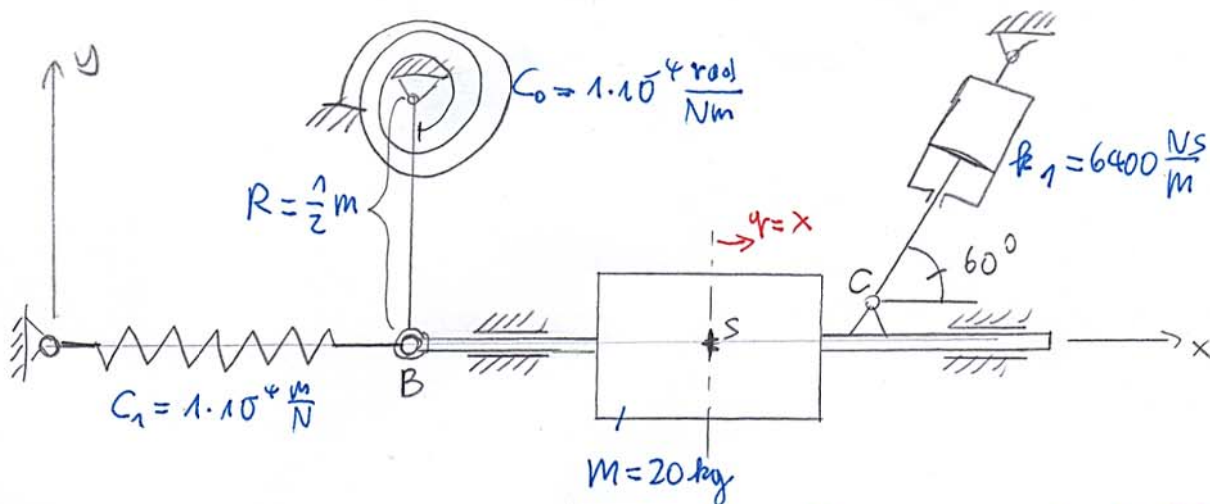


Rezgés tan 4. gyakorlat

ADOTT:



Kezdeti feltétel: $x_0 = 3 \text{ mm}$
 $\dot{x}_0 = 0,18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Ált. koordináták: $q = x \text{ [m]}$
 $\dot{q} = \dot{x} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
 $\ddot{q} = \ddot{x} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

- Feladat:
- A rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása
 - A redukált rezgőrendszer jellemzőinek meghatározása
 - A mozgásegyenlet átalakítása
 - A rezgőrendszer jellemzői (körfrekvencia, frekvencia, rezonancia)
 - A mozgásegyenlet komplex megoldása (kialakul-e fűziskés és rezgés?)
 - $z_h(t=0)$ és $\dot{z}_h(t=0)$ komplex vektorok ábrázolása
 - a csillapítás mértéke $\Rightarrow \Delta$ (logaritmikus dekrementum)

• A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q_c + Q_k$$

① ② ③ ④

Baloldali

① $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right)$ meghatározása:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = m \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) = m \ddot{x}$$

② $\frac{\partial E}{\partial q} = 0$

Jobboldali

③ Q_c meghatározása:

$$V = V_0 + V_1 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{C_0} + \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{C_1} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{x}{R} \right)^2}{C_0} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{C_1} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{x^2}{R^2 C_0} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{C_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R^2 C_0} + \frac{1}{C_1} \right) x^2$$

$$Q_c = - \frac{\partial V}{\partial q} = - \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R^2 C_0} + \frac{1}{C_1} \right) x^2 \right) =$$

$$= - \left(\frac{1}{R^2 C_0} + \frac{1}{C_1} \right) x$$

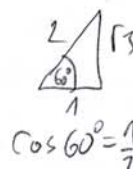
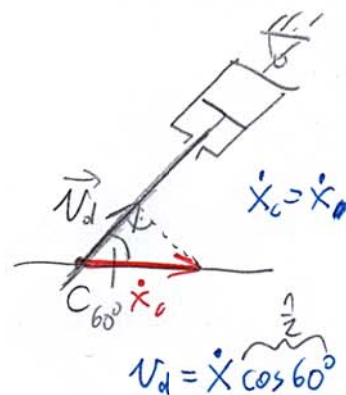
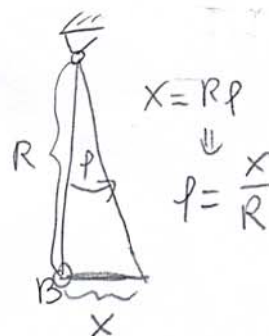
④ Q_k meghatározása:

$$D = \frac{1}{2} k_1 v_d^2 = \frac{1}{2} k_1 (\dot{x} \cos 60^\circ)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} k_1 \left(\dot{x} \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} k_1 \frac{1}{4} \dot{x}^2$$

$$Q_k = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = - \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} k_1 \frac{1}{4} \dot{x}^2 \right) =$$

$$= - \frac{1}{4} k_1 \dot{x}$$



visszahelyettesítve a Lagrange egyenletbe:

$$m \ddot{x} - 0 = - \left(\frac{1}{R^2 C_0} + \frac{1}{C_1} \right) x - \frac{1}{\tau} h_1 \dot{x}$$

$$\underbrace{m}_{M_{red}} \ddot{x} + \underbrace{\frac{1}{\tau} h_1}_{k_{red}} \dot{x} + \underbrace{\left(\frac{1}{R^2 C_0} + \frac{1}{C_1} \right)}_{\frac{1}{C_{red}}} x = 0$$

$$M_{red} \ddot{x} + k_{red} \dot{x} + \frac{1}{C_{red}} x = 0$$

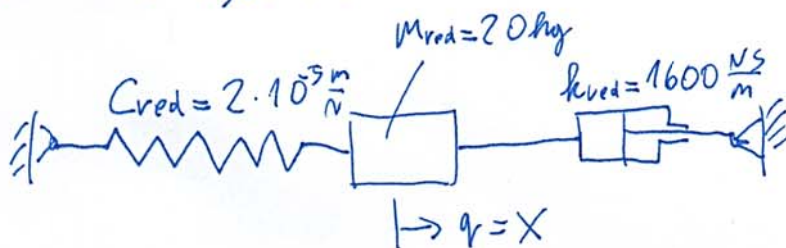
a redukált rezgőrendszer jellemzői

- $M_{red} = m = 20 \text{ kg}$
 - $k_{red} = \frac{1}{\tau} h_1 = \frac{1}{\tau} \cdot 6400 = 1600 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$
 - $\frac{1}{C_{red}} = \frac{1}{C_0 R^2} + \frac{1}{C_1} = \frac{1}{1 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2} + \frac{1}{1 \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^4 + 10^4 = 50000 \frac{\text{N}}{\text{m}} (= S_{red})$
- $$C_{red} = 50000^{-1} = \frac{1}{50000} = \frac{1}{5} \cdot 10^{-4} = 0,2 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

behelyettesítve:

$$20 \ddot{x} + 1600 \dot{x} + 50000 x = 0$$

a redukált rezgőrendszer:



• A mozgásegyenlet átalakítása:

- eredeti skálár differenciálegyenlet:

$$m_{red} \ddot{x} + k_{red} \dot{x} + \frac{1}{C_{red}} x = 0$$

- vezessük be a $z(t)$ komplex vektort

$$m_{red} \ddot{z} + k_{red} \dot{z} + \frac{1}{C_{red}} z = 0$$

$$\text{ahol } z(t) = x(t) + i y(t)$$

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)] \rightarrow \text{nem érdekes számunkra}$$

$$y(t) = \operatorname{Im}[z(t)] \rightarrow \text{ez írja le a mozgást!}$$

összünk m_{red} -del

$$\ddot{z} + \underbrace{\frac{k_{red}}{m_{red}}}_{2\beta \text{ csillapítást jellemzi}} \dot{z} + \underbrace{\frac{1}{m_{red} C_{red}}}_{\omega^2 \text{ rugalmasságok jellemzi}} z = 0$$

$$\ddot{z} + 2\beta \dot{z} + \omega^2 z = 0$$

$$z = e^{\lambda t}$$

$$\dot{z} = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{z} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\beta \lambda e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$

karunktorizációs egyenlet $\rightarrow \underbrace{(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2)}_{=0} \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$$

rendszer
pólus

$$\rightarrow \lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} = -\beta \pm \underbrace{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}_i = -\beta \pm i\omega$$

A rezgőrendszer jellemzői:

- A csillapítatlan szabad rezgőrendszer saját körfrekvije:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m_{\text{real}} C_{\text{vea}}}} = \frac{1}{\sqrt{20 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}} = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- A lenyegscsillapítóban kialakuló körfrekvi:

$$\beta = \frac{k_{\text{red}}}{2 m_{\text{rad}}} = \frac{1600}{2 \cdot 20} = \frac{1600}{40} = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

