

ÜTKÖZÉS

osztályozás

centrikus

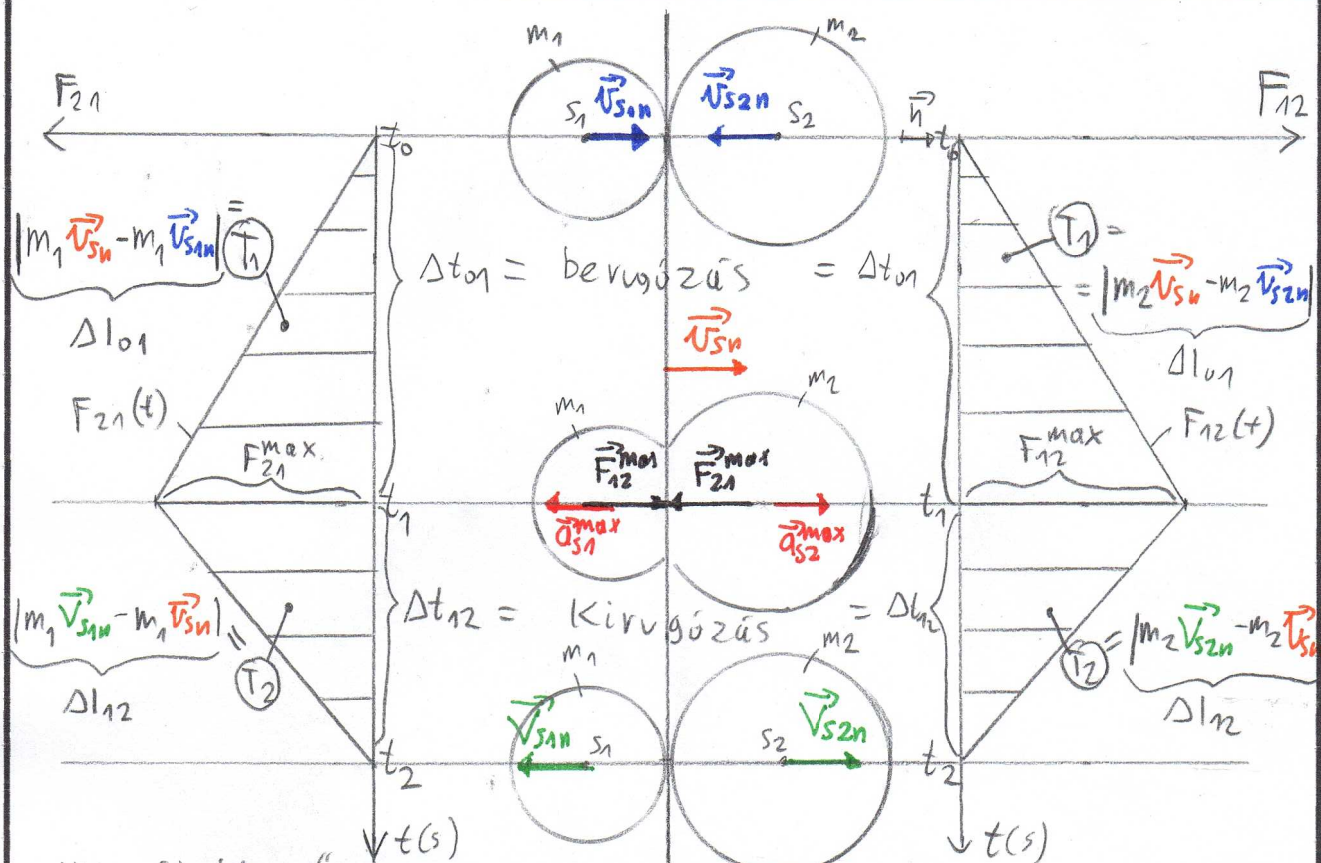
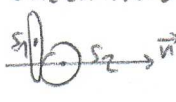
egyenes



