

TÖBBSZADAJÁGFOKÚ REZGŐRENDSZER MOZGÁSEGYENLETÉNEK MEGOLDÁSA

• a megoldandó mozgásegyenlet:

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}} + \underline{D} \dot{\underline{q}} + \underline{K} \underline{q} = \underline{Q} \underline{q}$$

• megoldási módszerek:

1) NUMERIKUS (direkt integrálás) módszerek

- a mozgásegyenletet numerikus időléptetéses eljárással integráljuk
- a $q(t)$ függvény helyett diszkrét időpillanatokban vett $q(t_1), q(t_2) \dots$ értékeket határozzuk meg
- számos eljárás létezik pl:
 - Euler módszer
 - Runge-Kutta módszer
 - Newmark módszer
 - BDF módszer

2) ANALITIKUS (modális szuperpozíciós) eljárás csillapítás nélküli esetben a megoldás menete:

1. Az eredeti (Fizikai térben felírt) mozgásegyenletet a modális mátrix segítségével a modális térbe transe formáljuk
 $\rightarrow$ itt $\underline{M}$ és $\underline{K}$ diagonálisak $\rightarrow$ n DOF-os rendszer esetén n db független egyenlet lesz
2. Az n db független egyenletet megoldjuk a modális térben $\Rightarrow$ modális koordináták
3. A modális koordinátákat vissza transe formáljuk Fizikai térbe

4-edrendű Runge-Kutta módszer:

adott: a mozgásegyenlet: $\underline{M} \ddot{\underline{q}} + \underline{D} \dot{\underline{q}} + \underline{K} \underline{q} = \underline{Qq}$

a kezdeti feltételek: $\underline{q}(t_0) = \underline{q}_0$; $\underline{v}(t_0) = \underline{v}_0$

A másodrendű differenciáegyenletet átalakítjuk 2db elsőrendű differenciáegyenletté:

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}} + \underline{D} \dot{\underline{q}} + \underline{K} \underline{q} = \underline{Qq} \quad / \cdot \underline{M}^{-1}$$

$$\ddot{\underline{q}} + \underline{M}^{-1} \underline{D} \dot{\underline{q}} + \underline{M}^{-1} \underline{K} \underline{q} = \underline{M}^{-1} \underline{Qq}$$

$$1) \dot{\underline{q}} = \underline{v}$$

$$\dot{\underline{v}} + \underline{M}^{-1} \underline{D} \underline{v} + \underline{M}^{-1} \underline{K} \underline{q} = \underline{M}^{-1} \underline{Qq}$$

$$2) \dot{\underline{v}} = \underline{M}^{-1} \underline{Qq} - \underline{M}^{-1} \underline{K} \underline{q} - \underline{M}^{-1} \underline{D} \underline{v}$$

becslések $d\underline{q}$ -ra:

$$① d\underline{q}_1 = dt \cdot \underline{v}_0$$

$$③ d\underline{q}_2 = dt \cdot \left(\underline{v}_0 + \frac{1}{2} d\underline{v}_1 \right)$$

$$⑤ d\underline{q}_3 = dt \cdot \left(\underline{v}_0 + \frac{1}{2} d\underline{v}_2 \right)$$

$$⑦ d\underline{q}_4 = dt \cdot \left(\underline{v}_0 + d\underline{v}_3 \right)$$

a becslések súlyozott átlaga:

$$d\underline{q} = \frac{d\underline{q}_1 + 2d\underline{q}_2 + 2d\underline{q}_3 + d\underline{q}_4}{6}$$

a $t_0 + dt$ időpontban $\underline{q}$ közelítő értéke:

$$\underline{q}(t_0 + dt) = \underline{q}_0 + d\underline{q}$$

becslések $d\underline{v}$ -re:

$$② d\underline{v}_1 = dt \cdot \dot{\underline{v}}(t_0, \underline{q}_0, \underline{v}_0)$$

$$④ d\underline{v}_2 = dt \cdot \dot{\underline{v}}\left(t_0 + \frac{dt}{2}, \underline{q}_0 + \frac{1}{2} d\underline{q}_1, \underline{v}_0 + \frac{1}{2} d\underline{v}_1\right)$$

$$⑥ d\underline{v}_3 = dt \cdot \dot{\underline{v}}\left(t_0 + \frac{dt}{2}, \underline{q}_0 + \frac{1}{2} d\underline{q}_2, \underline{v}_0 + \frac{1}{2} d\underline{v}_2\right)$$

$$⑧ d\underline{v}_4 = dt \cdot \dot{\underline{v}}(t_0 + dt, \underline{q}_0 + d\underline{q}_3, \underline{v}_0 + d\underline{v}_3)$$

a becslések súlyozott átlaga:

$$d\underline{v} = \frac{d\underline{v}_1 + 2d\underline{v}_2 + 2d\underline{v}_3 + d\underline{v}_4}{6}$$

a $t_0 + dt$ időpontban $\underline{v}$ közelítő értéke:

$$\underline{v}(t_0 + dt) = \underline{v}_0 + d\underline{v}$$

Konzervatív MDUF EOM megoldása:

adott: $\underline{M} \ddot{\underline{q}} + \underline{K} \underline{q} = \underline{F}$