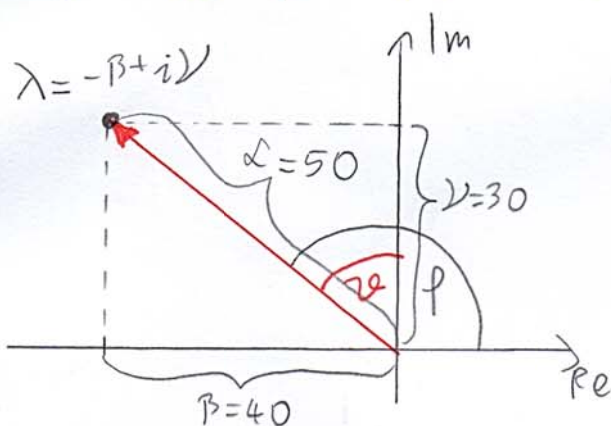
- Kialakul-e a rezgés?

$$\omega > \beta \Rightarrow \text{kialakul a rezgés}$$

$$\left(\begin{array}{l} \omega = \beta \Rightarrow \text{kritikus csillapítás} \\ \beta > \omega \Rightarrow \text{túlcsillapítás} \end{array} \right) \Rightarrow \text{nem alakulna ki rezgés}$$

- A csillapított szabad rendszer körfrekvenciája:

$$\nu = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} = \sqrt{900} = 30 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



- A rendszer pólus:

$$\lambda = -\beta + i\nu = (-40 + i30) \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- A csillapítási szög

$$\psi = \arctan \frac{\beta}{\nu} = \arctan \frac{40}{30} = 53,13^\circ$$

- A fáziskésés szöge:

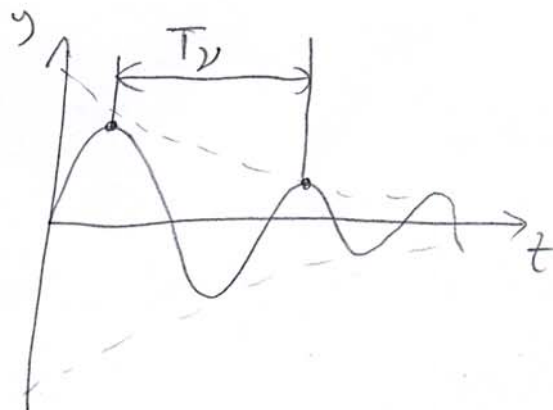
$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \psi = 90^\circ + 53,13^\circ = 143,13^\circ$$

- A rezgés frekvije:

$$f_\nu = \frac{\nu}{2\pi} = \frac{30}{2\pi} = 4,77 \text{ Hz}$$

- A periódusidő:

$$T_\nu = \frac{1}{f_\nu} = \frac{1}{4,77} = 0,209 \text{ s}$$



• A homogén mozgásegyenlet megoldásának előállítása

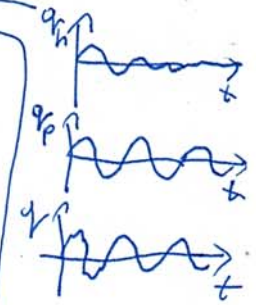
megjegyzés $z(t) = z_h(t) + z_p(t)$

↑
homogén
(lecsengő) rész

↑
partikuláris (átmeneti) rész

ha nincs gerjesztés $\Rightarrow z(t) = z_h(t)$

ha van gerjesztés $\Rightarrow z(t) \approx z_p(t)$



$$m_{\text{red}} \ddot{z} + k_{\text{red}} \dot{z} + \frac{\Lambda}{C_{\text{red}}} z = 0$$

• a mozgásegyenlet általános megoldása:

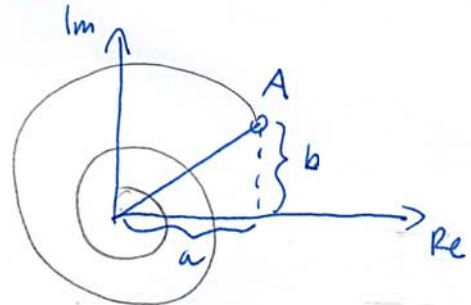
$$z_h(t) = A e^{\lambda t} = (a + ib) e^{(-\beta + i\nu)t} = \underbrace{(a + ib)}_{\text{kezdeti komplex amplitúdó}} \underbrace{e^{-\beta t}}_{\text{ez csökken, ez a komplex amplitúdó hosszát } (\rightarrow C_{\text{red}}) \text{ jelöljük}} \underbrace{e^{i\nu t}}_{\text{ez forgatja a komplex amplitúdót}}$$

• a és b konstansok a kezdeti feltételekből számíthatók:

$$z_h(t=0) = (a + ib) e^{(-\beta + i\nu) \cdot 0} = (a + ib)$$

$$y_0 = \text{Im}[z_h(t=0)] = \text{Im}[a + ib] = b$$

$$\Rightarrow \boxed{b = y_0} = 3 \text{ mm}$$



$$\dot{z}_h(t) = (a + ib)(-\beta + i\nu) e^{(-\beta + i\nu)t}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_h(t=0) &= (a + ib)(-\beta + i\nu) e^{(-\beta + i\nu) \cdot 0} = (a + ib)(-\beta + i\nu) = \\ &= -a\beta + i a\nu - ib\beta + i^2 b\nu = -(a\beta + b\nu) + i(a\nu - b\beta) \end{aligned}$$

$$\dot{y}_0 = \text{Im}[\dot{z}_h(t=0)] = \text{Im}[-(a\beta + b\nu) + i(a\nu - b\beta)] = a\nu - b\beta$$

$$\Rightarrow a = \frac{\dot{y}_0 + \beta b}{\nu} = \frac{0,18 + 40 \cdot 0,003}{30} = 0,01 \text{ m} = 10 \text{ mm}$$

$$A = a + ib = (0,01 + i 0,003) \text{ m} = (10 + i 3) \text{ mm}$$

• a komplex síkon értelmezett elmozdulás függvény:

$$z_h(t) = (a+ib) e^{(-\beta+iv)t} = \underline{\underline{(0,01 + i0,003) e^{(-40 + i30)t}}}$$

• a komplex síkon értelmezett sebességfüggvény:

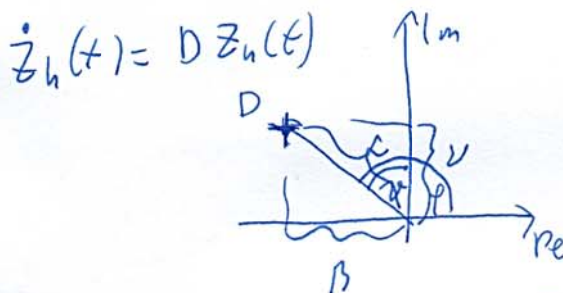
$$\begin{aligned} \dot{z}_h(t) &= \cancel{(a+ib)(-\beta+iv)} e^{(-\beta+iv)t} = \cancel{(0,01 + i0,003)(-40 + i30)} e^{(-40 + i30)t} = \\ &= \underbrace{(-\beta + iv)}_D \underbrace{(a+ib)}_{z_h(t)} e^{(-\beta+iv)t} = (-40 + i30)(0,01 + i0,003) e^{(-40 + i30)t} = * \end{aligned}$$

D
fáziskésés

A csillapítás mértékét jellemző szög:

$$\tan \varphi = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{40}{30}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arctan \frac{40}{30} = 53,13^\circ$$



A fáziskésés szöge: $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi = 90^\circ + 53,13^\circ = 143,13^\circ$

a szorzást elvégezve:

$$\begin{aligned} * &= (-40 \cdot 0,01 - i \cdot 0,003 \cdot 40 + i \cdot 30 \cdot 0,01 + \overbrace{1}^{-1} i \cdot 30 \cdot 0,003) e^{(-40 + i30)t} \\ &= (-0,4 - 0,12 - i0,12 + i \cdot 0,3) e^{(-40 + i30)t} = \\ &= \underline{\underline{(-0,48 + i0,18) e^{(-40 + i30)t}}} \end{aligned}$$

• ábrázolás komplex síkon $t=0$ időpontban:

$$z_h(t=0) = (0,01 + i0,003) e^{(-40 + i30) \cdot 0} = (0,01 + i0,003) \text{ m}$$

~~kezdő~~
kezdési kitérés

$$\dot{z}_h(t=0) = (-0,49 + i0,18) e^{(-40 + i30) \cdot 0} = (-0,49 + i0,18) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

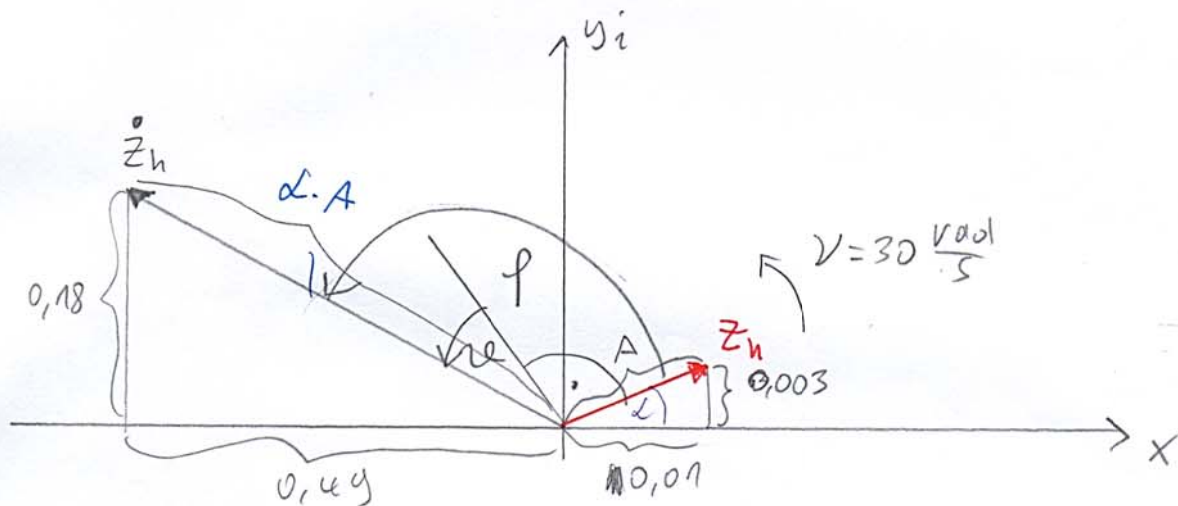
↑
kezdési sebesség

$$A = |z_h(t=0)| = \sqrt{0,01^2 + 0,003^2} = 0,01044 \text{ m}$$

komplex kitérés
abszolút értéke

$$|\dot{z}_h(t=0)| = \sqrt{0,49^2 + 0,18^2} = 0,522 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

komplex sebesség
abszolút értéke

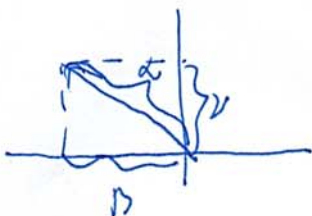


$A z_h(t)$ és $\dot{z}_h(t)$ komplex vektorok $\varphi = \frac{\pi}{2} + \psi$ szöget zárnak be egymással $\dot{z}_h \leftarrow \varphi \rightarrow z$

$$D = (-\beta + i\nu) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{szorozáskor nyújtja } z_h(t) \text{-t} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} + \psi \text{ szöggel } \hookrightarrow \text{forgatja } z_h(t) \text{-t} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{nyújtás} \\ \dot{z}_h(t) \end{array}$$

$$D = \mathcal{L} e^{i(\frac{\pi}{2} + \psi)} \Rightarrow \dot{z}_h(t) = D \cdot z_h(t) = \mathcal{L} z_h(t) e^{i(\frac{\pi}{2} + \psi)}$$

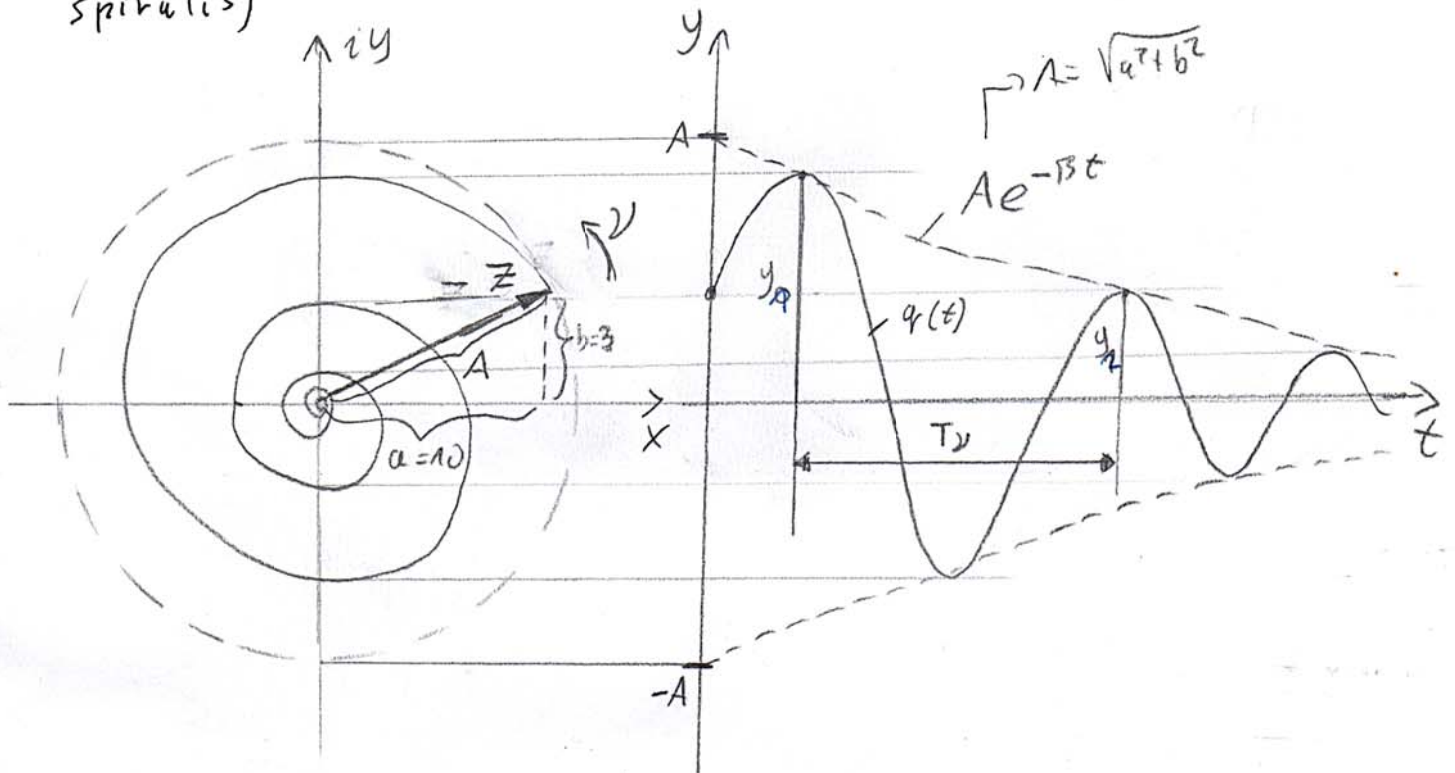
$$\underbrace{\mathcal{L} e^{i(\frac{\pi}{2} + \psi)}}_D \cdot \underbrace{A e^{i\psi}}_{z_h(t=0)} = \underbrace{\mathcal{L} A e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \psi)}}_{\dot{z}_h(t=0)}$$



ÁBRÁZOLÁS AZ IDŐ FÜGGVÉNYÉBEN

↓
Komplex elmozdulás
 az idő függvényében
 egy csiga (logaritmikus
 spirális)

↓
Skalár elmozdulás az idő
 függvényében



LOGARITMIKUS DEKREMENTUM

→ csillapítás mértékét jellemzi, egy periódus alatt mennyit csökken a kitérés

$$\Lambda = \ln \frac{y_0}{y_1} = \ln \left[\frac{A e^{(-\beta + i\omega)t}}{A e^{(-\beta + i\omega)(t+T_D)}} \right] =$$

$$= \ln \left[\frac{A e^{(-\beta + i\omega)t}}{A e^{(-\beta + i\omega)t} e^{(-\beta + i\omega)T_D}} \right] = \ln \left[\frac{1}{e^{(-\beta + i\omega)T_D}} \right] =$$

$$= \ln \left[\frac{1}{e^{\beta T_D} e^{i\omega T_D}} \right] = \ln \left[\frac{1}{e^{\beta \frac{2\pi}{\nu}} \underbrace{e^{i\omega \frac{2\pi}{\nu}}}_1} \right] = \ln \frac{1}{e^{-\beta \frac{2\pi}{\nu}}} =$$

$$= \ln e^{\beta \frac{2\pi}{\nu}} = \frac{\beta}{\nu} 2\pi$$

$$\Lambda = \frac{\beta}{\nu} 2\pi = \frac{40}{30} 2\pi = 8,377$$

$$\Lambda = \ln \frac{y_0}{y_1}$$

$$e^\Lambda = \frac{y_0}{y_1}$$

$$-8- \quad y_1 = \frac{y_0}{e^\Lambda} = \frac{0,005}{e^{8,377}} = 6,92 \cdot 10^{-7}$$