Ferde



excentrikus



• ütközési tényező:

$$k = \frac{\Delta l_{12}}{\Delta l_{01}} = \frac{m_1 |v_{s1n} - v_{sn}|}{m_1 |v_{sn} - v_{s1n}|} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_{21} dt}{\int_{t_1}^{t_2} F_{21} dt} \approx \frac{\frac{F_{21}^{max} \cdot \Delta t_{12}}{2}}{\frac{F_{21}^{max} \cdot \Delta t_{01}}{2}} = \frac{\Delta t_{12}}{\Delta t_{01}}$$

$$k = \frac{\Delta l_{12}}{\Delta l_{01}} = \frac{m_2 |v_{s2n} - v_{sn}|}{m_2 |v_{sn} - v_{s2n}|} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_{12} dt}{\int_{t_1}^{t_2} F_{12} dt} \approx \frac{\frac{F_{12}^{max} \cdot \Delta t_{12}}{2}}{\frac{F_{12}^{max} \cdot \Delta t_{01}}{2}} = \frac{\Delta t_{12}}{\Delta t_{01}}$$

• számítás menete

① közös súlyponti sebesség: $m_1 \vec{v}_{s1} + m_2 \vec{v}_{s2} = (m_1 + m_2) \vec{v}_s$

$$\vec{v}_s = \frac{m_1 \vec{v}_{s1} + m_2 \vec{v}_{s2}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{sn} = \vec{v}_s \cdot \vec{n}$$

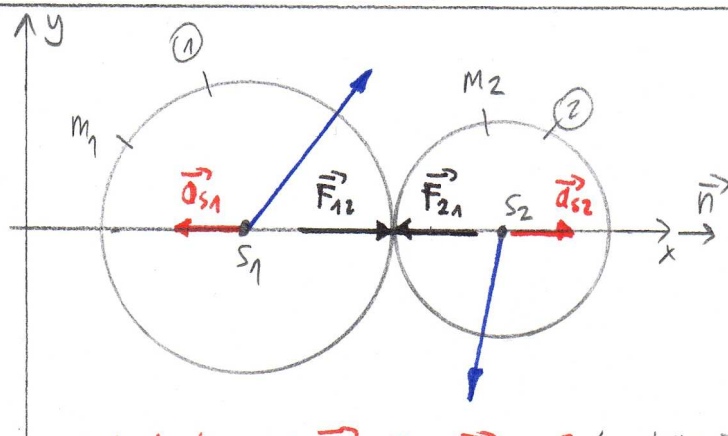
② ütközés utáni normális irányú sebességek:

$$v_{s1n} - v_{sn} = -k \cdot (v_{s1n} - v_{sn}) \Rightarrow v_{s1n} = v_{sn} - k \cdot (v_{s1n} - v_{sn})$$

$$v_{s2n} - v_{sn} = -k \cdot (v_{s2n} - v_{sn}) \Rightarrow v_{s2n} = v_{sn} - k \cdot (v_{s2n} - v_{sn})$$

③ a normálisra merőleges sebességösszetevők változatlanok!

FERDE ÜTKÖZÉS



• adott:

$$m_1 = 4 \text{ kg}$$

$$m_2 = 1 \text{ kg}$$

$$\vec{v}_{S1} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

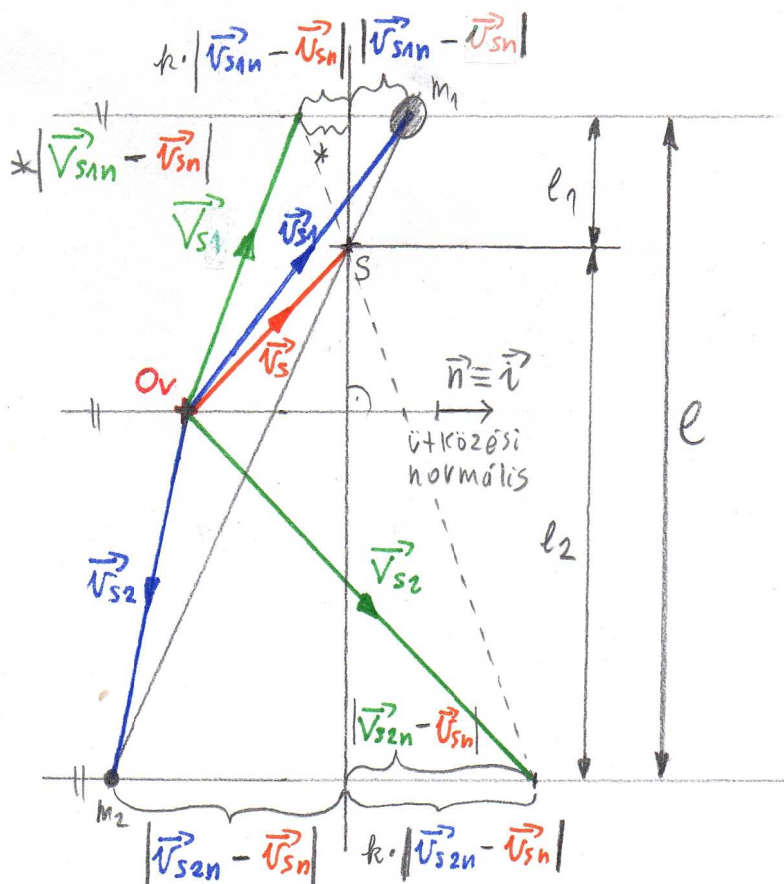
$$\vec{v}_{S2} = (-\vec{i} - 5\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$k = 0,8$$

$$\Delta t_{01} = 0,4 \text{ s}$$

- Feladat
- $\vec{v}_{S1} = ?$, $\vec{v}_{S2} = ?$ (ütközés utáni sebességek $\rightarrow$ számít + szerkeszt)
 - $\Delta t_{12} = ?$ (kivágás időtartama)
 - $\vec{F}_{21}^{\text{max}} = ?$ (m_1 tömegre ható max erő)
 - $\vec{a}_{S1}^{\text{max}} = ?$ (m_1 tömeg max gyorsulása)
 - $F_{12}(t)$; $F_{21}(t)$ (ütközési erő diagramok)

d) ütközés utáni sebességek szerkesztéssel ($N_v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{=} 1 \text{ cm}$)



Statikai nyomatékok
egyensúlya:

$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\begin{array}{l} l = 9 \\ \Downarrow \\ l_1 = 9 \cdot \frac{1}{5} = 1,8 \\ l_2 = 9 \cdot \frac{4}{5} = 7,2 \end{array} \right)$$

A szerkesztés lépései

- ① O_V kezdőponttól felrajzoljuk az
 - $\vec{n}$ irtkörési normáliszt
 - $\vec{v}_{s1}, \vec{v}_{s2}$ irtkörös előtti sebességvektorkat
- ② $\vec{v}_{s1}, \vec{v}_{s2}$ végpontjaiban kezentől párhuzamos $\vec{n}$ -vel
- ③ $\vec{v}_{s1}, \vec{v}_{s2}$ végpontjaiba elhelyezzük az m_1, m_2 tömeget
összeadjuk a két pontot
Meghatározzuk az m_1, m_2 tömegpontrendszer súlypontját (S)
 $(m_1 l_1 = m_2 l_2)$
- ④ O_V -ből S pontba mutató vektor ($\vec{v}_S$) berajzolása
(ez a rendszer körös súlyponti sebessége)
- ⑤ S ponton kezentől merőleges $\vec{n}$ -re
 $\Rightarrow$ bejelöljük a $|\vec{v}_{s1n} - \vec{v}_{sn}|$ és $|\vec{v}_{s2n} - \vec{v}_{sn}|$ mennyiségeket
- ⑥ Ezeknek a mennyiségeknek a k - szorzatát felmérjük az S ponton át az irtkörési normálisra leírt merőleges egyenes ellenkező oldalára,
mert: $k \cdot |\vec{v}_{s1n} - \vec{v}_{sn}| = |\vec{v}_{s1n} - \vec{v}_{sn}|$
 $k \cdot |\vec{v}_{s2n} - \vec{v}_{sn}| = |\vec{v}_{s2n} - \vec{v}_{sn}|$
- ⑦ Berajzoljuk a $\vec{v}_{s1}$ és $\vec{v}_{s2}$ sebességvektorkat