① a modálmátrix meghatározása:

1. módszer

- megfelelő transzformációval láncszerűvé alakítjuk a rezgőrendszert

- felírjuk a láncszerű modell karakterisztikus egyenletét

SAJÁT KÖRFREKVIK

- grafikusán meghatározzuk a rezgéseképeket

MODÁLVEKTOROK VIZSGA

$\underline{Q}$ MODÁLMÁTRIX

2. módszer

- Megoldjuk a

$$(\underline{K} - \omega_i^2 \underline{M}) \underline{q}_{oi} = \underline{0}$$

általánosított sajátérték feladatot

$\omega_i^2 \rightarrow$ sajátértékek

$\omega_i \rightarrow$ SAJÁT KÖRFREKVIK

$\underline{q}_{oi} \rightarrow$ sajátvektorok (MODÁLVEKTOROK)

$\underline{Q}$ MODÁLMÁTRIX

② A modálvektorokat tömegre normáljuk:

minden $\underline{q}_{oi}$ modálvektort szorzunk egy $C = \frac{1}{\sqrt{\underline{q}_{oi}^T \underline{M} \underline{q}_{oi}}}$

modális tényezővel $\Rightarrow$ tömegre normált modálvektorok $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{Q}_n$ TÖMEGRE NORMÁLT MODÁLMÁTRIX

③ $\underline{Q}_n$ segítségével a modális térbe transzformáljuk az egyenletet

$$\underbrace{\underline{Q}_n^T \underline{M} \underline{Q}_n}_{\underline{M}_m = \underline{E}} \underbrace{\underline{Q}_n^T \ddot{\underline{q}}}_{\ddot{\underline{q}}_m} + \underbrace{\underline{Q}_n^T \underline{K} \underline{Q}_n}_{\underline{K}_m = \underline{\Delta}} \underbrace{\underline{Q}_n^{-T} \underline{q}}_{\underline{q}_m} = \underbrace{\underline{Q}_n^T \underline{F}}_{\underline{F}_m}$$

tehát a modális térben a mozgásegyenlet:

$$\underline{E} \ddot{\underline{q}}_m + \underline{\Delta} \underline{q}_m = \underline{F}_m$$

$$\underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

$\underline{E}$ és $\underline{\Delta}$ diagonális $\Rightarrow$ az egyenletek függetlenek!

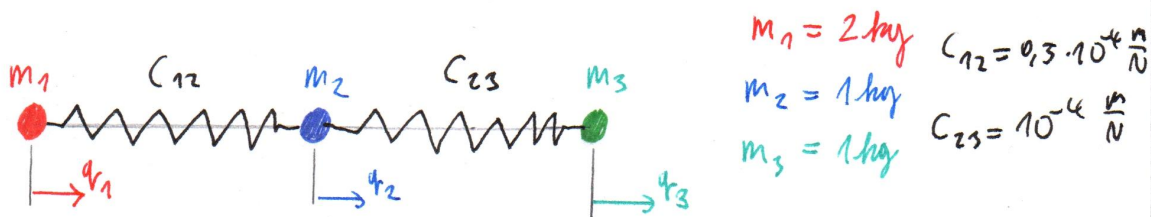
④ megoldjuk a módúlis térben felírt független egyenleteket

$\Rightarrow \underline{q}_m$ módúlis elmozdulásvektor

⑤ a módúlis elmozdulásvektorokat visszatranszformáljuk a fizikai térbe $\Rightarrow$ tényleges (fizikai) elmozdulásvektor

$$\underline{q} = \underline{Q}_n \underline{q}_m$$

NEM KÖTÖTT LÁNCszerű rezgőrendszer



$$|\underline{K} - \mathcal{L}^2 \underline{M}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{c_{12}} & -\frac{1}{c_{12}} & 0 \\ -\frac{1}{c_{12}} & \frac{1}{c_{12}} + \frac{1}{c_{23}} & -\frac{1}{c_{23}} \\ 0 & -\frac{1}{c_{23}} & \frac{1}{c_{23}} \end{vmatrix} - \mathcal{L}^2 \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$

