin\alpha+\mu F_N+F_0\sin 2\alpha=ma \\ /\cdot\vec{j} \Rightarrow 2)\ -mg\cos\alpha+F_N-F_0\cos 2\alpha=0 \end{array}\right\}$$

$$2)\to F_N=mg\cos\alpha+F_0\cos 2\alpha=30\cdot 10\cdot\cos 30^\circ+200\cdot\cos 60^\circ=359,8N$$

$$1)\to a=\frac{-mg\sin\alpha+\mu F_N+F_0\sin 2\alpha}{m}=\frac{-30\cdot 10\cdot\sin 30^\circ+0,25\cdot 359,8+200\cdot\sin 60^\circ}{30}=3,77\frac{m}{s^2}$$

$$\underline{\underline{\vec{F_K}}}=\mu F_N\vec{i}+F_N\vec{j}=0,25\cdot 359,8\,\vec{i}+359,8\,\vec{j}=\underline{\underline{(89,95\,\vec{i}+359,8\,\vec{j})N}}$$

$$\underline{\underline{\vec{a}=a\vec{i}=(3,77\,\vec{i})\frac{m}{s^2}}}$$

• Perdület tétel s tengelyre → k

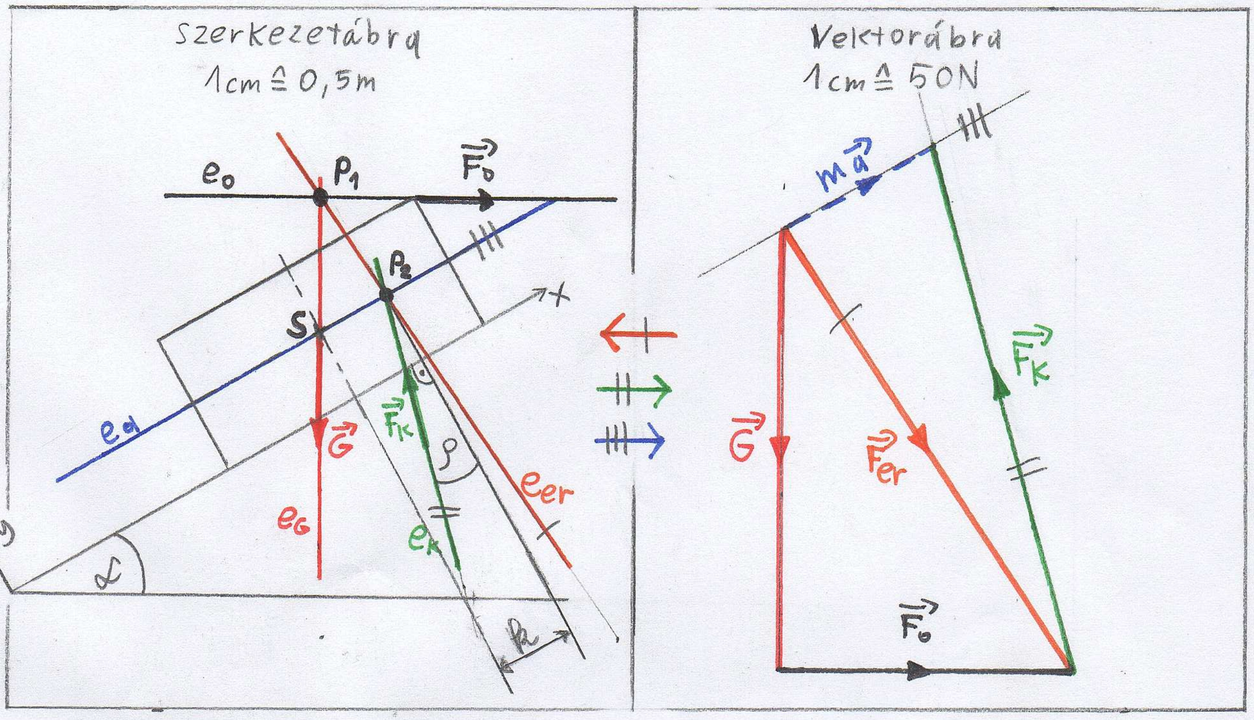
$$\dot{\Pi}_S=M_S$$

$$0=k\cdot F_N-\frac{h}{2}F_0\sin 2\alpha-\frac{b}{2}F_0\cos 2\alpha$$

$$\underline{\underline{k}}=\frac{hF_0\sin 2\alpha+bF_0\cos 2\alpha}{2F_N}=\frac{1\cdot 200\cdot\sin 60^\circ+2\cdot 200\cdot\cos 60^\circ}{2\cdot 359,8}=\underline{\underline{0,519m}}$$

