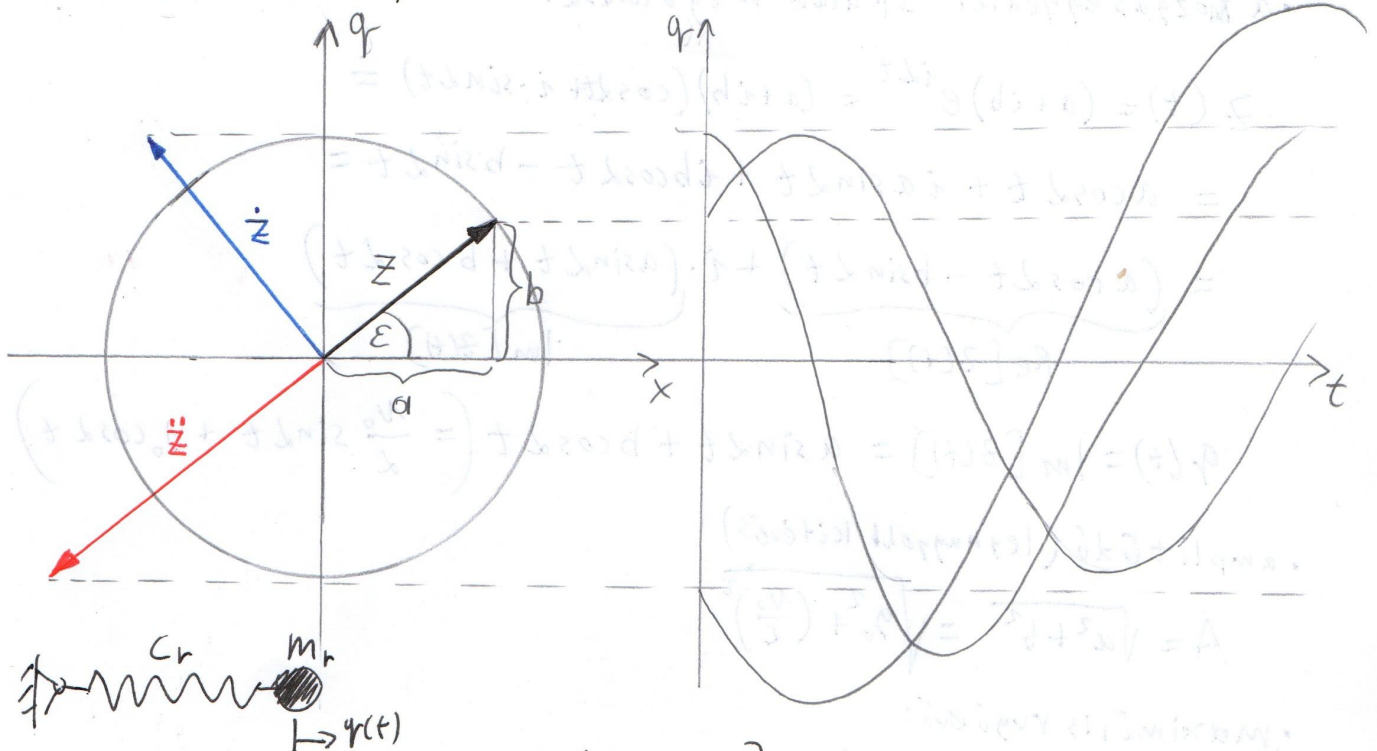


CSILLAPÍTATLAN, GERJESZTETLEN SDOF REZGŐRENDSZER



- a mozgásegyenlet: $m_r \ddot{z} + \frac{1}{c_r} \dot{z} = 0$

$$z(t) = x(t) + i q(t)$$

komplex amplitúdó ω ez forgatja a komplex amplitúdót

- megoldás:

$$z(t) = (a + ib) e^{i\omega t}$$

$$\dot{z}(t) = i\omega(a + ib) e^{i\omega t} = (-\omega b + i\omega a) e^{i\omega t} = \omega(-b + ia) e^{i\omega t}$$

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2(a + ib) e^{i\omega t}$$

ahol $\omega = \frac{1}{\sqrt{m_r c_r}} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ a rendszer körfrekvenciája

$f_\omega = \frac{\omega}{2\pi} \text{ [Hz]}$ a rendszer frekvenciája

$T = \frac{1}{f_\omega} \text{ [s]}$ a rendszer periódusideje (rezgésideje)

$a \neq b \Rightarrow$ kezdeti feltételekből számítható

• kezdeti kitérés: $q_0 = \text{Im}[z(0)] = b \Rightarrow b = q_0$

• kezdő sebesség: $v_0 = \text{Im}[\dot{z}(0)] = \omega a \Rightarrow a = \frac{v_0}{\omega}$

• a mozgás egyenlet skálár megoldása:

$$\begin{aligned} z(t) &= (a+ib)e^{i\omega t} = (a+ib)(\cos \omega t + i \sin \omega t) = \\ &= a \cos \omega t + i a \sin \omega t + i b \cos \omega t - b \sin \omega t = \\ &= \underbrace{(a \cos \omega t - b \sin \omega t)}_{\text{Re}[z(t)]} + i \cdot \underbrace{(a \sin \omega t + b \cos \omega t)}_{\text{Im}[z(t)]} \end{aligned}$$

$$q(t) = \text{Im}[z(t)] = a \sin \omega t + b \cos \omega t \left(= \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + y_0 \cos \omega t \right)$$

• amplitúdó (legnagyobb kitérés)

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

• maximális rugóerő:

$$F_{\text{max}} = \frac{y_{\text{max}}}{c_r} = \frac{A}{c_r}$$

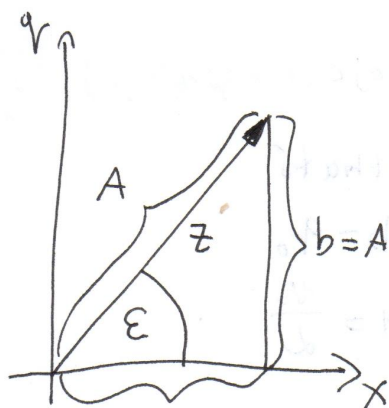
• legnagyobb sebesség:

$$v_{\text{max}} = \omega \cdot A$$

• legnagyobb gyorsulás:

$$a_{\text{max}} = \omega^2 \cdot A$$

MOZGÁSEGYENLET SKÁLÁR MEGOLDÁSA MÁSIC ALAKBAN:



$$a = A \cos \epsilon$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \epsilon = \arctan \frac{b}{a}$$

$$q(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t =$$

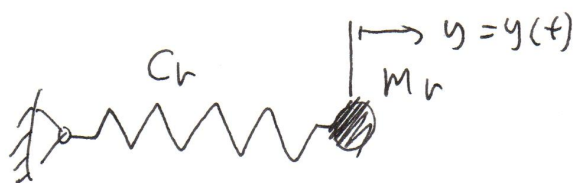
$$= \underbrace{A \cos \epsilon}_{a} \sin \omega t + \underbrace{A \sin \epsilon}_{b} \cos \omega t =$$

$$= A (\cos \epsilon \sin \omega t + \sin \epsilon \cos \omega t) = *$$

$$= A (\sin \omega t + \epsilon)$$

* Adalációs tétel:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$



$$C_r = 2,5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Nm}}{\text{m}}$$

$$m_r = 42 \text{ kg}$$

$$y_0 = 10 \text{ mm}$$

$$v_0 = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A RÉZGŐRENDSZER JELLEMZŐI:

- A rendszer kör frekvenciája:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m_r C_r}} = \frac{1}{\sqrt{42 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}}} = 30,86 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$\approx \frac{\text{m}}{\text{s}}!$

- A rendszer frekvencie:

$$f_\omega = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{30,86}{2\pi} = 4,91 \text{ Hz}$$

- A rendszer periódusideje (rezgés ideje)

$$T_\omega = \frac{1}{f_\omega} = \frac{1}{4,91} = 0,204 \text{ s}$$

A MOZGÁSEGYENLET

$$m_r \ddot{z} + \frac{1}{C_r} z = 0$$

$$z(t) = x(t) + i y(t)$$

a megoldás:

$$z(t) = A e^{i\omega t} = (a + ib) e^{i\omega t}$$

$$\dot{z}(t) = (a + ib) i\omega e^{i\omega t} = (-\omega b + i\omega a) e^{i\omega t} = \omega(-b + ia) e^{i\omega t}$$

$$\ddot{z}(t) = -(a + ib) \omega^2 e^{i\omega t}$$

a és b konstansok meghatározása a kezdeti feltételekből

$$z(t=0) = (a+ib) e^{i \cdot 0} = (a+ib)$$

$$y_0 = \operatorname{Im}[z(t=0)] = \operatorname{Im}[a+ib] = b$$

$$\Rightarrow b = y(0) = 10 \text{ mm}$$

$$\dot{z}(t=0) = (-\omega b + i\omega a) e^{i \cdot 0} = -\omega b + i\omega a$$

$$v_0 = \operatorname{Im}[\dot{z}(t=0)] = \operatorname{Im}[-\omega b + i\omega a] = \omega a$$

$$\Rightarrow a = \frac{v_0}{\omega} = \frac{200}{30,86} = 6,48 \text{ mm}$$

a, b, ω ismeretében a komplex (modulár) függvény

$$z(t) = (a+ib) e^{i\omega t} = (6,48 + i \cdot 10) e^{i 30,86 t} \text{ [mm]}$$

a komplex sebesség függvény:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (-\omega b + i\omega a) e^{i\omega t} = (-30,86 \cdot 10 + i \cdot 30,86 \cdot 6,48) e^{i 30,86 t} = \\ &= (-308,6 + i 199,7808) e^{i 30,86 t} \left[\frac{\text{mm}}{\text{s}} \right] \end{aligned}$$

a komplex gyorsulás függvény:

$$\begin{aligned} \ddot{z}(t) &= -(a+ib) \omega^2 e^{i\omega t} = -(6,48 + i \cdot 10) \cdot 30,86^2 e^{i 30,86 t} = \\ &= (-6177,16 - i 9527,396) e^{i 30,86 t} \end{aligned}$$

a mozgásegyenlet skulár megoldása:

$$\begin{aligned} z(t) &= (a+ib) e^{i\omega t} = (a+ib) (\cos \omega t + i \sin \omega t) = \\ &= a \cos \omega t + i a \sin \omega t + i b \cos \omega t - b \sin \omega t = \\ &= \underbrace{(a \cos \omega t - b \sin \omega t)}_{\operatorname{Re}[z(t)]} + i \cdot \underbrace{(a \sin \omega t + b \cos \omega t)}_{\operatorname{Im}[z(t)]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) = \operatorname{Im}[z(t)] &= a \sin \omega t + b \cos \omega t = 6,48 \sin 30,86 t + \\ &+ 10 \cos 30,86 t \text{ [mm]} \end{aligned}$$

a rezgés amplitúdójai:

$$y_{\text{max}} = A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0,4^2 + 1,0^2} = 1,077 \text{ mm}$$

mit x Sechseck:

$$V_{max} = d \cdot A = 30,86 \cdot 11,92 = 367,85 \frac{mm}{s}$$

max gyorsulás:

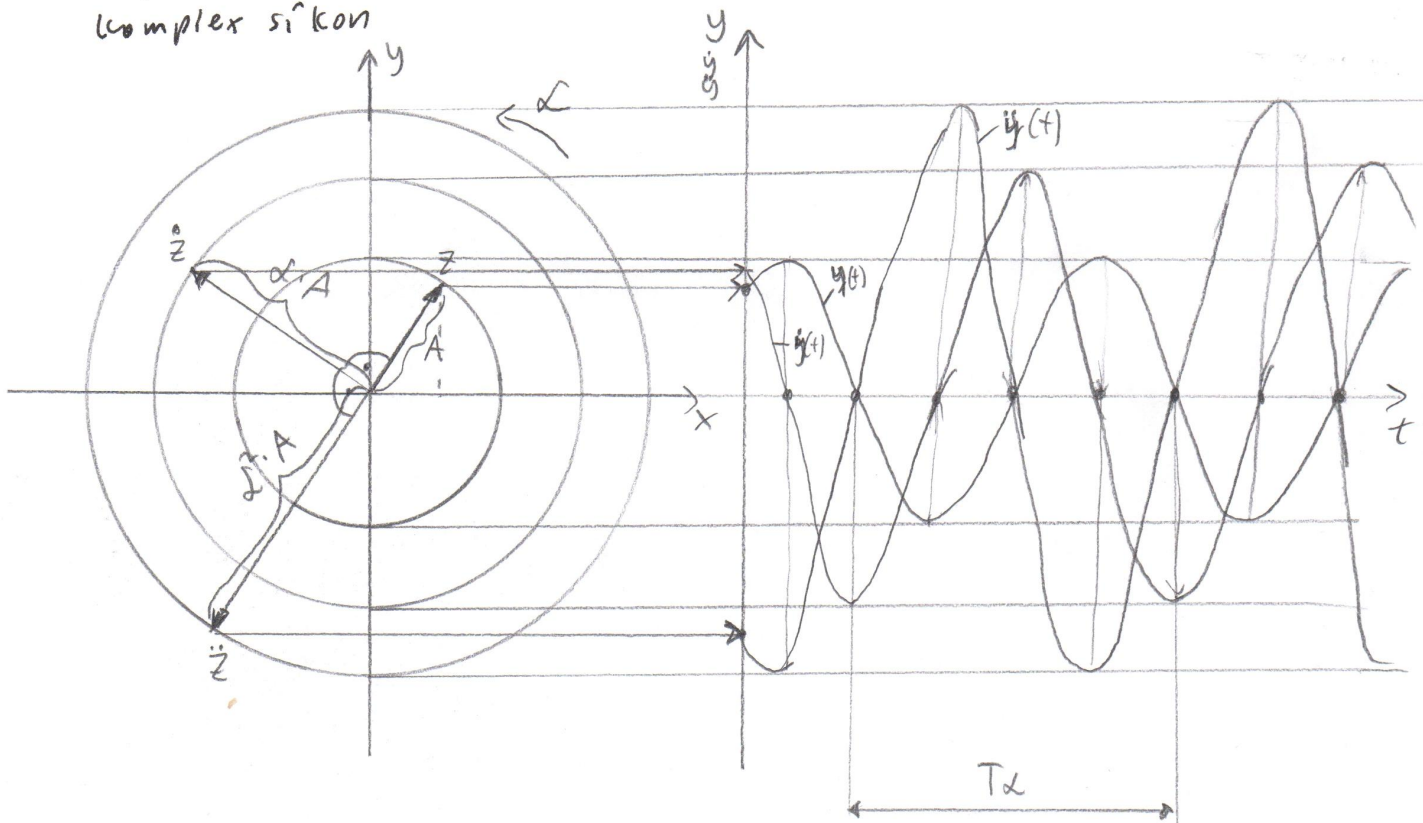
$$Q_{\max} = \lambda^2 \cdot A = 30,86^2 \cdot 11,92 = 11351,88 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

max rugóerő:

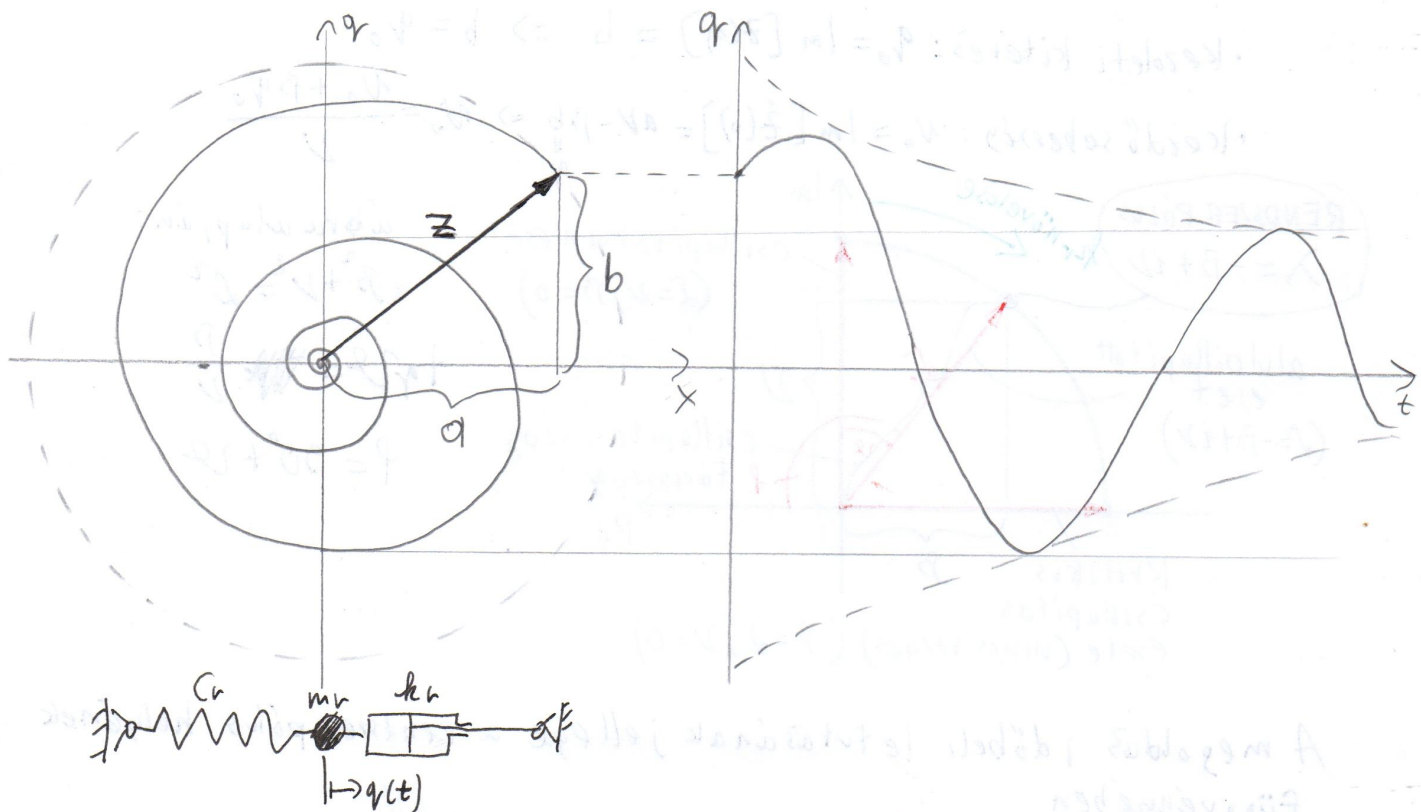
$$F_{\text{max}} = \frac{y_{\text{max}}}{C_r} = \frac{A}{C_r} = \frac{11.92}{25 \cdot 10^{-2}} = 476.8 \text{ N}$$

A KÉPZŐLÉSI ÉS FÜGGVÉNY ÉRTÉK

↓
komplex jellenzika
komplex sikon



CSILLAPÍTOTT GERJESZTETLEN SDOF REZGŐRENDSZER



- a mozgásegyenlet: $m_r \ddot{z} + k_r \dot{z} + \frac{1}{c_r} z = 0$ } ez csökkenő a komplex amplitúdó hosszát (ettől lesz csiga)

a megoldás:

$$z(t) = (a + ib) e^{(-\beta + i\nu)t} = \underbrace{(a + ib)}_{\text{kezdeti komplex amplitúdó}} e^{-\beta t} e^{i\nu t}$$

ez forgatja a komplex amplitúdót

$$\dot{z}(t) = (a + ib)(-\beta + i\nu) e^{(-\beta + i\nu)t} = [-(\beta a + \nu b) + i(\nu a - \beta b)] e^{(-\beta + i\nu)t}$$

ahol

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{m_r c_r}} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{s}} \right] \rightarrow \text{a csillapítatlan rendszer saját kör frekvije}$$

$$\beta = \frac{k}{2m_r} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{s}} \right] \rightarrow \text{a csillapító saját kör frekvi}$$

$$\nu = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{s}} \right] \rightarrow \text{a csillapított saját kör frekvi}$$

ha $\alpha > \beta \rightarrow$ kiulakul a rezgés

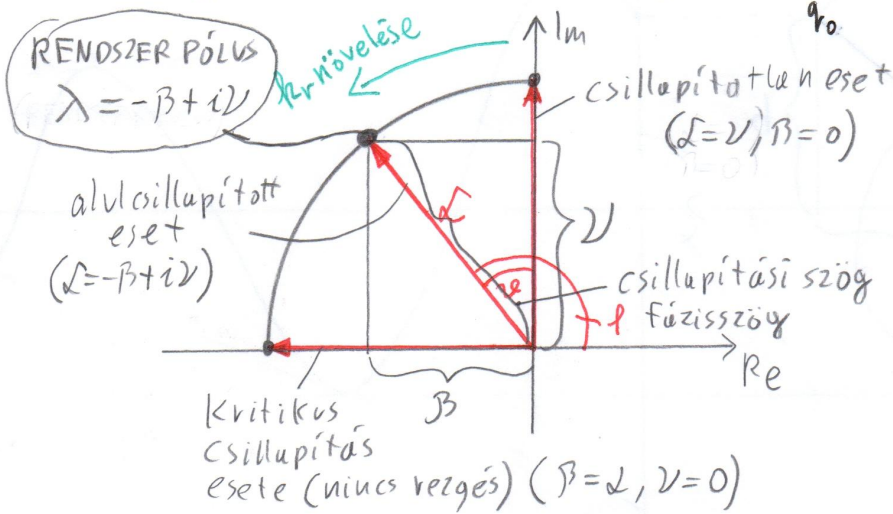
$$\text{frekvencia: } f_\nu = \frac{\nu}{2\pi} \text{ [Hz]}$$

$$\text{rezgési idő: } T_\nu = \frac{1}{f_\nu} \text{ [s]}$$

• a és b $\rightarrow$ kezdeti feltételekből

• kezdeti kitérés: $q_0 = \text{Im}[z(0)] = b \Rightarrow b = q_0$

• kezdő sebesség: $v_0 = \text{Im}[\dot{z}(0)] = aV - \beta b \Rightarrow a = \frac{v_0 + \beta q_0}{V}$



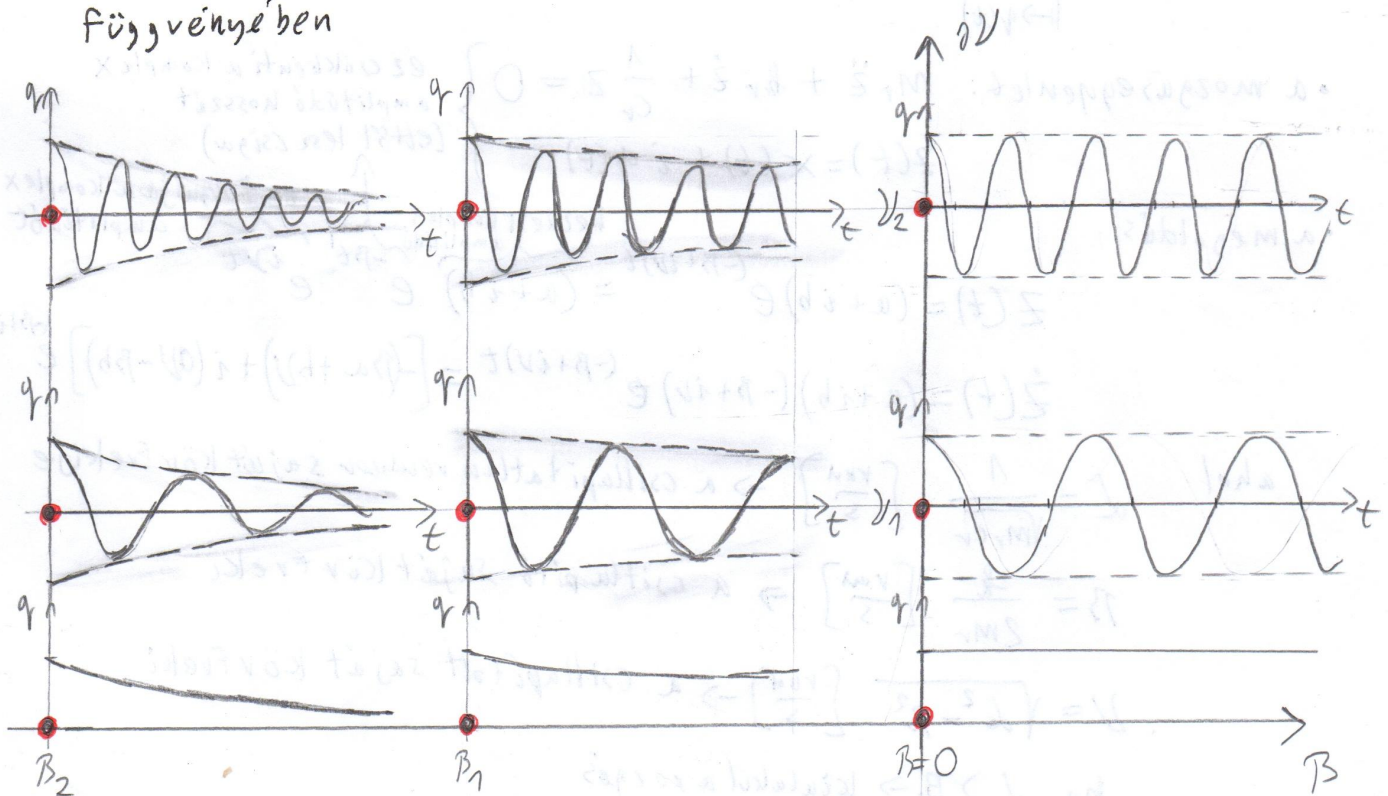
ábra alapján:

$$\beta^2 + V^2 = L^2$$

$$\tan \varphi = \frac{\beta}{V}$$

$$\varphi = 90^\circ + \varphi$$

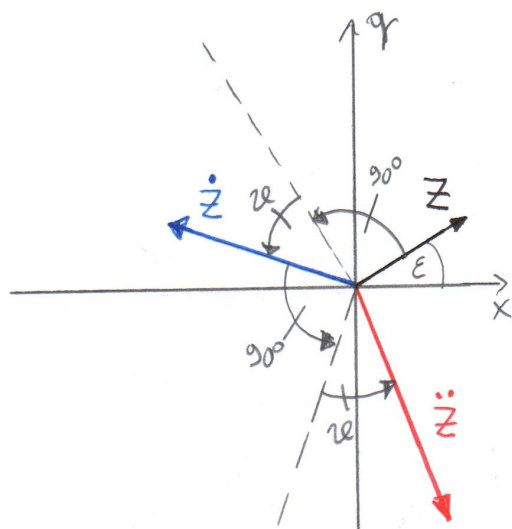
A megoldás időbeli lefutásának jellege a rendszer pólus helyének függvényében



• a mozgásegyenlet skalár megoldása:

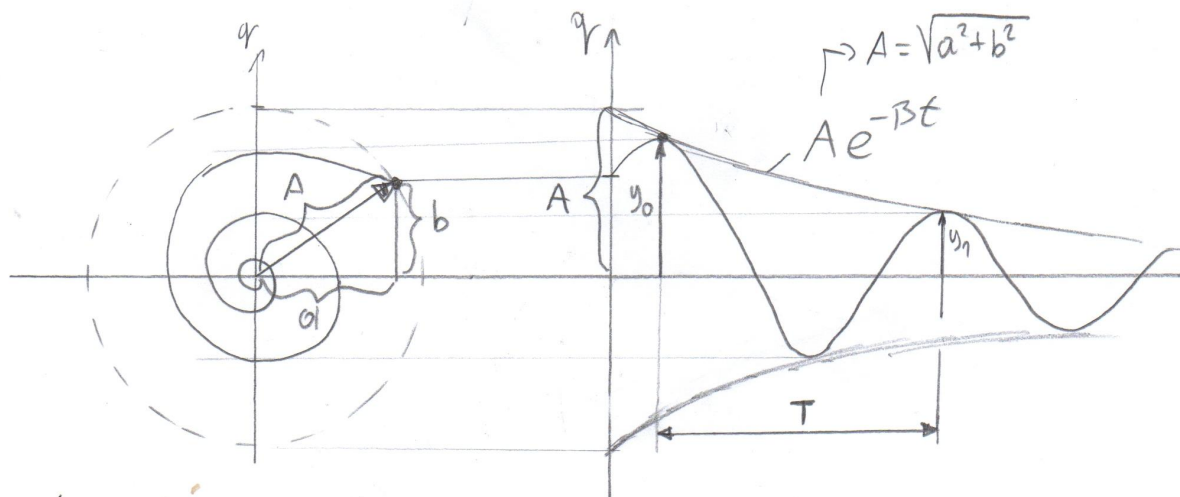
$$\begin{aligned}
 z(t) &= (a+ib) e^{-\beta t} e^{i\gamma t} = e^{-\beta t} (a+ib) (\cos \gamma t + i \sin \gamma t) = \\
 &= e^{-\beta t} (a \cos \gamma t + i a \sin \gamma t + i b \cos \gamma t - b \sin \gamma t) = \\
 &= \underbrace{e^{-\beta t} (a \cos \gamma t - b \sin \gamma t)}_{\text{Re}[z(t)]} + i \underbrace{e^{-\beta t} (b \cos \gamma t + a \sin \gamma t)}_{\text{Im}[z(t)]}
 \end{aligned}$$

$$q(t) = \text{Im}[z(t)] = e^{-\beta t} (b \cos \gamma t + a \sin \gamma t)$$



$$\gamma = \arctan \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\varphi = 90^\circ + \gamma$$



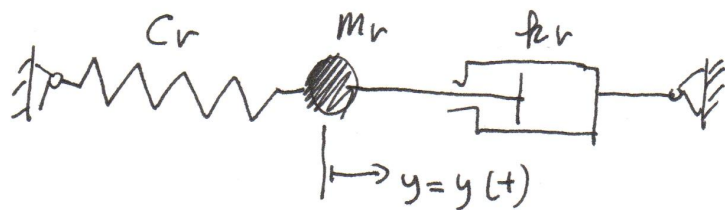
(logaritmus dekrementum:

$$\Lambda = \frac{\beta \cdot 2\pi}{\gamma}$$

$$\Lambda = \ln \frac{y_0}{y_1}$$

$$e^\Lambda = \frac{y_0}{y_1} \Rightarrow y_1 = \frac{y_0}{e^\Lambda}$$

①



$$\begin{aligned} m_r &= 20 \text{ kg} \\ C_r &= 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ k_r &= 1600 \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ y_0 &= 3 \text{ mm} \\ v_0 &= 0,18 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

A REZGŐRENDSZER JELLEMZŐI:

- A csillapítatlan szabad rezgőrendszer saját körfrekvije:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m_r C_r}} = \frac{1}{\sqrt{20 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}} = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (\text{undamped natural frequency})$$

$\hat{=} \frac{\text{m}}{\text{s}}!$

(ha nem lenne csillapító, ezen a körfrekvencián rezogna)

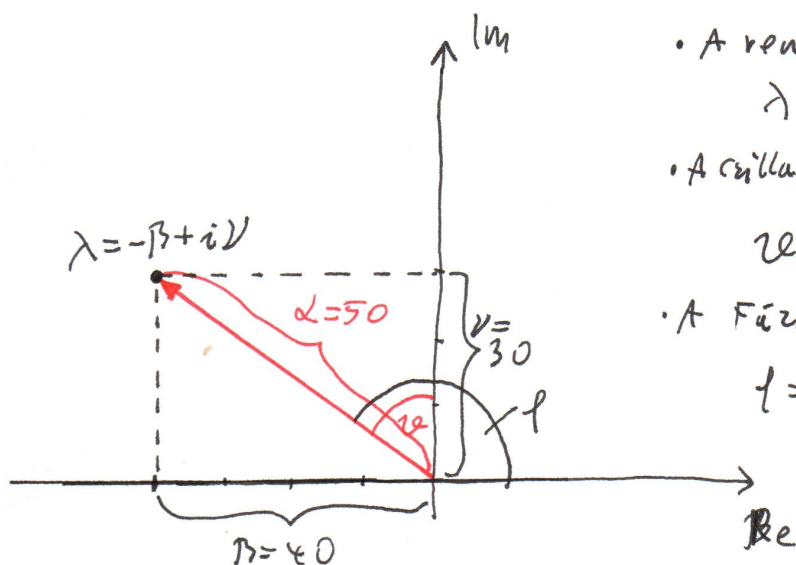
- A csillapító körfrekvije (csillapítási tényező / *damping factor*)

$$\beta = \frac{k_r}{2m_r} = \frac{1600}{2 \cdot 20} = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- A csillapított szabad rendszer körfrekvije (*damped natural frequency*)

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

miel $\omega > \beta$, kialakul a rezgés



- A rendszer pólus (*system pole*)

$$\lambda = -\beta + i\omega_d = (-40 + i30) \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- A csillapítási szög:

$$\alpha = \arctan \frac{\beta}{\omega_d} = \arctan \frac{40}{30} = 53,13^\circ$$

- A fáziseltérési szög:

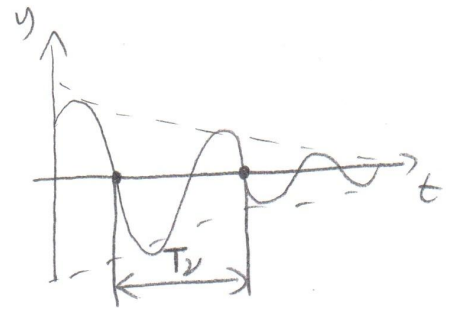
$$\phi = \frac{\pi}{2} + \alpha = 90^\circ + 53,13^\circ = 143,13^\circ$$

- A rezgési frekvencia

$$f_v = \frac{\nu}{2\pi} = \frac{30}{2\pi} = 4,77 \text{ Hz}$$

- A periódusidő (rezgésidő)

$$T_v = \frac{1}{f_v} = \frac{1}{4,77} = 0,209 \text{ s}$$



A MOZGÁSEGYENLET

$$m_r \ddot{z} + k_r \dot{z} + \frac{\Lambda}{C_r} z = 0$$

$$z(t) = x(t) + i y(t)$$

- a megoldás

$$z(t) = A e^{\lambda t} = (a + ib) e^{(\beta + i\nu)t} = (a + ib) e^{-\beta t} e^{i\nu t}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (a + ib) \cdot (-\beta + i\nu) e^{(-\beta + i\nu)t} = \\ &= (-\beta a + i a \nu - i b \beta - b \nu) e^{(-\beta + i\nu)t} = \\ &= [-(\beta a + b \nu) + i(a \nu - \beta b)] e^{(-\beta + i\nu)t} \end{aligned}$$

- a és b konstansok meghatározása a kezdeti feltételekből

$$z(t=0) = (a + ib) e^{(-\beta + i\nu) \cdot 0} = (a + ib)$$

$$y_0 = \text{Im}[z(t=0)] = \text{Im}[a + ib] = b$$

$$\Rightarrow b = y_0 = 3 \text{ mm}$$

$$\dot{z}(t=0) = [-(\beta a + b \nu) + i(a \nu - \beta b)] e^{(-\beta + i\nu) \cdot 0} = -(\beta a + b \nu) + i(a \nu - \beta b)$$

$$v_0 = \text{Im}[\dot{z}(t=0)] = \text{Im}[-(\beta a + b \nu) + i(a \nu - \beta b)] = a \nu - \beta b$$

$$\Rightarrow a = \frac{v_0 + \beta b}{\nu} = \frac{v_0 + \beta y_0}{\nu} = \frac{0,18 + 40 \cdot 0,003}{30} = 0,01 \text{ m} = 10 \text{ mm}$$

- tehát a komplex elmozdulás függvény:

$$Z(t) = (a + ib) e^{(-\beta + i\nu)t} = (10 + i \cdot 3) e^{(-40 + i30)t} \quad [\text{mm}]$$

- a komplex sebesség függvény:

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= [(\beta a + b\nu) + i(a\nu - \beta b)] e^{(-\beta + i\nu)t} = \\ &= [-(40 \cdot 10 + 3 \cdot 30) + i(10 \cdot 30 - 40 \cdot 3)] e^{(-40 + i30)t} = \\ &= (-490 + i180) e^{(-40 + i30)t} \quad \left[\frac{\text{mm}}{\text{s}}\right] \end{aligned}$$

- ábrázolás komplex síkon $t=0$ időpontban

$$Z(t=0) = (10 + i \cdot 3) \cdot e^{(-40 + i30) \cdot 0} = 10 + i \cdot 3$$

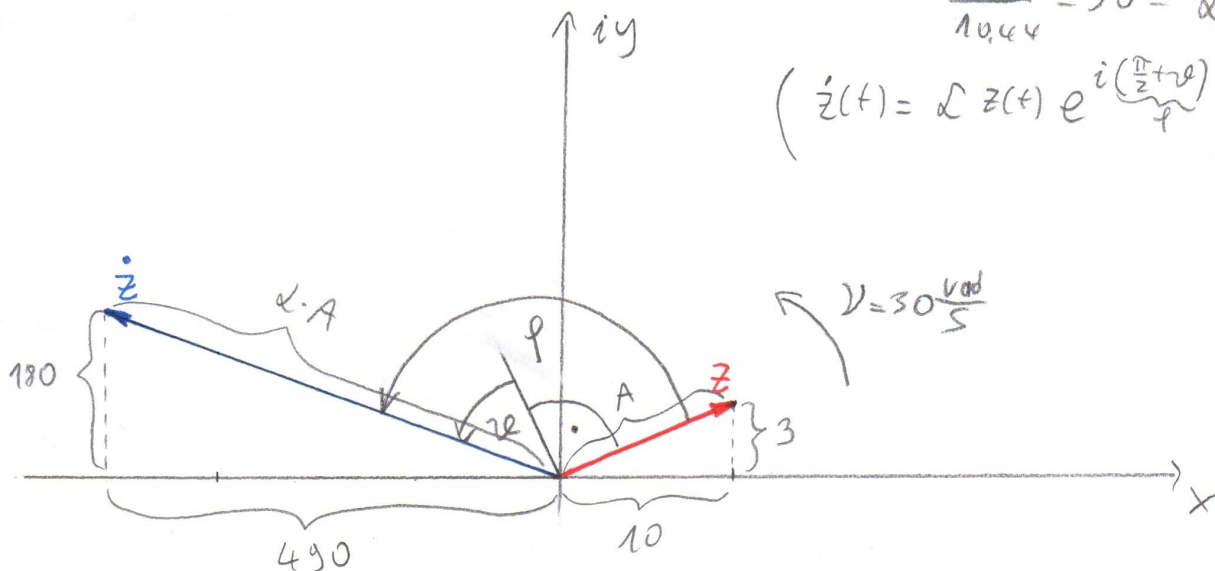
$$|Z(t=0)| = \sqrt{10^2 + 3^2} = 10,44 \text{ mm}$$

$$\dot{Z}(t=0) = (-490 + i180) e^{(-40 + i30) \cdot 0} = (-490 + i180)$$

$$|\dot{Z}(t=0)| = \sqrt{490^2 + 180^2} = 522 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$\frac{522}{10,44} = 50 = \lambda$$

$$\left(\dot{Z}(t) = \lambda Z(t) e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} \right)$$



- Tehát a $Z(t)$ és a $\dot{Z}(t)$ komplex vektorok $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi$ szöget zárnak be egymással

$$\left. \begin{aligned} \lambda = (-\beta + i\nu) &\Rightarrow \lambda \text{ szorosára nyújtja } Z(t) \text{-t} \\ \lambda e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} &\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi \text{ szöggel } \hookrightarrow \text{ Forgatja } Z(t) \text{-t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ így lesz a } \dot{Z}(t)$$

$$\dot{Z}(t) = Z(t) \lambda e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}$$

A mozgás egyenlet skálár megoldása

$$z(t) = (a + ib) e^{(-\beta + i\nu)t}$$

$$z(t) = (a + ib) e^{-\beta t} e^{i\nu t}$$

$$z(t) = e^{-\beta t} (a + ib) (\cos \nu t + i \sin \nu t)$$

$$z(t) = e^{-\beta t} [a \cos \nu t + i a \sin \nu t + i b \cos \nu t - b \sin \nu t]$$

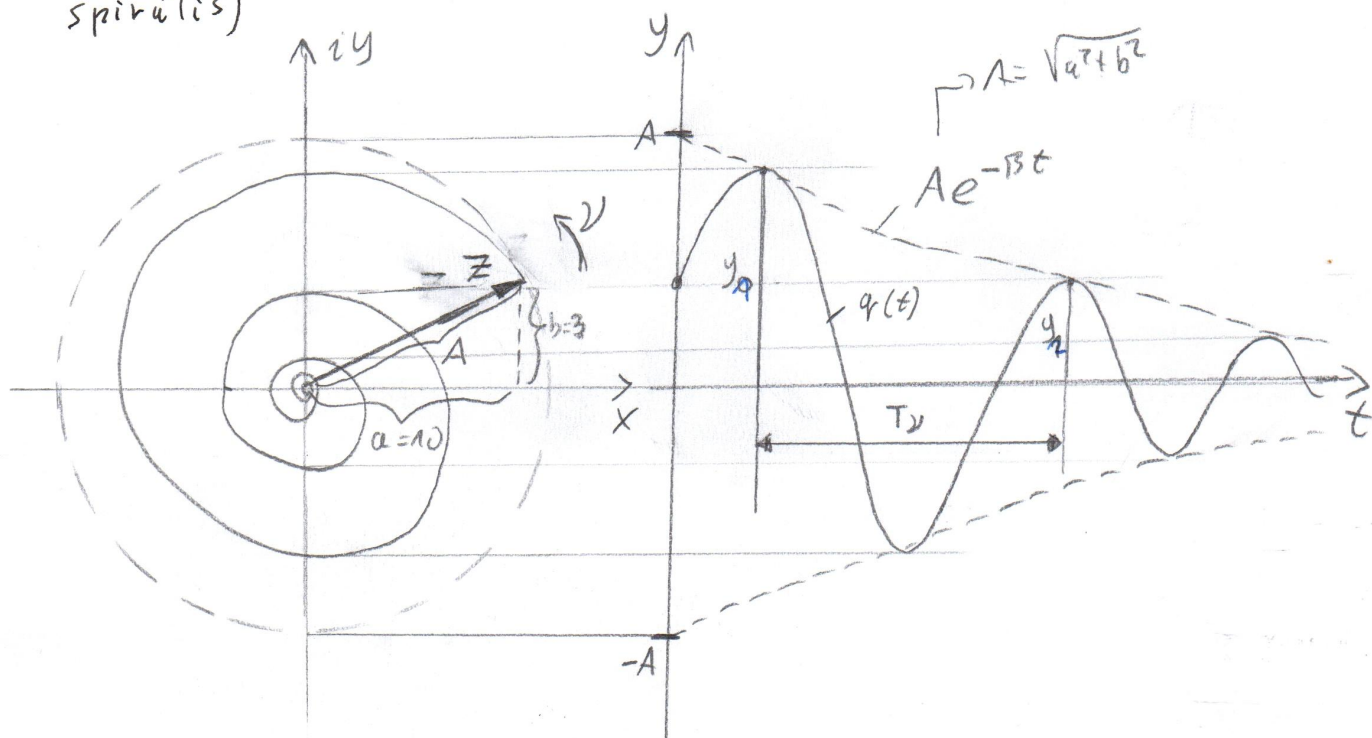
$$z(t) = \underbrace{e^{-\beta t} (a \cos \nu t - b \sin \nu t)}_{\text{Re}[z(t)]} + i \underbrace{e^{-\beta t} (a \sin \nu t + b \cos \nu t)}_{\text{Im}[z(t)]}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{Im}[z(t)] = e^{-\beta t} (a \sin \nu t + b \cos \nu t) = \\ &= e^{-40t} (10 \sin 30t + 3 \cos 30t) \quad [\text{mm}] \end{aligned}$$

ÁBRÁZOLÁS AZ IDŐ FÜGGVÉNYÉBEN

↓
Komplex elmozdulás
 az idő függvényében
 egy csiga (logaritmikus
 spirális)

↓
Skalár elmozdulás az idő
 függvényében



LOGARITMIKUS DEKREMENTUM

→ csillapítás mértékét jellemzi, egy periódus alatt
 mennyit csökken a kitérés

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \ln \frac{y_0}{y_2} = \ln \left[\frac{A e^{(-\beta + i\omega)t}}{A e^{(-\beta + i\omega)(t+T_D)}} \right] = \\
 &= \ln \left[\frac{A e^{(-\beta + i\omega)t}}{A e^{(-\beta + i\omega)t} e^{(-\beta + i\omega)T_D}} \right] = \ln \left[\frac{1}{e^{(-\beta + i\omega)T_D}} \right] = \\
 &= \ln \left[\frac{1}{e^{\beta T_D} e^{i\omega T_D}} \right] = \ln \left[\frac{1}{e^{\beta \frac{2\pi}{\omega}} \underbrace{e^{i\omega \frac{2\pi}{\omega}}}_1} \right] = \ln \frac{1}{e^{\beta \frac{2\pi}{\omega}}} = \\
 &= \ln e^{\frac{\beta}{\omega} 2\pi} = \frac{\beta}{\omega} 2\pi \\
 \Lambda &= \frac{\beta}{\omega} 2\pi = \frac{40}{30} 2\pi = 8,377
 \end{aligned}$$

kritikus csillapítás

$$\beta = \omega$$

$$\frac{k_r}{2m_r} = \frac{1}{\sqrt{m_r c_r}}$$

$$k_r = \frac{2m_r}{\sqrt{m_r c_r}} = \frac{2 \cdot 20}{\sqrt{20 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}} = 2000 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

elkér a mozgás egyenlet megoldása

$$z(t) = y(t) = (a + bt) e^{-\beta t} = a e^{-\beta t} + b t e^{-\beta t}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = \dot{y}(t) &= -\beta a e^{-\beta t} + b \cdot (1 e^{-\beta t} + (-\beta) e^{-\beta t} \cdot t) = \\ &= -\beta a e^{-\beta t} + b e^{-\beta t} - b \beta e^{-\beta t} \cdot t \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= a e^{-\beta \cdot 0} + b \cdot 0 e^{-\beta \cdot 0} \\ \dot{y}(0) &= -\beta a e^{-\beta \cdot 0} + b \cdot e^{-\beta \cdot 0} - b \cdot \beta e^{-\beta \cdot 0} \cdot 0 \end{aligned} \right\}$$

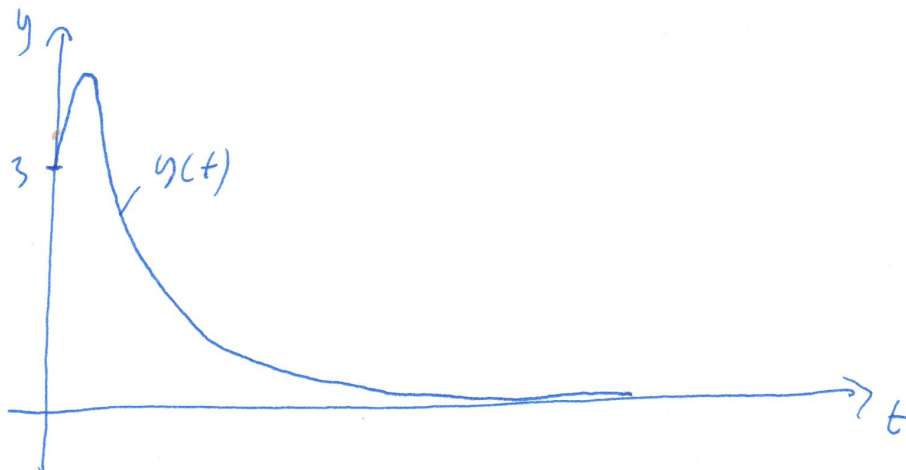
$$\left. \begin{aligned} 3 &= a \\ 180 &= -50a + b \end{aligned} \right\}$$

$$\hookrightarrow 180 = -50 \cdot 3 + b$$

$$b = 330 \text{ mm}$$

$$a = 3 \text{ mm}$$

$$y(t) = (3 + 330t) e^{-50t} [\text{mm}]$$



tolcsillapítás

$$\beta > \omega \Rightarrow \text{leghm pl. } k_r = 2400 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{ekkor } \beta = \frac{k_r}{2m_r} = \frac{2400}{2 \cdot 20} = 60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\nu = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = i \sqrt{\beta^2 - \omega^2} = i \sqrt{60^2 - 50^2} = i 33,166 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\nu = -\beta \pm \underbrace{i\nu}_{-\mu} = -\beta \pm \mu = -60 \pm 33,166 = \begin{cases} -26,834 \\ -93,166 \end{cases}$$

$$y(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\dot{y}(t) = \lambda_1 a_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 a_2 e^{\lambda_2 t}$$

$a_1, a_2 \Rightarrow$ kezdeti feltételekből

$$\left. \begin{aligned} y_0 = y(0) &= a_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} + a_2 e^{\lambda_2 \cdot 0} \\ v_0 = \dot{y}(0) &= \lambda_1 a_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} + \lambda_2 a_2 e^{\lambda_2 \cdot 0} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} y_0 = y(0) &= a_1 + a_2 \\ v_0 = \dot{y}(0) &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow a_1 = y_0 - a_2$$

$\Downarrow$

$$v_0 = \lambda_1 (y_0 - a_2) + \lambda_2 a_2$$

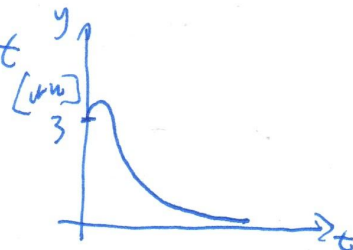
$$v_0 = \lambda_1 y_0 - \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2$$

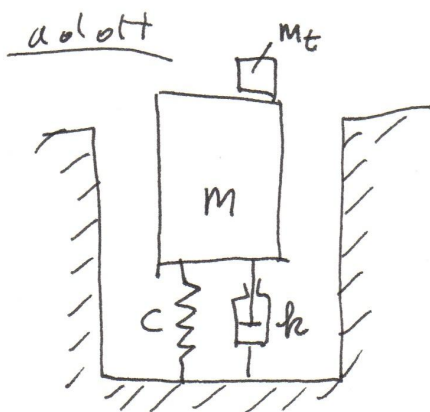
$$v_0 - \lambda_1 y_0 = a_2 (\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$a_2 = \frac{v_0 - \lambda_1 y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{180 - (-26,834) \cdot 3}{-93,166 - (-26,834)} = -3,92 \text{ mm}$$

$$a_1 = y_0 - a_2 = 3 - (-3,92) = 6,92 \text{ mm}$$

$$y(t) = 6,92 e^{-26,834 t} - 3,92 e^{-93,166 t}$$





Feladat:

$m = ? \quad c = ? \quad k = ?$

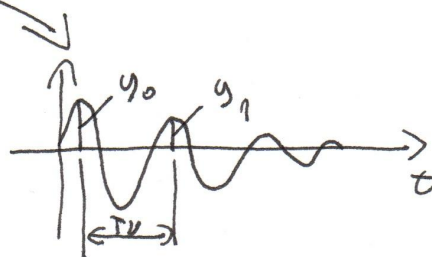
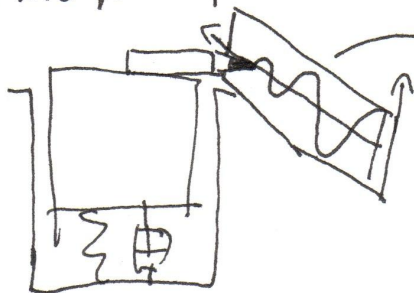
1. mérés a rugóállandóhoz:

egy $m_t = 10 \text{ kg}$ tömegű testet helyezünk a rendszer tetejére $\Rightarrow$ ennek hatására $y_{\text{stat}} = 2 \text{ mm} = 0,002 \text{ m}$ az elmozdulás

2. mérés a logaritmikus dekrementumhoz:

Rezgésbe hozzuk a gépet, majd magára hagyjuk

$\Rightarrow$ mérjük a periódusidőt és 2 egymást követő kitérést



$T_D = 0,177 \text{ s}$

$y_0 = 10,238 \text{ mm}$

$y_1 = 0,658 \text{ mm}$

Az 1. mérésből a rugóállandó:

$$F_c = \frac{F}{c} \Rightarrow c = \frac{F}{F_c} = \frac{y_{\text{stat}}}{m_t g} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10} = \underline{\underline{2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{N}}}}$$

A 2. mérésből

A rezgési frekvencia

$$f_D = \frac{1}{T_D} = \frac{1}{0,177} = 7,29 \text{ Hz}$$

A csillapított szabad rendszer körfrekvencia:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_D} = \frac{2\pi}{0,177} = 45,86 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A logaritmikus deklimentum

$$\Lambda = \begin{cases} \ln\left(\frac{y_0}{y_1}\right) = \ln\left(\frac{10,231}{0,658}\right) = 2,744 \\ 2\pi \frac{\beta}{\nu} \end{cases}$$

$$\beta = \frac{\Lambda \nu}{2\pi} = \frac{2,744 \cdot 46,86}{2\pi} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A csillapítatlan szabad rendszer körfrekvéje:

$$\nu = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$$

$$\nu^2 = \omega^2 - \beta^2$$

$$\omega^2 = \nu^2 + \beta^2 = 45,86^2 + 20^2 = 2500 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \omega = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A bevezetési tömegre:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m}c} \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{1}{m}c$$

$$m = \frac{1}{\omega^2 c} = \frac{1}{2500 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = \underline{\underline{20 \text{ kg}}}$$

A csillapítási tényező:

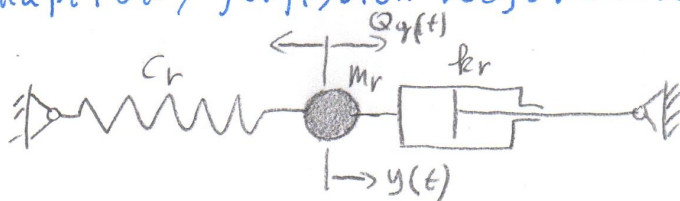
$$\beta = \frac{h}{2m} \Rightarrow h = \beta 2m = 20 \cdot 2 \cdot 20 = \underline{\underline{800 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}}}$$

A mozgás egyenlete:

$$m \ddot{y} + h \dot{y} + \frac{1}{c} y = \begin{cases} 0 & \text{ha nincs gerjesztés} \\ Q_g(t) & \text{ha van gerjesztés} \end{cases}$$

$$20 \ddot{y} + 800 \dot{y} + 50000 y = \overset{0}{\underset{Q_g(t)}{}}$$

csillapított, gerjesztett rezgőrendszer:



• A mozgás egyenlete: $\rightarrow P_0 = Q_{y_0} e^{i\varepsilon}$

$$m_r \ddot{z} + k_r \dot{z} + \frac{1}{c_r} z = P_0 e^{i\omega t}$$

$$z(t) = x(t) + i y(t)$$

I HOMOGÉN RÉSZ:

$$m_r \ddot{z}_h + k_r \dot{z}_h + \frac{1}{c_r} z_h = 0$$

$\Downarrow$

a megoldás: $z_h(t) = (a + ib) e^{(-\beta + i\nu)t}$

II PARTIKULÁRIS RÉSZ:

$$m_r \ddot{z}_p + k_r \dot{z}_p + \frac{1}{c_r} z_p = P_0 e^{i\omega t}$$

$\Downarrow$

a megoldás: $z_p(t) = B e^{i\omega t}$

A TELJES MEGOLDÁS:

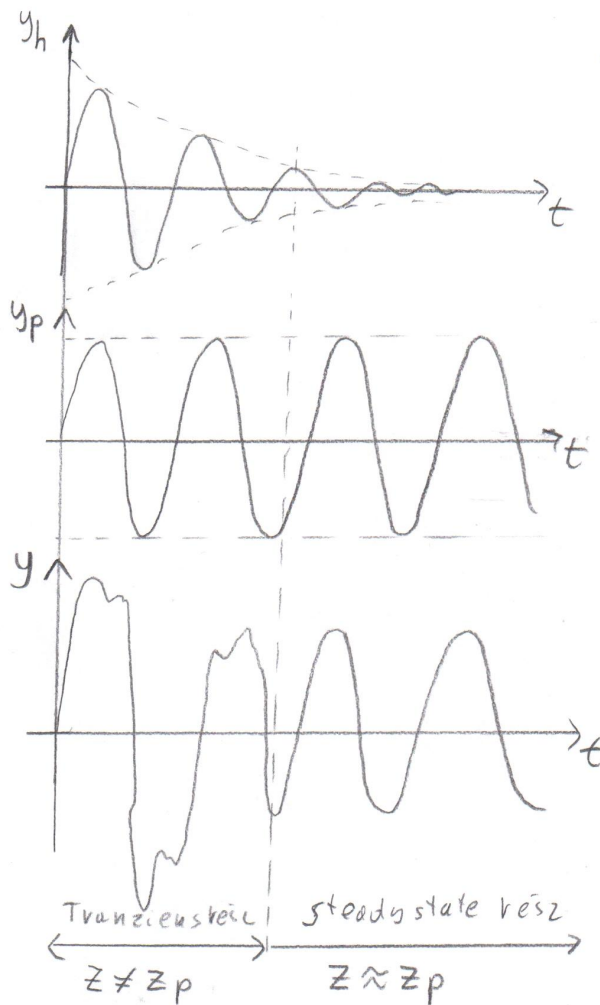
$$z(t) = z_h(t) + z_p(t)$$

$$z(t) = \underbrace{(a + ib) e^{(-\beta + i\nu)t}}_{\text{ez a rész lecseng}} + \underbrace{B e^{i\omega t}}_{\text{hosszú távon ez a rész a meghatározó}}$$

$\Downarrow$
nem foglalkozunk vele

$\Downarrow$
csak ezzel foglalkozunk
(= állandósult gerjesztett rezgés)

$\Downarrow$
csak ezzel foglalkozunk
(= állandósult gerjesztett rezgés)



- Tehát gerjesztett rezgés esetén: megoldás $\approx$ partikuláris megoldás:

$$Z(t) \approx Z_p(t) = B e^{i\omega t} = \frac{P_0}{i\omega Z} e^{i\omega t}$$

$\nwarrow$ ezek kicsi Z -k $\nwarrow$ ez NAOLY Z ↑
állandósult gerjesztett
rezgés

Z : komplex ellenállás

$$Z = k_r + i\left(\omega m_r - \frac{1}{\omega c_r}\right)$$

$$|Z| = \sqrt{k_r^2 + \left(m_r\omega - \frac{1}{c_r\omega}\right)^2}$$

$$\psi = \arctan \frac{m_r\omega - \frac{1}{c_r\omega}}{k_r}$$

$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \psi \rightarrow -90^\circ$
 $\omega = \omega_0 \Rightarrow \psi = 0^\circ$
 $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \psi \rightarrow 90^\circ$

- Gerjesztett rezgés esetén idő és frekvenciaterományban is szoktunk vizsgálni:

- IDŐTARTOMÁNYBELI VIZSGÁLAT: (üzemi jellemző)
 - Ezt vizsgáljuk az idő függvényében adott, állandó ω mellett
 - $\Rightarrow$ Komplex forgó vektorokkal ábrázoljuk

$$Z(t) \approx Z_p(t) = \underbrace{\frac{P_0}{i\omega Z}} e^{i\omega t}$$

- FREKVENCIA TEROMÁNYBELI VIZSGÁLAT

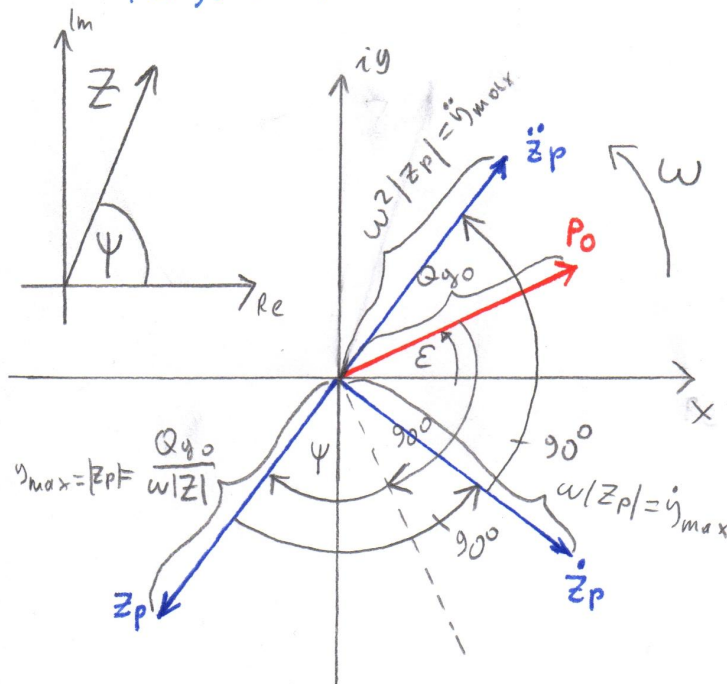
Ezt vizsgáljuk ω függvényében (az idő nem létezik)

a) $y_{\max}(\omega) = |Z_p(\omega)| \Rightarrow$ rezonancia görbe

b) P_0 és Z_p közti szög $\Rightarrow$ fázis görbe

• IDŐTARTOMÁNYBELI VIZSGÁLAT (üzemi jellemzők)

$t=0$ időpontban ábrázoljuk komplex síkon a $Z, P_0, z_p, \dot{z}_p, \ddot{z}_p$ forgó komplex vektorokat



$$P_0 = Q_{y_0} e^{i\varepsilon} \text{ (ez adott)}$$

$$Z_p(0) = \frac{P_0}{i\omega Z}$$

$\downarrow 90^\circ$ $\downarrow \psi$
 ($90^\circ + \psi = \varphi$ fáziskésés)

$$\dot{Z}_p(0) = i\omega Z_p(0)$$

$\downarrow 90^\circ$

$$\ddot{Z}_p(0) = i\omega \dot{Z}_p(0) = -\omega^2 Z_p(0)$$

$\downarrow 90^\circ$

- komplex elmozdulás fv: $z_p(t) = \frac{P_0}{i\omega Z} e^{i\omega t}$
- komplex sebesség fv: $\dot{z}_p(t) = i\omega z_p(t)$
- komplex gyorsulás fv: $\ddot{z}_p(t) = -\omega^2 z_p(t)$
- maximális elmozdulás: $y_{max} = |z_p| = \frac{Q_{y_0}}{\omega |Z|}$

* $e(\text{mozdulás}) y(t) = \text{Im}[z_p(t)]$

* sebesség fv: $\dot{y}(t) = \text{Im}[\dot{z}_p(t)]$

* gyorsulás fv: $\ddot{y}(t) = \text{Im}[\ddot{z}_p(t)]$

• maximális sebesség: $v_{max} = \dot{y}_{max} = |\dot{z}_p| = \omega |z_p| = \omega y_{max}$

• maximális gyorsulás: $a_{max} = \ddot{y}_{max} = |\ddot{z}_p| = \omega^2 |z_p| = \omega^2 y_{max}$

• rugóban Fellepő maximális erő: $F_{cmax} = \frac{y_{max}}{C_r}$

• csillapításban Fellepő maximális erő: $F_{cmax} = k_r \dot{y}_{max} = k_r \omega y_{max}$

* $y(t) = y_{max} \sin(\omega t + \varepsilon - \varphi)$
 $\dot{y}(t) = \dot{y}_{max} \sin(\omega t + \varepsilon - \varphi + \frac{\pi}{2})$
 $\ddot{y}(t) = \ddot{y}_{max} \sin(\omega t + \varepsilon - \varphi + \pi)$

• FREKVI TARTOMÁNYBELI VIZSGÁLAT

$$\overbrace{f_0 = C_r \cdot P_0}^{\text{komplex statikus kitérés}}$$

$$B = \frac{P_0}{i\omega Z} = \dots = \frac{f_0 L^2}{(\omega^2 L^2 - \omega^2) + i\omega 2\beta}$$

statikus kitérés:

$$y_{st} = |f_0| = C_r |P_0| = C_r Q_{g0}$$

Rezonanciagörbe: y_{max} -ot vagy $\frac{y_{max}}{y_{st}}$ -ot ábrázoljuk ω vagy

$\xi = \frac{\omega}{\omega_0}$ (frekv. viszony) függvényében

$$y_{max} = |B| = \left| \frac{f_0 L^2}{(\omega^2 L^2 - \omega^2) + i\omega 2\beta} \right| = \frac{y_{st} L^2}{\sqrt{(\omega^2 L^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

FÜGGŐLEGES TENGELY

$\rightarrow y_{max}$

$\uparrow$
VAGY

$\rightarrow \frac{y_{max}}{y_{st}}$

VÍZSZINTES TENGELY:

$\nwarrow \omega$

$\leftarrow VAGY \rightarrow$

$\searrow \xi$

$$\frac{y_{st} L^2}{\sqrt{(\omega^2 L^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$\downarrow / y_{st}$

$$\frac{L^2}{\sqrt{(\omega^2 L^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$\frac{y_{st}}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2 \frac{\beta^2}{L^2}}}$$

$\downarrow / y_{st}$

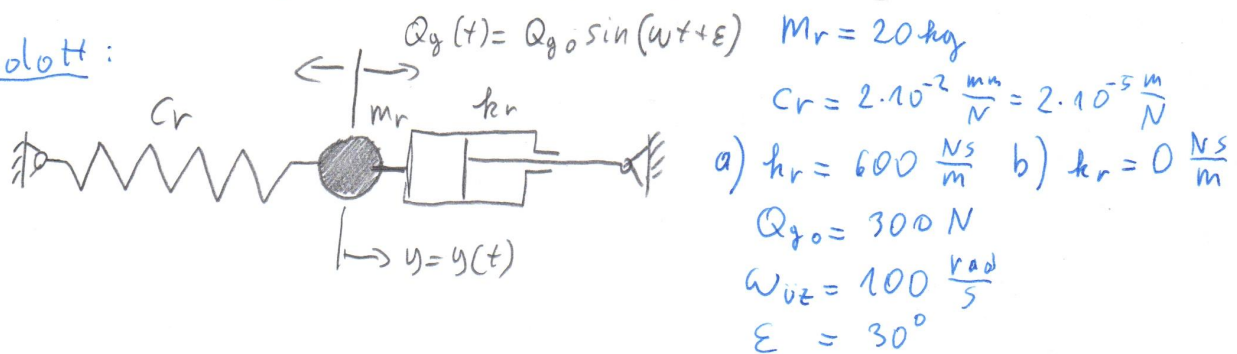
$$\frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2 \frac{\beta^2}{L^2}}}$$

Fázisgörbe: φ -t vagy ψ -t ábrázoljuk ω vagy ξ

Függvényében

Állandószintű gerjesztett rezgés

• adott:



• Feladat: a) $k_r = 600 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$ és b) $k_r = 0 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$ esetre is:

1. A rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása és az általános (=teljes) megoldás felírása

2. A komplex ellenállás meghatározása

3. IDŐTARTOMÁNYBELI VIZSGÁLAT (üzemi jellemzők)

3.1 Komplex elmozdulás, sebesség, gyorsulás függvények ($z_p(t)$, $\dot{z}_p(t)$, $\ddot{z}_p(t)$)

3.2 rezgőrendszer vektordiagramja

3.3 maximális kitérés, sebesség, gyorsulás ($y_{\max}$, $v_{\max}$, $a_{\max}$)

3.4. elmozdulás, sebesség, gyorsulás függvények ($y(t)$, $v(t)$, $a(t)$)

3.5. rugóban és csillapításban előforduló maximális erők

4. FREKVIÁRTARTOMÁNYBELI VIZSGÁLAT

4.1. Rezonanciagörbe, fázisgörbe megrajzolása

4.2. Mekkora frekvísi viszony / gerjesztőfrekv. esetén lesz

8 mm , illetve 1 mm a maximális kitérés?

01) $k_r = 600 \frac{N}{m}$ csillapítási esete

1. a rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_r \ddot{z} + k_r \dot{z} + \frac{1}{C_r} z = P_0 e^{i\omega t}$$

$$\hookrightarrow P_0 = Q_0 e^{i\varepsilon} \quad (\Rightarrow \text{ha } \varepsilon = 0 \text{ akkor } P_0 = Q_0)$$

$$20 \ddot{z} + 600 \dot{z} + 50000 z = 300 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i100t} \quad (z(t) = x(t) + iy(t))$$

a mozgásegyenlet általános (teljes) megoldása:

$$Z(t) = Z_h(t) + Z_p(t) = A e^{(-\beta + i\omega)t} + B e^{i\omega t} =$$

$$= \underbrace{(a + ib) e^{(-\beta + i\omega)t}}_{\substack{\text{lecsengő rész} \\ \text{ezzel nem foglalkozunk}}} + \underbrace{\frac{P_0}{i\omega Z} e^{i\omega t}}_{\text{csak ezzel foglalkozunk}}$$

$\rightarrow$ az állandósult állapotot leíró megoldás:

$$Z(t) \approx Z_p(t) = \frac{P_0}{i\omega Z} e^{i\omega t}$$

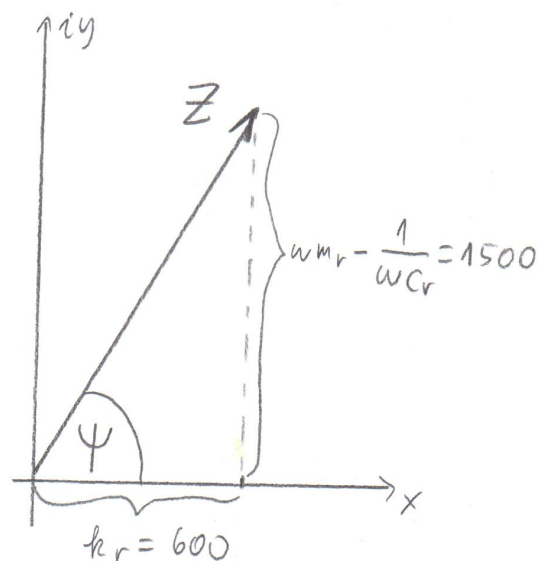
$\hookrightarrow$ komplex ellenállás

2. a komplex ellenállás meghatározása:

$$Z = k_r + i\left(\omega m_r - \frac{1}{\omega C_r}\right) = 600 + i\left(100 \cdot 20 - \frac{1}{100 \cdot 2 \cdot 10^5}\right) =$$
$$= (600 + i1500) \frac{N}{m}$$

$$|Z| = \sqrt{k_r^2 + \left(\omega m_r - \frac{1}{\omega C_r}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{600^2 + 1500^2} = 1615,55 \frac{N}{m}$$

$$\psi = \arctan \frac{\omega m_r - \frac{1}{\omega C_r}}{k_r} =$$
$$= \arctan \frac{1500}{600} = 68,2^\circ$$



3. IDŐTARTOMÁNYBELI VIZSGÁLAT (= üzemi jellemzők) [TIME DOMAIN]

↳ a változó: t , $\omega = \omega_{üz} = \text{állandó} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

3.1. komplex elmozdulás, sebesség, gyorsulás függvények:

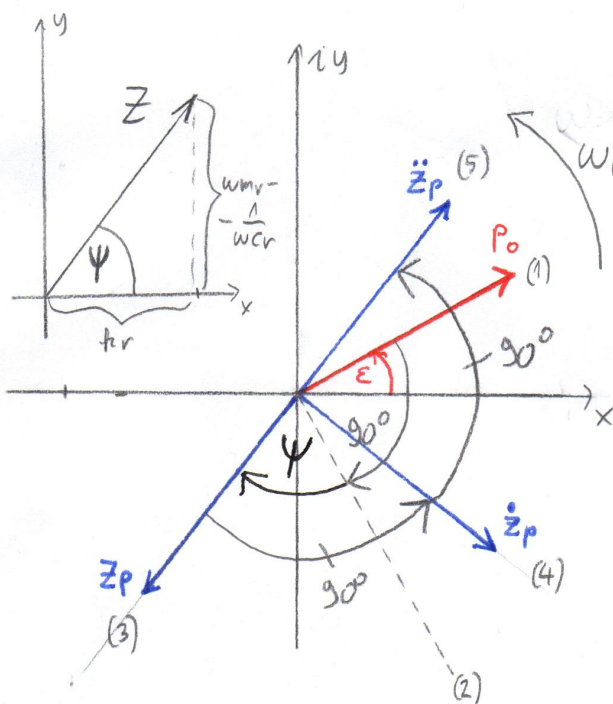
$$z_p(t) = \frac{P_0}{i\omega Z} e^{i\omega t} = \frac{300 e^{i\frac{\pi}{6}}}{i \cdot 100 \cdot (600 + i1500)} e^{i100t} [\text{m}]$$

$$\dot{z}_p(t) = i\omega z_p(t)$$

$$\ddot{z}_p(t) = i\omega i\omega z_p(t) = -\omega^2 z_p(t)$$

3.2. rezgőrendszer vektorábrája:

$t=0$ időpontban ábrázoljuk komplex síkon $P_0, z_p, \dot{z}_p, \ddot{z}_p$
Forogó komplex vektorokat



$$P_0 = Q_{g0} e^{i\varepsilon}$$

$$z_p(0) = \frac{P_0}{i\omega Z}$$

↓ 90° ↓ ψ

a fázis késés: $\varphi = 90^\circ + \psi = 90^\circ + 68,2^\circ = 158,2^\circ$

$$\dot{z}_p(0) = i\omega z_p(0) \quad \rightarrow \cdot \frac{\pi}{180} \Rightarrow 2,76 \text{ rad}$$

↓ 90°

$$\ddot{z}_p(0) = i\omega \dot{z}_p(0) = -\omega^2 z_p(0)$$

↓ 90°

- A komplex elmozdulás (z_p) $\varphi = 158,2^\circ$ -ot késik a komplex gerjesztő erőhöz (P_0) képest ($\Rightarrow \varphi = 158,2^\circ$ -kal van elforgatva ω irányával szemben)
- A komplex sebesség 90° -ot siet a komplex elmozduláshoz képest
- A komplex gyorsulás 90° -ot siet a komplex sebességhez képest
- A 4 komplex vektor ($P_0, z_p, \dot{z}_p, \ddot{z}_p$) együtt Forog $\omega_{üz} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ szögsebességgel, tehát egymással bezárt szögek nem változik

3.3 maximális kitérés, sebesség, gyorsulás

- maximális kitérés:

$$y_{\max} = \frac{|P_0|}{\omega |Z|} = \frac{Q_{y0}}{\omega |Z|} = \frac{300}{100 \cdot 1615,55} = 0,001857 \text{ m} = 1,857 \text{ mm}$$

- maximális sebesség:

$$v_{\max} = \dot{y}_{\max} = \omega y_{\max} = 100 \cdot 0,001857 = 0,1857 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 185,7 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

- maximális gyorsulás:

$$a_{\max} = \ddot{y}_{\max} = \omega^2 y_{\max} = 100^2 \cdot 0,001857 = 18,57 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3.4 elmozdulás, sebesség, gyorsulás f.v.-ek

- az elmozdulás függvény:

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Im}[\tilde{z}_p(t)] = y_{\max} \sin(\omega t + \varepsilon - \varphi) = \\ &= 1,857 \sin\left(100t + \frac{\pi}{6} - 2,76\right) = 1,857 \sin(100t - 2,236) \text{ [mm]} \end{aligned}$$

- a sebesség függvény:

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{y}(t) = \operatorname{Im}[\dot{\tilde{z}}_p(t)] = \dot{y}_{\max} \sin\left(\omega t + \varepsilon - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 185,7 \sin\left(100t + \frac{\pi}{6} - 2,76 + \frac{\pi}{2}\right) = 185,7 \sin(100t - 0,6656) \left[\frac{\text{mm}}{\text{s}}\right] \end{aligned}$$

- a gyorsulás függvény:

$$\begin{aligned} a(t) &= \ddot{y}(t) = \operatorname{Im}[\ddot{\tilde{z}}_p(t)] = \ddot{y}_{\max} \sin(\omega t + \varepsilon - \varphi + \pi) = \\ &= 18,57 \sin\left(100t + \frac{\pi}{6} - 2,76 + \pi\right) = 18,57 \sin(100t + 0,9052) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] \end{aligned}$$

3.5 rugóban és csillapítóban ébredő maximális erő

- a rugóban ébredő maximális erő

$$F_{\text{cmax}} = \frac{y_{\max}}{c_r} = \frac{1,857}{2 \cdot 10^{-2}} = 92,85 \text{ N}$$

- a csillapítóban ébredő maximális erő

$$F_{\text{rmax}} = k_r \dot{y}_{\max} = 600 \cdot 0,1857 = 111,42 \text{ N}$$

4. FREKVIÁRTOMÁNYBELI VIZSGÁLAT [FREQUENCY DOMAIN]

↳ a változó: ω (vagy $\xi = \frac{\omega}{\omega_0}$), idő nem létezik

$$B = \frac{P_0}{i\omega Z} = \dots = \frac{\overbrace{f_0 L^2}^{f_0 = C_r P_0 \text{ (komplex statikus kitérés)}}}{(\omega^2 L^2 - 1) + i 2\beta \omega}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{P_0}{i\omega Z} = \frac{P_0}{i\omega \left[k_r + i \left(\omega m_r - \frac{1}{\omega C_r} \right) \right]} = \frac{P_0}{i\omega k_r - \omega \left(\omega m_r - \frac{1}{\omega C_r} \right)} = \\ &= \frac{P_0}{\left(\frac{1}{C_r} - \omega^2 m_r \right) + i\omega k_r} = \frac{P_0 \cdot \frac{C_r L^2}{1}}{\left(\frac{1}{m_r C_r} - \omega^2 \right) + i\omega \frac{k_r}{m_r}} = \frac{\overbrace{P_0 C_r L^2}^{f_0}}{(\omega^2 L^2 - 1) - i 2\beta \omega} \end{aligned}$$

4.1 Rezonanciagörbe, Fázisgörbe

$\frac{y_{\max}}{y_{st}}$ -ot (vagy $y_{\max}$ -ot) ábrázoljuk $\xi = \frac{\omega}{\omega_0}$ (vagy ω) függvényében

$$y_{\max} = |B| = \left| \frac{f_0 L^2}{(\omega^2 L^2 - 1) + i 2\beta \omega} \right| = \frac{y_{st} L^2}{\sqrt{(\omega^2 L^2 - 1)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad / : y_{st}$$

legyen $\xi = \frac{\omega}{\omega_0}$ (= Frekv. viszony)

$$\boxed{\frac{y_{\max}}{y_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2 \beta^2}}} \quad \Rightarrow y_{\max} = \frac{y_{st}}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2 \beta^2}}$$

- a rendszer jellemzői:

- csillapítatlan saját kör. freki: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{m_r C_r}} = \frac{1}{\sqrt{20 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}} = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

- csillapító saját kör. freki: $\beta = \frac{k_r}{2m_r} = \frac{600}{2 \cdot 20} = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

- statikus kitérés: $y_{st} = |f_0| = C_r |P_0| = C_r Q_0 = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 300 = 0,006 \text{ m} = 6 \text{ mm}$

A rezonancia görbe megvizsgálása:

①. pont: ÁLLÓ HELYZET

- $\omega = 0$

- $\xi = 0$

- $y_{\max} = y_{st} = 6 \text{ mm}$

- $\frac{y_{\max}}{y_{st}} = \frac{y_{st}}{y_{st}} = 1$

- $\Psi = \arctan \frac{0 \cdot m_r - \frac{1}{0 \cdot c_r}}{k_r} \Rightarrow \Psi \rightarrow -90^\circ$
 $\phi \rightarrow 0^\circ$

②. pont: REZONANCIA HELY

- $\omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2} = \sqrt{50^2 - 2 \cdot 15^2} = 45,277 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

- $\xi_{rez} = \frac{\omega_{rez}}{\omega} = \frac{45,277}{50} = 0,9055$

$\phi(\omega) = (\omega^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$ minimumát keressük

$\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = 0 = 2(\omega^2 - \omega^2) \cdot (-2\omega) + 2 \cdot 4 \cdot \beta^2 \omega = 0 \quad / : 2\omega$

$4\beta^2 = 2(\omega^2 - \omega^2)$

$2\beta^2 = \omega^2 - \omega^2$

$\omega^2 = \omega^2 - 2\beta^2$

$\omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}$

- $y_{\max}^{rez} = \frac{y_{st}}{\sqrt{(1 - \xi_{rez}^2)^2 + 4\xi_{rez}^2 \frac{\beta^2}{\omega^2}}} = \frac{6}{\sqrt{(1 - 0,9055^2)^2 + 4 \cdot 0,9055^2 \cdot \frac{15^2}{50^2}}} = 10,483 \text{ mm}$

- $\frac{y_{\max}^{rez}}{y_{st}} = \frac{10,483}{6} = 1,747$

3. pont: ÜZEMI HELY

- $\omega_{üz} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

- $\xi_{üz} = \frac{\omega_{üz}}{\omega_0} = \frac{100}{50} = 2$

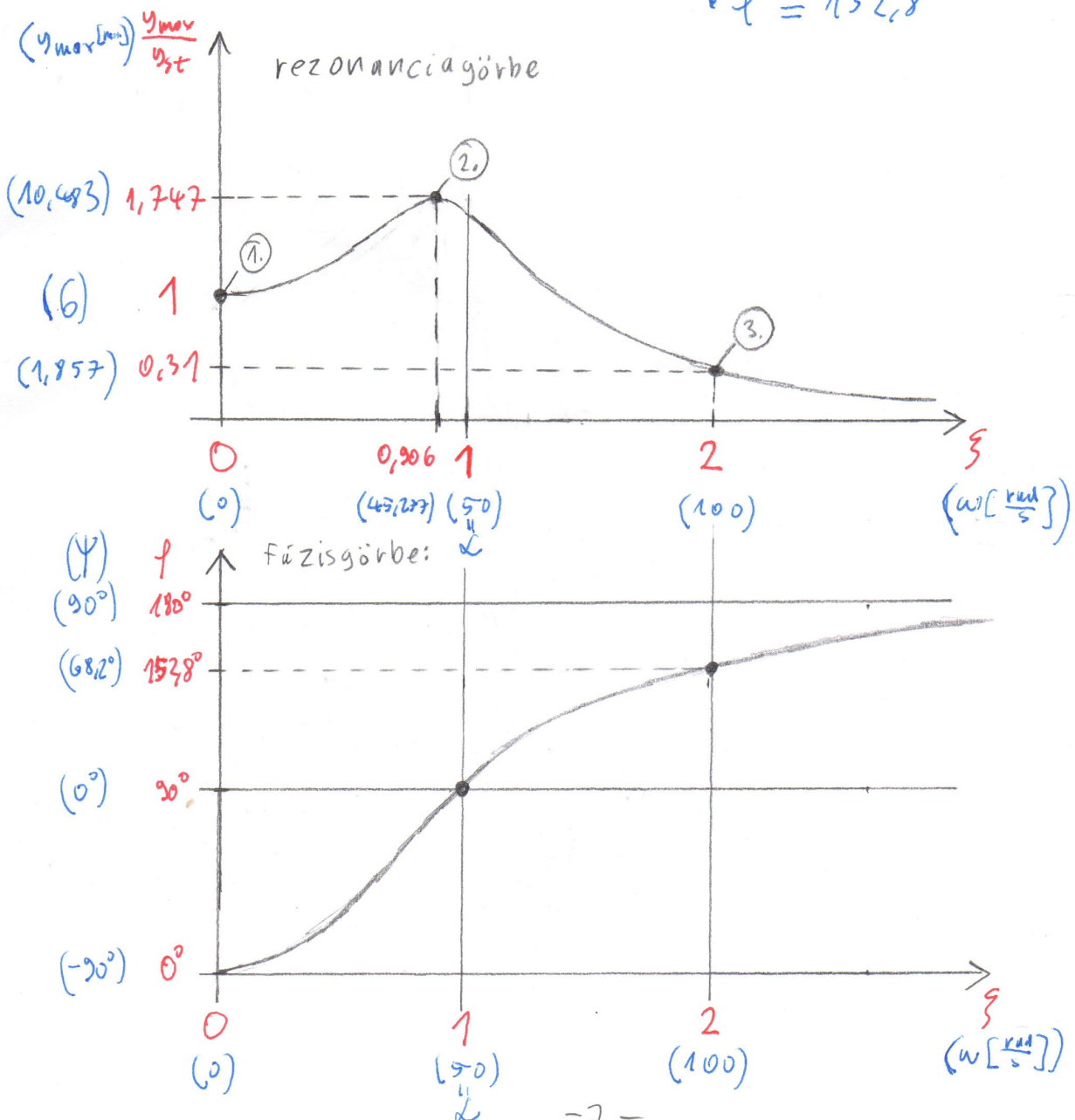
- $y_{üz \max} = \frac{y_{st}}{\sqrt{(1 - \xi_{üz}^2)^2 + 4 \xi_{üz}^2 \frac{\beta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{6}{\sqrt{(1 - 2^2)^2 + 4 \cdot 2^2 \cdot \frac{15^2}{50^2}}} = 1,857 \text{ mm}$

(Ezt utóbb már kiszámoltuk a 3.3 pontban)

- $\frac{y_{üz \max}}{y_{st}} = \frac{1,857}{6} = 0,31$

- $\psi = 68,2^\circ$

- $\varphi = 152,8^\circ$



4.2 Mekkora gerjesztő Freki / Frekiviszony esetén lesz
8mm ill. 1mm a maximális kitérés?

y_{st}

$$y_{max} = \frac{y_{st}}{\sqrt{(1-\xi^2)^2 + 4\xi^2 \frac{\beta^2}{2^2}}}$$

8mm-es maximális kitérés

1mm-es maximális kitérés

$$8 = \frac{6}{\sqrt{(1-\xi^2)^2 + 4\xi^2 \frac{15^2}{50^2}}}$$

$$64((1-\xi^2)^2 + 4\xi^2 \frac{15^2}{50^2}) = 36$$

$$64(1 - 2\xi^2 + \xi^4 + 0,36\xi^2) = 36$$

$$64(\xi^4 - 1,64\xi^2 + 1) = 36$$

$$64\xi^4 - 104,96\xi^2 + 64 = 36$$

$$64\xi^4 - 104,96\xi^2 + 28 = 0$$

$$\xi_{1,2}^2 = \frac{104,96 \pm \sqrt{104,96^2 - 4 \cdot 64 \cdot 28}}{2 \cdot 64}$$

$$= \begin{cases} 0,3353 \Rightarrow \xi_1 = \sqrt{0,3353} = 0,5791 \\ 1,3046 \Rightarrow \xi_2 = \sqrt{1,3046} = 1,1422 \end{cases}$$

$$w_1 = \xi_1 \cdot L = 0,5791 \cdot 50 = 28,955 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$w_2 = \xi_2 \cdot L = 1,1422 \cdot 50 = 57,11 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$1 = \frac{6}{\sqrt{(1-\xi^2)^2 + 4\xi^2 \frac{15^2}{50^2}}}$$

$$(1-\xi^2)^2 + 4\xi^2 \frac{15^2}{50^2} = 36$$

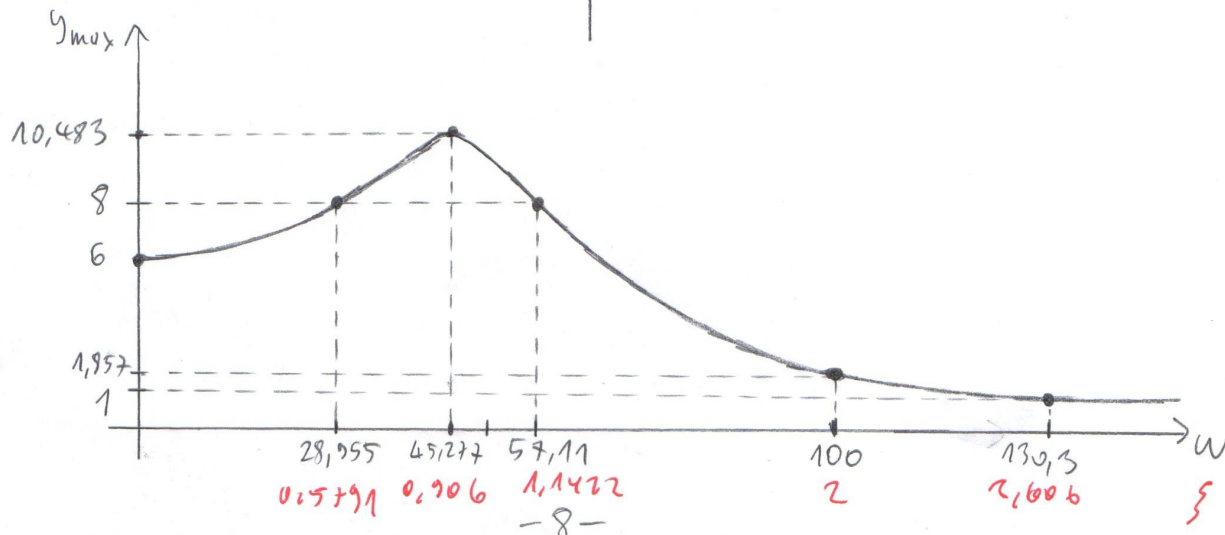
$$1 - 2\xi^2 + \xi^4 + 0,36\xi^2 = 36$$

$$\xi^4 - 1,64\xi^2 - 35 = 0$$

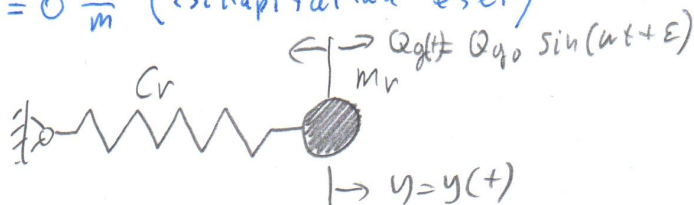
$$\xi_{1,2}^2 = \frac{1,64 \pm \sqrt{1,64^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2} =$$

$$= \begin{cases} 6,793 \Rightarrow \xi = \sqrt{6,793} = 2,606 \\ -9,15 \end{cases}$$

$$w = \xi \cdot L = 2,606 \cdot 50 = 130,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



b) $k_r = 0 \frac{N}{m}$ (csillapítatlan eset)



1. a rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_r \ddot{z} + \frac{1}{C_r} z = P_0 e^{i\omega t} \quad ; \quad z(t) = x(t) + i y(t)$$

$$\hookrightarrow P_0 = Q_{y0} e^{i\epsilon}$$

$$20 \ddot{z} + 50000 z = 300 e^{i \frac{\pi}{6}} \cdot e^{i 100 t}$$

a mozgásegyenlet általános (=teljes) megoldása

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t) = A e^{i\omega t} + B e^{i\omega t} =$$

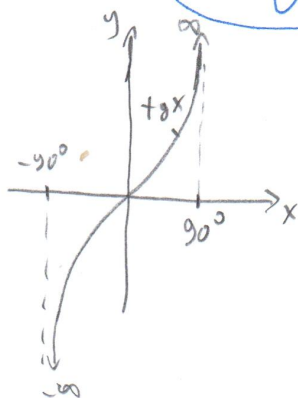
$$= \underbrace{(a+ib) e^{i\omega t}}_{\text{ez most nem cseng le de elhagyjuk}} + \underbrace{\frac{P_0}{i\omega z} e^{i\omega t}}_{\text{most is csak ezzel foglalkozunk}}$$

2. a komplex ellenállás meghatározása

$$Z = k_r + i \left(\omega m_r - \frac{1}{\omega C_r} \right) = 0 + i \left(100 \cdot 20 - \frac{1}{100 \cdot 2 \cdot 10^5} \right) = i 1500 \frac{N}{m}$$

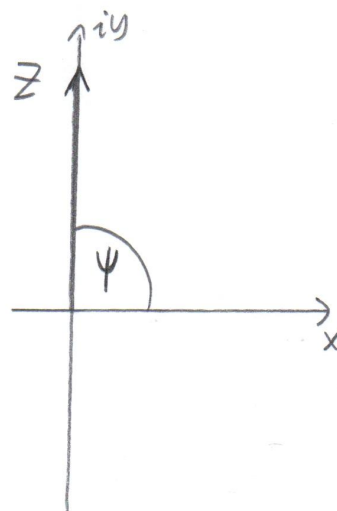
$$|Z| = \sqrt{1500^2} = 1500 \frac{N}{m}$$

$$\psi = \arctan \left(\frac{1500}{0} \right) \Rightarrow \psi = 90^\circ$$



(Ha $\omega < \omega_0$)

$$\psi = -90^\circ$$



3. IDŐTARTOMÁNYBELI VIZSGÁLAT (üzemi jellemzők)

3.1. komplex elmozdulás, sebesség, gyorsulás függvények

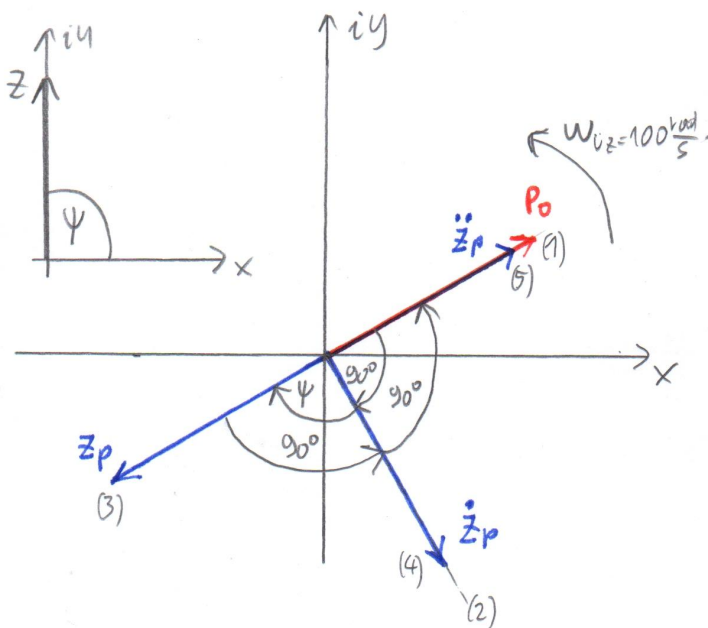
$$z_p(t) = \frac{P_0}{i\omega Z} e^{i\omega t} = \frac{300 e^{i\frac{\pi}{6}}}{i \cdot 100 \cdot i \cdot 1500} e^{i\omega t} =$$

$$= \frac{300}{-1 \cdot 100 \cdot 1500} e^{i\omega t} e^{i\frac{\pi}{6}} = -0,002 e^{i(\omega t + \frac{\pi}{6})}$$

$$\dot{z}_p(t) = i\omega z_p(t) = -i \cdot 2 \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{6})}$$

$$\ddot{z}_p(t) = i\omega i\omega z_p(t) = -\omega^2 z_p(t) = 20 e^{i(\omega t + \frac{\pi}{6})}$$

3.2. rezgőrendszer vektorábrája



$$P_0 = Q_0 \cdot e^{i\epsilon}$$

$$z_p(0) = \frac{P_0}{i\omega Z}$$

$\downarrow 90^\circ$ $\downarrow \psi$

a fáziskésés: $\phi + 90^\circ + \psi =$
 $= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ = \pi \text{ rad}$

$$\dot{z}_p(0) = i\omega z_p(0)$$

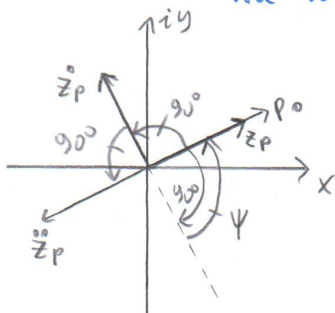
$\downarrow 90^\circ$

$$\ddot{z}_p(0) = i\omega \dot{z}_p(0) = -\omega^2 z_p(0)$$

$\downarrow 90^\circ$

- Csillapítatlan esetben a fáziskésés:

$\hookrightarrow$ ha $\omega < \omega_0 \Rightarrow \phi = 0^\circ$
 ha $\omega > \omega_0 \Rightarrow \phi = 180^\circ$



3.3 maximális kitérés, sebesség, gyorsulás:

- maximális kitérés:

$$y_{\max} = \frac{|P_0|}{\omega |Z|} = \frac{Q_{g0}}{\omega |Z|} = \frac{300}{100 \cdot 1500} = 0,002 \text{ m} = 2 \text{ mm}$$

- maximális sebesség:

$$v_{\max} = \dot{y}_{\max} = \omega y_{\max} = 100 \cdot 0,002 = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 200 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

- a maximális gyorsulás:

$$a_{\max} = \ddot{y}_{\max} = \omega^2 y_{\max} = 100^2 \cdot 0,002 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3.4. elmozdulás, sebesség, gyorsulás f.v.-ek

- az elmozdulás függvény:

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Im} [z_p(t)] = y_{\max} \sin(\omega t + \varepsilon - \varphi) = \\ &= 2 \cdot \sin\left(100t + \frac{\pi}{6} - \pi\right) = 2 \cdot \sin\left(100t - \frac{5}{6}\pi\right) \quad [\text{mm}] \end{aligned}$$

- a sebesség függvény:

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{y}(t) = \operatorname{Im} [\dot{z}_p(t)] = \dot{y}_{\max} \sin\left(\omega t + \varepsilon - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 200 \sin\left(100t + \frac{\pi}{6} - \pi + \frac{\pi}{2}\right) = 200 \sin\left(100t - \frac{1}{3}\pi\right) \quad \left[\frac{\text{mm}}{\text{s}}\right] \end{aligned}$$

- a gyorsulás függvény:

$$\begin{aligned} a(t) &= \ddot{y}(t) = \operatorname{Im} [\ddot{z}_p(t)] = \ddot{y}_{\max} \sin(\omega t + \varepsilon - \varphi + \pi) = \\ &= 20 \sin\left(100t + \frac{\pi}{6} - \pi + \pi\right) = 20 \sin\left(100t + \frac{\pi}{6}\right) \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] \end{aligned}$$

3.5 rugóban és csillapításkor elegendő maximális erő

- a rugóban elegendő maximális erő

$$F_{c\max} = \frac{y_{\max}}{c_r} = \frac{2}{2 \cdot 10^{-2}} = 100 \text{ N}$$

- a csillapításban elegendő maximális erő:

$$F_{k\max} = k_r y_{\max} = 0 \cdot 200 = 0 \text{ N} \quad (\text{nincs csillapítás})$$

4. FREKVIARTOMÁNYBELI VIZSGÁLAT

általános eset:
$$\frac{y_{\max}}{y_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)^2 + 4\xi^2 \frac{\beta^2}{\omega^2}}}$$

most nincs csillapítás $\Rightarrow \beta = 0$

$\Downarrow$

$$\frac{y_{\max}}{y_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)^2}} \Rightarrow y_{\max} = \frac{y_{st}}{\sqrt{(1-\xi^2)^2}}$$

vagy ω -val felírva:

$$\frac{y_{\max}}{y_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \Rightarrow y_{\max} = \frac{y_{st}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

- a rendszer jellemzői:

• a rendszer saját körfrekvencie: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{m r_{cr}}} = \frac{1}{\sqrt{20 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}} = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

• statikus kitérés $y_{st} = |f_0| = c_r |p_0| = c_r Q_{y_0} = 2 \cdot 10^{-9} \cdot 300 = 0,006 \text{ m} = 6 \text{ mm}$

4.1. A rezonancia görbe megrajzolása:

① pont: ÁLLÓ HELYZET (STATIKUS ESET)

- $\omega = 0$
- $\xi = 0$
- $y_{\max} = y_{st} = 6 \text{ mm}$
- $\frac{y_{\max}}{y_{st}} = \frac{y_{st}}{y_{st}} = 1$

② pont: REZONANCIAHELY

- $\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \omega_{rez} = \omega_0 = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- $\xi_{rez} = \frac{\xi}{\xi_0} = 1$
- $y_{\max}^{rez} = \frac{y_{st}}{\sqrt{(1-\xi_{rez}^2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{(1-1)^2}} = \frac{6}{0} \Rightarrow \infty$
- $\frac{y_{\max}^{rez}}{y_{st}} = \frac{\infty}{6} = \infty$

③ pont: ÜZEMI HÉLY

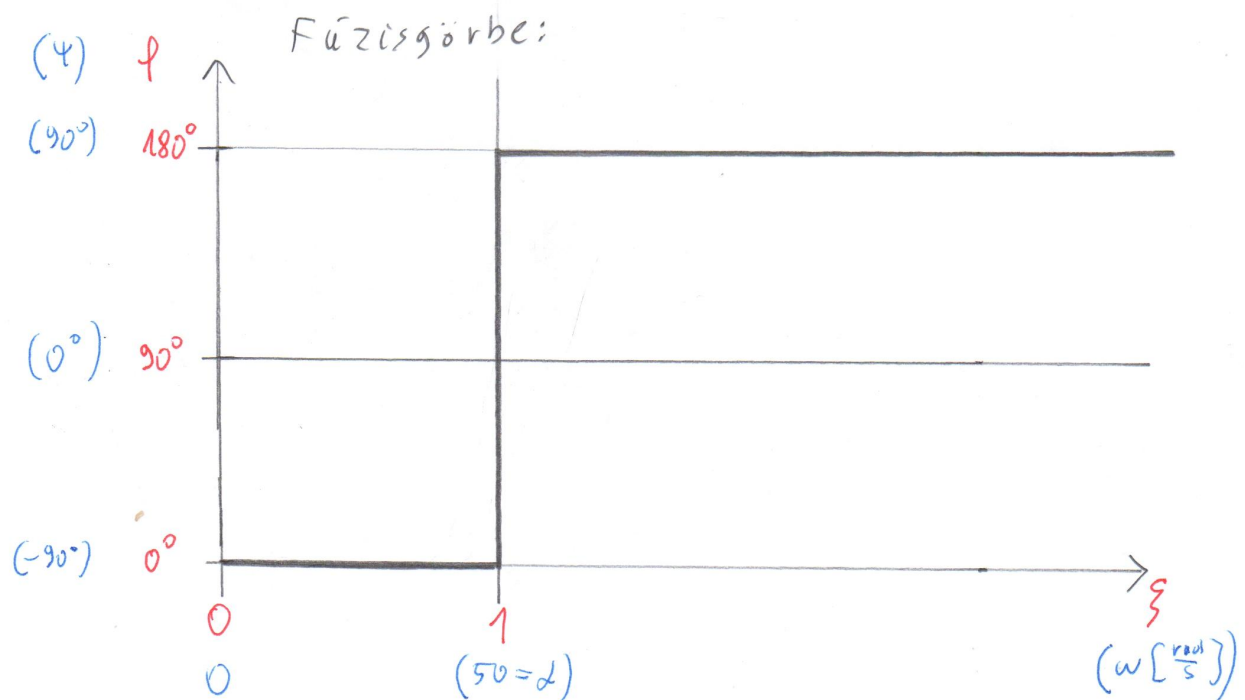
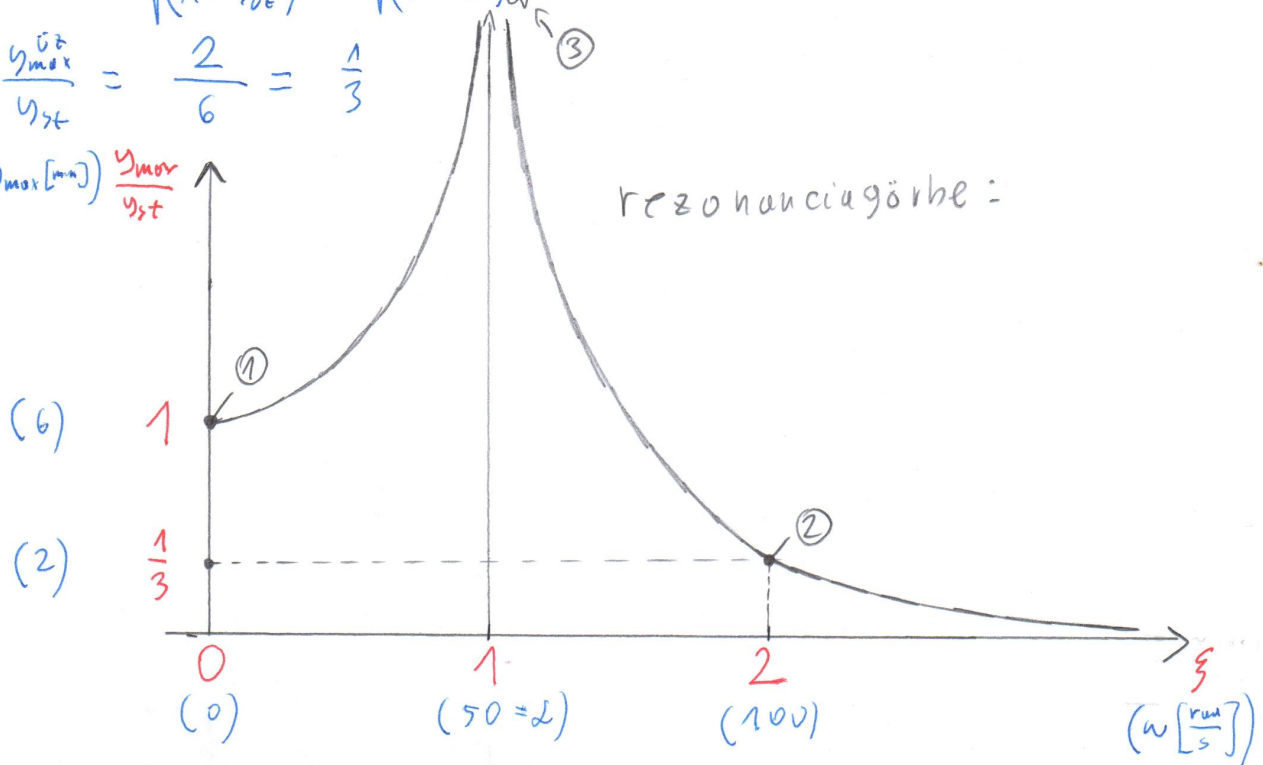
$$\bullet \omega_{üz} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\bullet \xi_{üz} = \frac{\omega_{üz}}{\omega_0} = \frac{100}{50} = 2$$

$$\bullet y_{\text{mags}} = \frac{y_{\text{st}}}{\sqrt{(1-\xi_{üz}^2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{(1-2^2)^2}} = \frac{6}{3} = 2 \text{ mm}$$

$$\bullet \frac{y_{\text{mags}}}{y_{\text{st}}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$(y_{\text{max}} [\text{mm}]) \frac{y_{\text{mags}}}{y_{\text{st}}}$$



4.2. Mekkora gerjesztő freki / frekvísiány esetén lesz

8mm, illetve 1mm a maximális kitérés?

$$y_{\max} = \frac{y_0}{\sqrt{(1-\xi^2)^2}}$$

$$8 = \frac{6}{\sqrt{(1-\xi^2)^2}}$$

$$8 = \pm \frac{6}{1-\xi^2}$$

$$1-\xi^2 = \pm \frac{6}{8}$$

$$\xi^2 = 1 \pm \frac{6}{8} = \begin{cases} \frac{14}{8} \Rightarrow \xi_1 = \sqrt{\frac{14}{8}} = 1,323 \\ \frac{2}{8} \Rightarrow \xi_2 = \sqrt{\frac{2}{8}} = 0,5 \end{cases}$$

$$\omega_1 = \xi_1 \cdot \omega = 1,323 \cdot 50 = 66,15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = \xi_2 \cdot \omega = 0,5 \cdot 50 = 25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$1 = \frac{6}{\sqrt{(1-\xi^2)^2}}$$

$$1 = \pm \frac{6}{1-\xi^2}$$

$$1-\xi^2 = \pm 6$$

$$\xi^2 = 1 \pm 6 = \begin{cases} 7 \Rightarrow \xi = \sqrt{7} = 2,646 \\ -5 \downarrow \end{cases}$$

$$\omega = \xi \cdot \omega = 2,646 \cdot 50 = 132,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