⇓

- A karakterisztikus egyenlet:

$$m_1 c_{12} m_2 c_{23} m_3 (\mathcal{L}^2)^3 - [m_1 c_{12} m_2 + m_1 (c_{12} + c_{23}) m_3 + m_2 c_{23} m_3] (\mathcal{L}^2)^2 + (m_1 + m_2 + m_3) \mathcal{L}^2 = 0$$

- Az együtthatók:

$$m_1 c_{12} m_2 c_{23} m_3 = 2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 10^{-8}$$

$$m_1 c_{12} m_2 + m_1 (c_{12} + c_{23}) m_3 + m_2 c_{23} m_3 = 2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} \cdot 1 + 2 \cdot (0.5 \cdot 10^{-4} + 10^{-4}) \cdot 1 + 1 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 5 \cdot 10^{-4}$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = 2 + 1 + 1 = 4$$

- behelyettesítve

$$10^{-8} (\mathcal{L}^2)^3 - 5 \cdot 10^{-4} (\mathcal{L}^2)^2 + 4 \mathcal{L}^2 = 0$$

$$\mathcal{L}^2 [10^{-8} (\mathcal{L}^2)^2 - 5 \cdot 10^{-4} \mathcal{L}^2 + 4] = 0$$

⇓

$$\mathcal{L}^2 = 0$$

⇓

$$\mathcal{L} = 0$$

$$\mathcal{L}^2 = \frac{5 \cdot 10^{-4} \pm \sqrt{(5 \cdot 10^{-4})^2 - 4 \cdot 10^{-8} \cdot 4}}{2 \cdot 10^{-8}} = \frac{4 \cdot 10^4}{10^4}$$

- a saját kör Frekik:

$$\omega_1 = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{10^4} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_3 = \sqrt{4 \cdot 10^4} = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

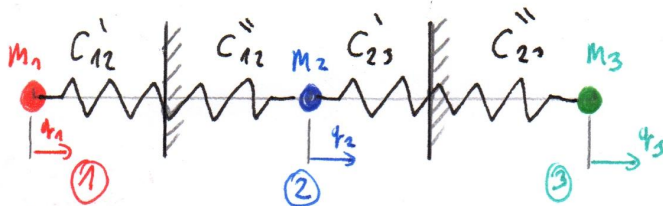
- rezgésképek meghatározása:

1. rezgéskép: $\omega_1 = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ -hoz tartozó rezgéskép

→ megrekesztett haladó mozgás → nincs rezgés

az 1. módálvektor: $q_{01} = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

• 2. és 3. rezgéskép $\Rightarrow$ felbontás 3db SDOF rendszerre



2. rezgéskép: $\omega_2 = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ -hoz tartozó rezgéskép

① SDOF RENDSZER

$$\omega_2^2 = \frac{1}{m_1 c_{12}} \Rightarrow c_{12} = \frac{1}{m_1 \omega_2^2} = \frac{1}{2 \cdot 10^4} = 0,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

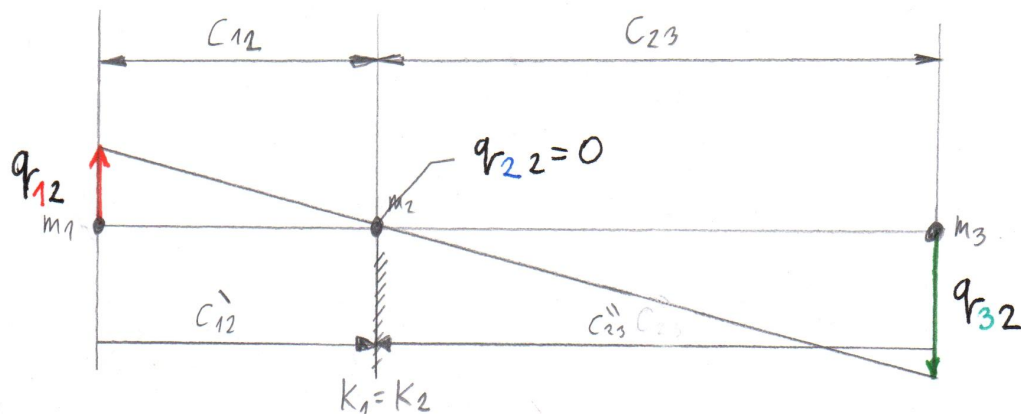
③ SDOF RENDSZER

$$\omega_2^2 = \frac{1}{m_3 c_{23}} \Rightarrow c_{23} = \frac{1}{m_3 \omega_2^2} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

② SDOF RENDSZER

$$c_{12}'' = c_{12} - c_{12} = 0,5 \cdot 10^{-4} - 0,5 \cdot 10^{-4} = 0 \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

$$c_{23}' = c_{23} - c_{23} = 10^{-4} - 10^{-4} = 0 \frac{\text{m}}{\text{N}}$$



az ábrán alapján:

$$\frac{q_{12}}{C'_{12}} = -\frac{q_{32}}{C''_{23}} \Rightarrow q_{32} = -\frac{C'_{12}}{C''_{23}} q_{12} = -\frac{0,125 \cdot 10^4}{0,25 \cdot 10^4} q_{12} = -0,5 q_{12}$$

legyen $q_{12} = 1 \Rightarrow q_{12} = 1$; $q_{22} = 0$

a 2. módálvektor: $\underline{q}_{02} = \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0,5 \end{bmatrix}$

3. rezgőkép $\Delta_3 = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ - hoz tartozó rezgőkép

① SDOF rendszer:

$$\Delta_3^2 = \frac{1}{m_1 C'_{12}} \Rightarrow C'_{12} = \frac{1}{m_1 \Delta_3^2} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^4} = 0,125 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

③ SDOF rendszer:

$$\Delta_3^2 = \frac{1}{m_3 C''_{23}} \Rightarrow C''_{23} = \frac{1}{m_3 \Delta_3^2} = \frac{1}{1 \cdot 4 \cdot 10^4} = 0,25 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

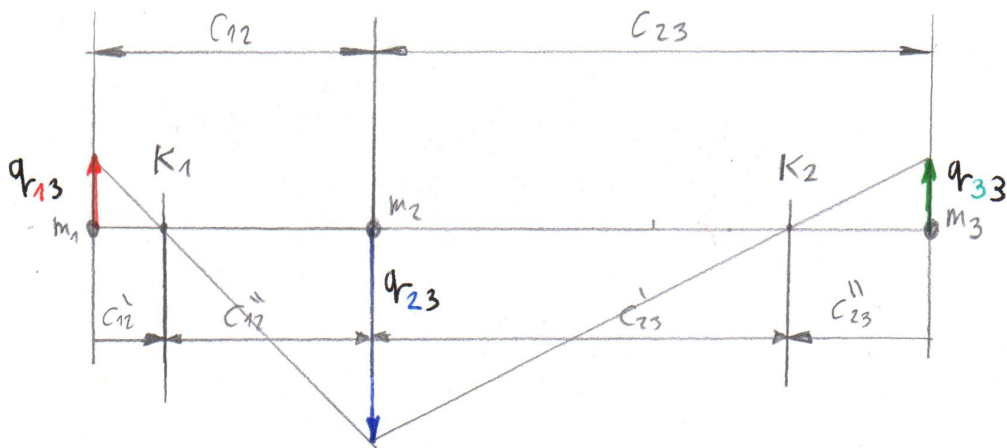
② SDOF rendszer:

$$C'_{12} = C_{12} - C'_{12} = 0,5 \cdot 10^4 - 0,125 \cdot 10^4 = 0,375 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$C'_{23} = C_{23} - C''_{23} = 1 \cdot 10^4 - 0,25 \cdot 10^4 = 0,75 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

ellenőrzés:

$$\begin{aligned} \zeta_3^2 &= \frac{1}{m_2 C_r} = \frac{1}{m_2 \left(\frac{1}{C_{12}''} + \frac{1}{C_{23}'} \right)^{-1}} = \frac{1}{m_2} \left(\frac{1}{C_{12}''} + \frac{1}{C_{23}'} \right) = \\ &= \frac{1}{m_2 C_{12}''} + \frac{1}{m_2 C_{23}'} = \frac{C_{23}' + C_{12}''}{m_2 C_{12}'' C_{23}'} = \frac{0,75 \cdot 10^{-4} + 0,375 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 0,75 \cdot 10^{-4} \cdot 0,375 \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^4 \frac{1}{s^2} \quad \checkmark \end{aligned}$$



az ábra alapján:

$$\frac{q_{13}}{C_{12}'} = - \frac{q_{23}}{C_{12}''} \Rightarrow q_{13} = - \frac{C_{12}'}{C_{12}''} q_{23} = - \frac{0,125}{0,375} q_{23} = - \frac{1}{3} q_{23}$$

$$\frac{q_{33}}{C_{23}''} = - \frac{q_{23}}{C_{23}'} \Rightarrow q_{33} = - \frac{C_{23}'}{C_{23}''} q_{23} = - \frac{0,25}{0,75} q_{23} = - \frac{1}{3} q_{23}$$

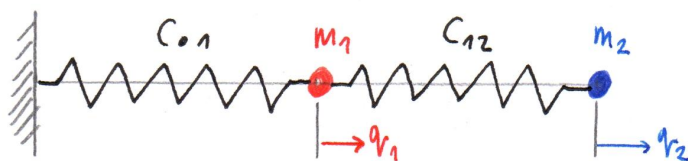
legyen $q_{23} = -3 \Rightarrow q_{13} = 1$

$q_{33} = 1$

a 3. módúvektor: $\underline{q}_{03} = \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

a módúmátrix: $\underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{q}_{01} & \underline{q}_{02} & \underline{q}_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

EGYIK OLDALON KÖTÖTT LÁNC SZERŰ RÉZGŐRENDSZER



$$m_1 = 2 \text{ kg}$$

$$m_2 = 1 \text{ kg}$$

$$c_{01} = 10^{-4} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$c_{12} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$|\underline{K} - \omega^2 \underline{M}| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \frac{1}{c_{01}} + \frac{1}{c_{12}} & -\frac{1}{c_{12}} \\ -\frac{1}{c_{12}} & \frac{1}{c_{12}} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

⇓

• A karakterisztikus egyenlet:

$$c_{01} m_1 c_{12} m_2 (\omega^2)^2 - [c_{01} m_1 + (c_{01} + c_{12}) m_2] (\omega^2) + 1 = 0$$

• Az együtthatók:

$$c_{01} m_1 c_{12} m_2 = 10^{-4} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 4 \cdot 10^{-8}$$

$$c_{01} m_1 + (c_{01} + c_{12}) m_2 = 10^{-4} \cdot 2 + (10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4}) \cdot 1 = 5 \cdot 10^{-4}$$

• behelyettesítve:

$$4 \cdot 10^{-8} (\omega^2)^2 - 5 \cdot 10^{-4} \omega^2 + 1 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{5 \cdot 10^{-4} \pm \sqrt{(5 \cdot 10^{-4})^2 - 4 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 1}}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-8}} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \pm 3 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= \begin{cases} 10^4 \\ 2500 \end{cases}$$

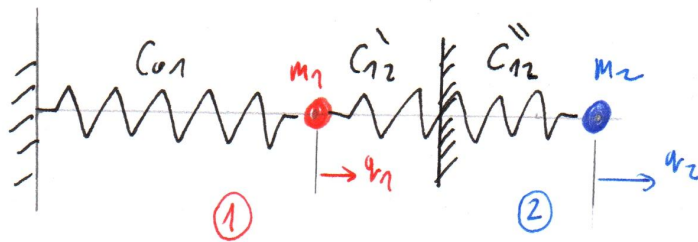
• a saját kör frekvenciák

$$\omega_1 = \sqrt{2500} = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{10^4} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

• rezgések meghatározása:

→ felbontás 2 db SDOF rendszerre



1. rezgéskép: $\omega_1 = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ -hoz tartozó rezgéskép

② SDOF RENDSZER:

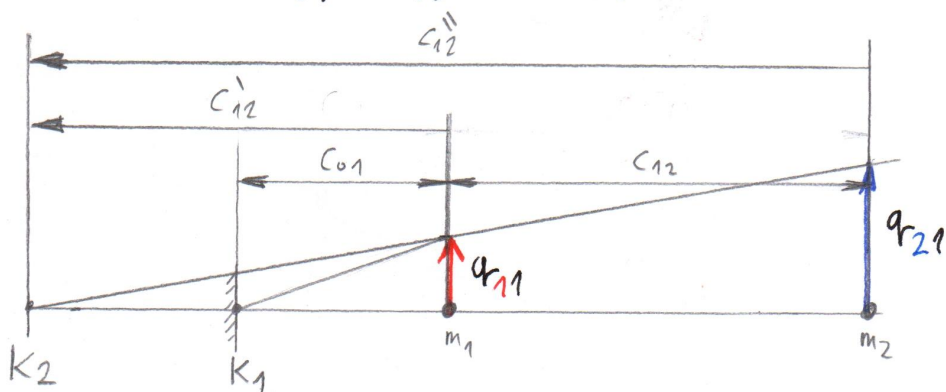
$$\omega_1^2 = \frac{1}{m_2 C_{12}''} \Rightarrow C_{12}' = \frac{1}{m_2 \omega_1^2} = \frac{1}{1 \cdot 50^2} = 4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

① SDOF RENDSZER:

$$C_{01} = 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{N}} \quad (\text{adott!})$$

$$C_{12}' = C_{12} - C_{12}'' = 2 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4} = -2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{N}} \quad \rightarrow \ominus \Rightarrow \text{virtuális csomópont}$$

$$\text{ellenőrzés: } \omega_1^2 = \frac{C_{01} + C_{12}'}{C_{01} m_1 C_{12}''} = \frac{10^{-4} + (-2 \cdot 10^{-4})}{10^{-4} \cdot 2 \cdot (-2 \cdot 10^{-4})} = 2500 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \quad \checkmark$$



az ábra alapján:

$$\frac{q_{11}}{C_{12}'} = -\frac{q_{21}}{C_{12}''} \Rightarrow q_{21} = -\frac{C_{12}'}{C_{12}''} q_{11} = -\frac{4 \cdot 10^{-4}}{-2 \cdot 10^{-4}} q_{11} = 2 q_{11}$$

$$\text{legyen } q_{11} = 1 \Rightarrow q_{21} = 2$$

$$\text{az 1. módusvektor: } \underline{q}_{01} = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. rezgőkép: $\lambda_2 = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ -hoz tartozó rezgőkép

② SDOF RENDSZER

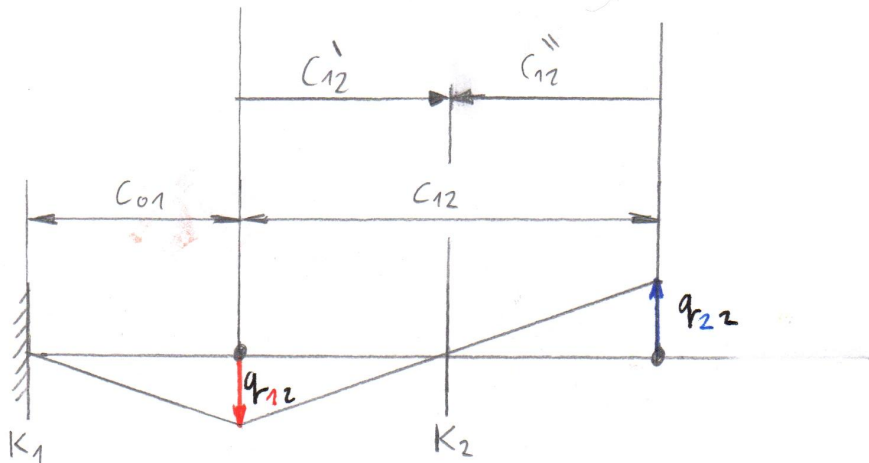
$$\lambda_2^2 = \frac{1}{m_2 c_{12}''} \Rightarrow c_{12}'' = \frac{1}{m_2 \lambda_2^2} = \frac{1}{1 \cdot 100^2} = 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

① SDOF RENDSZER

$$c_{01} = 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{N}} \quad (\text{adott})$$

$$c_{12}' = c_{12} - c_{12}'' = 2 \cdot 10^{-4} - 10^{-4} = 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

$$\text{ellenőrzés: } \lambda_2^2 = \frac{c_{01} + c_{12}'}{c_{01} m_1 c_{12}''} = \frac{10^{-4} + 10^{-4}}{10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 10^4 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \quad \checkmark$$

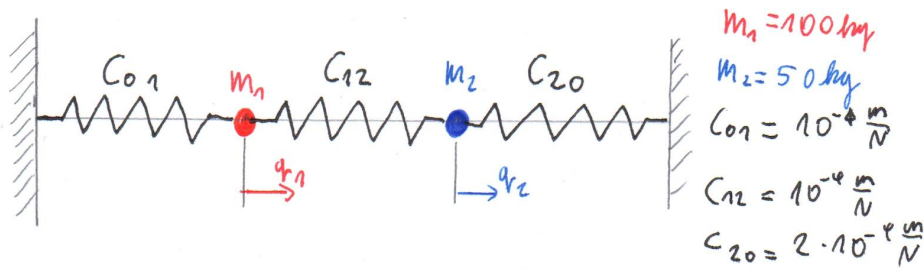


$$\begin{aligned} \text{ábra alapján: } \frac{q_{12}}{c_{12}'} &= - \frac{q_{22}}{c_{12}''} \Rightarrow q_{22} = - \frac{c_{12}''}{c_{12}'} q_{12} = \\ &= - \frac{10^{-4}}{10^{-4}} \cdot q_{12} = -q_{12} \end{aligned}$$

$$\text{legyen } q_{12} = 1 \Rightarrow q_{22} = -1 \Rightarrow \text{a 2. módálvektor: } \underline{q}_{02} = \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{a módálmátrix: } \underline{Q} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \underline{q}_{01} & \underline{q}_{02} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

MINDKÉT VÉGÉN KÖTÖTT LÁNCszerű REZGŐRENDSZER



$$|\underline{K} - \omega^2 \underline{M}| = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{1}{C_{01}} + \frac{1}{C_{12}} & -\frac{1}{C_{12}} \\ -\frac{1}{C_{12}} & \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{20}} \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{cc} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{array} \right] = 0$$

↓

• A karakterisztikus egyenlet:

$$C_{01} m_1 C_{12} m_2 C_{20} (\omega^2)^2 - [C_{01} m_1 (C_{12} + C_{20}) + (C_{01} + C_{12}) m_2 C_{20}] \omega^2 + (C_{01} + C_{12} + C_{20}) = 0$$

• Az együtthatók:

$$C_{01} m_1 C_{12} m_2 C_{20} = 10^{-4} \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 10^{-8}$$

$$C_{01} m_1 (C_{12} + C_{20}) + (C_{01} + C_{12}) m_2 C_{20} = 10^{-4} \cdot 100 \cdot (10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4}) + (10^{-4} + 10^{-4}) \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-6}$$

$$C_{01} + C_{12} + C_{20} = 10^{-4} + 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} = 4 \cdot 10^{-4}$$

• behelyettesítve:

$$10^{-8} (\omega^2)^2 - 5 \cdot 10^{-6} \omega^2 + 4 \cdot 10^{-4} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{5 \cdot 10^{-6} \pm \sqrt{(5 \cdot 10^{-6})^2 - 4 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}}{2 \cdot 10^{-8}} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \pm 3 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-8}} = \begin{cases} 400 \\ 100 \end{cases}$$

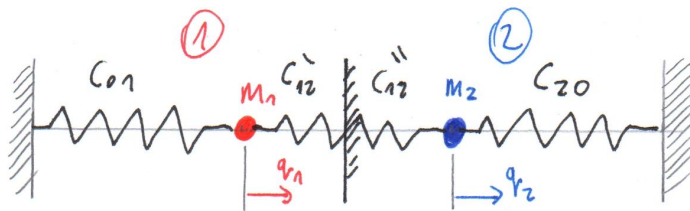
• a saját körfrekvenciák:

$$\omega_1 = \sqrt{100} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{400} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

• rezgésleírás meghatározása:

→ felbontás 2 db SDOF rezgőrendszerre



1. rezgésleírás: $\lambda_1 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ -hoz tartozó rezgésleírás

① SDOF RENDSZER

$$\lambda_1^2 = \frac{C_{01} + C_{12}}{C_{01} m_1 C_{12}}$$

$$\lambda_1^2 C_{01} m_1 C_{12} = C_{01} + C_{12}$$

$$\lambda_1^2 C_{01} m_1 C_{12} - C_{12} = C_{01}$$

$$C_{12} (\lambda_1^2 C_{01} m_1 - 1) = C_{01}$$

$$C_{12} = \frac{C_{01}}{\lambda_1^2 C_{01} m_1 - 1} = \frac{10^{-4}}{10^2 \cdot 10^{-3} \cdot 100 - 1}$$

$$\Rightarrow \infty$$

② SDOF RENDSZER

$$\lambda_1^2 = \frac{C_{12}'' + C_{20}}{C_{12}'' m_2 C_{20}}$$

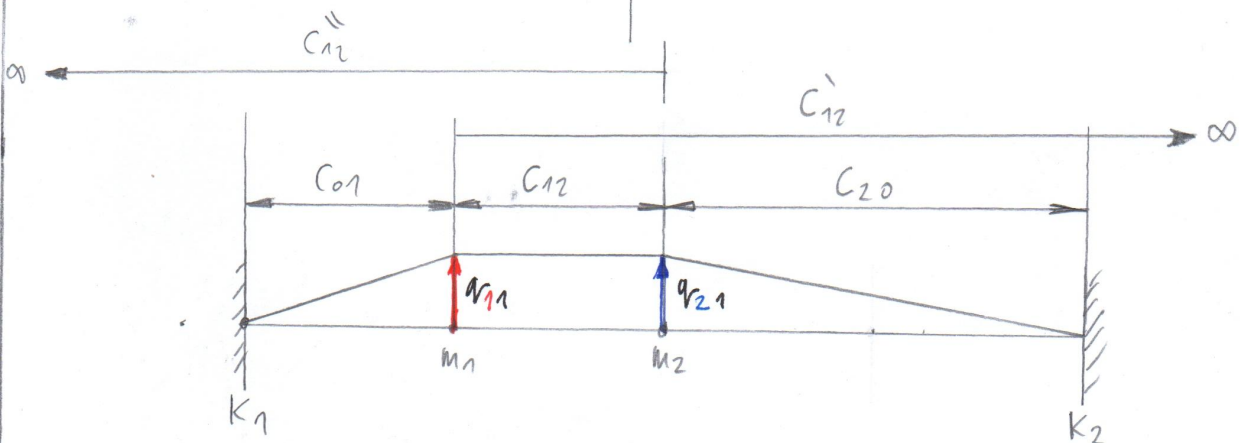
$$\lambda_1^2 C_{12}'' m_2 C_{20} = C_{12}'' + C_{20}$$

$$\lambda_1^2 C_{12}'' m_2 C_{20} - C_{12}'' = C_{20}$$

$$C_{12}'' (\lambda_1^2 m_2 C_{20} - 1) = C_{20}$$

$$C_{12}'' = \frac{C_{20}}{\lambda_1^2 m_2 C_{20} - 1} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^2 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-4} - 1}$$

$$\Rightarrow \infty$$



$$q_{11} = q_{21} \text{ legyen } q_{11} = 1 \Rightarrow q_{21} = 1$$

$$\text{az 1. módusvektor: } \underline{q}_{01} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. rezgőkép: $\omega_2 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ -hoz tartozó rezgőkép

① SDOF RENDSZER

$$\omega_2^2 = \frac{C_{01} + C_{12}'}{C_{01} m_1 C_{12}'}$$

$$\omega_2^2 C_{01} m_1 C_{12}' = C_{01} + C_{12}'$$

$$\omega_2^2 C_{01} m_1 C_{12}' - C_{12}' = C_{01}$$

$$C_{12}' (\omega_2^2 C_{01} m_1 - 1) = C_{01}$$

$$C_{12}' = \frac{C_{01}}{\omega_2^2 C_{01} m_1 - 1} = \frac{10^{-4}}{20^2 \cdot 10^{-4} \cdot 100 - 1}$$

$$= 3,3 \cdot 10^{-5} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$$

② SDOF RENDSZER

$$\omega_2^2 = \frac{C_{12}'' + C_{20}}{C_{12}'' m_2 C_{20}}$$

$$\omega_2^2 C_{12}'' m_2 C_{20} = C_{12}'' + C_{20}$$

$$\omega_2^2 C_{12}'' m_2 C_{20} - C_{12}'' = C_{20}$$

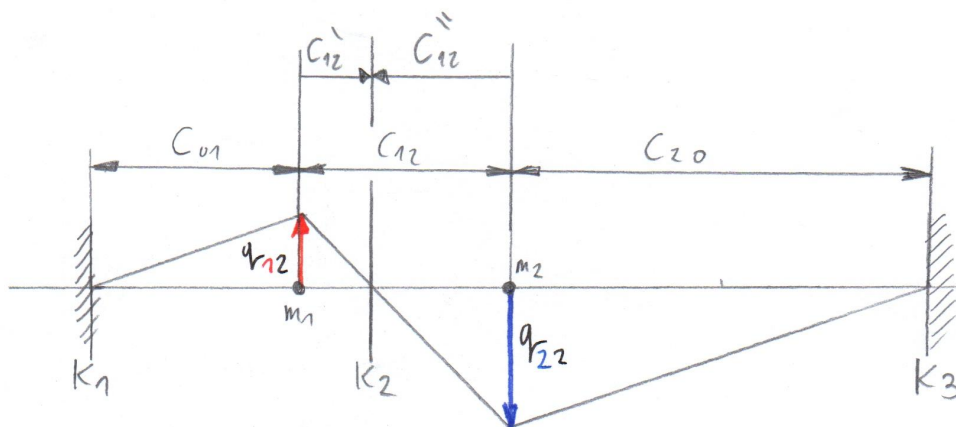
$$C_{12}'' (\omega_2^2 m_2 C_{20} - 1) = C_{20}$$

$$C_{12}'' = \frac{C_{20}}{\omega_2^2 m_2 C_{20} - 1} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{20^2 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-4} - 1}$$

$$= 6,6 \cdot 10^{-5} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-4}$$

ellenőrzés: $C_{12} = 10^{-4}$

$$C_{12}' + C_{12}'' = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4} + \frac{2}{3} \cdot 10^{-4} = 10^{-4} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{3} \cdot 10^{-4} + \frac{2}{3} \cdot 10^{-4} = 10^{-4}} \right\} C_{12} = C_{12}' + C_{12}'' \quad \checkmark$$



ábra alapján: $\frac{q_{12}}{C_{12}'} = - \frac{q_{22}}{C_{12}''} \Rightarrow q_{22} = - \frac{C_{12}''}{C_{12}'} q_{12} = - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} q_{12} = - 2 q_{12}$

legyen $q_{12} = 1 \Rightarrow q_{22} = -2$

a 2. módúvektor: $\underline{q}_{02} = \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

a módúmátrix: $\underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{q}_{01} & \underline{q}_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$