

1. ALAPFOGALMAK ÉS ÖSSZEFÜGGÉSEK

1.1 VEKTORTÉREK

- **Vektortér:** Az X nemüres halmazt (valós) vektortérnek nevezzük, ha X elemei fört értelmezett egy összeadás
 - R és X elemei fört pedig egy skalárral való szorzás úgy, hogy a vektortér-axiómák teljesülnek

• vektortér-axiómák:

Legyenek $x, y, z \in X$ és $\lambda, \mu \in R$ esetén az összeadástól és a szorzástól az alábbi műveleti axiómákat várjuk el:

- legyen az összeadás kommutatív (felcserélhető)

$$x + y = y + x$$

- legyen az összeadás asszociatív (sorrendítható)

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

- létezik X ben egy 0 zérusvektor, melyet bármilyen vektorra hozzáadva, nem változtatja meg annak értékét

$$x + 0 = x \quad \forall x \in X \text{-re}$$

- összeadás megfordítható (megfordítható) legyen: bármilyen $x \in X$ vektorra létezik olyan $x_{-1} \in X$ vektor, hogy az

$$\text{összegejük zérusvektora legyen: } x + x_{-1} = 0$$

- skalárral való szorzás asszociatív (sorrendítható) legyen:

$$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$$

- két fejte disztributivitást kívánunk meg:

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \quad \text{illetve} \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

- $1 \cdot x = x$

- **Altér:** Az $x_0 \subset X$ részhalmaz altér, ha x_0 maga is vektortér az X -beli műveletekre véve, tehát ha összeadunk két x_0 -beli vektort, az összeg is x_0 -ban marad, illetve egy x_0 -beli vektort ha szorzunk egy skalárral, ezek szorzata is x_0 -ban marad.

• Példák vektortérre

- a valós számok R halmaza a szokásos összeadással és szorzással

- a komplex számok C halmaza a komplex összeadással és a valós számmal való szorzással

- a valós szám n -esek R^n halmaza a komponensenkénti műveletekre véve:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

- az $n \times m$ -es mátrixok $M_{n \times m}$ halmaza a komponensenkénti műveletekre véve:

$$[a_{kj}] + [b_{kj}] := [a_{kj} + b_{kj}]$$

$$\lambda \cdot [a_{kj}] := [\lambda a_{kj}]$$

- legyen A tetszőleges halmaz. Az összes A -n értelmezett

$f: A \rightarrow R$ számértékű függvények halmaza a függvények összeadására és számmal való szorzására véve.

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

• Legyen $[a, b]$ egy rögzített zárt intervallum. Az összes $[a, b]$ -n értelmezett folytonos függvények $C[a, b]$ halmaza a függvények összeadására és minimál való szorzására nézve.
Ez a vektortér altér az $[a, b]$ -n értelmezett rektatémek.

• Szűkítve az előzőt, az összes $[a, b]$ -n értelmezett k -na folytonosan differenciálható függvények $C^k[a, b]$ halmaza a függvények összeadására és minimál való szorzására nézve.

$C^k[a, b]$ altér $C[a, b]$ -nek, illetve ha $m > k$ akkor

$C^m[a, b]$ altér $C^k[a, b]$ -nek.

Lineáris Kombinációk, összefüggőség, Függetlenség

• **Lineáris kombináció:** Legyen X vektortér, vegyünk elől

N db vektort $(x_1, x_2, \dots, x_N \in X)$ és N db skálárt $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R})$

Az ezekből képzett alábbi lineáris kombinációt hívjuk lineáris kombinációnak:

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_N \cdot x_N \in X$$

• **triviális lineáris kombináció:** minden $\lambda = 0$

• **nemtriviális lineáris kombináció:** legalább egy $\lambda \neq 0$

Legyen X vektortér. Ekkor a:

• **lineáris Függőség:** az $x \in X$ vektor lineárisan függ az $x_1, x_2, \dots, x_N \in X$ vektoroktól, ha előáll azok valamelyik lineáris kombinációjaként.

• **lineárisan összefüggő vektorendszer:** X -beli vektorok egy rögzített rendszere lineárisan összefüggő, ha van közöttük egy olyan vektor, mely lineárisan függ a többitől.

• **lineárisan független vektorendszer:** X -beli vektorok egy rögzített rendszere lineárisan független, ha közöttük egyik vektor sem függ lineárisan a többitől.

Az X tér egy, legfeljebb rendszereinek (végtelen elemszámú is lehet!) lineárisan függetlenségének nemzár, ha annak bármely rögzített rendszere lineárisan független.

• **Példa:** A 0 zérusvektor minden vektortól lineárisan függ.

Legyen X vektortér. Az $x_1, x_2, \dots, x_N \in X$ vektorok pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha létezik egy nemtriviális lineáris kombinációjuk, mely a zérusvektornal egyenlő.

Jelöljük a lineáris függetlenséget azt jelenti, hogy csak a triviális lineáris kombináció ad zérusvektort, minden más nem.

Vektorterek bázisa és dimenziója

• **bázis:** Az $A \subset X$ vektorkészlet az X vektortér egy bázisa, ha

• lineárisan független

• X minden eleme előáll A elemeinek lineáris kombinációjaként

• **dimenzió:** A bázis elemszáma

- Minden vektortérnek létezik bázisa

- Egy adott vektortér minden bázisa azonos elemszámú

• **Példák:**

Vektortér	dimenzió	példa bázisra
$\mathbb{R}$	1	$\{1\}$ $\{-4\}$ (0-in kívül bármi lehet)
$\mathbb{C}$	2	$\{1, i\}$ $\{1+i, 1-i\}$ $\{1+2i, 1-100i\}$
$\mathbb{R}^2$	2	$(1, 0), (0, 1)$ (standard bázis)
$\mathbb{R}^n$	n	$(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, 1, \dots, 0), (0, 0, 0, \dots, 1)$
n -ed fokú polinom	$n+1$	$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$

1.2 NORMÁLT TEREK, BANACH TEREK

Normált terek

- **normált tér:** Az X vektortér normált tér, ha értelmezünk rajta egy $\|\cdot\|$ -vel jelölt valós értékű függvényt (norma), mely kielégíti a norma-axiómákat.
- **norma-axiómák**
 - minden vektor normája egy nemnegatív valós szám
 $\|x\| \geq 0$
 - a norma csak akkor lehet 0, ha maga a vektor is 0
 $\|x\| = 0$ csak akkor ha $x = 0$
 - ha kétszeresen normál x -et és ennek kétszeresét a normáját, akkor ez a kétszeres abszolútértékkel kiemelhető a norma elé
 $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
 - a norma elég jól kell, hogy tartsa a háromnégyszegszégleget: két vektor összegének normája mindig kisebb-egyenlő, mint a normák összege: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

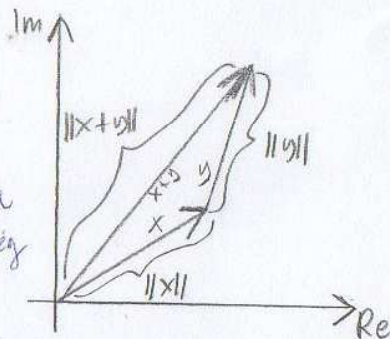
Itt fontosnak az abszolút érték alap tulajdonságai vannak az egyenlőség általánosítása

• Példák:

• $\mathbb{R}$ -en: $\|x\| := |x|$

• $\mathbb{C}$ -n: $\|z\| := |z|$

Itt háromnégyszegszégleget itt a geometriai háromnégyszegszégleget azonnal láthatjuk.



• Példák véges dimenziós térben

Mind bármilyen valós függvény lehet norma, amennyiben teljesíti a norma-axiómákat, egy reálvalós számotól norma definiálható $\mathbb{R}^n$ -ben a három leggyakrabban használt norma:

• **maximum norma:** $\|x\|_{\max} := \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$

háromnégyszegszégleget bizonyítása:

$$|x_k + y_k| := \max(|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|) = \|x + y\|_{\max}$$

$$|x_k| \leq \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = \|x\|_{\max}$$

$$|y_k| \leq \max(|y_1|, \dots, |y_n|) = \|y\|_{\max}$$

a háromnégyszegszégleget teljesíti a háromnégyszegszégleget abszolút érték háromnégyszegszégleget: $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \Rightarrow$ jól látható is kell hogy teljesüljön

• **összeg norma:** $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{k=1}^n |x_k|$

háromnégyszegszégleget bizonyítása:

$$\|x + y\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

• **evklideszi norma:** $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$

a háromnégyszegszégleget:

$$\|x + y\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2}$$

(Ez a Cauchy-evenlőtlenség következménye)

numerikus példa:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \|x\|_{\max} = \max(|1|, |2|, |-3|) = 3$$

$$\|x\|_1 = |1| + |2| + |-3| = 6$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |2|^2 + |-3|^2} = 3,74$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \|y\|_{\max} = \max(|2|, |-5|, |4|) = 5$$

$$\|y\|_1 = |2| + |-5| + |4| = 11$$

$$\|y\|_2 = \sqrt{|2|^2 + |-5|^2 + |4|^2} = 6,71$$

$$\|x+y\|_{\max} = \max(|1+2|, |2-5|, |-3+4|) = 3$$

$$\|x\|_{\max} + \|y\|_{\max} = 3 + 5 = 8$$

$$\|x+y\|_1 = |1+2| + |2-5| + |-3+4| = 7$$

$$\|x\|_1 + \|y\|_1 = 6 + 11 = 17$$

$$\|x+y\|_2 = \sqrt{|1+2|^2 + |2-5|^2 + |-3+4|^2} = 4,36$$

$$\|x\|_2 + \|y\|_2 = 3,74 + 6,71 = 10,45$$

• Példák végtelen dimenziós térben

$C[a,b]$ -n az alábbi három norma a leggyakoribb:

• maximum norma / C-norma:

$$\|f\|_C := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

• L_1 -norma:

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$$

• L_2 -norma:

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

$C^k[a,b]$ -n legyen:

C^k -norma

$$\|f\|_{C^k} := \sum_{j=0}^k \max_{a \leq x \leq b} |f^{(j)}(x)|$$

• Felhasonalás:

a) hibaszámítás: 2 függvény különbségének normája megmondja, hogy a 2 függvény közül melyik távol van egymástól. Ha az egyik függvény valamire a pontos megoldás, a másik meg a közelítő, akkor ez a norma megadja a közelítés hibáját.

b) konvergencia vizsgálat (lásd Banach tételről)

c) egyenletrendszer megoldásának hibája:

Egy n ismeretlenes egyenletrendszer megoldása feltérképezhető úgy, mint egy n komponensű, tehát R^n -beli vektor. Ekkor két ilyen vektor különbségének a normája megmondja, hogy a két vektor közül melyik távol van egymástól. Ha az egyik vektor az egyenletrendszer pontos megoldása, a másik meg a közelítő, akkor ez a norma megadja a közelítés hibáját.

Banach terek

Legyen X normált tér. Azt mondjuk, hogy az $(x_n) \in X$ sorozatot

- **Korlátos:** ha az $\|x_n\|$ számokat korlátos, azaz $\|x_n\| \leq C$ teljesül alkalmas $C \geq 0$ számra

- **Konvergencia** Éppedig az $x \in X$ rektához tart, ha az $\|x_n - x\|$ számokat zérushoz tart, azaz $\|x_n - x\| \rightarrow 0$

- **Cauchy-sorozat** ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan N küszöbérték, hogy $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ teljesül minden $n, m \geq N$ inakára

Jelölés: X normált térben minden konvergencia sorozat korlátos is, és minden konvergencia sorozat Cauchy sorozat is.

Felírta viszont nem feltétlenül igaz, tehát attól, hogy egy sorozat Cauchy-sorozat, még nem biztos, hogy konvergencia is. Éppen ezért ki kell mutatni, hogy a normált térben, amikor minden Cauchy sorozat konvergencia, ezek a teljes/Banach-terek.

- **Banach tér (teljes tér):** Az X normált tér Banach, ha teljes, ha X -ben minden Cauchy-sorozat konvergencia.

- **Példák Banach-terekre**

- $\mathbb{R}$ Banach-tér az abszolútérték-normával
- $\mathbb{C}$ Banach-tér az abszolútérték-normával

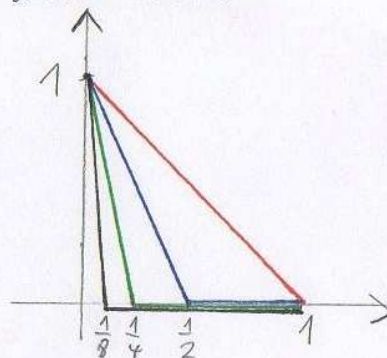
- $\mathbb{R}^n$ Banach-tér mind önmagában, mind maximum, mind euklidés normával

- $C[a, b]$ tér Banach-tér a C normával, de nem Banach-tér az L_1 normával

- $C^k[a, b]$ tér Banach-tér a C^k -normával, de nem Banach-tér az L_1 -normával

Egy konkrét példa:

Vegyük az alábbi $[0, 1]$ zárt intervallumon folytonos függvényekből alkotott sorozatot:



Az ábrázolt függvények

- L_1 norma szerint tart a 0 f. hez
- C norma szerint ez nem is konvergencia sorozat

- **normák ekvivalenciája** Az X normált térben értelmezett $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek, ha alkalmas $C_1, C_2 \geq 0$ számok mellett $\|x\|_1 \leq C_1 \|x\|_2$ és $\|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$ teljesül minden $x \in X$ esetén.

- Megmutatjuk, hogy az egyik felülről becsülhető a másikkal alkalmas konstans mellett.

- Ha két norma ekvivalens, akkor benne van ugyanazok a konvergencia ill. Cauchy-sorozatok.

- Minden véges dimenziós tér normált tér
- Véges dimenziós térben minden norma ekvivalens
- Ha az $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek, akkor egy sorozat pontosan akkor konvergens (ill. Cauchy-sorozat) az $\|\cdot\|_1$ norma szerint, ha a $\|\cdot\|_2$ norma szerint is az.
- Ha az $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek, akkor a tér pontosan akkor teljes az $\|\cdot\|_1$ norma szerint ha a $\|\cdot\|_2$ norma szerint is az
- Minden normált tér teljesíthető

Így vizsgáljuk pl. az $L_1(a,b)$ és az $L_2(a,b)$ tereket

1.3 EUKLIDESZI-TÉREK, HILBERT-TÉREK

- **Euklideszi tér:** Az X rektatér euklideszi tér, ha értelmezve van rajta egy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ral jelölt békáló szorzat (valós vagy komplex) függvény, melyet **skaláris szorzat**-nak hívunk és a következő tulajdonságokat teljesíti:

I. Bármely rektatérben az önmagával vett skaláris szorzata ≥ 0 és csak akkor lehet 0, ha maga az X zérusvektor.

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ és } \langle x, x \rangle = 0 \text{ csak akkor ha } x = 0$$

II. konjugált kommutativitás: tehát ha megismerem a tényleg sorozatot egymással kapom, mintha ennem a konjugáltját $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$

III. Az előtér tényleg "egy normá kiemelhető" (vagy a mátrixokból a normá kiemelhető)

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle ; \langle x, \beta y \rangle = \overline{\beta} \langle x, y \rangle$$

IV. distributív az összeadás fölött (tehát a skaláris normát tagonként képezhető)

$$\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

- Minden X euklideszi tér egyúttal normált tér is a **skaláris szorzat által indukált normával**:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

- Minden $x, y \in X$ esetén érvényes a **Cauchy egyenlőtlenség**

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

(egyenlőség csak akkor fordulhat elő, ha x és y egymás konstansszorosa)

Tehát minden euklideszi tér automatikusan normált tér is, viszont az nem biztos, hogy még Banach is. Ha még Banach is, akkor ő már Hilbert-tér.

- **Hilbert-tér:** Olyan X euklideszi tér, amely mint normált tér teljes (a skaláris normát által indukált norma szerint).

- Minden véges dimenziós euklideszi tér Hilbert-tér
- Minden euklideszi tér Hilbert-térre bővíthető

Cauchy - egyenlőtlenség bizonyítása

- Minden euklideszi térben:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle\end{aligned}$$

- A torálikon az egyenlőség kedvéért tegyük fel, hogy a tér valós.