Ellenőrzés:

A $\vec{v}_{s1}$ és $\vec{v}_{s2}$ irtkörös utáni sebességvektorkok végpontjait összekötő egyenesnek át kell mennie az S ponton.

Ütközés utáni sebességek számítása:

① Közös súlyponti sebesség:

$$m_1 \vec{v}_{s1} + m_2 \vec{v}_{s2} = (m_1 + m_2) \vec{v}_s$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_s &= \frac{m_1 \vec{v}_{s1} + m_2 \vec{v}_{s2}}{m_1 + m_2} = \frac{4 \cdot (3\vec{i} + 4\vec{j}) + 1 \cdot (-\vec{i} - 5\vec{j})}{4 + 1} = \\ &= \frac{12\vec{i} + 16\vec{j} - \vec{i} - 5\vec{j}}{5} = \frac{11\vec{i} + 11\vec{j}}{5} = (2,2\vec{i} + 2,2\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

$$v_{sn} = \vec{v}_s \cdot \vec{n} = \vec{v}_s \cdot \vec{i} = (2,2\vec{i} + 2,2\vec{j}) \cdot \vec{i} = 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

② Ütközés utáni normális irányú sebességek:

$$\begin{aligned} v_{s1n} - v_{sn} &= -k \cdot (v_{s1n} - v_{sn}) \\ \Downarrow \\ v_{s1n} &= v_{sn} - k \cdot (v_{s1n} - v_{sn}) = \\ &= 2,2 - 0,8 \cdot (3 - 2,2) = \\ &= 1,56 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} v_{s2n} - v_{sn} &= -k \cdot (v_{s2n} - v_{sn}) \\ v_{s2n} &= v_{sn} - k \cdot (v_{s2n} - v_{sn}) = \\ &= 2,2 - 0,8 \cdot (-1 - 2,2) = \\ &= 4,76 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \right.$$

③ Ütközés utáni sebességek:

$$v_{s1} = (1,56\vec{i} + 4\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}} ; \quad v_{s2} = (4,76\vec{i} - 5\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Kirugózás időtartama:

$$k = \frac{\Delta t_{01}}{\Delta t_{12}} \Rightarrow \Delta t_{12} = k \cdot \Delta t_{01} = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32 \text{ s}$$

c) m_1 tömegre ható maximális erő értéke

→ impulzus tétel integrál alak:

$$\vec{I}_1 - \vec{I}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{21} dt \quad \text{①} = \frac{F_{21}^{\max} \Delta t_{01}}{2}$$

$$m_1 v_{s1n} \vec{n} - m_1 v_{s1n} \vec{n} = - \int_{t_0}^{t_1} F_{21} dt \vec{n} \quad / \cdot \vec{n}$$

