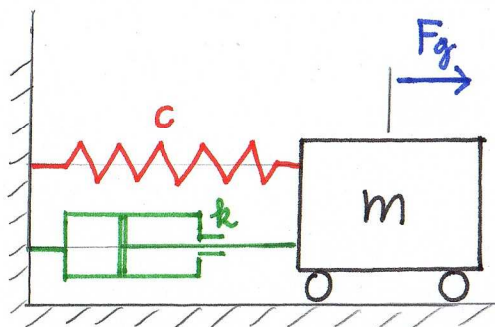


• rezgőrendszer részei



- tömeg (m [kg])
- rugó (rugóállandó: c [$\frac{N}{m}$])
vagy
rugómerevség: s [$\frac{N}{m}$])
- csillapítás
(csillapítási tényező: k [$\frac{Ns}{m}$])
- gerjesztés (F_g [N])

• általános koordináták: a rendszer mozgását egyértelműen meghatározó skaláris paraméterek

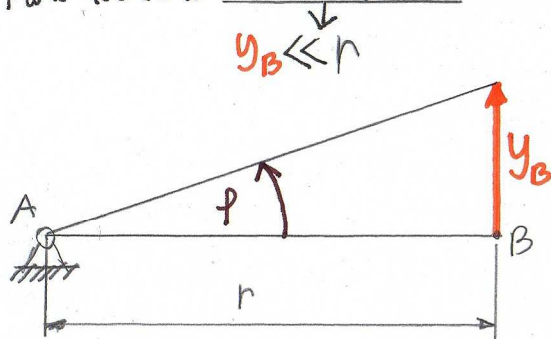
TRANSZLÁCIÓS

- $q = y_B \rightarrow B$ pont elmozdulása
- $\dot{q} = \dot{y}_B$ (v_B) $\rightarrow B$ pont sebessége
- $\ddot{q} = \ddot{y}_B$ (a_B) $\rightarrow B$ pont gyorsulása

ROTÁCIÓS

- $q = \varphi \rightarrow$ szögelfordulás
- $\dot{q} = \dot{\varphi}$ (ω) $\rightarrow$ szögsebesség
- $\ddot{q} = \ddot{\varphi}$ (ε) $\rightarrow$ szöggyorsulás

A TRANSZLÁCIÓS és ROTÁCIÓS általános koordináták között Kis rezgések esetén lineáris a kapcsolat

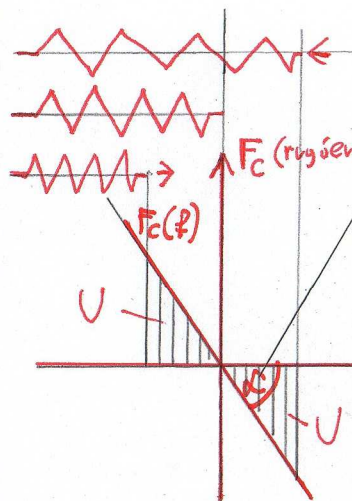


$$y_B \ll r$$

$$\begin{aligned} y_B &= r \cdot \varphi \\ \dot{y}_B &= r \cdot \dot{\varphi} \\ \ddot{y}_B &= r \cdot \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

• rugóerő: a testet a nyugalmi helyzetbe akarja visszatéríteni

- irány: a kitéréssel ellentétes
- nagyság: kis rezgés esetén a kitéréssel lineárisan nő



$$\begin{aligned} \tan \alpha &= s \left[\frac{N}{m} \right] : \text{rugómerevség} \\ c &= \frac{1}{s} \left[\frac{m}{N} \right] : \text{rugóállandó} \end{aligned}$$

$$F_c = -s \cdot \varphi = -\frac{1}{c} \cdot \varphi$$

• rugóenergia: görbe alatti terület

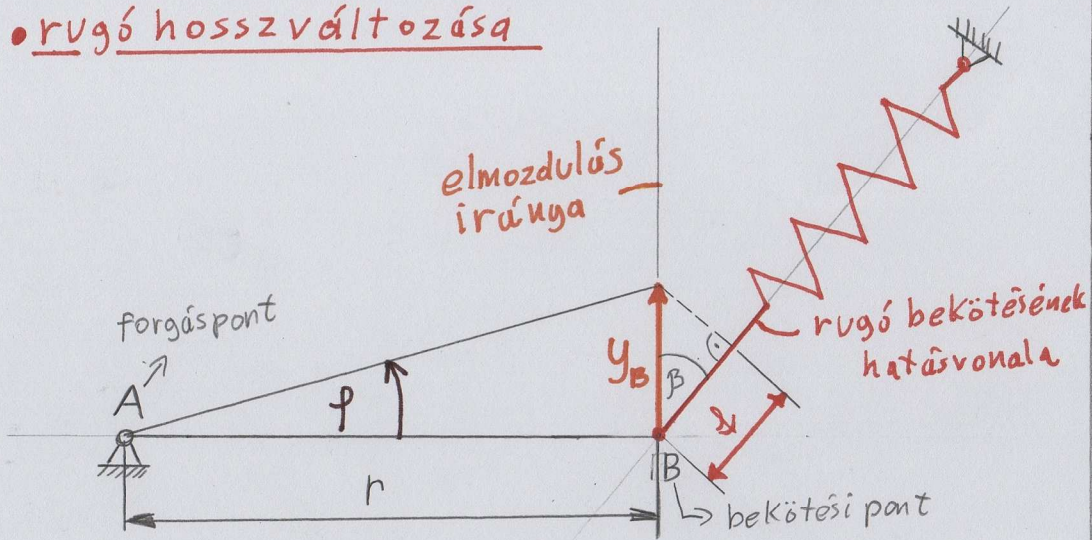
$$U = T_{\nabla} = -\frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot F_c = -\frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot \left(-\frac{1}{c} \cdot \varphi \right) = \frac{1}{2} \frac{\varphi^2}{c}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\varphi^2}{c}$$

rugóerő a rugóenergiából.

$$F_c = - \frac{dU}{dq}$$

• rugó hosszváltozása



- Kis rezgés miatt: $y_B = r \cdot \varphi$

- ábra alapján: $\varphi = y_B \cdot \cos \beta$

$$\boxed{\varphi = r \cdot \varphi \cdot \cos \beta}$$

y_B

r : a forgáspont (A) és a bekötési pont (B) közötti távolság

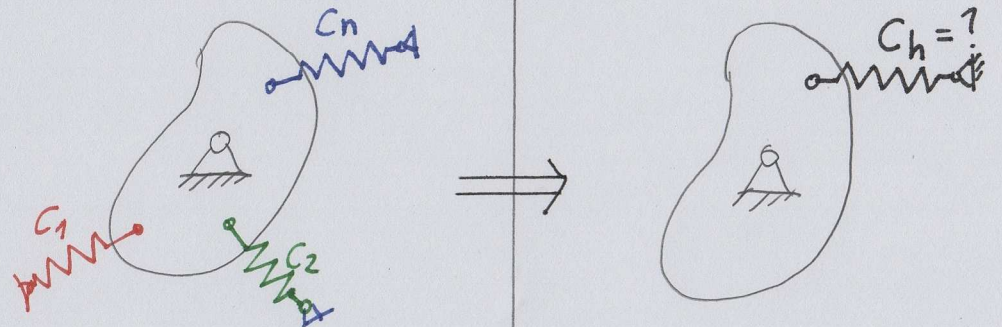
φ : szögelfordulás [radián]

β : a rugó bekötésének hatásvonala és az elmozdulás iránya által bezárt szög

• rugók helyettesítése

- A merev testhez kapcsolódó sok rugó mindig helyettesíthető 1 db rugóval
- 2 rezgőrendszer azonos, ha a rugóikban elbredő alakváltozási energia azonos

eredeti rezgőrendszer $\Rightarrow$ helyettesítő rezgőrendszer



$$U_{\text{eredeti}} = U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_{\text{helyettesítő}}$$

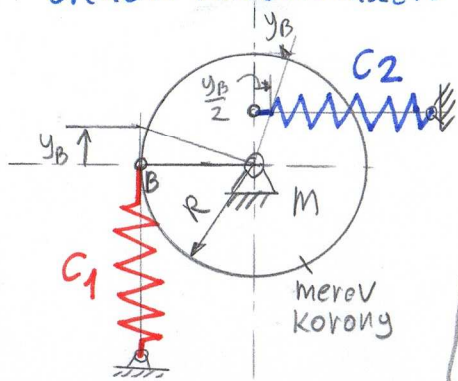
$$U_{\text{eredeti}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{C_{\text{red eredeti}}} \right] q^2 = U_{\text{helyettesítő}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{C_{\text{red helyettesítő}}} \right] q^2$$

$$\frac{1}{C_{\text{red eredeti}}} = \frac{1}{C_{\text{red helyettesítő}}}$$

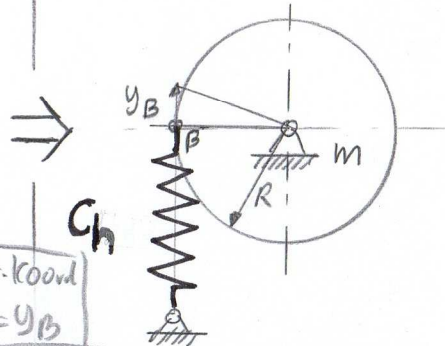
$$\Downarrow$$

$$C_h$$

eredeti rezgőrendszer:



helyettesítő rezgőrendszer:



ált. koord.
 $q = y_B$

• A rugóenergia:

$$U = U_1 + U_2$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{f_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{f_2^2}{C_2}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{y_B^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{y_B}{2}\right)^2}{C_2}$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{4C_2} \right] y_B^2$$

• A rugóenergia:

$$U = U_h$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{f_h^2}{C_h}$$

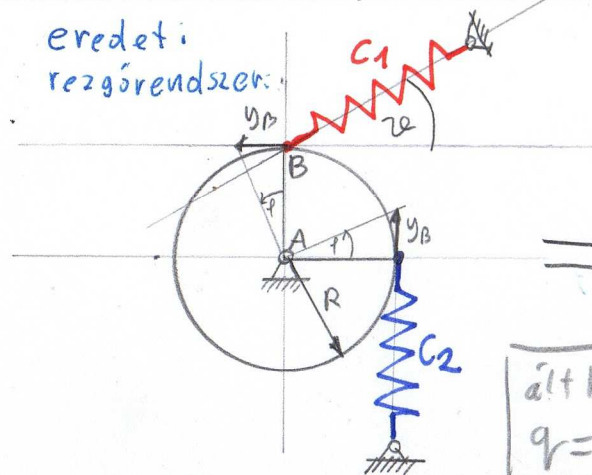
$$U = \frac{1}{2} \frac{y_B^2}{C_h}$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{C_h} \right] y_B^2$$

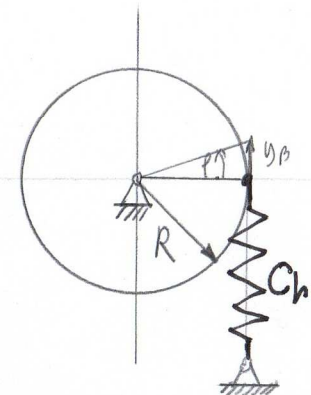
$$\frac{1}{C_h} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{4C_2}$$

$$C_h = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{4C_2} \right)^{-1}$$

eredeti rezgőrendszer:



helyettesítő rezgőrendszer:

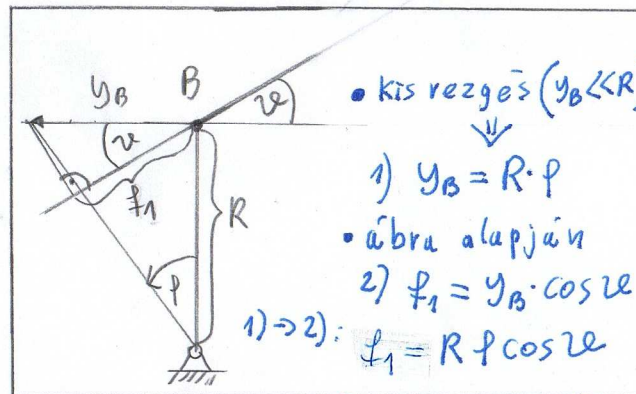


ált. koord.
 $q = y_B$

• A rugóenergia:

$$U = U_1 + U_2$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{f_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{f_2^2}{C_2}$$



• kis rezgés ($y_B \ll R$)

1) $y_B = R \cdot \varphi$

• ábra alapján

2) $f_1 = y_B \cdot \cos \vartheta$

1) $\rightarrow$ 2): $f_1 = R \varphi \cos \vartheta$

$$U = \frac{1}{2} \frac{(R \varphi \cos \vartheta)^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{(R \varphi)^2}{C_2}$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{R^2 \cos^2 \vartheta}{C_1} + \frac{R^2}{C_2} \right] \varphi^2$$

• A rugóenergia:

$$U = U_h$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{f_h^2}{C_h}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{(R \varphi)^2}{C_h}$$

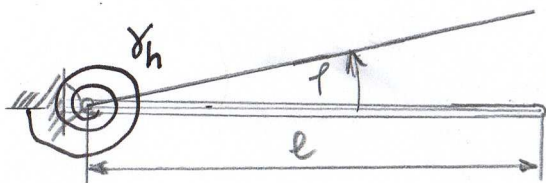
$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{R^2}{C_h} \right] \varphi^2$$

$$\frac{R^2}{C_h} = \frac{R^2 \cos^2 \vartheta}{C_1} + \frac{R^2}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_h} = \frac{\cos^2 \vartheta}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_h = \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1}$$

helyettesítő rezgőrendszer 1.



$$U = U_h$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\gamma_h}$$

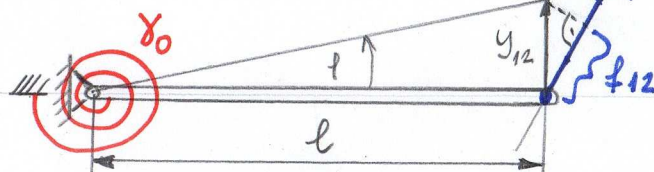
$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\gamma_h} \right] p^2$$

$$\frac{1}{\gamma_h} = \frac{1}{\gamma_0} + \frac{l^2 \cos^2 \vartheta}{C_1 + C_2}$$

$$\gamma_h = \left(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{l^2 \cos^2 \vartheta}{C_1 + C_2} \right)^{-1}$$

eredeti rezgőrendszer

ált. koordináták:
 $q = \varphi$



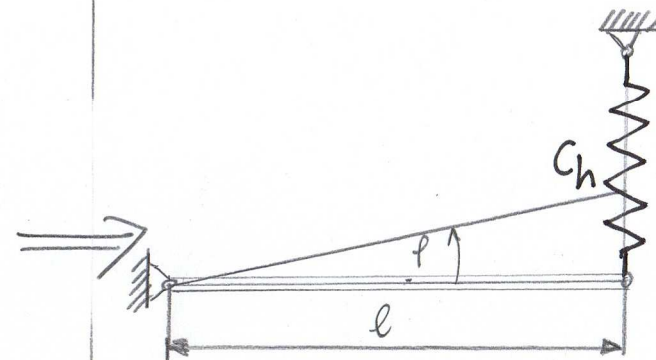
$$U = U_0 + U_{12}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\gamma_0} + \frac{1}{2} \frac{f_{12}^2}{C_1 + C_2}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\gamma_0} + \frac{1}{2} \frac{(l \varphi \cos \vartheta)^2}{C_1 + C_2}$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\gamma_0} + \frac{l^2 \cos^2 \vartheta}{C_1 + C_2} \right] p^2$$

helyettesítő rezgőrendszer 2.



$$U = U_h$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{f_h^2}{C_h}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{(l \varphi)^2}{C_h}$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{l^2}{C_h} \right] p^2$$

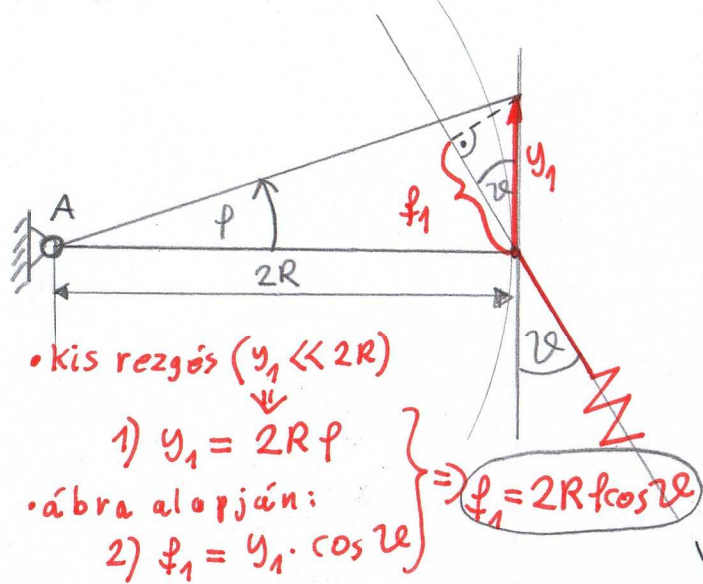
$$\frac{l^2}{C_h} = \frac{1}{\gamma_0} + \frac{l^2 \cos^2 \vartheta}{C_1 + C_2}$$

$$\frac{1}{C_h} = \frac{1}{l^2 \gamma_0} + \frac{\cos^2 \vartheta}{C_1 + C_2}$$

$$C_h = \left(\frac{1}{l^2 \gamma_0} + \frac{\cos^2 \vartheta}{C_1 + C_2} \right)^{-1}$$

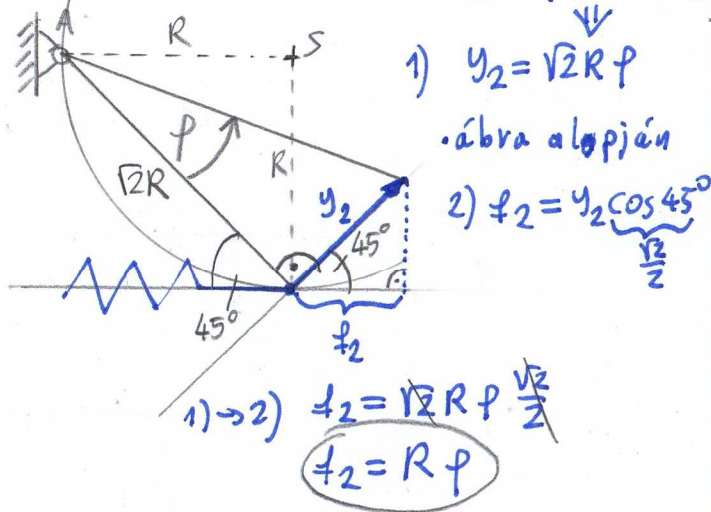
rugók hosszváltozásai:

1. rugó hosszváltozása (Δl_1)

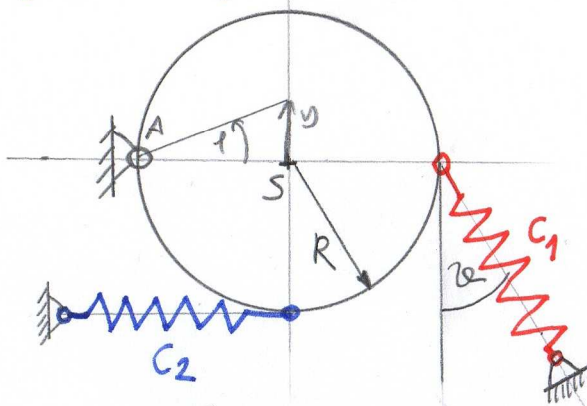


2. rugó hosszváltozása (Δl_2)

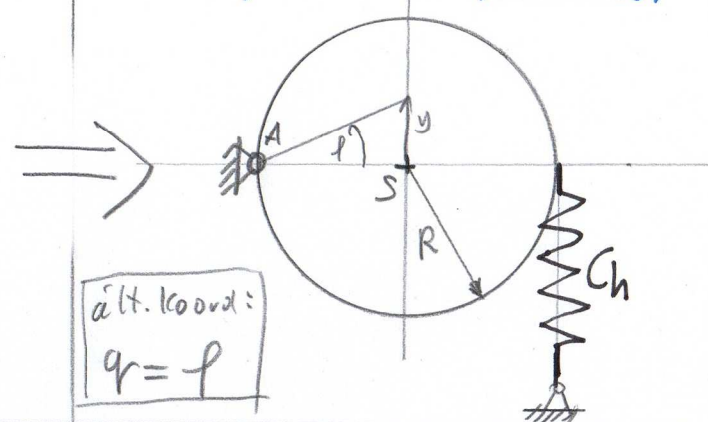
• kis rezgés ($y_2 \ll \sqrt{2}R$)



eredeti rezgőrendszer



helyettesítő rezgőrendszer



$$U = U_1 + U_2$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\Delta l_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{\Delta l_2^2}{C_2}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{(2R\varphi \cos 2\vartheta)^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{(R\varphi)^2}{C_2}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{4R^2\varphi^2 \cos^2 2\vartheta}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{R^2\varphi^2}{C_2}$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{4R^2 \cos^2 2\vartheta}{C_1} + \frac{R^2}{C_2} \right] \varphi^2$$

$$U = U_h$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\Delta l_h^2}{C_h}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{(2R\varphi)^2}{C_h}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{4R^2\varphi^2}{C_h}$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{4R^2}{C_h} \right] \varphi^2$$

$$\frac{4R^2}{C_h} = \frac{4R^2 \cos^2 2\vartheta}{C_1} + \frac{R^2}{C_2} \quad / : 4R^2$$

$$\frac{1}{C_h} = \frac{\cos^2 2\vartheta}{C_1} + \frac{1}{4C_2}$$

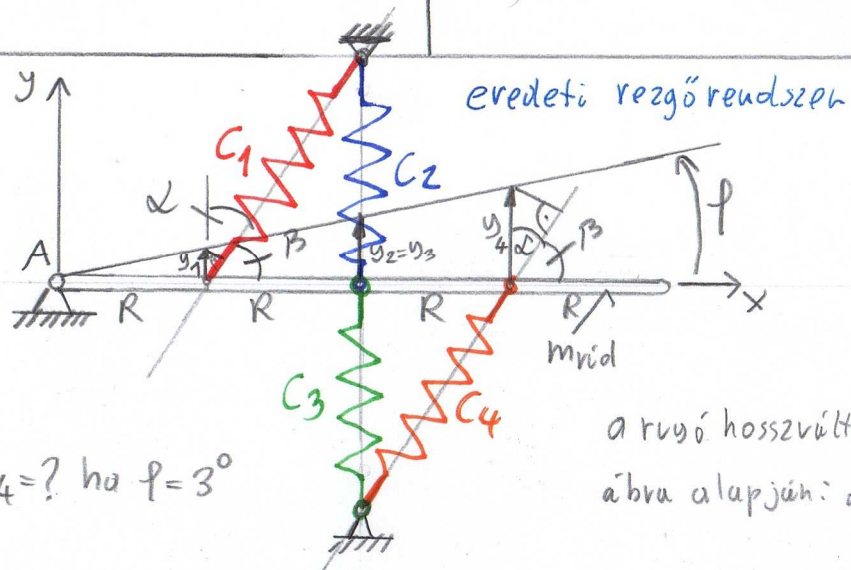
$$C_h = \left(\frac{\cos^2 2\vartheta}{C_1} + \frac{1}{4C_2} \right)^{-1}$$

adott
 $\beta = 60^\circ$
 $R = 1\text{ m}$
 $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{N}}{\text{m}}$

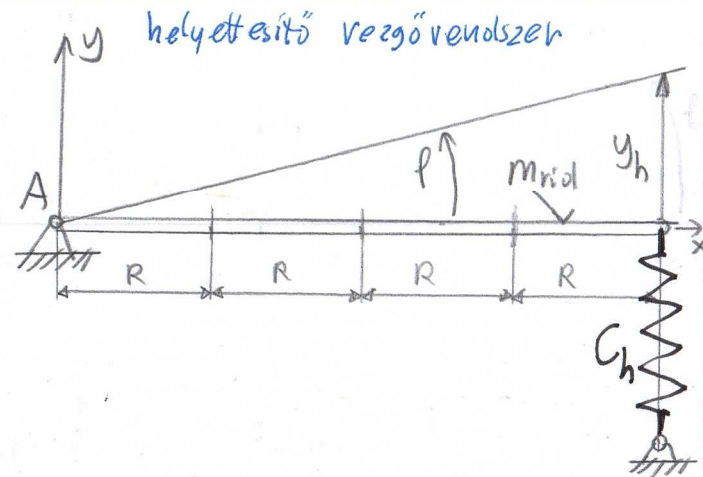
$m_{\text{mid}} = 12 \text{ kg}$

Feladat

a) $C_h = ?$ b) $U_4 = ?$ ha $p = 3^\circ$



ált. koord:
 $q = p$



a rugó hosszváltozáshoz Δ kell
 ábra alapján: $\Delta = 90^\circ - \beta = 30^\circ$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{p_2^2}{C_2} + \frac{1}{2} \frac{p_3^2}{C_3} + \frac{1}{2} \frac{p_4^2}{C_4}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{(R p \cos \Delta)^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{(2R p)^2}{C_2} + \frac{1}{2} \frac{(2R p)^2}{C_3} + \frac{1}{2} \frac{(3R p \cos \Delta)^2}{C_4}$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{R^2 \cos^2 \Delta}{C_1} + \frac{4R^2}{C_2} + \frac{4R^2}{C_3} + \frac{9R^2 \cos^2 \Delta}{C_4} \right] p^2$$

$$U = U_h$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{p_h^2}{C_h}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{(4R p)^2}{C_h}$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{16R^2}{C_h} \right] p^2$$

b) $U_4 = \frac{1}{2} \frac{(3R p \cos \Delta)^2}{C_4} =$
 $= \frac{1}{2} \frac{(3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \cos 30^\circ)^2}{4 \cdot 10^{-4}} =$
 $= 23,13 \text{ Nm}$

$$\frac{16R^2}{C_h} = \frac{R^2 \cos^2 \Delta}{C_1} + \frac{4R^2}{C_2} + \frac{4R^2}{C_3} + \frac{9R^2 \cos^2 \Delta}{C_4}$$

$$S_h = \frac{1}{C_h} = \frac{1}{16} \left[\frac{\cos^2 \Delta}{C_1} + \frac{4}{C_2} + \frac{4}{C_3} + \frac{9 \cos^2 \Delta}{C_4} \right] = \frac{\cos^2 30^\circ + 4 + 4 + 9 \cos^2 30^\circ}{16 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 2421,875 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$C_h = \frac{1}{S_h} = \frac{1}{2421,875} = 4,129 \cdot 10^{-4} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$