- Vegyük az alábbi egyenlőtlenséget, mely tetszőleges $x, y \in X$, illetve $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén mindig igaz:

$$\|x - \lambda y\|^2 \geq 0$$

A baloldalon elég lesz a négyzetek elveletét:

$$\|x\|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0$$

Legyen $\lambda := \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$, így a fenti egyenlőtlenség:

$$\|x\|^2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \langle x, y \rangle + \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2} \|y\|^2 \geq 0 \quad / \cdot \|y\|^2$$

$$\|x\|^2 \|y\|^2 - 2 \langle x, y \rangle \langle x, y \rangle + \|x\|^2 \|y\|^2 \geq 0$$

$$2 \|x\|^2 \|y\|^2 \geq 2 \langle x, y \rangle^2$$

$$\|x\| \|y\| \geq \langle x, y \rangle$$

- Az x helyére annak ellentettjét írva:

$$\|x\| \|y\| \geq -\langle x, y \rangle$$

is igaz, azaz valóban:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

háromszög - egyenlőtlenség bizonyítása a skaláris szorzat által indukált normában

- Ez a Cauchy - egyenlőtlenség következménye, mivel:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\text{ahol } 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leq 2 |\langle x, y \rangle|$$

$$2 |\langle x, y \rangle| \leq 2 \|x\| \|y\|$$

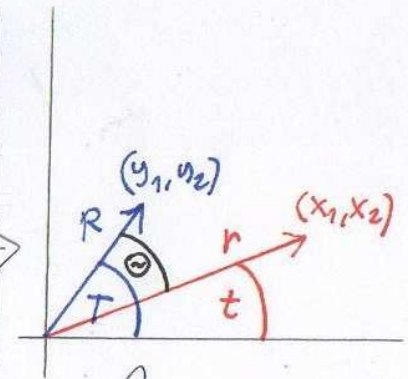
így tehát teljesül a háromszög egyenlőtlenség:

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2$$

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

Példák Hilbert terekre

tér	skaláris szorzat:
$\mathbb{R}$ tér	$\langle x, y \rangle := xy$
$\mathbb{C}$ tér	$\langle x, y \rangle := x \bar{y}$
$\mathbb{R}^2$ tér	$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2$
$\mathbb{R}^n$ tér	$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$



A skaláris szorzat geometriai nemlétezés $\mathbb{R}^2$ térben

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = r \cos t \cdot R \cos T + r \sin t \cdot R \sin T =$$

$$= Rr (\cos t \cos T + \sin t \sin T) = Rr \cos(T-t) = R \cdot r \cdot \cos \Theta$$

$$\text{mivel: } \langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \Theta$$

Ahol Θ az x és y vektorok által bezárt szög

- Az $\mathbb{R}^n$ térben az adott skaláris normát az euklideszi normát indukálja, viszont sem a maximum norma, sem az összeg-norma nem indukálható skaláris normával.

- A Cauchy - egyenlőtlenség leírható alakja itt:

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2}$$

• A $C[a, b]$ tér euklideszi térrel való skaláris normával:

$$L_2\text{-skaláris szorzat: } \langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

de nem teljes, azaz nem Hilbert-tér. Az $L_2(a, b)$ tér viszont Hilbert-tér.

A Cauchy - egyenlőtlenség leírható alakja most:

$$\left| \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

(Cauchy - Schwarz - egyenlőtlenség)

Az $C[a, b]$ térben sem a maximum norma, sem az L_1 norma nem indukálható skaláris normával.

• Az $C^k[a, b]$ tér euklideszi térrel való skaláris normával:

$$H^k\text{-skaláris szorzat: } \langle f, g \rangle := \sum_{\alpha=0}^k \int_a^b f^{(\alpha)}(x) \overline{g^{(\alpha)}(x)} dx$$

de nem teljes, azaz nem Hilbert-tér.

teljesüléssel: $H^k[a, b]$ tér (Sobolev-tér)

Ortogonalitás

Az euklideszi térre általánosítható a geometriai merőlegesség

• **ortogonalitás/merőlegesség:** Az X euklideszi térben az $x, y \in X$ vektorok ortogonálisak/merőlegesek, ha skaláris szorzatuk zérus.

Pitagorász-tétel: Ha az x és y vektorok ortogonálisak, akkor összegük normanégyrete a normanégyretek összegével egyenlő:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Az összefüggés négyesek helyén is általánosítható

• A legjobb lineáris approximáció problémája:

Legyen X egy normált-tér, $X_0 \subset X$ egy altér, $x \in X$ egy adott pont. Keressünk olyan $x_0 \in X_0$ pontot, melyre $\|x - x_0\|$ a lehető legkisebb!

Ha X Hilbert-tér, $X_0 \subset X$ zárt altér, akkor a legjobb lineáris approximáció problémája egyértelműen megoldható. Továbbá ekkor az $(x - x_0)$ vektor ortogonális X_0 összes elemére.

Az x_0 vektort az x vektor X_0 -ra vetített ortogonális vetületének nevezzük.

1.4 FOLYTONOS LINEÁRIS OPERÁTOROK

• lineáris leképezés / lineáris operátor:

az $A: X \rightarrow Y$, X és Y vektorterek közötti leképezés, amennyiben minden $x, y \in X$ rektor és λ esetén teljesül, hogy:

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

$$A(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot A(x)$$

• Példák lineáris leképezésre:

$A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$Ax := a \cdot x$	$a \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans
$D: C^1[a,b] \rightarrow C[a,b]$	$Df := f'$	D a differenciálás operátora
$I: C[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$	$I f := \int_a^b f(x) dx$	I lineáris funkcionál
$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	$x \rightarrow Ax$	$A \in M_{n \times n}$ mátrix x n elemű vektorszor
$\delta: C[I] \rightarrow \mathbb{R}$ (Dirac-féle δ -funkcionál)	$\delta f := f(0)$	I egy 0 -t tartalmazó rész, zárt intervallum

Korlátosság és folytonosság

Legyenek X, Y normált terek.

$A: X \rightarrow Y$ egy lineáris operátor

• **Korlátosság:** Az $A: X \rightarrow Y$ lineáris operátor **korlátos**, ha van olyan $K \geq 0$ szám, hogy $\|Ax\| \leq K \|x\|$ teljesül minden $x \in X$ esetén. K -t az A operátor egy **korlátjának** nevezzük.

Egy $A: X \rightarrow Y$ lineáris operátor **pontosan akkor korlátos**, ha **folytonos**.

• **operátornorma:** A operátor normája A legkisebb "telő" korlátja. jele: $\|A\|$

$$\|A\| = \sup \{ \|Ax\| : x \in X, \|x\| \leq 1 \}$$

Törvények: ha az $A: X \rightarrow Y$ lineáris leképezés **folytonos** (korlátos), akkor $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ és $\|A\|$ a legkisebb ilyen tulajdonságú szám

az operátornorma függ az X és Y terek normáitól.

Ha $A: X \rightarrow Y$ és $B: Y \rightarrow Z$ folytonosak, akkor BA normatoperátor is az és $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

• Példák korlátos (folytonos) lineáris operátorokra:

• $I: X \rightarrow X$ identitás operátor folytonos, normája 1 (az X tér normájától függetlenül).

• A zérusoperátor folytonos, normája 0 (az X tér normájától függetlenül)

Ha X, Y véges dimenziósak, akkor minden $A: X \rightarrow Y$ lineáris operátor folytonos is

- A differenciálás $D: C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ $Df := f'$ operátor folytonos e terek normái szerint
- A Dirac-funkcionál a $C(1)$ -norma szerint folytonos, de az L_1 norma szerint nem az.

Mátrixok és véges dimenziós lineáris leképezések

- Legyen $A \in M_{m \times n}$ és tekintjük a
 $R^n \rightarrow R^m \quad x \rightarrow Ax$ leképezést.

Így $R^n \rightarrow R^m$ lineáris leképezést definiáltunk, melyet egyszerűen A -val jelölünk. Így minden mátrixnak egyértelműen megadható a leképezés, így minden mátrixnak egyértelműen megadható a leképezés és viszont.

Ugyanakkor $M_{m \times n}$ maga is vektortér, így többféle mátrixnormát is értelmezhetünk:

1) Mátrixnormák, melyek nem operátornormák

Ezek a normák nem indukálhatók rektorminnál (az egység mátrix normája nem 1)

- **Összeg-norma:** Az összes mátrix elem abszolút értékével az

$$\|A\|_1 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{kj}|$$

- **Frobenius-norma:** Az összes mátrixelem négyzetének összegeként

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{kj}|^2}$$

2) Mátrixnormák, melyek operátornormák

Ezek a normák rektorminnál indukálhatók.

Sor-norma

Ha R^m -ben és R^n -ben is egyaránt a maximum-norma adott, akkor az operátornorma az abszolút értékével vett sorok maximuma.

$$\|A\|_{\max} = \max_{1 \leq k \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$$

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{\max} &= \max_{1 \leq k \leq m} \left| \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right| \leq \max_{1 \leq k \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{kj}| \cdot |x_j| \leq \\ &\leq \left(\max_{1 \leq k \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{kj}| \right) \cdot \left(\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \right) = \|A\|_{\max} \cdot \|x\|_{\max} \end{aligned}$$

Osztóp-norma

Ha R^m -ben és R^n -ben is egyaránt az összeg-norma adott, akkor az operátornorma az abszolút értékével vett oszlopok maximuma:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^m |a_{kj}|$$

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{k=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right| \leq \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{kj}| \cdot |x_j| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m |a_{kj}| \right) \cdot |x_j| \leq \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^m |a_{kj}| \right) \cdot \sum_{j=1}^n |x_j| = \|A\|_1 \cdot \|x\|_1 \end{aligned}$$

spektrál-norma

Ha $\mathbb{R}^m$ -ben és $\mathbb{R}^n$ -ben egyaránt az euklideszi norma adott, akkor az operátornorma az A^*A szimmetrikus legnagyobbsajátértékkel pont megegyezik.

$$\|A\|_2 = (\lambda_{\max}(A^*A))^{\frac{1}{2}}$$

Speciális eset: ha A önadjungált, pozitív definit, akkor a spektrálnorma megegyezik az eredeti A mátrix spektrál-normával (legnagyobb abszolút értékű sajátértékkel)

$$\text{ha } A^* = A \Rightarrow \|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|$$

numerikus példák

$$1) A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 2 & -6 & -3 \\ 8 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

- összeg-norma:

$$\|A\|_1 = 2 + 6 + 9 + 2 + |-6| + |-3| + 8 + 0 + |-7| = \underline{\underline{43}}$$

- Frobenius-norma:

$$\|A\|_F = \sqrt{2^2 + 6^2 + 9^2 + 2^2 + (-6)^2 + (-3)^2 + 8^2 + 0^2 + (-7)^2} = \underline{\underline{16,823}}$$

- sor-norma:

$$\|A\|_{\max} = \max(\overbrace{2+6+9}^{17}; \overbrace{2+|-6|+|-3|}^{11}; \overbrace{8+0+|-7|}^{15}) = \underline{\underline{17}}$$

- oszlop-norma:

$$\|A\|_1 = \max(\overbrace{2+2+8}^{12}; \overbrace{6+|-6|+0}^{12}; \overbrace{9+|-3|+|-7|}^{19}) = \underline{\underline{19}}$$

- spektrál-norma:

$$\|A\|_2 = (\lambda_{\max}(A^*A))^{\frac{1}{2}}$$

- Első lépésként A mátrix adjungáltját kell meghatározni. Mivel A valós elemű, az adjungált megegyezik a transponálttal:

$$A^* = A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 6 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

- Második lépésként határozzuk meg A^*A szimmetrikus mátrixot:

$$A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 2 & -6 & -3 \\ 8 & 0 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 6 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 0 & -44 \\ 0 & 72 & 72 \\ -44 & 72 & 139 \end{bmatrix}$$

- Harmadik lépésként határozzuk meg A^*A mátrix sajátértékeit

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 72-\lambda & 0 & -44 \\ 0 & 72-\lambda & 72 \\ -44 & 72 & 139-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(72-\lambda)[(72-\lambda)(139-\lambda) - 72 \cdot 72] + (-44)[-(-44) \cdot (72-\lambda)] = 0$$

$$(72-\lambda)[(72-\lambda)(139-\lambda) - 72^2 - 44^2] = 0$$

$$(72-\lambda)(\lambda^2 - 211\lambda + 2888) = 0$$

$$\lambda = \begin{cases} 196,2868 \\ 72 \\ 14,7131 \end{cases}$$

- Negyedik lépésként azokat kell venni a legnagyobbsajátértékek közül, és meghatározni a spektrál-normát:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}} = \sqrt{196,2868} = \underline{\underline{14,0102}}$$

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- összeg norma:

$$\|A\|_1 = 3 + 2 + 2 + 5 = \underline{12}$$

- Frobenius norma:

$$\|A\|_F = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2 + 5^2} = \underline{6,407}$$

- sor-norma:

$$\|A\|_{\max} = \max(\overbrace{3+2}^5; \overbrace{2+5}^7) = \underline{7} \quad (\text{Mivel a mátrix}$$

- oszlop-norma:

$$\|A\|_1 = \max(\overbrace{3+2}^5; \overbrace{2+5}^7) = \underline{7} \quad (\text{Mivel a mátrix}$$

- spektrál-norma:

Mivel a megadott mátrix szimmetrikus (önadjungált), a spektrál-norma az eredeti mátrix spektrálmagasságával számítható:

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq 2} |\lambda_i(A)|$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(5-\lambda) - 2 \cdot 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 11 = 0$$

$$\lambda = \begin{cases} 6,236 \\ 1,7639 \end{cases}$$

$$\|A\|_2 = \max(6,236; 1,7639) = \underline{6,236}$$

A két példától látható, hogy a Frobenius-norma a spektrál-normához közelebb van, annál valamilyen normált értéket ad.

A Frobenius-norma egyik nagy jelentősége, hogy könnyen számítható és felülről becsli a mátrix normált spektrál-normát.

Önadjungált (szimmetrikus) mátrixok

• adjungált / konjugált transzponált / Hermite transzponált

az $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}$ mátrix adjungáltjának / konjugált transzponáltjának / Hermite transzponáltjának az

$$A^* = \overline{a_{ji}} \in M_{n \times n} \text{ mátrixot nevezzük.}$$

Tehát felcseréljük a sorokat az oszlopokkal és az egyes elemeket komplex konjugáltjukkal.

Ha a mátrix elemi valós, akkor a konjugálás nem változtat semmit, ehhez az adjungált megegyezik a transzponálttal.

Fontos: az itt definiált adjungált fogalom nem becsendő össze a mátrixok inverzének képzéséhez hasonlóan nem kell "klemikus adjungálttal"!

• önadjungált: $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}$ mátrix önadjungált,

ha $A = A^*$, azaz $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$ minden i, j indexpárra

• szimmetrikus mátrix: Egy valós elemű mátrix pontosan akkor önadjungált, ha szimmetrikus, azaz $a_{ji} = a_{ij}$ teljesül minden i, j indexpárra

Minden $A \in M_{n \times n}$ mátrix és $x, y \in \mathbb{C}^n$ esetén:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

IHa A önadjungált, akkor:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

IHa $A \in M_{n \times n}$ önadjungált mátrix, akkor:

- A -nak minden sajátértéke valós
 - a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak
 - A -nak van n db párhuzamosan ortogonális sajátvektora
 - az euklideszi skalárszorzat által indukált q-számítás:
- $$\|A\|_2 = \max \{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}, \text{ ahol } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ jelöli } A \text{ sajátértékeit.}$$

numerikus példák:

$$1) A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 2-3i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 2-3i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}$$

$A = A^*$, tehát ez a mátrix önadjungált.

$$2) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$A = A^*$, tehát ez a mátrix önadjungált

$$3) A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} -i & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$$

$A \neq A^*$, tehát ez a mátrix nem önadjungált

$$4) A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$$

$A \neq A^*$, tehát ez a mátrix nem önadjungált

$$5) A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$A = A^*$, tehát ez a mátrix önadjungált

és mátrix sajátértékei és sajátvektorai:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = 6 \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \langle v_2, v_3 \rangle = 0$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = 0$$

Látható, hogy az $A \in M_{3 \times 3}$ -nak 3 db párhuzamosan ortogonális sajátvektora van.

1.5 FOURIER-SOROK HILBERT-TEREKBEN

Ortogonalis rendszerek Hilbert-terekben

= Legyen X Hilbert-tér

- **Ortogonalis rendszer:** Egy $A \subset X$ rénhalmazt ortogonalis rendszerré nevezünk, ha bármely két különböző eleme ortogonalis (merőleges).
- **Ortonormált rendszer:** Az $A \subset X$ ortogonalis rendszer ortonormált, ha minden eleme 1 normájú.
- **Teljes ortogonalis rendszer:** Az $A \subset X$ ortogonalis rendszer teljes, ha csak a rénszektort ortogonalis A minden elemére.

Példák:

- $\mathbb{R}^n$ -ben a standard bázis, azaz az $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)$ vektoraiban teljes ortonormált bázis
- $\mathbb{R}^n$ -ben egy $n \times n$ -es normálított mátrix szimmetriájából összeállítható ortonormált bázis.
- $\mathbb{R}^n$ -ben minden n elemű ortogonalis bázis teljes
- $L_2(0, 2\pi)$ -ben (tehát a $0, 2\pi$ intervallumon végtelenen integrálható függvények terében) a négyes trigonometrikus rendszer alkotja az ortogonalis rendszert, tehát a:

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$$

Ez még nem ortonormált rendszer, de ha mindegyik függvényt leosztjuk az ő saját $L_2(0, 2\pi)$ -normájával, akkor $L_2(0, 2\pi)$ -ben teljes ortonormált rendszert kapunk.

Absztrakt Fourier-sor

= Legyen: • X Hilbert-tér

- $e_1, e_2, e_3, \dots \in X$ egy ortonormált rendszer
- $x \in X$ egy tetszőleges vektor

= Ekkor a:

- **Fourier-együtthatók:** Az $\langle x, e_k \rangle$ ($k=1, 2, \dots$) számok az x vektorhoz az $\{e_1, e_2, \dots\}$ ortonormált rendszerre vonatkozó Fourier-együtthatói.
- **Fourier-sor:** A $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k$ sor az x vektor Fourier-sora.

Véges, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormált rendszer esetén az $X_n := \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \cdot e_k$ vektor megegyezik az x vektorral az $X_n := [e_1, e_2, \dots, e_n]$ altérre való ortogonalis vetületével

- biz: legyen X_n az ortogonalis vetület, ekkor $X_n = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \cdot e_k$ és könnyen belátható, hogy $x - X_n$ ortogonalis minden e_j -re:
 $\langle x - X_n, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0$

- Bessel egyenlőtlenség:

Tetnőleges $\{e_1, e_2, \dots\}$ ortonormált rendszer szerinti Fourier-
együtthatók: $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$



- Következmény: Tetnőleges x ortogonális tetnőleges
 $\{e_1, e_2, \dots\}$ ortonormált rendszer szerinti Fourier-sor
konvergens (az X tér normájában)

- Parseval Formula: Ha az $\{e_1, e_2, \dots\}$ ortonormált
rendszer teljes, akkor az szerinti Fourier együtthatók:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$$

teljes a Fourier-sor összege éppen x -et állítja elő:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k$$

- Tehát ha van egy nem feltehetően teljes ortonormált
rendszerem, és ezen rendszer Fourier-együtthatóinak az
abszolút értékeinek a négyzetét összegezem, akkor kapok egy
végtelen, konvergens sort, tehát egy végtelen összeget, ami
biztos, hogy kisebb, vagy egyenlő, mint az eredeti x vektor
normanégyzete.

- Ha ez az ortonormált rendszer még teljes is, akkor a Bessel
egyenlőtlenségben a $\leq$ kivétel nélkül $=$ -re, így kapjuk a
Parseval-formulát

- Parseval Formula = egy kicsit általánosított Pitagorasz tétel (a végtelen dimenziós térben)

Tehát ha van egy X vektortér, akkor az $|\langle x, e_k \rangle|$
skalárszorzat abszolút értéke nem más, mint az x
vektornak a e_k vektorra való vetülete, tehát $e_1, e_2, \dots$ irányú
vetületeinek a hroma. És akkor a Parseval-formula azt
mondja ki, hogy az összegeket hromának (normájának) a
négyzete az egyenlő az x vektor, egymással merőleges vetületek
hromának a négyzetösszegével, ami tehát gyakorlatilag u.d.
mint a Pitagorasz-tétel.

Trigonometrikus Fourier-sorok $L_2(0, 2\pi)$ -ben

A Fourier-sorok teljes absztrakcióban tehát nem a trigono-
metrikus függvényekről, hanem sokkal inkább az ortogonalitásról
van szó (ami meg a Hilbert-térhez kapcsolódik), viszont
egy jó gyakorlati alkalmazás a trigonometrikus Fourier-sorok
használatára.

A trigonometrikus Fourier-sor az absztrakt Fourier sorból:

Most tehát az $L_2(0, 2\pi)$ -ben vizsgáljuk az absztrakt
Fourier-sort, ami akkor már már ki, hogy:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f(x), e_k \rangle \cdot e_k, \text{ ahol:}$$

• $f(x)$ az $L_2(0, 2\pi)$ telen, tehát a $0, 2\pi$ intervallumon
négyzetesen integrálható függvények tételek értelmezett
függvény

• e_k az $L_2(0, 2\pi)$ tér ortonormált rendszere

- Az $L_2(0, 2\pi)$ tér ortonormális rendszere: $(1, \cos kx, \sin kx)$

- Aztán, hogy ez a rendszer ortonormált legyen, mindhárom
függvényt le kell osztani az L_2 normájával, ezek pedig az
alábbiak:

$$\|1\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |1|^2 dx} = \sqrt{2\pi}$$

$$\|\cos kx\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\cos kx|^2 dx} = \sqrt{\pi}$$

$$\|\sin kx\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\sin kx|^2 dx} = \sqrt{\pi}$$

- Így tehát:

$$e_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right)$$

- Ezt behelyettesítve az absztrakt Fourier képletébe:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f(x), e_k \rangle \cdot e_k$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \cdot e_k dx \right) \cdot e_k$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}} dx, \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} dx, \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} dx \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right)$$

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx}_{d_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx}_{a_k} \cdot \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx}_{b_k} \cdot \sin kx$$

Tehát tetszőleges $f \in L_2(0, 2\pi)$ függvény előállítható az
 $L_2(0, 2\pi)$ -normában konvergencia

$$f(x) = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

trigonometrikus Fourier-sor, ahol az együtthatók:

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$$

Komplex exponenciális Függvény

A gyakorlaton megismételt jelenthet, hogy két különböző
függvényünk (sin és cos) van. A komplex exponenciális
függvény leírásához ezt a két különböző függvényt tudjuk
egyesíteni.

• exponenciális sor:

tesztöltes $z \in \mathbb{C}$ -re: $e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$

Az exponenciális sor minden $z \in \mathbb{C}$ esetén abszolút konvergens. Speciálisan, ha z valós, akkor összege éppen a körömszoros e alapú exponenciális függvény helyettesítési értékeivel.

Euler Formula: Minden $t \in \mathbb{R}$ esetén:

$$e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t$$

bizt: • a koszinusz függvény Taylor-sora:

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$$

• a szinusz függvény Taylor-sora:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

• a komplex exponenciális függvény Taylor-sora:

$$e^{it} = 1 + \frac{it}{1!} + \frac{i^2 t^2}{2!} + \frac{i^3 t^3}{3!} + \frac{i^4 t^4}{4!} + \frac{i^5 t^5}{5!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{it}{1!} - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} + \dots =$$

$$= \underbrace{1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots}_{\cos t} + i \cdot \underbrace{\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right)}_{\sin t}$$

DFT (diszkrét Fourier-transzformáció)

• diszkrét Fourier-transzformált:

Ha $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1} \in \mathbb{C}$ egy véges sorozat, ennek diszkrét Fourier-transzformáltja:

$$\hat{f}_h := \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\frac{2\pi i j h}{N}} \quad (h=0, 1, 2, \dots, N-1)$$

• kapunkat a Fourier-sorokkal:

- vegyük egy $0-2\pi$ intervallumon értelmezett (ill. 2π periódusos) függvényt

- vágjuk fel a $0-2\pi$ intervallumot egyenlőre N db részre

- ekkor egy rész mértéke (a lépésköz): $h = \frac{2\pi}{N}$

- így a j -edik pont helye: $x_j = j \cdot h = \frac{2\pi j}{N}$

- tekintünk az eredeti függvény x_j helyeken felvett f_j értékeit

$$f_j = f(x_j) = f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)$$

- ekkor az $\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\frac{2\pi i j h}{N}}$ összeg az

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} dx \text{ integrál egy Riemann összege}$$

- innen felhasználva az Euler-formulát:

$$\frac{1}{N} \hat{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\frac{2kj\pi}{N}i} \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx + i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = a_k + ib_k$$

ahol a_k és b_k a trigonometrikus Fourier-egütthatók

MŰVELETIGÉNY: $O(N^2)$ $\rightarrow$ ez MARIA NAGY!!!

• **IDFT (diszkrét inverz Fourier-transzformáció)**

Minden véges sorat egyértelműen rekonstrukálható a DFT ismeretében, írásuk:

$$f_k := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}_j e^{-\frac{2kj\pi}{N}i} \quad (k=0, 1, 2, \dots, N-1)$$

FFT (gyors Fourier-transzformáció)

- Az $O(N^2)$ műveletigény sokkal gyorsabb, de egy nemtriviális trükkkel drasztikusan le lehet csökkenteni ezt a műveletigényt

- Mivel $F_N: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ a DFT (lineáris!) operátort:

$$(F_N \hat{f})_k := \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}_j e^{\frac{2kj\pi}{N}i} \quad (k=0, 1, \dots, N-1)$$

- legyen N páros: $N := 2N_1$ és $(F_N \hat{f})_k$ kifejezésben valamely két a páros és páratlan indexű tagokat.

• legyen először csak: $k = 0, 1, \dots, N_1 - 1$:

$$(F_N \hat{f})_k = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_{2l} e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot 2l} + \sum_{l=0}^{N_1-1} \hat{f}_{2l+1} e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot (2l+1)} =$$

$$= \sum_{l=0}^{N_1-1} \hat{f}_{2l} e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot 2l} + e^{\frac{2\pi i}{N} k} \cdot \sum_{l=0}^{N_1-1} \hat{f}_{2l+1} e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot 2l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{N_1-1} \hat{f}_{2l} e^{\frac{2\pi i}{N_1} k l} + e^{\frac{2\pi i}{N} k} \cdot \sum_{l=0}^{N_1-1} \hat{f}_{2l+1} e^{\frac{2\pi i}{N_1} k l}$$

• az $N_1 + k$ alakú indexekre ($k=0, 1, \dots, N_1 - 1$) hasonlóan:

$$(F_N \hat{f})_{N_1+k} = \sum_{l=0}^{N_1-1} \hat{f}_{2l} e^{\frac{2\pi i}{N_1} (N_1+k) l} + e^{\frac{2\pi i}{N} (N_1+k)} \cdot \sum_{l=0}^{N_1-1} \hat{f}_{2l+1} e^{\frac{2\pi i}{N_1} (N_1+k) l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{N_1-1} \hat{f}_{2l} e^{\frac{2\pi i}{N_1} k l} - e^{\frac{2\pi i}{N} k} \cdot \sum_{l=0}^{N_1-1} \hat{f}_{2l+1} e^{\frac{2\pi i}{N_1} k l}$$

- Mindkét esetben, mindkét jelölési módra is egy-egy diszkrét Fourier-transzformált, de csak fele akkora rektorkkal.

Az előző rekurzív módon felírható, ha N 2-hatalom

Az FFT rekurzív algoritmusá:

- $N_1 = N/2$
- a páros indexű résa számolnak: $f^{(0)} := (f_0, f_2, \dots, f_{2N_1-2})$
- a páratlan indexű résa számolnak: $f^{(1)} := (f_1, f_3, \dots, f_{2N_1-1})$

Rekurzív hívásokkal, legyen az $f^{(0)}$ és $f^{(1)}$ DFT-je:

- $\hat{f}^{(0)} := F_{N_1} f^{(0)}$
- $\hat{f}^{(1)} := F_{N_1} f^{(1)}$

Ezután a teljes méretű (N) rektomah DFT-je már ezeknek a Fourier transzformáltaknak az összegeként, különbségeként áll elő:

- $(F_N f)_k := \hat{f}_k^{(0)} + e^{\frac{2\pi i k}{N}} \cdot \hat{f}_k^{(1)} \quad (k=0, 1, \dots, N_1-1)$
- $(F_N f)_{N_1+k} := \hat{f}_k^{(0)} - e^{\frac{2\pi i k}{N}} \cdot \hat{f}_k^{(1)} \quad (k=0, 1, \dots, N_1-1)$

ahol $N=1$ esetén $F_1 f := f$

Tehát az 1 elemű rektomah a diszkrét Fourier transzformáltja az önmagá

MŰVELETIGÉNY: $O(N \log N) \rightarrow$ ez SOKKAL JOBBS mint $O(N^2)$

Kétdimenziós diszkrét Fourier-transzformáció

• Az $f \in M_{N \times N}$ mátrix diszkrét Fourier-transzformáltja a következő

$\hat{f} \in M_{N \times N}$ mátrix:

$$\hat{f}_{k,j} = \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} f_{r,s} e^{\frac{2\pi i k r}{N}} e^{\frac{2\pi i j s}{N}}$$

• jelölje F az 1D diszkrét Fourier-transzformáltot, akkor:

$$\hat{f}_{k,j} = \sum_{r=0}^{N-1} \left(\sum_{s=0}^{N-1} f_{r,s} e^{\frac{2\pi i j s}{N}} \right) e^{\frac{2\pi i k r}{N}} = \sum_{r=0}^{N-1} (F f_r)_j e^{\frac{2\pi i k r}{N}}$$

• Az 2D diszkrét Fourier-transzformált kiszámításának algoritmusát tehát:

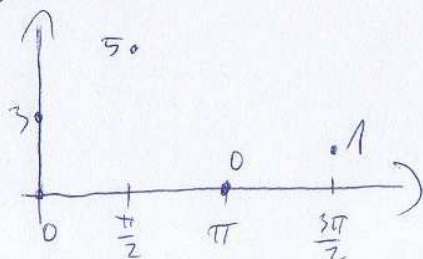
- Az f mátrix minden sorának helyére írjuk le a sor 1D DFT-jét
- Az így nyert mátrix minden oszlopát helyére írjuk le az oszlop 1D DFT-jét
- Az így kapott mátrix az eredeti f mátrix 2D diszkrét Fourier-transzformáltja

• Az 1D diszkrét Fourier-transzformáltak az FFT algoritmussal számíthatók. A teljes műveletigény $O(N^2 \log N)$ $O(N^4)$ helyett

numerikus példa:

Az adott vektornak mérimérték ki a Fourier-transzformáltját DFT-nél és FFT-nél:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$N=4$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow x_j &= 4\left(\frac{2j\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{aligned} j=0 &\Rightarrow x(0) = 3 \\ j=1 &\Rightarrow x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \\ j=2 &\Rightarrow x(\pi) = 0 \\ j=3 &\Rightarrow x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned} \end{aligned}$$

a) megoldás DFT-nél:

$$\begin{aligned} \boxed{k=0} \Rightarrow \hat{x}_0 &= \sum_{j=0}^3 x_j \cdot e^{\frac{2kj\pi}{4}} = 3 \cdot e^{\frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \pi}{4}} + 5 \cdot e^{\frac{2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot \pi}{4}} + \\ &+ 0 \cdot e^{\frac{2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot \pi}{4}} + 1 \cdot e^{\frac{2 \cdot 0 \cdot 3 \cdot \pi}{4}} = 3 + 5 + 0 + 1 = \boxed{9} \end{aligned}$$

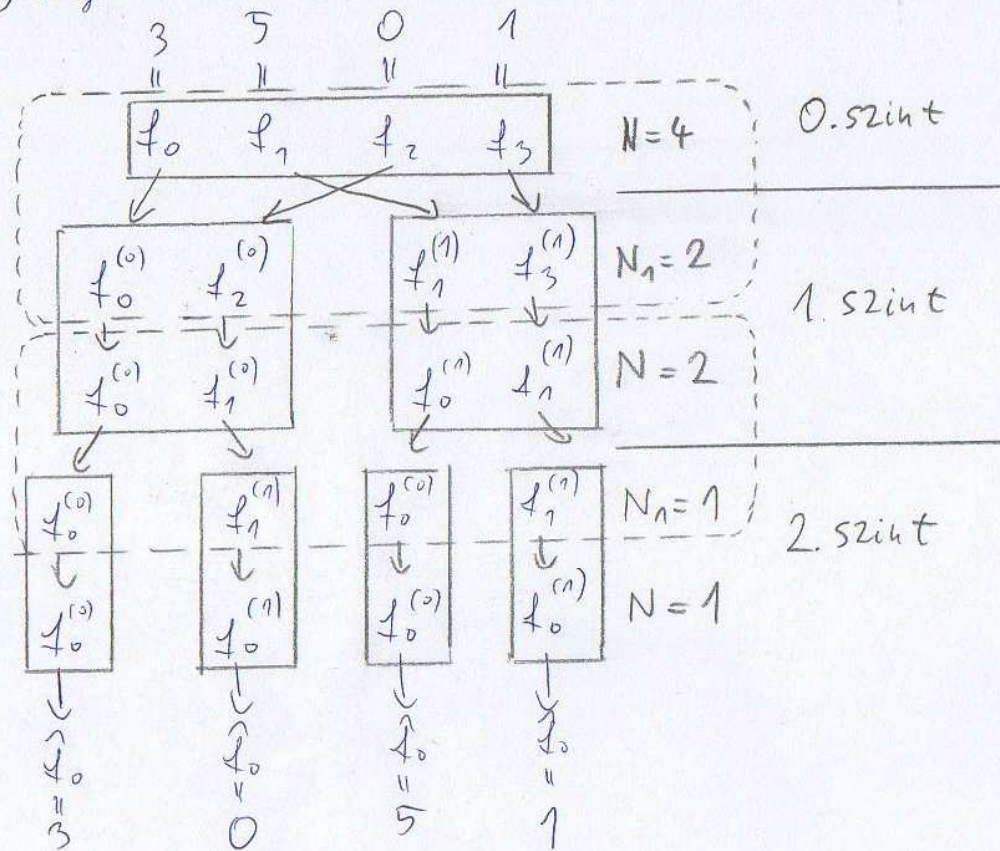
$$\begin{aligned} \boxed{k=1} \Rightarrow \hat{x}_1 &= \sum_{j=0}^3 x_j \cdot e^{\frac{2kj\pi}{4}} = 3 \cdot e^{\frac{2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \pi}{4}} + 5 \cdot e^{\frac{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \pi}{4}} + \\ &+ 0 \cdot e^{\frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \pi}{4}} + 1 \cdot e^{\frac{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \pi}{4}} = \\ &= 3 + 5e^{\frac{\pi}{2}} + 0 + e^{\frac{3\pi}{2}} = \\ &= 3 + 5 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) + 0 + (\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = \\ &= 3 + 5i + 0 - i = \boxed{3 + 4i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{k=2} \Rightarrow \hat{x}_2 &= \sum_{j=0}^3 x_j \cdot e^{\frac{2kj\pi}{4}} = 3 \cdot e^{\frac{2 \cdot 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4}} + 5 \cdot e^{\frac{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4}} + \\ &+ 0 \cdot e^{\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4}} + 1 \cdot e^{\frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \pi}{4}} = \\ &= 3 + 5e^{\pi i} + 0 + e^{3\pi i} = 3 + 5(\cos \pi + i \sin \pi) + 0 + \\ &+ (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = 3 - 5 + 0 - 1 = \boxed{-3} \\ \boxed{k=3} \Rightarrow \hat{x}_3 &= 3 \cdot e^{\frac{2 \cdot 3 \cdot 0 \cdot \pi}{4}} + 5 \cdot e^{\frac{2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \pi}{4}} + 0 \cdot e^{\frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \pi}{4}} + \\ &+ 1 \cdot e^{\frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \pi}{4}} = 3 + 5e^{\frac{3\pi}{2}} + 0 + e^{\frac{9\pi}{2}} = \\ &= 3 + 5(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) + 0 + (\cos \frac{9\pi}{2} + i \sin \frac{9\pi}{2}) = \\ &= 3 + 5 \cdot (-i) + 0 + i = \boxed{3 - 4i} \end{aligned}$$

tehát a Fourier-transzformált vektora:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 + 4i \\ -3 \\ 3 - 4i \end{bmatrix}$$

b) megoldás FFT-rel



2. szint:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}^{(0)} &= F_{N_1} x^{(0)} = 3 = x_0^{(0)} \\
 \hat{x}^{(1)} &= F_{N_1} x^{(1)} = 0 = x_0^{(1)} \\
 \hat{x}^{(2)} &= F_{N_1} x^{(2)} = 5 = x_0^{(2)} \\
 \hat{x}^{(3)} &= F_{N_1} x^{(3)} = 1 = x_0^{(3)}
 \end{aligned}$$

baloldalon
jobbholalon

2. $\rightarrow$ 1. szint $(N=2)$

- baloldalon:

$$(F_2 x)_0 = x_0^{(0)} + e^{\frac{2\pi \cdot 0}{2} i} \cdot x_2^{(0)} = 3 + e^0 \cdot 0 = 3$$

$$(F_2 x)_1 = x_0^{(0)} - e^{\frac{2\pi \cdot 0}{2} i} \cdot x_2^{(0)} = 3 - e^0 \cdot 0 = 3$$

- jobbholalon:

$$(F_2 x)_0 = x_0^{(0)} + e^{\frac{2\pi \cdot 0}{2} i} \cdot x_1^{(0)} = 5 + e^0 \cdot 1 = 6$$

$$(F_2 x)_1 = x_0^{(0)} - e^{\frac{2\pi \cdot 0}{2} i} \cdot x_1^{(0)} = 5 - e^0 \cdot 1 = 4$$

1. szint $(N_1=2)$

$$\hat{x}^{(0)} = F_2 x^{(0)} = (3, 3) = (x_0^{(0)}, x_1^{(0)})$$

$$\hat{x}^{(1)} = F_2 x^{(1)} = (6, 4) = (x_0^{(1)}, x_1^{(1)})$$

1. $\rightarrow$ 0. szint $(N=4)$

$$(F_4 x)_0 = \hat{x}_0^{(0)} + e^{\frac{2\pi \cdot 0}{4} i} \hat{x}_2^{(0)} = 3 + e^0 \cdot 6 = 9$$

$$(F_4 x)_1 = \hat{x}_0^{(0)} + e^{\frac{2\pi \cdot 1}{4} i} \hat{x}_2^{(0)} = 3 + e^{\frac{\pi}{2} i} \cdot 6 = 3 + 6i$$

$$(F_4 x)_2 = \hat{x}_0^{(0)} - e^{\frac{2\pi \cdot 0}{4} i} \hat{x}_2^{(0)} = 3 - e^0 \cdot 6 = -3$$

$$(F_4 x)_3 = \hat{x}_0^{(0)} - e^{\frac{2\pi \cdot 1}{4} i} \hat{x}_2^{(0)} = 3 - e^{\frac{\pi}{2} i} \cdot 6 = 3 - 6i$$

0. szint $(N=N_1=4)$

$$\begin{aligned}
 \hat{x} &= \hat{x}^{(0)} = F_4 x^{(0)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3+6i \\ -3 \\ 3-6i \end{pmatrix} \\
 &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 &\quad x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3
 \end{aligned}$$

2. NEMLINEÁRIS EGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSA

2.1 INTERVALLUMFELEZÉS

- legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos
- tegyük fel, hogy a bal és jobboldali intervallumon "különböző" előjelű értéket vesz fel a függvény:
pl: $f(a) < 0$; $f(b) > 0$

- és keressük az $f(x) = 0$ egyenlet megoldását

- Az első megalapozó matematikai tétel:

Bolzano tétele:

- legyen f folytonos a zárt, véges $[a, b]$ intervallumon
- tegyük fel, hogy $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek
pl: $f(a) < 0$, $f(b) > 0$
- ekkor f -nek van (legalább egy) zérushelye ebben az intervallumban

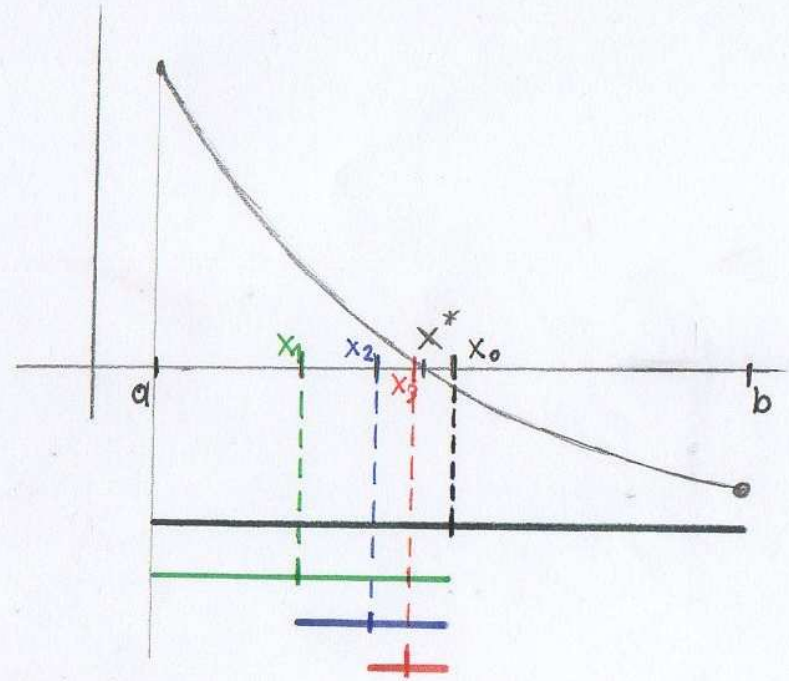
Ennek a tételnek az állása hátterében, hogy a valós számok halmazán monotonan töltik be a számegyenes.

- Az algoritmus működése:

- Felhasznál matematikusan az $[a, b]$ intervallumot úgy, hogy a két fél-intervallumból mindig azt választjuk meg, melyre a négyzetes felosztás függvényértékei különböző előjelűek. Jelölje x_n az n -edik lépésben nyitott intervallum középpontját

- Akkor az így definiált sorozat a fenti $f(x) = 0$ egyenlet (egyh) gyökeréhez konvergál
- A konvergencia sebessége legalább egy $\frac{1}{2}$ kivonási mértani sorozat konvergenciájának sebessége.

- nemléttétel:



- hibabebecs: legyen $x_0 := \frac{a+b}{2}$, akkor nyilván

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

- Ez a módszer rendkívül egyszerű, viszont ha a függvény nagyon lassan közelít a zérushelyhez, akkor sok lépés szükséges a pontos megoldáshoz.

2.2 BANACH-FIXPONT ITERÁCIÓS MÓDSZER

- legyen X Banach-tér, $f: X \rightarrow X$ egy-leképezés
- keressük az $x = f(x)$ egyenlet egy megoldását
(azaz f függvény egy **Fixpont**jának megkeresését)
- **Kontrakció**: Amennyiben egy függvény kontrakció, akkor a függvényértékek túlságosan felülről becsülhetők, mint az argumentum túlulása nem az f -nel határozottan kisebb számmal.
tehát alkalmas $0 < q < 1$ számra $\|f(x) - f(y)\| \leq q \|x - y\|$
 $\forall x, y \in X$ mellett

Banach-féle Fixpont tétel:

- legyen X Banach-tér és $f: X \rightarrow X$ kontrakció
- Ekkor f -nek egyértelműen $x \in X$ fixpontja van,
és az előáll az alábbi iterációs sorozat limeseként:
 $x_0 \in X$ tetszőleges, $x_{n+1} := f(x_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)
- Tehát az előző bevezetést mindig lehetett volna a függvény argumentumára is, hogy a bevezetést bevezetjük
- Ez a módszer is renthetetlenül egyszerű, de emellett is fontos, hogy csak akkor használható hatékonyan, ha maga az f függvény egyszerű
- A valós függvények speciális esete:
ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan, hogy $\max_x |f'(x)| < 1$, akkor f kontrakció a Lagrange-közérték-tétel miatt.

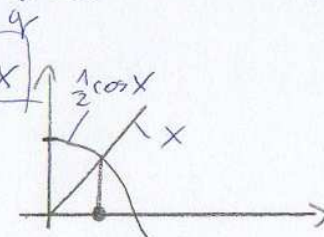
Lagrange-Közérték-tétel:

Egy különböző halmazokon az ponton egyenlő egy-olvasított értékek, ami mellet az illető intervallum lebegésén van.

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |f'(\xi)| \leq \max |f'|$$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq (\max |f'|) \cdot |x - y|$$

- **Példák**: a megoldandó egyenlet: $x = \frac{1}{2} \cos x$
- 1) a függvény: $f(x) := \frac{1}{2} \cos x$
a kezdeti érték legyen: $x_0 := 0$



$$|f'(x)| = \frac{1}{2} |\sin x| \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} \cos x_0 = \frac{1}{2} \cos 0 = 0,5 \\ x_2 = \frac{1}{2} \cos x_1 = \frac{1}{2} \cos 0,5 = 0,4387 \\ x_3 = \frac{1}{2} \cos x_2 = \frac{1}{2} \cos 0,4387 = 0,4526 \end{array} \right.$$

- 2) legyenek $B \in M_{n \times n}$ és $q \in \mathbb{R}^n$

oldjuk meg az $x = Bx + q$ egyenletet

Ha $\|B\| < 1$, akkor az $f(x) = Bx + q$ leképezés kontrakció, mert

$$\|f(x) - f(y)\| = \|Bx + q - By - q\| \leq \|B\| \cdot \|x - y\|$$

Ezért ekkor egyértelműen fixpont létezik, és az az $x_0 := 0$,

$$x_{n+1} := Bx_n + q$$

2.3 NEWTON-MÓDSZER

- legyen $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény
- keressük az $f(x) = 0$ egyenlet egy (a,b) -beli megoldását

• A Newton-módszer:

Ha x_n a megoldás egy közelítése, akkor legyen a követ-
kező közelítés az x_n -beli érintő egyenes zérushelye

az érintő egyenes egyenlete:

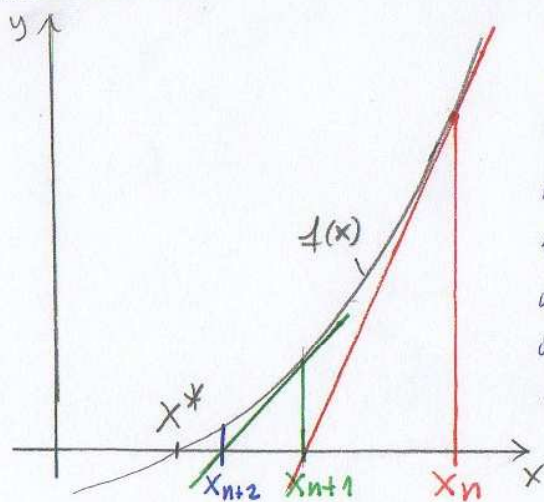
$$y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n)$$

$\Downarrow$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$(x_0 \in (a,b))$ - kezdeti közelítés

- szemléltetés:



Adott az x_n -beli közelítés,
íde húzunk egy érintőt,
ahol esik át az x tengelyre,
az lesz az $n+1$ -edik közelítés,
íde húzunk egy újat érintőt,
ahol esik át az x tengelyre
az lesz az $n+2$ -edik közelítés
és így tovább

- A Newton-módszer lehetővé teszi jól működik, ha adottak az alábbi feltételek:

Ha • f kétszer folytonosan differenciálható

• f nem van gyöke (a,b) -n

• a gyök helyén a derivált nem 0 $f'(x^*) \neq 0$

Akkor a Newton-módszer **Kvadratikusan Konvergál**

minden, az x^* pontos megoldáshoz elég közel közelítés
bőven, azaz alkalmas $C > 0$ szám mellett:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C \cdot |x_n - x^*|^2$$

- Tehát kvadratikusan lecsökken az $n+1$ -edik közelítés hibája az n -edik hibájához képest $\leq$ mint az aritmetikus közelítés hibájához a kétszeres
- Ha az n -edik közelítés elég jó $\Rightarrow |x_n - x^*|$ kicsi $\Rightarrow |x_n - x^*|^2$ nagyon nagyon kicsi $\Rightarrow$ az $n+1$ -edik közelítés sokkal jobb, mint az n -edik.
- A konvergencia tehát nagyon jó, az értékes jellel nagyon kb. iterációként megközelíthető
- Bizonyítás: Lagrange-közérték-tétel
- A Newton-módszer egy tipikus felhatalmazási terület a problémák

• Példa:

Számítsuk ki Newton-módnál a $\sqrt{3}$ -at

- Ellenőrizzük a vizsgálható függvényt:

$$f(x) := x^2 - 3, \text{ mivel: } f(x) = 0$$

$\Downarrow$

$$f'(x) = 2x$$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x = \sqrt{3} \text{ és pont ezt keressük}$$

- A kezdési közelítés legyen maga a 3, így:

$$x_0 = 3$$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 3}{2x_0} = 3 - \frac{3^2 - 3}{2 \cdot 3} = 2$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 3}{2x_1} = 2 - \frac{2^2 - 3}{2 \cdot 2} = 1,75$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 3}{2x_2} = 1,75 - \frac{1,75^2 - 3}{2 \cdot 1,75} = 1,73214$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^2 - 3}{2x_3} = 1,73214 - \frac{1,73214^2 - 3}{2 \cdot 1,73214} = 1,73205$$

Látható, hogy a sorozat nagyon gyorsan tart $\sqrt{3}$ hoz

A Newton-módnak egyébként hasonlóan lehet alkalmazni bármely egyenlőtlenségi egyenlet megoldására

Szelő módszer

- A háromszoros Newton-módnál egyik fő problémája, hogy a függvény deriváltjának kiszámítása sokszor nem könnyű
- A szelőmódnál körülményes differencia hányadosal helyettesítjük a deriváltat, így csak függvényértékeket kell kiszámítani.

• szelőmódszer:

$$\bullet \text{ itt: } f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$\bullet \text{ kezdő közelítés: } x_0, x_1$$

$$\bullet \text{ az } n+1 \text{ edik közelítés: } x_{n+1} := x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) \cdot f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

- Látható, hogy az $n+1$ edik közelítéshez nem elég az n -ediket tudni, az $n-1$ ediket is kell $\Rightarrow$ ez egy másodrendű rekurzió

• A szelőmódszer konvergencia tétel:

Ha • f kétszer folytonosan differenciálható

• f -nek van gyöke (a, b) -n

• a gyök helyén a derivált nem 0 $f'(x^*) \neq 0$

akkor a szelőmódnál minden az x^* pontos megoldáshoz elég közel x_0, x_1 kezdő közelítések esetén egy mértani sorozat sebességével konvergál, azaz alkalmas $C > 0, 0 < q < 1$ mellett:

$$|x_n - x^*| \leq C \cdot q^n$$

- A Newton módszer mindig működőképes, ha jó kezdeti közelítés
működéséhez



A gyakorlatban általában egy kezdeti guess, illetve néhány inter-
vallumon működő módszerrel meghatározzuk egy bizonyos
jó közelítést, majd átvesszük a Newton-módszert ami gyors
iteráció alatt sokkal pontosabbá teszi az eredményt.

• Példa:

Számitunk ki a négyzetgyökét a $\sqrt{3}$ -at:

A vizsgálandó függvény tehát most is $f(x) = x^2 - 3$

A kezdeti közelítés legyenek 2 és 1 így tehát:

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - x_0) \cdot f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1 - \frac{(1-2) \cdot (1^2-3)}{(1^2-3) \cdot (2^2-3)} = 1,6$$

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1) \cdot f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} = 1,6 - \frac{(1,6-1) \cdot (1,6^2-3)}{(1,6^2-3) \cdot (1^2-3)} = 1,75$$

$$x_4 = x_3 - \frac{(x_3 - x_2) \cdot f(x_3)}{f(x_3) - f(x_2)} = 1,75 - \frac{(1,75-1,6) \cdot (1,75^2-3)}{(1,75^2-3) \cdot (1,6^2-3)} = 1,7317$$

Steffensen módszer

Legyen az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kétféle feltételnek differenciálható
függvény pontosan egy x^* zérushelye. Tegyük fel, hogy
 $f'(x^*) \neq 0$. Ekkor minden x^* -hez elég közel lévő
valós kezdeti közelítéstől kiindulva, az

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

számt sorozatunkban konvergál x^* -hez.

• Példa:

Számitunk ki a Steffensen módszerrel a $\sqrt{3}$ -at

→ A vizsgálandó függvény: $f(x) = x^2 - 3$

A kezdeti közelítés legyen 3

$$x_0 = 3$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)^2}{f(x_0 + f(x_0)) - f(x_0)} = 3 - \frac{(3^2-3)^2}{(9^2-3) - (3^2-3)} = 2,5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)^2}{f(x_1 + f(x_1)) - f(x_1)} = 2,5 - \frac{(2,5^2-3)^2}{(5,75^2-3) - (2,5^2-3)} = 2,106$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)^2}{f(x_2 + f(x_2)) - f(x_2)} = 2,106 - \frac{(2,106^2-3)^2}{(3,3496^2-3) - (2,106^2-3)} = 1,8519$$

2.4. ÁLTALÁNOSÍTOTT NEWTON-MÓDSZER

- differenciálás Banach-terek között értelmezett leképezésekre:

Legyenek X, Y Banach terek

Az $F: X \rightarrow Y$ leképezés az $x \in X$ pontban differenciálható, deriváltja pedig az $A: X \rightarrow Y$ folytonos lineáris leképezés, ha a 0-ban, alkalmas himenektől választott h vektornál teljesül, hogy:

$$F(x+h) = F(x) + Ah + o(h)$$

ahol $o(h)$ olyan kifejezés, hogy $\frac{o(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$)

A derivált lineáris leképezést még így is jelöljük

$$F'(x), DF(x)$$

- Általánosított Newton módszer:

- A Newton módszer az $F(x) = 0$ egyenletre:

$$x_{n+1} = x_n - (DF(x_n))^{-1} F(x_n) \quad (n=1, 2, \dots)$$

vagy műköpp felírva:

$$x_{n+1} = x_n - w_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

ahol a w_n a javító tag az alábbi lineáris egyenlet megoldása:

$$DF(x_n)w_n = F(x_n)$$

Ha F kétszer folytonosan differenciálható

• F nem van értéke X -ben

• $DF(x^*)$ reguláris (invertálható és invertálás folytonos)

akkor a Newton módszer kvadratikusan konvergál minden, az x^* pontos megoldásához elég közeli x_0 kezdési közelítés esetén, tehát alkalmas $C > 0$ mellett

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq C \cdot \|x_n - x^*\|^2$$

- Példa: mátrixinvertálás

- legyen $A \in M_{N \times N}$ reguláris mátrix és minden $X \in M_{N \times N}$ reguláris

mátrixra jelölje: $F(X) := X^{-1} - A$

- Ekkor az $F: M_{N \times N} \rightarrow M_{N \times N}$, $F(X) = 0$ egyetlen megoldása:

$$X = A^{-1}$$

- Alkalmazzuk a mátrixegyenletre a Newton módszert. Az F leképezés deriváltját nézzük

$$\begin{aligned} F(x+h) &= (x+h)^{-1} - A = (x(1+x^{-1}h))^{-1} - A = \\ &= (1+x^{-1}h)^{-1} x^{-1} - A \end{aligned}$$

- Ha most H elég kis normájú (tetszőleges mátrixnormában), akkor $\|x^{-1}H\| \leq \|x^{-1}\| \cdot \|H\| < 1$

- felismerjük, hogy ha $\|B\| < 1 \Rightarrow (1-B)^{-1} = 1+B+B^2+B^3+\dots$
 $\Downarrow$
 $(1+B)^{-1} = 1-B + O(\|B\|^2)$

Erőse:

$$F(x+H) = (1+x^{-1}H)^{-1}x^{-1} - A = (1-x^{-1}H + o(H))x^{-1} - A = \\ = x^{-1} - x^{-1}Hx^{-1} + o(H) - A = F(x) - x^{-1}Hx^{-1} + o(H)$$

ahatnunk:

$$DF(x)H = -x^{-1}Hx^{-1} \Rightarrow DF(x)^{-1}W = -xWx$$

- írjuk a Newton módszer algoritmusa:

$$x_{n+1} = x_n - (DF(x_n))^{-1}(x_n^{-1} - A) = \\ = x_n + x_n(x_n^{-1} - A)x_n = \\ = x_n(2I - Ax_n)$$

- A kvadrát hibája:

$$\|A^{-1} - x_n\| = \|A^{-1}(I - Ax_n)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|I - Ax_n\|$$

megmutathatjuk $\|I - Ax_n\|$ nagyon gyorsan tart 0-hoz (hiszen a kvadrát hibaképlet elég jó volt), most

$$I - Ax_{n+1} = I - Ax_n(2I - Ax_n) = I - 2Ax_n + Ax_nAx_n = \\ = (I - Ax_n)^2$$

ahatnunk

$$\|I - Ax_{n+1}\| \leq \|I - Ax_n\|^2$$

3. LINEÁRIS ALGEBRAI PROBLÉMAK

3.1. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

- legyen: • $A \in M_{N \times N}$ adott reguláris mátrix

• $b \in \mathbb{R}^N$ adott vektor

• megoldandó a kör. egyenlet: $Ax = b$

- tegyük fel, hogy a jobboldal ilyen perturbált: $b + \Delta b$ alakú, ahol Δb egy kicsi vektor (valamilyen normával)

↓
az Δx hibát akar a megoldásban, tehát:

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

$$\underbrace{Ax}_b + A\Delta x = b + \Delta b$$

$$A\Delta x = \Delta b$$

- Tehát a fenti egyenletből az

• **abszolút hiba:** $\Delta x = A^{-1} \Delta b$

- A háromszorozhatatlanság miatt pedig:

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$$

- A gyakorlatban az abszolút hiba nem sokat mond, ennél sokkal informatívabb a relatív hiba, ami az abszolút hibát az eredeti megoldás normájához viszonyítja.

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\Delta b\|}{\|x\|}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \|A^{-1}\| \|\Delta b\|}{\|A\| \|x\|}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \|A^{-1}\| \|\Delta b\|}{\underbrace{\|Ax\|}_b}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\| \|A^{-1}\|}_{\text{cond}(A)} \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Min a háromszorozhatatlanság miatt:

$$\|A\| \|x\| \geq \|Ax\|$$

a tört értéke biztos nem nőhet

• **relatív hiba:**

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

ahol: • $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ kondícionum

• $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ a perturbáció relatív mérsége

- Tehát ez az $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ egy arányossági tényező, melyet a mátrix kondícionumának hívnak.

- Minél nagyobb a kondícionum annál kevésbé lehetetlen bízni, hogy a relatív hiba elég kicsi-e.

Tehát nekünk az a jó, ha a kondícionum kicsi.

Egyenletek kondícionáltsága

Ha $A \in M_{N \times N}$ önadjungált, pozitív definit, akkor az euklideszi norma által indukált mátrixnormában:

$$\text{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

Mivel ekkor: $\|A\| = \lambda_{\max}$

$$\|A^{-1}\| = \lambda(A^{-1})_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\min}}$$

• Példa rosszul kondícionált egyenletrendszerre:

$$\begin{aligned} 1000x + 999y &= 1 \\ 999x + 998y &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{Megoldás:} \\ x=1, y=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1000x + 999y &= 1 \\ 999x + 998y &= 0,999 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{Megoldás:} \\ x=0,001, y=0 \end{aligned}$$

- Látható, hogy egy írási hibát nélkülözhetetlen a jobboldalon újratírozás megoldás még csak nem is használhat az eredeti megoldáshoz

- A baloldali mátrixok kondíciószáma:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1000 - \lambda & 999 \\ 999 & 998 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1000 - \lambda) \cdot (998 - \lambda) - 999^2 = 0$$

$$998000 - 1998\lambda + \lambda^2 - 999^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 1998\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 1998,000501 = \lambda_{\max} \\ 0,0005005 = \lambda_{\min} \end{cases}$$

$$\text{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{1998,000501}{0,0005005} = 3,992 \cdot 10^6$$

Ez nagyon rossz kondícionált. A kondíciósámról általánosságban a következőket mondhatunk mondanivaló:

$1-10 \Rightarrow$ a mátrix istenien kondícionált

$10-100 \Rightarrow$ a mátrix jól kondícionált

$100-10^6 \Rightarrow$ közepes mértékű, nem jó de még nem is olyan rossz

$>10^6 \Rightarrow$ a mátrix nagyon rossz kondícionált.

- Tehát sokkal kondícionáltabb mátrixok esetében a megoldás sokkal kiszámítható, tehát a változások felmagyarázhatók

Szimmetrizálás

- Számos numerikus módszer jól működik akkor, ha a rendszer mátrixa önadjungált és pozitív definit

- azaz az alábbi egyenletrendszer:

$$Ax = b \quad \text{ahol } A \in M_{N \times N} \text{ reguláris mátrix} \\ b \in \mathbb{R}^N \text{ vektor}$$

szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát balról A^* -gal, így megkapjuk a **Gauss-Féle normálegyenlet** et:

$$A^*Ax = A^*b$$

ellen már az A^*A biztos, hogy önadjungált és pozitív definit.

- a módszer hátránya: a kondíciósámról eredeti sokszorozásra nőhet

Rosszúl kondicionált egyenletre vezető feladatok:

1) Függvényközelítés polinomokkal

- legyen $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ adott, folytonos függvény

- keressük azt a legfajlag (N-1)-fokú

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{N-1} x^{N-1}$$

polinomot, mely $L_2(a, b)$ -normában legjobban közelíti az f -et:

$$E(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) := \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{j=0}^{N-1} a_j x^j \right)^2 dx \text{ legyen minimális}$$

$\Rightarrow$ mindegyik változó nemzeti parciális deriválttal egyenlőre kell tenni nullának:

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = -2 \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{j=0}^{N-1} a_j x^j \right) x^k dx \Rightarrow \sum_{j=0}^{N-1} A_{kj} a_j = b_k$$

ahol: $k = 0, 1, \dots, N-1$

$$A_{kj} = \int_0^1 x^{j+k} dx = \frac{1}{j+k+1} \quad (\text{Hilbert mátrix})$$

$$b_k = \int_0^1 f(x) \cdot x^k dx$$

- A Hilbert-mátrix hírhedten rossz kondicionált mátrix

- Amennyiben Chebyshev polinomokkal, vagy trigonometrikus polinomokkal közelítünk, a feladat sokkal jobban kondicionált.

2) inverz feladatok mintén rossz kondicionált egyenletre vezetnek.

3.2 DIREKT MÓDSZEREK

Gauss elimináció

• megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} 1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1N}x_N = b_1 \\ 2) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \dots \\ N) & a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + a_{N3}x_3 + \dots + a_{NN}x_N = b_N \end{aligned} \right\}$$

• Orunk le az 1. egyenletet az első ismeretlen együtthatójával, a_{11} -vel

$$\left. \begin{aligned} 1) & x_1 + a_{12}'x_2 + a_{13}'x_3 + \dots + a_{1N}'x_N = b_1' \\ 2) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \dots \\ N) & a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + a_{N3}x_3 + \dots + a_{NN}x_N = b_N \end{aligned} \right\}$$

• Ekkor az első egyenlet segítségével az összes többi egyenletből kiválasztunk ki (elimináljuk) az első ismeretlent (x_1 -et)

Ezt úgy tudjuk megtenni, hogy az 1. sor a_{11} -szel elosztjuk a k -adik sort ($k = 2, 3, \dots, N$)

$$\left. \begin{aligned} 1) & x_1 + a_{12}'x_2 + a_{13}'x_3 + \dots + a_{1N}'x_N = b_1' \\ 2) & a_{22}''x_2 + a_{23}''x_3 + \dots + a_{2N}''x_N = b_2'' \\ \dots \\ N) & a_{N2}''x_2 + a_{N3}''x_3 + \dots + a_{NN}''x_N = b_N'' \end{aligned} \right\}$$

• A továbbiakban az 1. egyenlettel már nem foglalkozunk.

A fenti két pontot ismételtjük meg a 2., 3., ..., N. egyenletre (elimináció)

Az elimináció lépés az egyenletet alakítja:

$$x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1N}x_N = d_1$$

$$x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2N}x_N = d_2$$

$$x_3 + \dots + c_{3N}x_N = d_3$$

$$\dots \dots \dots x_N = d_N$$

• Tehát egy felső háromszög mátrixú egyenletrendszert kapunk, amit már egyszerűen megoldani. Az utolsó ismeretlen már látszik az egyenletben, a többi ismeretlent pedig visszahelyettesítéssel meghatározhatjuk:

$$N. \text{ egyenletből} \rightarrow x_N$$

$$(N-1). \text{ egyenletből} \rightarrow x_{N-1}$$

$$(N-2). \text{ egyenletből} \rightarrow x_{N-2}$$

$$\dots \dots \dots 1. \text{ egyenletből} \rightarrow x_1$$

MŰVELETIGÉNY: $O(N^3)$ (azaz nagyon nagy) *

- Állelembizonyítás: A k -adik egyenlettel való elimináció után előfordulhat, hogy az aktuális állelem (a k -adik és k -adik eleme) zérus vagy kisebb zérus.

Ekkor csere kell a k -adik egyenletet tartalmazó bármely egyenlettel (válasszunk azokat, melyeken a k -adik egyenlő zérus).

- Ha nincs állelem - azaz zérus értéket a legnagyobbnak.

* de ha nincs is ismeretlen és/vagy a mátrix nem kvadrát (nem négyzetes, nem szimmetrikus...) akkor nem is ezt használjuk.

• Példa:

$$\begin{cases} 1) 2x - 6y + 10z = -12 \\ 2) 2x - 5y + 3z = -4 \\ 3) 3x - 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 10 & -12 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right] \quad /:2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} /-2 \cdot 1 \\ /-3 \cdot 1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 7 & -14 & 21 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{itt most rögtön 1 oszlopot} \rightarrow \text{nem kell} \\ \text{visszatérni} \\ /-7 \cdot 2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 35 & -35 \end{array} \right] \quad /:35$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -6 \Rightarrow \underline{x_1 = -6 - 5(-1) + 3 \cdot 1 = 2}$$

$$x_2 - 7x_3 = 8 \Rightarrow \underline{x_2 = 8 + 7(-1) = 1}$$

$$\underline{x_3 = -1}$$

Mátrixinverzió Gauss-eliminációval

$$A \cdot A^{-1} = I$$

- beírunk olyan vektorokat A^{-1} -et és I -t:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{array} \right) \quad I = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} e_1 & e_2 & \dots & e_N \end{array} \right)$$

- Megoldandó N db egyenletrendszer:

$$A \cdot a_k = e_k \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

de ez az N db egyenletrendszer annyira érdekes nem minden esetben megoldható,

mert A az egyenletrendszer

$\Rightarrow$ egyenletrendszer megoldhatóságát

- Példák:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad /: -3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + 2 \cdot 1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array} \right) \quad /: 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array} \right) \quad / -\frac{4}{3} \cdot 2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & 1 \end{array} \right) \quad /: 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & 1 \end{array} \right) \quad / -\frac{2}{3} \cdot 3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -4 & 9 \end{array} \right) \quad / -\frac{2}{3} \cdot 2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -4 & 9 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -6 \\ -6 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

Tehát A nulli oldalakra van egyenlőségi, majd elimináció lépéssel elérjük, hogy az A balra alakuljon hármas egyenlőségi és akkor a jobboldalon automatikusan megoldunk az egyenlőségi.

Gauss-Jordan elimináció

A Gauss eliminációtól annyiban különbözik, hogy a k -adik egyenlettel való elimináció előtt a k -adik oszlopot normáljuk a főelemére, de a megelő egyenletével is kiküszöböljük, így a visszahelyettesítés el is marad.

• Példa:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ 2x - 6y + 10z = -12 \\ 2) \ 2x - 5y + 3z = -4 \\ 3) \ 3x - 2y + z = 3 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 10 & -12 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} / : 2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ / - 2 \cdot 1) \\ / - 3 \cdot 1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 7 & -14 & 21 \end{array} \right) \begin{array}{l} + 3 \cdot 2) \\ \\ - 7 \cdot 2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -16 & 18 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 35 & -35 \end{array} \right) / : 35$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -16 & 18 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} / + 16 \cdot 3) \\ / + 7 \cdot 3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}$$

LU - Felbontás

- Ez a módszer akkor hasznos, ha rektanguláris egyenletrendszerrel kell megkezelni, melyben a mátrix négyzetes, csak a felső háromszög mátrix

Ha a Gauss elimináció reorganizálható (egyetlen főelem sem 0), akkor A egyenletrendszer alakul $A = LU$ alakban, ahol:

- L : alsó háromszög mátrix, melynek diagonálelemerei 1-esek
- U : felső háromszög mátrix

- tehát L és U mátrixok alakja a következő (3×3 esetén):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

- Ha az LU felbontás mindig megvan akkor tehát:

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ax = b \\ LUx = b \end{cases} \text{ egy ekvivalencia}$$

- természetesen egy új ismeretlen jelent, legyen: $Ux = y$ egyenlet:

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} 1. Ly = b \Rightarrow y \\ 2. Ux = y \Rightarrow x \end{cases}$$

Teljesen az eredeti de bonyolult $Ax = b$ egyenletrendszer helyett két egyszerű egyenletrendszerrel kell megoldanunk, először az $Ly = b$ -t, melyből számítható az y , majd az $Ux = y$ -t melyből számítható a keresett x .

Egy adott egyenlőség, mivel ezt helyettesítéssel kell kezelni, eliminálni nem:

• 1. lépés: y -t meghatározni L mátrixból:

$$y_1 = b_1 \Rightarrow y_1$$

$$l_{21}y_1 + y_2 = b_2 \Rightarrow y_2$$

$$l_{31}y_1 + l_{32}y_2 + y_3 = b_3 \Rightarrow y_3$$

• 2. lépés: x -t meghatározni y -t segítségével az U mátrixból

$$u_{(N-2),(N-2)}x_{(N-2)} + u_{(N-2),(N-1)}x_{(N-1)} + u_{(N-2),N}x_N = y_{(N-2)}$$

$$u_{(N-1),(N-1)}x_{(N-1)} + u_{(N-1),N}x_N = y_{(N-1)} \Rightarrow x_{N-1}$$

$$u_{NN}x_N = y_N \Rightarrow x_N$$

- Minőség egyenlet megoldása esetén a minősítés: $O(N^2)$

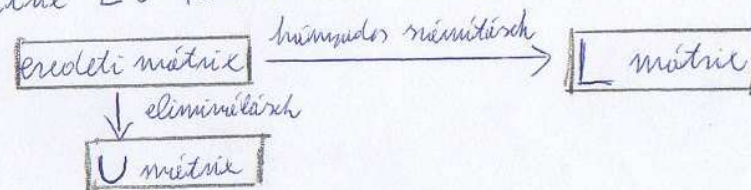
de persze ebben először kell benni A -mat az LU felbontásba, ennek a minősítése: $O(N^3)$ (→ Gauss eliminációval történik)

de ha sok egyenletrendszerrel van megadva az A mátrixnak, ezt csak egyszer kell megoldanunk

• Példa:

$$\begin{cases} 1) 2x_1 - 6x_2 + 10x_3 = -12 \\ 2) 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -4 \\ 3) 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

I. a mátrix LU felbontásának előállítására:



$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} / -1) \\ / -\frac{3}{2} \cdot 1) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 7 & -14 \end{pmatrix} \begin{matrix} / -7 \cdot 2) \\ / -7 \cdot 2) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

U L

• LU felbontás ellenőrzése: $L \cdot U \stackrel{?}{=} A$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 2 & -6 & 10 \\ & & & 0 & 1 & -2 \\ & & & 0 & 0 & 35 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & -6 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -5 & 3 \\ \frac{3}{2} & 7 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \quad \checkmark$$

II az egyenletrendszer megoldása:

• 2.1: y -t meghatározásra L mátrixal:

1) $y_1 = -12$

2) $1 \cdot (-12) + y_2 = -4 \Rightarrow y_2 = 8$

3) $\frac{3}{2} \cdot (-12) + 7 \cdot (8) + y_3 = 3 \Rightarrow y_3 = -35$

• 2.2: x -et meghatározásra U mátrixal:

3) $35x_3 = -35 \Rightarrow x_3 = -1$

2) $x_2 - 7 \cdot (-1) = 8 \Rightarrow x_2 = 1$

1) $2x_1 - 6 \cdot (1) + 10 \cdot (-1) = -12 \Rightarrow x_1 = 2$

Ortogonalizációs módszer

- Az orthogonalizáció során adott vektorokból ortonormált (vagy legalábbis ortogonális) vektormintát hozunk létre, mely nyújtást az altérre definiál ki (nyújtás a generált térre)

- orthogonalizációs eljárások:

- Gram-Schmidt ortogonalizálás
- Householder transzformáció
- Givens Forgatás

- Trükkként csak az előző foglalkozunk.

Gram-Schmidt-ortogonalizálás

- Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n$ tekintélyes lineárisan független vektorok egy euklideszi térben

- Legyen: $\tilde{e}_1 := a_1$, $e_1 := \frac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|}$

trükké $1 \leq k \leq n-1$:

$$\tilde{e}_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, e_j \rangle \cdot e_j, \quad e_k := \frac{\tilde{e}_k}{\|\tilde{e}_k\|}$$

- Ekkor már így nyújt $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormálisan:

• Ortonormál + $\Rightarrow e_1 \perp e_2 \perp \dots \perp e_n$

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \dots = \|e_n\| = 1$$

• Az első k db. v. a. az altérre generálják, miért az a -ból az első k db.:

$$\text{span}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{span}(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

• egyenletrendszer megoldása Gram-Schmidt ortogonalizálással:

- Jelölje az A mátrix sorvektorait $a_1, a_2, \dots, a_N$ ekkor:

$$Ax = b \iff \langle x, a_k \rangle = b_k \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

- Jelölje $e_1, e_2, \dots, e_N$ az $a_1, a_2, \dots, a_N$ rektánszil Gram-Schmidt ortogonalizálással nyert bázist.

- Ekkor az $\langle x, e_k \rangle$ mindegyikre alábbi rekurrenssal kiszámítható:

$$\langle x, e_1 \rangle = \frac{\langle x, \tilde{e}_1 \rangle}{\|\tilde{e}_1\|} = \frac{\langle x, a_1 \rangle}{\|a_1\|} = \frac{b_1}{\|a_1\|}$$

$$\langle x, e_k \rangle = \frac{\langle x, \tilde{e}_k \rangle}{\|\tilde{e}_k\|} = \frac{\overbrace{\langle x, a_k \rangle}^{b_k} - \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, e_j \rangle \cdot \langle x, e_j \rangle}{\|\tilde{e}_k\|}$$

$$(k=2, 3, \dots, N)$$

- Ekkor után a megoldás a kívánt "véges Fourier-sor" alakjában áll elő:

$$x = \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle \cdot e_k$$

- MŰVELETIGÉNY: $O(N^3)$

• Példa:

$$\left. \begin{array}{l} 1) 2x_1 - 6x_2 + 10x_3 = -12 \\ 2) 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -4 \\ 3) 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = (2, -6, 10) \\ a_2 = (2, -5, 3) \\ a_3 = (3, -2, 1) \end{array} \quad b = \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}$$

I. Az ortogonális (e_1, e_2, e_3) bázisrendszet létrehozása (a_1, a_2, a_3) -ból

$$\tilde{e}_1 = a_1 = (2, -6, 10)$$

$$e_1 = \frac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|} = \frac{(2, -6, 10)}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 10^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}} \right)$$

$$\tilde{e}_2 = a_2 - \langle a_2, e_1 \rangle \cdot e_1$$

$$\bullet \langle a_2, e_1 \rangle = \left\langle (2, -5, 3), \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}} \right) \right\rangle = \frac{32}{\sqrt{35}}$$

$$\bullet \langle a_2, e_1 \rangle \cdot e_1 = \frac{32}{\sqrt{35}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}} \right) = \left(\frac{32}{35}, -\frac{96}{35}, \frac{160}{35} \right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e}_2 &= a_2 - \langle a_2, e_1 \rangle \cdot e_1 = (2, -5, 3) - \left(\frac{32}{35}, -\frac{96}{35}, \frac{160}{35} \right) = \\ &= \left(\frac{38}{35}, -\frac{79}{35}, -\frac{55}{35} \right) \end{aligned}$$

$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} = \frac{\left(\frac{38}{35}, -\frac{79}{35}, -\frac{55}{35} \right)}{\sqrt{\left(\frac{38}{35} \right)^2 + \left(\frac{79}{35} \right)^2 + \left(\frac{55}{35} \right)^2}} = \frac{\left(\frac{38}{35}, -\frac{79}{35}, -\frac{55}{35} \right)}{2,9568}$$

$$= (0,3672, -0,7634, -0,5315)$$

$$\tilde{e}_3 = a_3 - (\langle a_3, e_1 \rangle \cdot e_1 + \langle a_3, e_2 \rangle \cdot e_2)$$

$$\bullet \langle a_3, e_1 \rangle = \left\langle (3, -2, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{-3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}} \right) \right\rangle = 2,3664$$

$$\bullet \langle a_3, e_2 \rangle = \left\langle (3, -2, 1), (0,3672, -0,7634, -0,5315) \right\rangle = 2,0968$$

$$\tilde{e}_3 = (3, -2, 1) - \left(2,3664 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{-3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}} \right) + 2,0968 \cdot \right.$$

$$\left. (0,3672, -0,7634, -0,5315) \right) = (1,8301, 0,8007, 0,1144)$$

$$e_3 = \frac{\tilde{e}_3}{\|\tilde{e}_3\|} = \frac{(1,8301, 0,8007, 0,1144)}{\sqrt{1,8301^2 + 0,8007^2 + 0,1144^2}} = \frac{(1,8301, 0,8007, 0,1144)}{2,0008} = (0,9147, 0,4002, 0,0572)$$

II. Az $\langle x, e_k \rangle$ skaláris szorzatok meghatározása:

$$\bullet \langle x, e_1 \rangle = \frac{b_1}{\|a_1\|} = \frac{-12}{\sqrt{140}} = -1,0142$$

$$\bullet \langle x, e_2 \rangle = \frac{b_2 - (\langle a_2, e_1 \rangle \cdot \langle x, e_1 \rangle)}{\|\tilde{e}_2\|} = \frac{-4 - \left(\frac{32}{\sqrt{35}} \cdot \frac{-12}{\sqrt{140}} \right)}{2,9568} = 0,5025$$

$$\bullet \langle x, e_3 \rangle = \frac{b_3 - (\langle a_3, e_1 \rangle \cdot \langle x, e_1 \rangle + \langle a_3, e_2 \rangle \cdot \langle x, e_2 \rangle)}{\|\tilde{e}_3\|} = \frac{3 - (2,3664 \cdot \frac{-12}{\sqrt{140}} + 2,0968 \cdot 0,5025)}{2,0008} = 2,1723$$

III. A reghelyes bázis leírása:

$$x = \langle x, e_1 \rangle \cdot e_1 + \langle x, e_2 \rangle \cdot e_2 + \langle x, e_3 \rangle \cdot e_3 = -1,0142 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{-3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}} \right) + 0,5025 \cdot (0,3672, -0,7634, -0,5315) + 2,1723 \cdot (0,9147, 0,4002, 0,0572) = (2, 1, -1)$$

$$\text{tehát: } x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = -1$$

Egyenletmegoldás spektrálfelbontással

- Legyen $A \in M_{N \times N}$ önadjungált, reguláris mátrix

• jelölje a sajátértékeit: $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_N$

• az ortogonális bázist alkotó sajátvektorokat pedig:

$$s_1, s_2 \dots s_N$$

- Ekkora jelöléssel elő tudjuk állítani az alábbi Fourier sor alakban:

$$b = \sum_{j=1}^N \langle b, s_j \rangle \cdot s_j$$

Így pedig az $Ax = b$ egyenlet megoldását az alábbi explicit képlet állítja elő:

$$x = \sum_{j=1}^N \frac{\langle b, s_j \rangle}{\lambda_j} \cdot s_j$$

$$\begin{aligned} \text{mivel: } Ax &= \sum_{j=1}^N \frac{\langle b, s_j \rangle}{\lambda_j} \cdot A s_j = \sum_{j=1}^N \frac{\langle b, s_j \rangle}{\lambda_j} \cdot \cancel{\lambda_j} s_j = \\ &= \sum_{j=1}^N \langle b, s_j \rangle \cdot s_j = b \end{aligned}$$

- MŰVELETIGÉNY: $O(N^2)$

- hátránya: ismerni kell az összes sajátértéket és egy ortogonális sajátvektorrendszert.

Háromatlós egyenletrendszerek

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\ 0 & & 0 & 0 & A_N & B_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

- Írjuk fel a megoldást: $x_k := m_{k+1} x_{k+1} + n_{k+1}$ alakban (fordított rekurrencia)

- A teljes algoritmus:

• előremenet: 2 db rekurrencia:

$$\begin{aligned} m_1 &:= 0 & n_1 &:= 0 \\ m_{k+1} &:= -\frac{C_k}{A_k m_k + B_k} & n_{k+1} &:= \frac{b_k - A_k n_k}{A_k m_k + B_k} \\ & & & (k=1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

• hátramenet: 1 db fordított rekurrencia:

$$\begin{aligned} x_N &:= n_{N+1} \\ x_{k-1} &:= m_k x_k + n_k \end{aligned} \quad (k=N, N-1, \dots, 2)$$

- MŰVELETIGÉNY: $O(N)$

• Példa:

$$\left. \begin{array}{l} 1) 12x_1 + 4x_2 = 6 \\ 2) 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 10 \\ 3) 9x_2 + 5x_3 = 5 \end{array} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 0 & A_3 & B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & 6 \\ 0 & 9 & 5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}$$

I. m és n szám meghatározása körösséges rekurzióval

$$\begin{array}{l|l} m_1 = 0 & n_1 = 0 \\ m_2 = -\frac{C_1}{A_1 m_1 + b_1} = -\frac{4}{0 \cdot 0 + 12} = -\frac{1}{3} & n_2 = \frac{b_2 - A_2 n_1}{A_1 m_1 + b_1} = \frac{6 - 0 \cdot 0}{0 \cdot 0 + 12} = \frac{1}{2} \\ m_3 = -\frac{C_2}{A_2 m_2 + b_2} = -\frac{6}{8 \cdot (-\frac{1}{3}) + 6} = -\frac{18}{10} & n_3 = \frac{b_3 - A_3 n_2}{A_2 m_2 + b_2} = \frac{10 - 8 \cdot \frac{1}{2}}{8 \cdot (-\frac{1}{3}) + 6} = \frac{18}{10} \\ m_4 = \frac{C_3}{A_3 m_3 + b_3} = \frac{0}{9 \cdot (-\frac{18}{10}) + 5} = 0 & n_4 = \frac{b_3 - A_3 n_3}{A_3 m_3 + b_3} = \frac{5 - 9 \cdot \frac{18}{10}}{9 \cdot (-\frac{18}{10}) + 5} = 1 \end{array}$$

II. x_n kiszámítása fordított rekurzióval:

$$\begin{aligned} x_3 &= n_4 = \underline{\underline{1}} \\ x_2 &= m_3 x_3 + n_3 = -\frac{18}{10} \cdot 1 + \frac{18}{10} = \underline{\underline{0}} \\ x_1 &= m_2 x_2 + n_2 = -\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

3.3 ITERÁCIÓS MÓDSZEREK

I. Visszavezetés fixpont iterációra

• Az eredeti $Ax = b$ egyenletet hozzuk az alábbi alakba:

$$\Downarrow \\ x = Bx + f \quad (\text{ennek több lehetősége is van})$$

• Tetnőleges $x_0 \in \mathbb{R}^N$ induló vektor mellett tekintünk az alábbi rekurziót (iterációt):

$$\boxed{x_{n+1} := Bx_n + f \quad (n=0, 1, 2, \dots)}$$

Ha $\|B\| < 1$, akkor $F(x) := Bx + f$ kontrakció, mert:

$$\|F(x) - F(y)\| = \|Bx + f - By - f\| \leq \|B\| \cdot \|x - y\|$$

Ezért ebben egyetlen fixpont létezik, és az

$$x_{n+1} := Bx_n + f \quad \text{rekurzióval is konvergál}$$

• Minél kisebb a $\|B\|$ mátrixnorma, annál gyorsabban konvergál

• A konvergencia előfeltétele, hogy B mátrix minden sajátértékének abszolút értéke 1-nél kisebb, ilyenkor viszont még a konvergencia bekövetkezte előtt túlméretezés miatt leállhat a számítás

• Ilyenkor alapulni módszerek:

- egyszerű (Richardson) iteráció ($\rightarrow B = I - \omega A$)
- Jacobi iteráció ($\rightarrow B = -D^{-1}(L+U)$)
- Seidel iteráció - 82

a) Az egyszerű iteráció

(Richardson iteráció)

- Legyen $A \in M_{n \times n}$ önadjungált, pozitív definit
- Kérlek az $Ax = b$ egyenletet fixpont iterációval oldjuk meg:

$$Ax = b$$

$$Ax - b = 0$$

$$0 = Ax - b \quad / \cdot \omega$$

$$0 = \omega(Ax - b) \quad / + x$$

$$x = x - \omega(Ax - b)$$

$$x = x - \omega Ax + \omega b$$

$$x = \underbrace{(I - \omega A)}_B x + \underbrace{\omega b}_d$$

$B =$ átmeneti mátrix

- itt $\omega > 0$ egy iterációs paraméter. Ez az alábbi fixpont-iterációt indukálja:

$$\boxed{x_{n+1} := (I - \omega A)x_n + \omega b}$$

- ω optimális értékének meghatározása:

- A konvergencia akkor teljesül, ha az átmeneti mátrix normája 1-nél kisebb:

$$\|B\| = \|I - \omega A\| < 1$$

- Mivel az átmeneti mátrix önadjungált és pozitív definit, az euklideszi normája megegyezik a legnagyobb abszolút értékű sajátértékével:

$$\|B\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(B)|$$

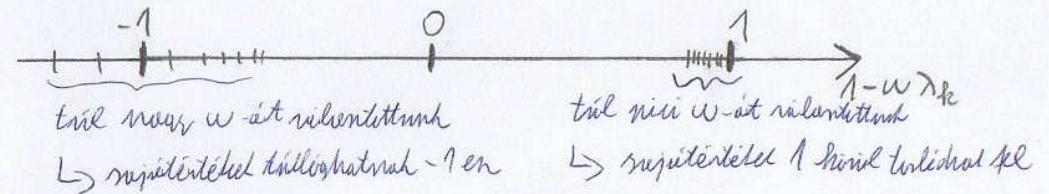
- legyenek az A mátrix sajátértékai:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

akkor az átmeneti $B = I - \omega A$ mátrix sajátértékai:

$$1 - \omega \lambda_1 \leq 1 - \omega \lambda_2 \leq \dots \leq 1 - \omega \lambda_n$$

- A cél tehát, hogy $1 - \omega \lambda_1$ és $1 - \omega \lambda_n$ is -1 és 1 között legyen, így a legnagyobb abszolút értékű sajátérték is kisebb 1-nél, a konvergencia teljesül.
Tehát olyan ω -t kell választani, hogy ez teljesüljön



- Az optimális eset az, amikor $1 - \omega \lambda_1$ és $1 - \omega \lambda_n$ egymás ellentettje:

$$1 - \omega \lambda_n = -(1 - \omega \lambda_1)$$

$$\begin{aligned} 1 - \omega \lambda_n &= -1 + \omega \lambda_1 \\ 2 &= \omega (\lambda_1 + \lambda_n) \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$$

$$\omega = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$$

- Az iteráció minden elég kicsi $\omega > 0$ paraméter mellett konvergens

- Az iteráció akkor a leggyorsabb, ha:

$$\|I - \omega A\| \text{ a lehető legkisebb}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$$

$$\Downarrow$$

$$\|I - \omega A\| = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

- Tehát az optimális iterációs paraméter megállapításához ismerni kell az A mátrix legkisebb és legnagyobb sajátértékét. Ezt viszont nem könnyű meghatározni.

b) Jacobi iteráció

- Az $Ax = b$ egyenlet mátrixát bontunk fel egy diagonálmátrix egy alsó és egy felső háromszögmátrix összegére.

$$\text{tehát: } A = L + D + U$$

$$Ax = b$$

$$(L + U + D)x = b$$

$$Dx = -(L + U)x + b$$

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

- Ez azért jó, mert a diagonálmátrixnal könnyen lehet művelni. A diagonálmátrix mere az elemekhez ismerni kell.

- A Jacobi iteráció:

$$x_{n+1} = -D^{-1}(L + U)x_n + D^{-1}b$$

illetve komponensenként kiírva:

$$x_{n+1}^{(k)} = -\frac{1}{a_{kk}} \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_n^{(j)} - \frac{1}{a_{kk}} \sum_{j=k+1}^N a_{kj} x_n^{(j)} + \frac{1}{a_{kk}} b_k \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

- a Konvergencia Feltétele:

Ha A diagonálisan domináns (a diagonálem abszolút értéke kisebb, mint a vele egy sorban lévő összes többi elem abszolútértékének az összege)

$$\sum_{j \neq k} |a_{kj}| < |a_{kk}|$$

akkor a Jacobi iteráció konvergens

ehhez elegendő, ha $B = -D^{-1}(L + U)$ mátrix sz-normája 1-nél kisebb, mert:

$$\|B\| = \max_k \sum_{j \neq k} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|} = \max_k \frac{1}{|a_{kk}|} \sum_{j \neq k} |a_{kj}| < 1$$

- Ez egy rendkívül egyszerű, könnyen programizálható ábrák nem túlrossza gyors iteráció

c) Seidel iteráció

- A Jacobi-iterációtól annyiban különbözik, hogy a megoldáshoz komponensek felújításakor az épp felújított (alacsonyabb indexű) rektorkomponenseket azonnal felhasználjuk a későbbi komponensek felújításában.

- Seidel iterációval $(L+D)$ -t használva baloldalon:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (L+D+U)x &= b \\ (L+D)x &= -Ux + b \\ x &= -(L+D)^{-1} \cdot Ux + (L+D)^{-1} b \end{aligned}$$

- A Seidel iteráció:

$$x_{n+1} = -(L+D)^{-1} \cdot Ux_n + (L+D)^{-1} \cdot b$$

illetve komponensenként felírva:

$$x_{n+1}^{(k)} = -\frac{1}{a_{kk}} \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_{n+1}^{(j)} - \frac{1}{a_{kk}} \sum_{j=k+1}^N a_{kj} x_n^{(j)} + \frac{1}{a_{kk}} b_k \quad (k=1, 2, N)$$

- Konvergencia feltétele:

Ha A diagonálisan domináns, vagy önadjungált, pozitív definit, akkor a Seidel-iteráció konvergens

II Variációs módszerek

- Legyen A önadjungált, pozitív definit tekintsük az $Ax = b$ egyenletet jelölje x^* a pontos megoldást

- energetikai skaláris szorzat / A -skaláris szorzat:

$$\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle$$

- energetikai norma / A -norma:

$$\|x\|_A^2 = \langle Ax, x \rangle$$

- energetikai Funkcionál:

$$F(x) := \langle Ax, x \rangle - 2 \langle x, b \rangle$$

ahol:

$$F(x) := \langle x, x \rangle_A - 2 \langle x, Ax^* \rangle$$

$$F(x) := \langle x, x \rangle_A - 2 \langle x, x^* \rangle_A$$

$$F(x) := \|x - x^*\|_A^2 - \|x^*\|_A^2$$

érte:

Az energetikai funkcionálnak 1 minimumhelye létezik és

$Ax = b$ pontos x^* megoldása = Az energetikai funkcionál minimumhelye

- Variációs módszerek: F minimalizálását célzó módszerek

a) iránymenti minimalizálás

- Legyen $e \in \mathbb{R}^N$ adott irányvektor, $x \in \mathbb{R}^N$ adott kiindulási és minimalizáljuk $\varphi(t) := F(x + t \cdot e)$ skalárisérték függvényt.

- A minimum helyett len, ahol $\varphi'(t) = 0$

$$t = - \frac{\langle Ax - b, e \rangle}{\langle Ae, e \rangle}$$

ahol $Ax = b$ egy mátrix egyenlet, pontos megoldás értéke 0 lenne

- A javított kiindulás:

$$\tilde{x} = x + t \cdot e = x - \frac{\langle Ax - b, e \rangle}{\langle Ae, e \rangle} \cdot e$$

b) gradiens módszer

- Az F energetikai függvényérték minimalizálása a legmeredekebb változás irányában, azaz a gradienvektor irányában minimalizáljuk

- Legyen x_n egy tetszőleges megoldás az $Ax = b$ egyenletre és jelölje $r_n := Ax_n - b$ (maradékvektor). Akkor az r_n irány menti minimalizálás után a javított kiindulás:

$$x_{n+1} = x_n + t \cdot r_n = x_n - \frac{\langle Ax_n - b, r_n \rangle}{\langle Ar_n, r_n \rangle} \cdot r_n$$

• A közelítés hibája:

$$\|x_n - x^*\|_A^2 \leq \left(1 - \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)^n \|x_0 - x^*\|_A^2$$

$$\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} < 1 \Rightarrow \left(1 - \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)^n \rightarrow 0$$

tehát itt is a legkisebb és legnagyobb sajátérték arányától függ a konvergencia sebessége, azaz fontos különbség az egyenlő iterációkhoz képest, hogy itt nem kell ismerni a legkisebb és legnagyobb sajátértéket

- MŰVELETIGÉNY: $O(N^2)$

c) konjugált gradiens módszer

- Legyen A önmagjával pozitív definit
legyen $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tetszőleges induló kiindulás

$$r_0 := Ax_0 - b$$

$$d_0 := -r_0$$

itt lehet két irány is van, r és d és úgy választjuk az irányokat, hogy ezek az irányok az A skaláris szorzás szerint ortogonálisak legyenek egymáshoz

$$r_n := Ax_n - b$$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{\langle r_n, d_n \rangle}{\langle Ad_n, d_n \rangle} \cdot d_n$$

$$r_{n+1} := Ax_{n+1} - b$$

$$d_{n+1} := -r_{n+1} + \frac{\langle Ar_{n+1}, d_n \rangle}{\langle Ad_n, d_n \rangle} \cdot d_n$$

Ha nem lenne kerületi hiba, N iteráció után a pontos megoldást volna meg

($\rightarrow$ elvileg direkt módszer)

3.4. SAJÁT ÉRTÉK FELADATOK

- Analitikus módon a sajátértékek nem számolhatók, hogy a karakterisztikus polinomot egyenleté kell tenni 0-nál:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

- Ez egy $n \times n$ -os mátrix esetén egy n -edfokú egyenletet eredményez, amit konkrétan nehéz megoldani, mivel meggyőződéssel meggyőződéssel lehet egyenletekre nem lehet megoldhatóságot felírni (Abel - Ruffini - tétel)
→ numerikus módszert alkalmazunk a λ -ak közelítésére

a) Gersgorin módszer

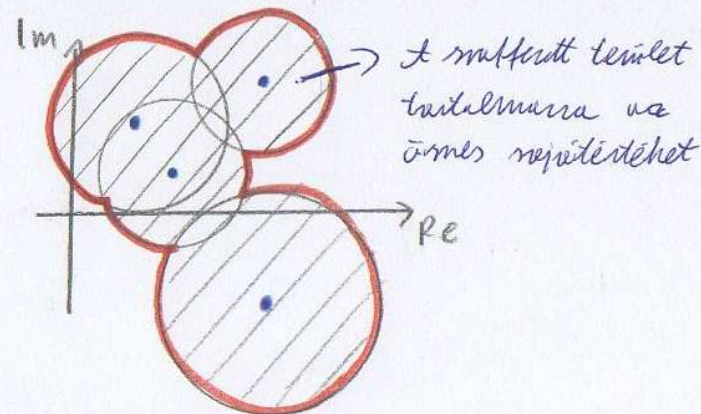
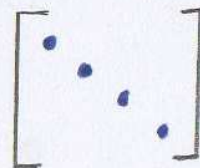
Gersgorin-tétel:

Tetszőleges $A \in M_{n \times n}$ esetén a sajátértékek a komplex síkon az A -nak középpontú, $r_k = \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$ sugarú zárt körök egyenitőrelen fekszenek.

- Tehát általános (komplex) esetben legyél fel a komplex síkon a diagonálemek, majd mindegyik diagonálemmel szembejárt körű egy kör, melyek a sugara meggyőződéssel az adott diagonálemmel egy sorban lévő többi mátrixelem abszolút értékeinek az összegével. Ez akkor az összes sajátérték ott len erekscha körökben az érintőjában.

- 89 -

- nemlétezés:



- Érték meggyőződéssel, hogy amennyiben a körök sugara nagy, úgy az a módszer eléggé semmitmondó.

⇓

A módszer akkor alkalmazható jól, ha a mátrix közel diagonális → a diagonálemmel szembejárt többi elem kicsi.

b) hatvány módszer

- Legyen $A \in M_{n \times n}$ önadjungált
• a sajátértékek: $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_N|$
• az ortogonális sajátvektorok: $S_1, S_2, \dots, S_N$

- Legyen X_0 olyan vektor, mely nem ortogonális S_N -re
- képezzük az $X_{n+1} := AX_n$ sorozatot
- ekkor: $\frac{\langle AX_n, X_n \rangle}{\|X_n\|^2} \rightarrow \lambda_N$ (Rayleigh-hányados)

- Tehát ezzel a módszerrel a legnagyobb abszolút értékű sajátértéket tudjuk meghatározni.

- 90 -

c) inverz iteráció

- legyen: $A \in M_{N \times N}$ önadjungált
- a sajátértékek: $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_N|$
- az ortogonális sajátvektorok: $s_1, s_2, \dots, s_N$

- ha A sajátértékei: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ akkor

$$A^{-1} \text{ sajátértékei: } \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_N}$$

Tehát ami a legkisebb abszolút értékű sajátértéke A -nak,
az lesz a legnagyobb abszolút értékű sajátértéke A^{-1} -nek

$\Downarrow$
Az A mátrix legkisebb abszolút értékű sajátértékét meghatározni,
ha a hatványozás módszerével alkalmazzuk A^{-1} mátrixra

- legyen x_0 olyan vektor, mely nem ortogonális s_1 -re

- képezzük az $x_{n+1} := A^{-1}x_n$ sorozatot

- ekkor: $\frac{\|x_n\|^2}{\langle A^{-1}x_n, x_n \rangle} \rightarrow \lambda_1$

- Ha nem sikerült kiszámítani az A^{-1} inverst, akkor belátható az is könnyűen, hogy az iteráció minden egyes lépésben megoldjuk az $Ax_{n+1} = x_n$ egyenletrendszert.

Mivel a babiloni mátrixra mindig igaz, hogy az A , célként
LU felbontást alkalmazni.

d) Jacobi-módszer

- Ez a módszer bizonyos körülmények között az összes sajátértéket meghatározja.

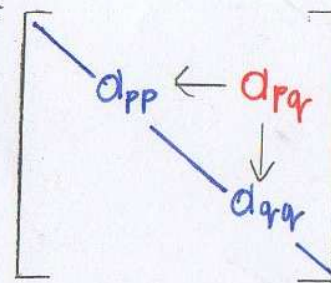
- legyen $A \in M_{N \times N}$ önadjungált

- Válasszunk ki a diagonális feletti részből a legnagyobb abszolút értékű elemet, amit inaként legyen: p, q ($p < q$)

- Ezentúl határozzuk meg egy t nyírt az alábbi képletből:

$$ct + 2t = \frac{a_{pq} - a_{pp}}{2a_{pq}} \Rightarrow t = \dots$$

szemléltetés:



p, q ($p < q$) az az
involúciós, melyre
 $|a_{pq}|$ maximális

- Ezentúl hozzunk létre egy Q -val jelölt ortogonális
egységmátrixot, mely az alábbi 4 elemű különbség
egy egységmátrixból:

- pp elem: $\cos t$ (1 helyett)
 - qq elem: $\cos t$ (1 helyett)
 - pq elem: $\sin t$ (0 helyett)
 - qp elem: $-\sin t$ (0 helyett)
- } Ez gyakorlatilag
egy forgató mátrix
az N dimenziós tér
egy alterében.

Lehet a Q mátrix általános alakja a következő:

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & \cos t & \dots & \sin t & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ -\sin t & & & \cos t & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Emléni rajtunk fel $A-t$:

$$A := Q^* A Q$$

innétől innétől az eljárás

- Ha A minden sajátértéke különböző, akkor az így nyert mátrixokat egy diagonálmátrixba tart, melyet fraktúra tartalmaz A sajátértékeit.

• Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

→ megmutatunk ki amit tudunk

- analitikusan
- Gauss módszerrel
- hatvány módszerrel
- imm iterációval
- Jacobi - módszerrel

a) analitikus megoldás

Mivel a mátrix csak 3×3 -as, a sajátértékek egyenlet minden meghatározható analitikusan a karakterisztikus egyenletből:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 16-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 6-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(16-\lambda) \cdot [(6-\lambda)(10-\lambda) - 1 \cdot 1] - 4 \cdot [4 \cdot (10-\lambda) - 2 \cdot 1] + 2 \cdot [4 \cdot 1 - 2 \cdot (6-\lambda)] = 0$$

- elvégzés a lemmisághat, összerakás, a megoldandó harmadfokú egyenlet:

$$-\lambda^3 + 32\lambda^2 - 295\lambda + 776 = 0$$

- megoldás az egyenletet a Cardano - képlettel, a sajátértékek pontos értékei 4 tizedesjegy pontossággal:

$$\lambda_1 = 4,5811$$

$$\lambda_2 = 9,4015$$

$$\lambda_3 = 18,0173$$

b) Gyengein módok

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

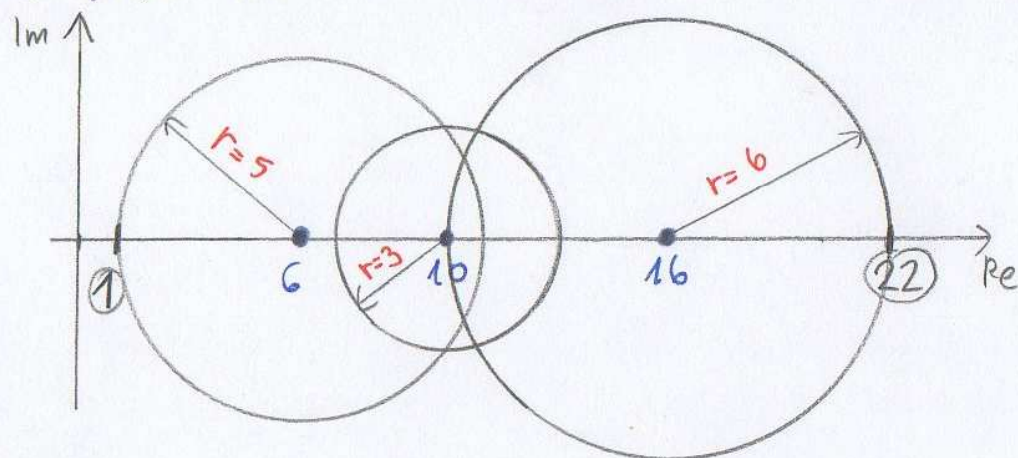
A Gyengein körök

körénpontjai:

sugara:

$$\begin{aligned} 16 &\rightarrow |4| + |2| = 6 \\ 6 &\rightarrow |4| + |1| = 5 \\ 10 &\rightarrow |2| + |1| = 3 \end{aligned}$$

A Gyengein-körök nemlillételése a komplex síkon:



- Mivel a mátrix szimmetrikus, a sajátértékek biztosan valósak lennek

- A Gyengein módoknál tehát minimálisra annyi tudunk mondani, hogy a sajátértékek biztosan 1 és 22 közé esnek

c) Iterációs módok

legyen $x_0 = (1, 1, 1)$

így:

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 22 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 422 \\ 167 \\ 185 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = Ax_2 = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 422 \\ 167 \\ 185 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7790 \\ 2875 \\ 2861 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = Ax_3 = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7790 \\ 2875 \\ 2861 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141862 \\ 51271 \\ 47065 \end{bmatrix}$$

$$x_5 = A \cdot x_4 = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 141862 \\ 51271 \\ 47065 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2569006 \\ 922139 \\ 805645 \end{bmatrix}$$

...

- Az 5. iterációhoz tartozó Rayleigh-határozó:

$$\frac{\langle Ax_4, x_4 \rangle}{\|x_4\|^2} = \frac{\langle (2569006, 922139, 805645), (141862, 51271, 47065) \rangle}{141862^2 + 51271^2 + 47065^2}$$

$$= 18,00822 \approx \lambda_3$$

d) immen iteráció

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,076031 & -0,04897 & -0,01031 \\ -0,04897 & 0,201031 & -0,01031 \\ -0,01031 & -0,01031 & 0,103093 \end{bmatrix}$$

↳ E_2 pl. Gauss-eliminációs megközelítés
kezdő: $x_0 = (1, 1, 1)$

így:

$$x_1 = A^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} 0,016753 \\ 0,141453 \\ 0,082424 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = A^{-1} x_1 = \begin{bmatrix} -0,00652 \\ 0,026826 \\ 0,006868 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = A^{-1} x_2 = \begin{bmatrix} -0,00188 \\ 0,005641 \\ 0,000499 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = A^{-1} x_3 = \begin{bmatrix} -0,00042 \\ 0,001221 \\ 0,0000126 \end{bmatrix}$$

$$x_5 = A^{-1} x_4 = \begin{bmatrix} -0,000092 \\ 0,000266 \\ -0,0000069 \end{bmatrix}$$

- Az 5. iterációban tartó Rayleigh-hátságok sorozata:

$$\frac{\|x_4\|^2}{\langle A^{-1} x_4, x_4 \rangle} = 4,591493 \approx \lambda_1$$

e) Jacobi módszer

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

- A felvett háromszög alulról értékelve legnagyobbat
elem: 4
- ennek indexei: $p=1$
 $q=2$

- tehát: $a_{pp} = a_{11} = 16$

$a_{qq} = a_{22} = 6$

$a_{pq} = a_{21} = 4$

- így: $ctg 2t = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} = \frac{6 - 16}{2 \cdot 4} = -1,25 \Rightarrow t = -0,337$

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(-0,337) & \sin(-0,337) & 0 \\ -\sin(-0,337) & \cos(-0,337) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^* = \begin{bmatrix} \cos(-0,337) & -\sin(-0,337) & 0 \\ \sin(-0,337) & \cos(-0,337) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A felújított A mátrix:

$$A = Q^* A Q = \begin{bmatrix} 17,40312 & 0 & 2,2183 \\ 0 & 4,5964 & 0,2816 \\ 2,2183 & 0,2816 & 10 \end{bmatrix}$$

A 2. iteráció:

$$A = \begin{bmatrix} 17,4031 & 0 & 2,2183 \\ 0 & 4,5969 & 0,2716 \\ 2,2183 & 0,2716 & 10 \end{bmatrix}$$

- A felírt háromszög aln. értéke-
len legnagyobbat elve: 2,2183
- ennek indexei: $p=1$
 $q=3$

- felhív: $a_{pp} = a_{11} = 17,4031$
 $a_{qq} = a_{33} = 10$
 $a_{pq} = a_{13} = 2,2183$

- $\text{ig}r: \text{ctg } 2t = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} = \frac{10 - 17,4031}{2 \cdot 2,2183} = -1,6687 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = -0,2699$

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(-0,2699) & 0 & \sin(-0,2699) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-0,2699) & 0 & \cos(-0,2699) \end{bmatrix}$$

$$Q^* = \begin{bmatrix} \cos(-0,2699) & 0 & -\sin(-0,2699) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-0,2699) & 0 & \cos(-0,2699) \end{bmatrix}$$

- A felújított A mátrix:

$$A = Q^* A Q = \begin{bmatrix} 18,01691 & 0,0751 & 0 \\ 0,0751 & 4,5969 & 0,2714 \\ 0 & 0,2714 & 9,3862 \end{bmatrix}$$

- folytatva a műveleteket:

a 3. iteráció után:

$$A = \begin{bmatrix} 18,01691 & 0,07498 & 0,004236 \\ 0,07498 & 4,581543 & 0 \\ 0,004236 & 0 & 9,401543 \end{bmatrix}$$

a 4. iteráció után:

$$A = \begin{bmatrix} 18,01733 & 0 & 0,004236 \\ 0 & 4,581125 & -2,4 \cdot 10^{-5} \\ 0,004236 & -2,4 \cdot 10^{-5} & 9,401543 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy a 4. iteráció után a diagonálisban
már elég jó közelítéssel megjelentek a sajátértékek.

$$\lambda_1 = 4,5811$$

$$\lambda_2 = 9,4015$$

$$\lambda_3 = 18,0173$$

3.5 ÁLTALÁNOS INVERZ

SVD (szinguláris érték felbontás)

Minden $A \in M_{m \times n}$ mátrix előáll

$$A = USV^*$$

alakban, ahol:

$$\left. \begin{array}{l} U \in M_{m \times m} \\ V \in M_{n \times n} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ortogonális mátrixok} \\ (\text{oszlopvektorei ortonormált} \\ \text{rendszer alkotnak}) \end{array}$$

$$S \in M_{m \times n} \text{ diagonálmátrix (csak diagonál} \\ \text{elemei különbözhetnek 0-tól)}$$

A mátrix szinguláris értékei: S nemzérus diagonálelemei - ezek pedig az AA^* mátrix sajátértékeinek pozitív négyzetgyökei.

Mátrixok általánosított inverze

Legyen az $A \in M_{m \times n}$ mátrix szinguláris értékek szerinti felbontása: $A = USV^*$

$$A \text{ általánosított inverze: } A^+ = VS^+U^* \in M_{n \times m}$$

(Moore-Penrose Féle pszeudoinverz)

$$\text{ha } S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \text{ akkor } S^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & \\ & \frac{1}{\sigma_2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

Az általánosított inverz egyértelmű, és ha $A \in M_{n \times n}$ reguláris $\Rightarrow A^+ = A^{-1}$

Egyenletrendszerek általánosított megoldása

Az $Ax = b$ egyenletrendszer általánosított megoldása:

$$x^+ := A^+b \quad (\text{mindig létezik és egyértelmű})$$

Az $Ax = b$ egyenletrendszer általánosított megoldása minimalizálja az $F(x) := \|Ax - b\|^2$ funkcionált, és ha több ilyen vektor is van, akkor ezek közül a legkisebb normájú (legkisebb négyzetes m.o.)

Az $F(x) := \|Ax - b\|^2$ funkcionált minimalizáló x vektorok, és csak azok, kielégítik az

$$A^*Ax = A^*b$$

v.n. Gauss-Féle normálegyenletet

En az általánosított megoldás előállítható valamelyik variációs (iteratív) módszerrel.

4. INTERPOLÁCIÓS PROBLÉMAK

- Adott $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ helyek
 - ezekhez rendelt $u_1, u_2, \dots, u_N \in \mathbb{R}^m$ értékek
- Keressünk olyan $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvényt, amelyre $u(x_h) = u_h$ ($h = 1, 2, \dots, N$) teljesül
- Alkalmazási területek:
 - görbeillesztés
 - felületillesztés
 - valószínűség növelése
 - minnitási modellek adatfeltöltése ...
- Ha $n, m > 1$ (vektor-interpolációs problémák), akkor az $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ helyekhez rendelt értékek vektorként = ebben esetben még egyéb kiegészítő feltételt is szabunk az interpolációs függvényre (vektorokra)
pl.: olcsóságinvariancia, utazásiinvariancia

4.1 EGYVÁLTOZÓS INTERPOLÁCIÓS MÓDSZEREK

Lagrange interpoláció

- Adottak: $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ helyek
 - $u_1, u_2, \dots, u_N \in \mathbb{R}$ értékek
- Keressünk: legfeljebb $(N-1)$ -edfokú polinomot, melyre $u(x_h) = u_h$ ($h = 1, 2, \dots, N$) teljesül
- Lagrange -féle alappolinomok:

$$l_j(x) = \prod_{r \neq j} \frac{x - x_r}{x_j - x_r} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_N)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_N)}$$

- Az interpolációs polinom:

$$P_{N-1}(x) = \sum_{j=1}^N u_j \cdot l_j(x)$$

A Lagrange-interpolációs polinom egyértelmű

Ha mi ismét (legfeljebb $(N-1)$ -edfokú interpolációs polinom létezne, pl. P_{N-1} és Q_{N-1} , akkor ketjük különbségének Nulla zérushelye lenne, ezért $P_{N-1} - Q_{N-1} = 0$

- A Lagrange - interpolációs polinom együtthatóinak mint kiválasztási módja:

$$P_{N-1}(x) = \sum_{j=0}^N a_j x^{j-1} \text{ alukból az interpolációs}$$

feltételek figyelembevételével:

$$P_{N-1}(x_h) = \sum_{j=0}^N a_j x_h^{j-1} = u_h \quad (h=1, 2, \dots, N)$$

Ez egy N ismeretlenes egyenletrendszer. Matrikalemei:

$$A_{hj} = x_h^{j-1}, \text{ a mátrix reguláris, így a}$$

Lagrange - interpolációs polinom létezéséig építhető.

Hermite - interpoláció

- Adottak: $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ helyek
- ezekhez rendelt $u_h^{(i_h)} \in \mathbb{R}$ ($i_h = 0, 1, m_h-1$) értékek

• jelölje: $m := m_1 + m_2 + \dots + m_N$

- Keressünk: legfeljebb $(m-1)$ -edfokú H_{m-1} polinomot, melyre:

$$H_{m-1}^{(j)}(x_h) = u_h^{(j)} \quad (j=0, 1, \dots, m_h-1, \quad h=1, 2, \dots, N)$$

teljesül

A Hermite - interpolációs polinom létezik,
és egyértelmű

A $H_{m-1}(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^{i-1}$ Hermite - interpolációs polinom együtthatói az alábbi egyenletrendszerből határozhatók meg:

$$H_{m-1}^{(j)}(x_h) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot \frac{d^j(x^{i-1})}{dx^j} \Big|_{x=x_h} = u_h^{(j)}$$

$$(j=0, 1, \dots, m_h-1, \quad h=1, 2, \dots, N)$$

- Speciális esetek:

- mindegyik $m_h=1 \Rightarrow$ Lagrange interpoláció
- $N=1, m_1=m \Rightarrow$ Taylor - polinom

Kétpontos, háromfokú Hermite - interpoláció

- Adottak: $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ helyek

• hozzárendelt u_0, u_1, u_0', u_1' értékek

• legyen $h := x_1 - x_0$

• Keressünk harmadfokú:

$$H(x) = A + B \cdot \left(\frac{x-x_0}{h}\right) + C \cdot \left(\frac{x-x_0}{h}\right)^2 + D \cdot \left(\frac{x-x_0}{h}\right)^3$$

polinomot, melyre:

$$H(x_0) = A = u_0$$

$$H(x_1) = A + B + C + D = u_1$$

$$h \cdot H'(x_0) = B = h \cdot u'_0$$

$$h \cdot H'(x_1) = B + 2C + 3D = h \cdot u'_1$$

• Az egyenletrendszer megoldása:

$$A = u_0$$

$$B = h \cdot u'_0$$

$$C = -3u_0 + 3u_1 - 2h \cdot u'_0 - h \cdot u'_1$$

$$D = 2u_0 - 2u_1 + h \cdot u'_0 - h \cdot u'_1$$

Szakaszonként harmadfokú Hermite-interpoláció

• Adottak: $x_0, x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ helyek

• a hozzájuk rendelt $u_0, u_1, \dots, u_N, u'_0, u'_1, \dots, u'_N$ értékek

→ Minden egyes $[x_{k-1}, x_k]$ rénszintenallummon elhelyezjük

az $u_{k-1}, u'_{k-1}, u_k, u'_k$ adatokból épülő

kétpontos harmadfokú Hermite-interpolációt. Az

egyes rénszintenallummonon értelmezett polinomok C^1 -folytonosan csatlakoznak az osztópontokban

• Megjegyzés: az $u_0, u'_1, \dots, u'_N \in \mathbb{R}$ értékek sokszor nem ismertek.

• Egy lehetséges megoldás:

$$u'_0 := 0 \quad u'_k = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} \quad (k=1, \dots, N-1)$$

$$u'_N := 0$$

Harmadfokú spline interpoláció

• Adottak: $x_0, x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ helyek

• ezekhez rendelt $u_0, u_1, \dots, u_N \in \mathbb{R}$ értékek

• Keressünk olyan szakaszonként leírt harmadfokú S polinomot, melyre

$$S(x_k) = u_k \quad (k=0, 1, \dots, N)$$

teljesül, az egyes rénszintenallummonon értelmezett polinomok az osztópontokban pedig C^2 -folytonosan csatlakoznak

• Alapelv: általában megadott $u_0, u'_1, \dots, u'_N \in \mathbb{R}$ értékek mellett szakaszonként harmadfokú Hermite-interpolációt alkalmazunk.

- Az $[x_{k-1}, x_k]$ részintervallumon (jelölve $h_{k-1} := x_k - x_{k-1}$):

$$H_{k-1}(x) = a_0 + a_1 \frac{x - x_{k-1}}{h_{k-1}} + a_2 \left(\frac{x - x_{k-1}}{h_{k-1}} \right)^2 + a_3 \left(\frac{x - x_{k-1}}{h_{k-1}} \right)^3$$

- Az $[x_k, x_{k+1}]$ részintervallumon (jelölve $h_k := x_{k+1} - x_k$):

$$H_k(x) = a_0 + a_1 \frac{x - x_k}{h_k} + a_2 \left(\frac{x - x_k}{h_k} \right)^2 + a_3 \left(\frac{x - x_k}{h_k} \right)^3$$

- A $H_{k-1}''(x_k) = H_k''(x_k)$ folytonossági feltétellel

$$\frac{1}{h_{k-1}} M_{k-1}' + \left(\frac{2}{h_{k-1}} + \frac{2}{h_k} \right) M_k' + \frac{1}{h_k} M_{k+1}' = 0 \quad (k=1, \dots, N-1)$$

$$= -\frac{3}{h_{k-1}^2} M_{k-1} + \left(\frac{3}{h_{k-1}^2} - \frac{3}{h_k^2} \right) M_k + \frac{3}{h_k^2} M_{k+1}$$

Ez egy 3-odfajú egyenletrendszer az $M_1', \dots, M_{N-1}'$ értékekre

- Speciálisan ekvivalens alappontok esetén:

$$M_{k-1}' + 4M_k' + M_{k+1}' = -\frac{3}{h} M_{k-1} + \frac{3}{h} M_{k+1}$$

$$(k=1, \dots, N-1)$$

M_0', M_N' szabadon választhatók (pl. zérusok)

A harmadfokú spline az interpolációs feltételeket és az adott M_0', M_N' peremfeltétel + kielégítő sima függvények körében minimalizálja az $F(M) := \int_{x_0}^{x_N} |f''(x)|^2 dx$ funkcionált.

4.2 TÖBBVÁLTOZÓS INTERPOLÁCIÓS MÓDSZEREK

- Adottak: $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^2$ helyek
• Lehetnek rögzített $M_1, M_2, \dots, M_N \in \mathbb{R}$ értékek
- Feladat: minél simább n függvényt, melyre $n(x_k) = M_k$ ($k=1, 2, \dots, N$) teljesül.
- Ha az alappontok térglisszissimák vannak: $(x_k^{(1)}, x_j^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$ a hozzárendelt értékek pedig $M_{k,j}$ ($k=1, 2, \dots, N$ $j=1, 2, \dots, M$), akkor alkalmazhatunk kétváltozós Lagrange-interpolációt.

A Lagrange-típusú alappolinomok:

$$l_{k,j}(x) := l_{k,j}(x^{(1)}, x^{(2)}) := \prod_{\substack{p \neq k \\ q \neq j}} \frac{x^{(1)} - x_p^{(1)}}{x_k^{(1)} - x_p^{(1)}} \cdot \frac{x^{(2)} - x_q^{(2)}}{x_j^{(2)} - x_q^{(2)}}$$

Az interpolációs polinom:

$$P(x) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M M_{k,j} \cdot l_{k,j}(x)$$

Shepard - módszer

- Adottak: $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^2$ helyek és az azukhoz rendelt $u_1, u_2, \dots, u_N \in \mathbb{R}$ értékek.

$$u(x) := \frac{\sum_{j=1}^N u_j w_j(x)}{\sum_{j=1}^N w_j(x)} \quad w_j(x) = \frac{1}{\|x - x_j\|^2}$$

• tulajdonságok:

- numerikusan stabil, egyenletmegoldást nem igényel
- minimális műveletigény ($O(N^2)$)
- minimális memóriaigény

A Shepard-interpolációs Függvény mindkét
parciális deriváltja eltűnik az összes alappontban

A radiális bázis Függvények módszere

- Adottak: $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^2$ helyek és az azukhoz rendelt $u_1, u_2, \dots, u_N \in \mathbb{R}$

$$u(x) := \sum_{j=1}^N \lambda_j \Phi_j(x - x_j)$$

ahol $\Phi_1, \dots, \Phi_N$ adott, gömbsimmetrikus függvények
(radiális bázisfüggvények)

Itt ismeretlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ együtthatók az
interpolációs egyenletrendszerből meghatározhatók:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \Phi_j(x_k - x_j) = u_k \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

• tulajdonságok:

- nagyon jó approximációs tulajdonság
- egyenletmegoldás szükséges
- szimmetrikus, teljesen kitöltött, nem bandrita mátrixok
- nagy műveletigény ($O(N^3)$)

• néhány speciális eset:

- multikvadratikus módszer
(method of multiquadratics, MQ)

($c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}$: adott skálázóparam.)

$$\Phi_j(x) := \sqrt{\|x\|^2 + c_j^2}$$

- vékony lemezes módszer

(thin plate splines, TPS)

(nincs skálázó paraméter)

$$\Phi_j(x) := \|x\|^2 \log \|x\|$$

- Gauss-függvények

($c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}$: adott, skálázó
paraméterek)

$$\Phi_j(x) := e^{-c_j^2 \|x\|^2}$$

Felhasznált irodalom:

Dr. Gáspár Csaba előadás anyagai:

<http://rs1.szif.hu/~gasparcs/oktinf.html>