$$m_1 v_{s1n} - m_1 v_{s1n} = - \frac{F_{21}^{\max} \Delta t_{01}}{2}$$

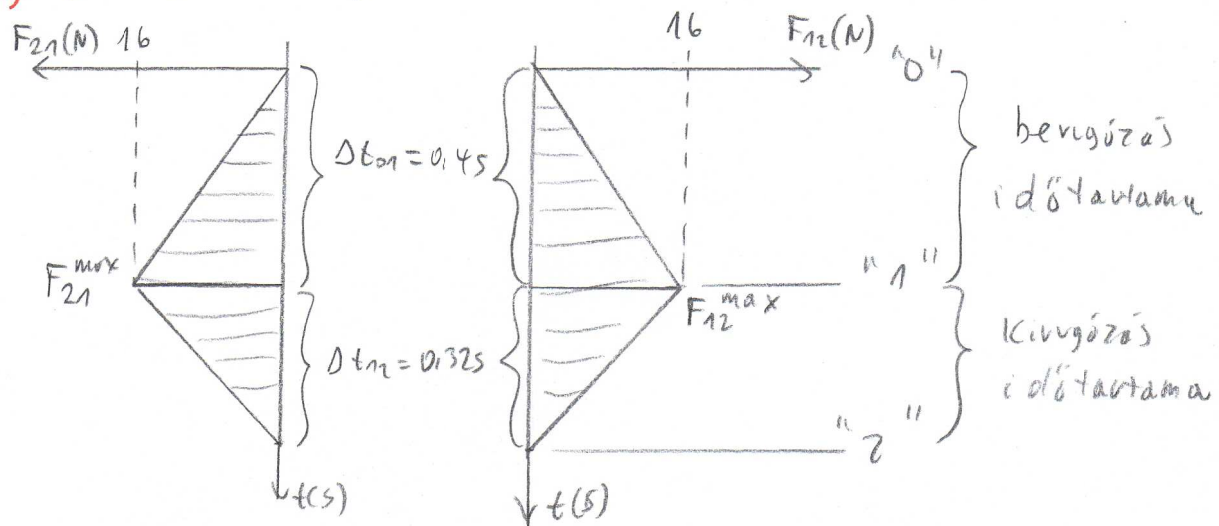
$$F_{21}^{\max} = \frac{-2 m_1 (v_{s1n} - v_{s1n})}{\Delta t_{01}} = \frac{-2 \cdot 4 \cdot (2,2 - 3)}{0,4} = 16 \text{ N} (\leftarrow)$$

$$\vec{F}_{21}^{\max} = (-16\vec{i}) \text{ N}$$

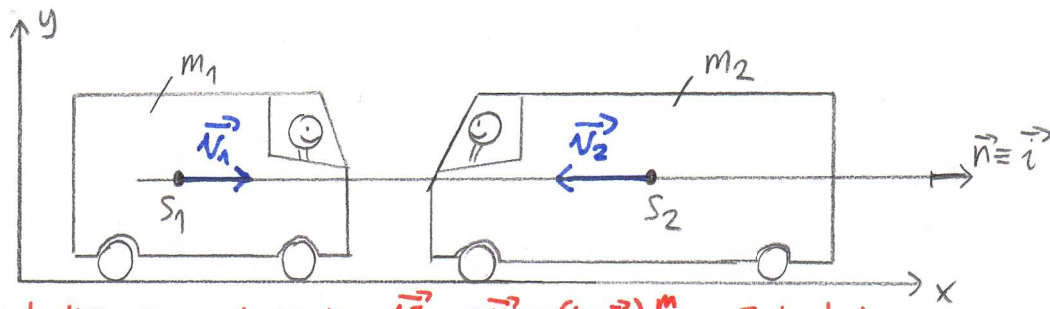
d) m_1 tömeg maximális gyorsulása $\rightarrow$ impulzus tétel

$$\vec{F}_{21}^{\max} = m_1 \vec{a}_{s1}^{\max} \Rightarrow \vec{a}_{s1}^{\max} = \frac{\vec{F}_{21}^{\max}}{m_1} = \frac{(-16\vec{i})}{4\text{kg}} = (-4\vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

e) ütközési erő diagram:



EGYENES ÜTKÖZÉS



• adott: $m_1 = 1000 \text{ kg}$; $\vec{v}_{s1n} = \vec{v}_1 = (10\vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ • Feladat