2) szerkesztéssel

$$m\vec{a_s} = \underbrace{\vec{G} + \vec{F_0}}_{\vec{F_{er}}} + \vec{F_K}$$



Kiindulás:	$\vec{F_0}$	$\vec{G}$	$\vec{F_K}$	$m\vec{a}$
• hatásvonal	✓	✓	×	✓
• vektor	✓	✓	×	×

• szerkesztés menete:

① SZÁ: e_G, e_0, e_a (e_G és e_0 metszéspontja legyen P_1)

② VÁ: $\vec{G}$, $\vec{F_0}$

③ VÁ: $\vec{F_{er}} = \vec{G} + \vec{F_0}$

④ SZÁ: e_{er} ⇒ • P_1-en keresztül
• $\vec{F_{er}}$-rel párhuzamos

e_{er} és e_a metszéspontja legyen P_2

⑤ SZÁ: P_2-ből merőleges állítása x tengelyre

e_K ⇒ • P_2-n keresztül
• előbb behúzott merőlegessel ρ szöget zár be ($\text{tg}\,\rho = 0,25$)

⑥ VÁ: $\vec{F_{er}}$ egyik végpontjából e_K-val párhuzamos } ⇒ $\vec{F_K}$
másik végpontjából e_a-val párhuzamos } ⇒ $m\vec{a}$

b) Megállásig eltelt t_1 idő és megtett s_1 út

Impulzus tétel integrál alakja $\Rightarrow t_1$

$$\vec{I}_1-\vec{I}_0=\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\vec{G}+\vec{F}_k+\vec{F}_0\,dt=\left(\vec{G}+\vec{F}_k+\vec{F}_0\right)\int_{t_0}^{t_1}dt=\left(\vec{G}+\vec{F}_k+\vec{F}_0\right)\cdot(t_1-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{t_0}})$$

$$m\overset{\shortparallel}{\underset{0}{v_1}}\vec{i}-m(-v_0\vec{i})=\left(-mg\sin\alpha\,\vec{i}-mg\cos\alpha\,\vec{j}+\mu F_N\vec{i}+F_N\vec{j}+F_0\sin 2\alpha\,\vec{i}-F_0\cos 2\alpha\,\vec{j}\right)t_1 \quad /\cdot\vec{i}$$

$$mv_0=\left(-mg\sin\alpha+\mu F_N+F_0\sin 2\alpha\right)t_1$$

$$t_1=\frac{mv_0}{-mg\sin\alpha+\mu F_N+F_0\sin 2\alpha}$$

$$\underline{\underline{t_1}}=\frac{30\cdot 20}{-30\cdot 10\cdot\sin 30^\circ+0{,}25\cdot 359{,}8+200\cdot\sin 60^\circ}=\underline{\underline{5{,}302\,s}}$$

- **t_1 a sebességtörvényből:**

$$\vec{v}_1=\vec{v}_0+\vec{a}\,t_1$$

$$\vec{0}=-v_0\vec{i}+a\vec{i}\cdot t_1 \quad /\cdot\vec{i}$$

$$0=-v_0+at_1 \Rightarrow t_1=\frac{v_0}{a}=\frac{20}{3{,}77}=5{,}302\,s$$

Munkatétel $\Rightarrow s_1$

$$E_1-E_0=W_{01}$$

- $$W_{01}=\int_{\vec{r}_0=0}^{\vec{r}_1}\vec{F}\,d\vec{r}=\int_{s_0=0}^{s_1}\left(-mg\sin\alpha\,\vec{i}-mg\cos\alpha\,\vec{j}+\mu F_N\vec{i}+F_N\vec{j}+F_0\sin 2\alpha\,\vec{i}-F_0\cos 2\alpha\,\vec{j}\right)ds\,\vec{i}=$$

$$=\left(-mg\sin\alpha\,\vec{i}-mg\cos\alpha\,\vec{j}+\mu F_N\vec{i}+F_N\vec{j}+F_0\sin 2\alpha\,\vec{i}-F_0\cos 2\alpha\,\vec{j}\right)\underbrace{\int_{s_0=0}^{s_1}ds}_{s_1}\,\vec{i}=$$

$$=-mg\sin\alpha\,s_1+\mu F_N s_1+F_0\sin 2\alpha\,s_1$$

$$\frac{1}{2}m\overset{0}{\overset{\shortparallel}{v_1}}{}^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\left(-mg\sin\alpha+\mu F_N+F_0\sin 2\alpha\right)s_1$$

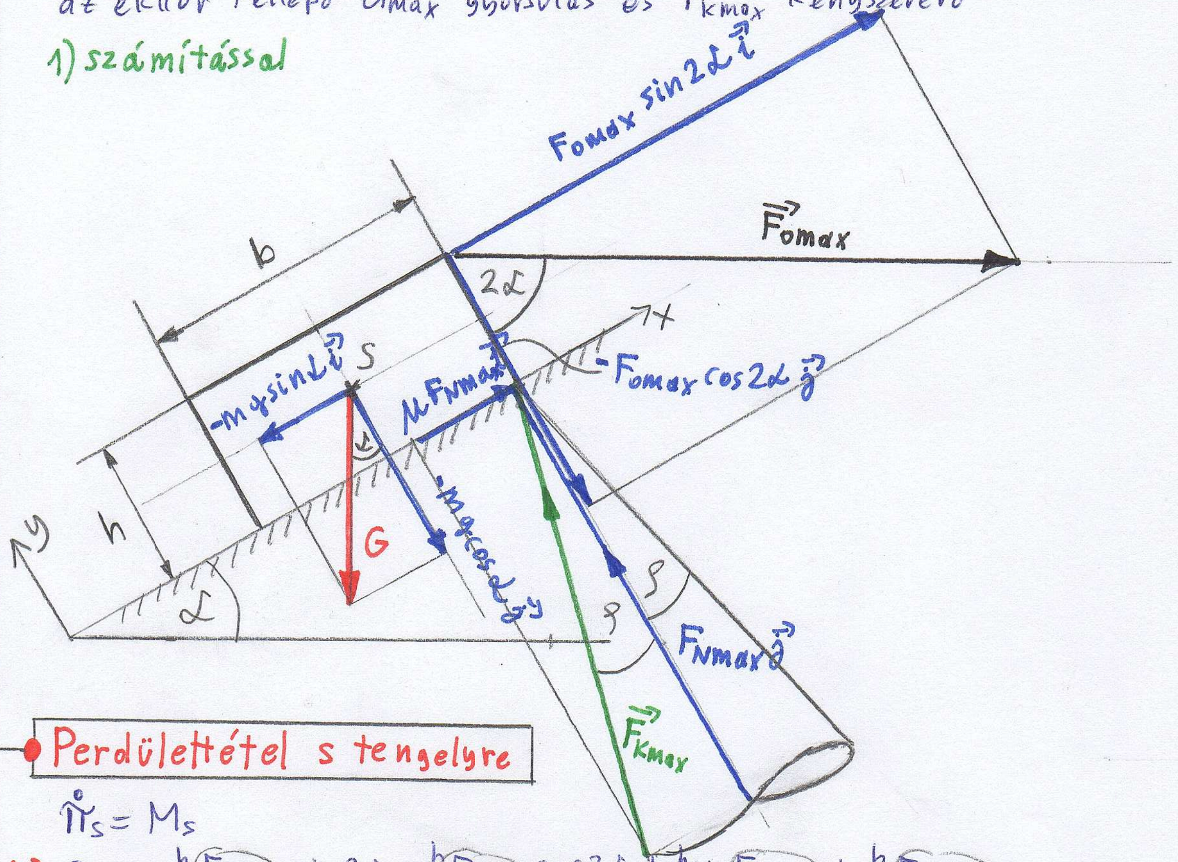
$$-mv_0^2=\left(-2mg\sin\alpha+2\mu F_N+2F_0\sin 2\alpha\right)s_1$$

$$s_1=\frac{-mv_0^2}{-2mg\sin\alpha+2\mu F_N+2F_0\sin 2\alpha}$$

$$\underline{\underline{s_1}}=\frac{-30\cdot 20^2}{-2\cdot 30\cdot 10\cdot\sin 30^\circ+2\cdot 0{,}25\cdot 359{,}8+2\cdot 200\cdot\sin 60^\circ}=\underline{\underline{-53{,}02\,m}}\ (\swarrow)$$

c) A maximálisan kifejthető $\vec{F}_{omax}$ erő, melynél még nem billen fel a hasáb, az ekkor fellépő $\vec{a}_{max}$ gyorsulás és $\vec{F}_{Kmax}$ kényszererő

1) számítással



Perdülettétel s tengelyre

$$\mathring{\Pi}_s = M_s$$

(1) $$0 = -\frac{h}{2}F_{omax}\sin 2\alpha - \frac{b}{2}F_{omax}\cos 2\alpha + \frac{h}{2}\mu F_{Nmax} + \frac{b}{2}F_{Nmax}$$

Impulzus tétel

$$m\vec{a}_{max} = \vec{F}$$

$$m\vec{a}_{max} = \vec{G} + \vec{F}_{Kmax} + \vec{F}_{omax}$$

$$m a_{max}\vec{i} = -mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j} + \mu F_{Nmax}\vec{i} + F_{Nmax}\vec{j} + F_{omax}\sin 2\alpha\,\vec{i} - F_{omax}\cos 2\alpha\,\vec{j} \quad /\cdot\vec{i}/\vec{j}$$

(2) $$m a_{max} = -mg\sin\alpha + \mu F_{Nmax} + F_{omax}\sin 2\alpha$$

(3) $$0 = -mg\cos\alpha + F_{Nmax} - F_{omax}\cos 2\alpha \Rightarrow F_{Nmax} = mg\cos\alpha + F_{omax}\cos 2\alpha$$

(3)→(1): $$0 = -\frac{h}{2}F_{omax}\sin 2\alpha - \frac{b}{2}F_{omax}\cos 2\alpha + \frac{h}{2}\mu\left(mg\cos\alpha + F_{omax}\cos 2\alpha\right) + \frac{b}{2}\left(mg\cos\alpha + F_{omax}\cos 2\alpha\right)$$

$$F_{omax}\left(h\sin 2\alpha + \cancel{b\cos 2\alpha} - h\mu\cos 2\alpha \cancel{- b\cos 2\alpha}\right) = h\mu mg\cos\alpha + bmg\cos\alpha$$

$$F_{omax} = \frac{mg\left(h\mu\cos\alpha + b\cos\alpha\right)}{h\left(\sin 2\alpha - \mu\cos 2\alpha\right)} = \frac{30\cdot 10\cdot\left(1\cdot 0{,}25\cdot\cos 30^\circ + 2\cdot\cos 30^\circ\right)}{1\cdot\left(\sin 60^\circ - 0{,}25\cdot\cos 60^\circ\right)} = 788{,}86\,N$$

(3)→ $$F_{Nmax} = mg\cos\alpha + F_{omax}\cos 2\alpha = 30\cdot 10\cdot\cos 30^\circ + 788{,}86\cdot\cos 60^\circ = 654{,}24\,N$$

$$(2) \rightarrow a_{max} = \frac{-mg\sin\alpha + \mu F_{Nmax} + F_{omax}\sin 2\alpha}{m}$$

$$a_{max} = \frac{-30\cdot 10\cdot \sin 30^\circ + 0{,}25\cdot 654{,}24 + 788{,}86\cdot \sin 60^\circ}{30} = 23{,}22\,\frac{m}{s^2}$$

a végeredmények vektorban:

$$\underline{\underline{\vec{F}_{omax}}} = F_{omax}\sin 2\alpha\,\vec{i} - F_{omax}\cos 2\alpha\,\vec{j} = 788{,}86\cdot\sin 60^\circ\,\vec{i} - 788{,}86\cdot\cos 60^\circ\,\vec{j} =$$

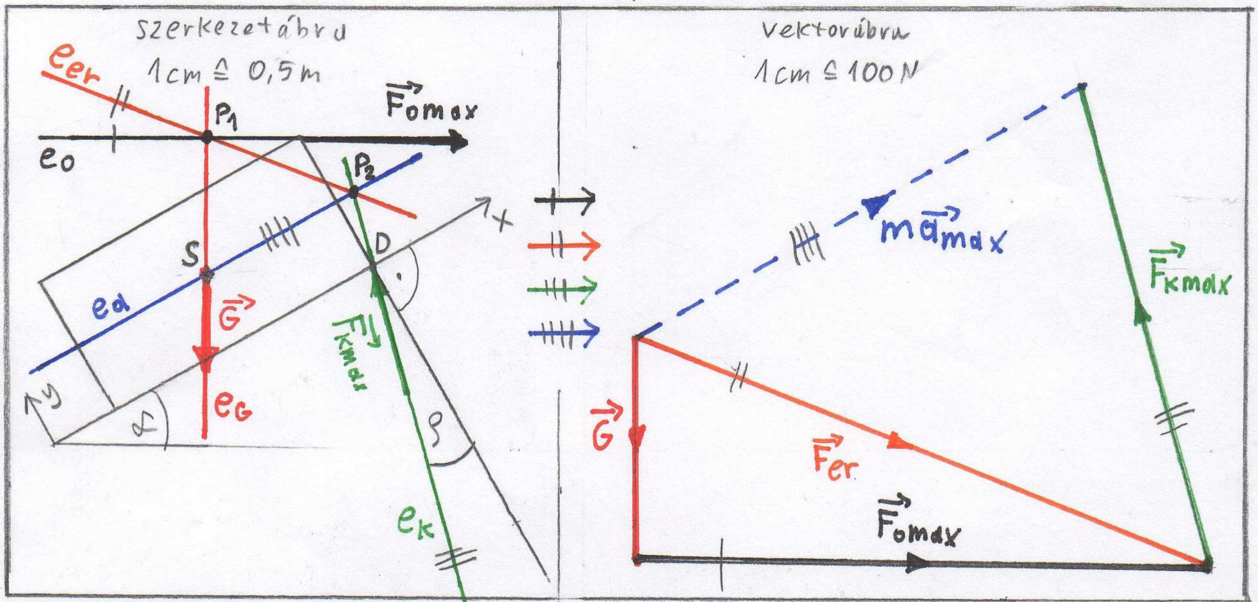
$$= \underline{\underline{(683{,}17\,\vec{i} - 394{,}43\,\vec{j})\,N}}$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_{Kmax}}} = \mu F_{Nmax}\,\vec{i} + F_{Nmax}\,\vec{j} = 0{,}25\cdot 654{,}24\,\vec{i} + 654{,}24\,\vec{j} =$$

$$= \underline{\underline{(163{,}56\,\vec{i} + 654{,}24\,\vec{j})\,N}}$$

$$\underline{\underline{\vec{a}_{max}}} = a_{max}\,\vec{i} = \underline{\underline{(23{,}22\,\vec{i})\,\frac{m}{s^2}}}$$

2) szerkesztéssel | $m\vec{a}_{max} = \underbrace{\vec{G} + \vec{F}_{omax}}_{\vec{F}_{er}} + \vec{F}_{Kmax}$



Kiindulás:	$\vec{F}_{omax}$	$\vec{G}$	$\vec{F}_{Kmax}$	$m\vec{a}_{max}$
• hatásvonal	✓	✓	✓	✓
• vektor	X	✓	X	X

- Szerkesztés menete

① SZÁ: e_G, e_0, e_a, e_K

- $e_K \Rightarrow$ D ponton megy keresztül (billenési határeset)
  - az X tengelyre merőlegessel ρ szöget zár be ($tg\,\rho = 0{,}25$)
- e_0 és e_G metszéspontja legyen P_1
- e_a és e_K metszéspontja legyen P_2

② SZÁ: $e_{er} \Rightarrow P_1$ és P_2 pontokon keresztül

③ VÁ: $\vec{G}$

④ VÁ: $\vec{G}$ egyik végpontjából e_0-lal párhuzamos $\Rightarrow \vec{F}_{omax}$
másik végpontjából e_{er}-rel párhuzamos $\Rightarrow \vec{F}_{er}$

⑤ VÁ: $\vec{F}_{er}$ egyik végpontjából e_K-val párhuzamos $\Rightarrow \vec{F}_{Kmax}$
másik végpontjából e_a-val párhuzamos $\Rightarrow m\vec{a}_{max}$

d) F_{omax} esetén a megálláshoz szükséges t_{1min} idő és az ezalatt megtett S_{1min} út

- Impulzus tétel integrál alakja $\Rightarrow t_{1min}$

$$\vec{I}_{1min} - \vec{I}_0 = \int_{t_0}^{t_{1min}} \vec{F}\,dt = \int_{t_0}^{t_{1min}} \vec{G} + \vec{F}_{Kmax} + \vec{F}_{omax}\,dt = (\vec{G} + \vec{F}_{Kmax} + \vec{F}_{omax})\int_{t_0}^{t_{1min}} dt = (\vec{G} + \vec{F}_{Kmax} + \vec{F}_{omax})(t_{1min} - \overset{0}{t_0})$$

$$m\underset{0}{v_1}\vec{i} - m(-v_0\vec{i}) = (-mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j} + \mu F_{Nmax}\,\vec{i} + F_{Nmax}\,\vec{j} + F_{omax}\sin 2\alpha\,\vec{i} - F_{omax}\cos 2\alpha\,\vec{j})\,t_{1min} \quad /\cdot\vec{i}$$

$$mv_0 = (-mg\sin\alpha + \mu F_{Nmax} + F_{omax}\sin 2\alpha)\,t_{1min}$$

$$t_{1min} = \frac{mv_0}{-mg\sin\alpha + \mu F_{Nmax} + F_{omax}\sin 2\alpha}$$

$$\underline{\underline{t_{1min}}} = \frac{30\cdot 20}{-30\cdot 10\cdot\sin 30^\circ + 0{,}25\cdot 654{,}24 + 788{,}86\cdot\sin 60^\circ} = \underline{\underline{0{,}862\,s}}$$

- t_{1min} a sebességtörvényből:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{a}_{max}\,t_{1min}$$

$$\vec{0} = -v_0\vec{i} + a_{max}\vec{i}\,t_{1min} \quad /\cdot\vec{i}$$

$$0 = -v_0 + a_{max}t_{1min} \Rightarrow t_{1min} = \frac{v_0}{a_{max}} = \frac{20}{23{,}22} = 0{,}862\,s$$

• Munkatétel $\Rightarrow s_{1min}$

$$E_{1min} - E_0 = W_{01min}$$

• $$W_{01min} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_{1min}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{s_0=0}^{s_{1min}} \left(-mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j} + \mu F_{Nmax}\,\vec{i} + F_{Nmax}\,\vec{j} + F_{Omax}\sin 2\alpha\,\vec{i} - F_{Omax}\cos 2\alpha\,\vec{j}\right) ds\,\vec{i} =$$

$$= \left(-mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j} + \mu F_{Nmax}\,\vec{i} + F_{Nmax}\,\vec{j} + F_{Omax}\sin 2\alpha\,\vec{i} - F_{Omax}\cos 2\alpha\,\vec{j}\right) \overbrace{\int_{s_0=0}^{s_{1min}} ds}^{s_{1min}}\,\vec{i} =$$

$$= \left(-mg\sin\alpha + \mu F_{Nmax} + F_{Omax}\sin 2\alpha\right) s_{1min}$$

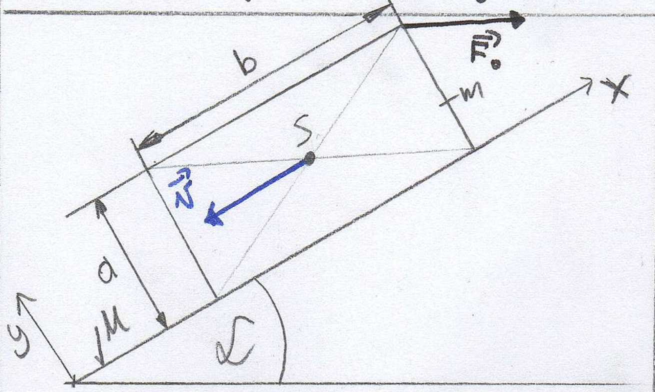
$$\overset{0}{\overset{\parallel}{\frac{1}{2}mv_1^2}} - \frac{1}{2}mv_0^2 = \left(-mg\sin\alpha + \mu F_{Nmax} + F_{Omax}\sin 2\alpha\right) s_{1min}$$

$$-mv_0^2 = \left(-2mg\sin\alpha + 2\mu F_{Nmax} + 2F_{Omax}\sin 2\alpha\right) s_{1min}$$

$$s_{1min} = \frac{-mv_0^2}{-2mg\sin\alpha + 2\mu F_{Nmax} + 2F_{Omax}\sin 2\alpha}$$

$$\underline{\underline{s_{1min}}} = \frac{-30\cdot 20^2}{-2\cdot 30\cdot 10\cdot \sin 30^\circ + 2\cdot 0{,}25\cdot 654{,}24 + 2\cdot 788{,}86\cdot \sin 60^\circ} = \underline{\underline{-8{,}61\,m\,(\leftarrow)}}$$

hasáb lejtőn mozgása



• adott

$\vec{v}_s = (-10\vec{i})\,\frac{m}{s}$

$\mu = 0{,}25$

$m = 40\ kg$

$g = 10\,\frac{m}{s^2}$

$\alpha = 30^\circ$

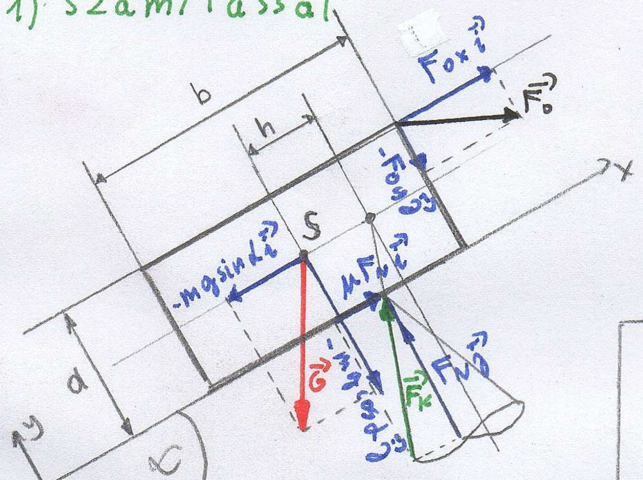
$a = 1m \quad b = 2m$

$\vec{F}_0 = (200\vec{i} - 100\vec{j})N$

• Feladat

$\vec{a}_s = ?\quad \vec{F}_k = ?$

1) számítással



• A hasábra ható erők

$\vec{G} = -mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j}$

$\vec{F}_k = \mu F_N\vec{i} + F_N\vec{j}$

$\vec{F}_0 = F_{0x}\vec{i} - F_{0y}\vec{j}$

• Impulzus tétel → $\vec{a}_s, \vec{F}_k$

$\vec{F} = \dot{\vec{I}}$

$\vec{G} + \vec{F}_k + \vec{F}_0 = m\vec{a}_s$

$$(-mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j}) + (\mu F_N\vec{i} + F_N\vec{j}) + (F_{0x}\vec{i} - F_{0y}\vec{j}) = ma_s\vec{i} \quad /\cdot\vec{i}/\cdot\vec{j}$$

$$\left.\begin{aligned} \cdot\vec{i} &\to (1)\ -mg\sin\alpha + \mu F_N + F_{0x} = m a_s \\ \cdot\vec{j} &\to (2)\ -mg\cos\alpha + F_N - F_{0y} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$(2) \to F_N = mg\cos\alpha + F_{0y} = 40\cdot 10\cdot\cos 30^\circ + 100 = 446{,}4\,N$$

$$(1) \to a_s = \frac{-mg\sin\alpha + \mu F_N + F_{0x}}{m} = \frac{-40\cdot 10\cdot\sin 30^\circ + 0{,}25\cdot 446{,}4 + 200}{40} =$$

$$= 2{,}79\,\frac{m}{s^2} \Rightarrow \vec{a}_s = a_s\vec{i} = \underline{\underline{(2{,}79\vec{i})\,\frac{m}{s^2}}}$$

$$\vec{F}_k = \mu F_N\vec{i} + F_N\vec{j} = 0{,}25\cdot 446{,}4\,\vec{i} + 446{,}4\,\vec{j} = \underline{\underline{(111{,}6\vec{i} + 446{,}4\vec{j})N}}$$

• Perdület tétel s tengelyre ⇒ h

$\dot{\Pi}_s = M_s$

$0 = h\cdot F_N - \frac{a}{2}F_{0x} - \frac{b}{2}F_{0y}$

$$h = \frac{\frac{a}{2}F_{0x} + \frac{b}{2}F_{0y}}{F_N} = \frac{\frac{1}{2}200 + \frac{2}{2}100}{446{,}4} = \underline{\underline{0{,}448\,m}}$$

2) szerkesztéssel $m\vec{a}_s = \underbrace{\vec{G} + \vec{F}_o}_{\vec{F}_{er}} + \vec{F}_K$