$m_2 = 4000 \text{ kg}$; $\vec{v}_{s2n} = \vec{v}_2 = (-5\vec{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$

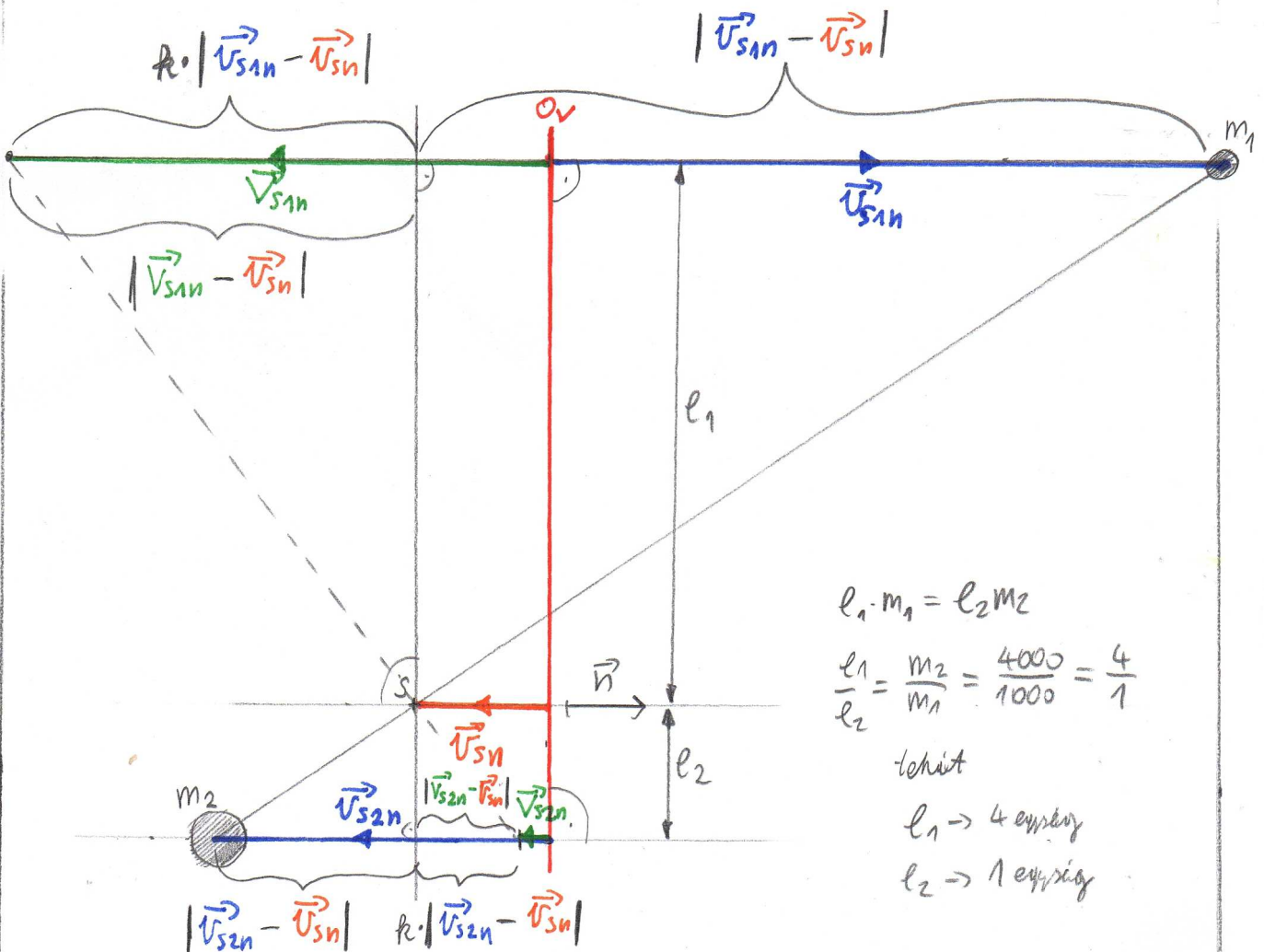
$e = 0,5$; $\Delta t_{01} = 1 \text{ s}$

$m_{e1} = m_{e2} = 100 \text{ kg}$

a) $\vec{v}_1 = ?$, $\vec{v}_2 = ? \Rightarrow$ szerkesztés + számítás

b) $\vec{F}_{e1} = ?$, $\vec{F}_{e2} = ? \Rightarrow$ sofüvökre ható ^{max} terhelés ütközéskor

a) Ütközés utáni sebességek szerkesztéssel:



számítások:

• a közös súlyponti sebesség:

$$m_1 \vec{v}_{s1} + m_2 \vec{v}_{s2} = (m_1 + m_2) \vec{v}_s$$

$$\vec{v}_s = \frac{m_1 \vec{v}_{s1} + m_2 \vec{v}_{s2}}{m_1 + m_2} = \frac{1000 \cdot 10 \vec{i} + 4000 \cdot (-5 \vec{i})}{1000 + 4000} = (-2 \vec{i}) \frac{m}{s}$$

$$v_{sn} = -2 \frac{m}{s} = \vec{v}_{sn} \cdot \vec{n} = \vec{v}_s \cdot \vec{i}$$

• az ütközés utáni sebességek:

$$v_{s1n} - v_{sn} = -k \cdot (v_{s1n} - v_{sn})$$

$$\rightarrow v_{s1n} = v_{sn} - k \cdot (v_{s1n} - v_{sn}) = -2 - 0,5 \cdot (10 - (-2)) = -8 \frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_1 = v_{s1n} \vec{n} = v_{s1n} \vec{i} = (-8 \vec{i}) \frac{m}{s}$$

$$v_{s2n} - v_{sn} = -k \cdot (v_{s2n} - v_{sn})$$

$$\rightarrow v_{s2n} = v_{sn} - k \cdot (v_{s2n} - v_{sn}) = -2 - 0,5 \cdot (-5 - (-2)) = -0,5 \frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_2 = v_{s2n} \vec{n} = v_{s2n} \vec{i} = (-0,5 \vec{i}) \frac{m}{s}$$

b) 1. test impulzusváltozása a leengedés időtartama alatt:

$$m_1 \vec{v}_{s1} - m_1 \vec{v}_{s1n} = \int_{t_0}^{t_1} F_{21}(t) dt \vec{i} = - \frac{F_{21}^{max} \Delta t_{on}}{2} \vec{i}$$

$$1000 \cdot (-2 \vec{i}) - 1000 \cdot (10 \vec{i}) = - \frac{F_{21}^{max} \cdot 1}{2} \vec{i} \quad / \cdot \vec{i}$$

$$2 \cdot (-2000 - 10000) = - F_{21}^{max}$$

$$F_{21}^{max} = 24000 \text{ N } (\leftarrow)$$

$$\vec{F}_{21}^{max} = (-24000 \vec{i}) \text{ N} \quad \vec{F}_{12}^{max} = -\vec{F}_{21}^{max} = (24000 \vec{i}) \text{ N}$$

a járművek maximális gyorsulásai:

$$\vec{F}_{21}^{max} = m_1 \vec{a}_1^{max} \Rightarrow \vec{a}_1^{max} = \frac{\vec{F}_{21}^{max}}{m_1} = \frac{-24000 \vec{i}}{1000} = (-24 \vec{i}) \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{F}_{12}^{max} = m_2 \vec{a}_2^{max} \Rightarrow \vec{a}_2^{max} = \frac{\vec{F}_{12}^{max}}{m_2} = \frac{24000 \vec{i}}{4000} = (6 \vec{i}) \frac{m}{s^2}$$

a szerkezetek ható lehetetlenségi erői:

