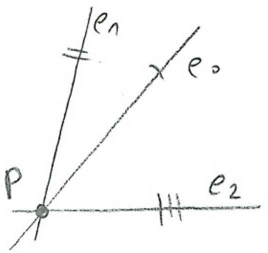
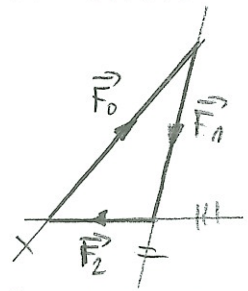
3 ERŐ EGYENSÚLYA

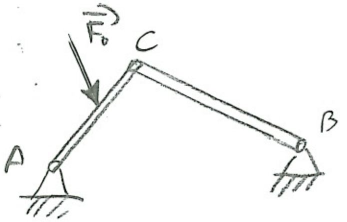
- 3 erő egyensúlyának feltétele:
  1) a hatásvonalak azonos síkba esnek és 1 pontban metsződnek
  2) az erővektorok zárt vektorháromszöget alkotnak
  3) a zárt vektorháromszög nyílfolyama folytonos
- A szerkesztéshez mindig 2 ábra szükséges:

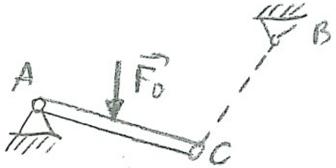
szerkezetábra	erőábra
- hosszléptéket alkalmazunk	- erőléptéket alkalmazunk
- hatásvonalak helyét szemlélteti	- erők nagyságát és irányát szemlélteti





- típusfeladat: egyik rúdján terhelt 3 csuklós szerkezet





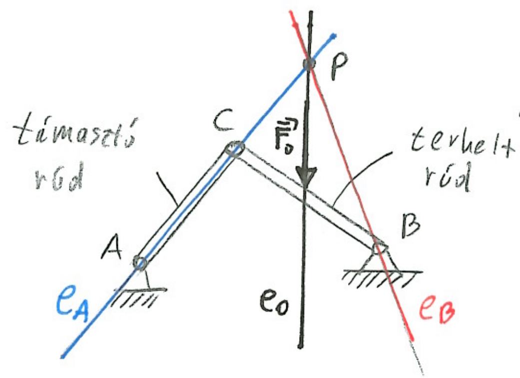
adott: $\vec{F_0}$, méretek
feladat: $\vec{F_A}$, $\vec{F_B}$

az ábrákon:
AC rúd: terhelt rúd
CB rúd/kötél: támasztó rúd/kötél

3 ERŐ EGYENSÚLYA

- 3 erő egyensúlyának feltétele:
  1) a hatásvonalak azonos síkba esnek és 1 pontban metsződnek
  2) az erővektorok zárt vektorháromszöget alkotnak
  3) a zárt vektorhárom szög nyílfolyama folytonos

- típuspélda: 2 rúdból vagy 1 rúdból és 1 kötélből álló 3 csuklós szerkezet, melynek az egyik rúdja terhelt, a másik csak támaszt



- adott: $\vec{F_0}$, méretek
- feladat: $\vec{F_A}$ = ?
  $\vec{F_B}$ = ?

hatásvonalak meghatározása:

e_0 → adott (ábráról leolvasható $\vec{F_0}$ iránya)
e_A → támasztórúdban csak rúdirányú erő ébredhet
} ⇒ P pont
e_B → a 3 hatásvonalnak 1 pontban kell metsződnie
⇓
A B pontban ébredő támasztóerő hatásvonalának át kell mennie a P ponton

adott:

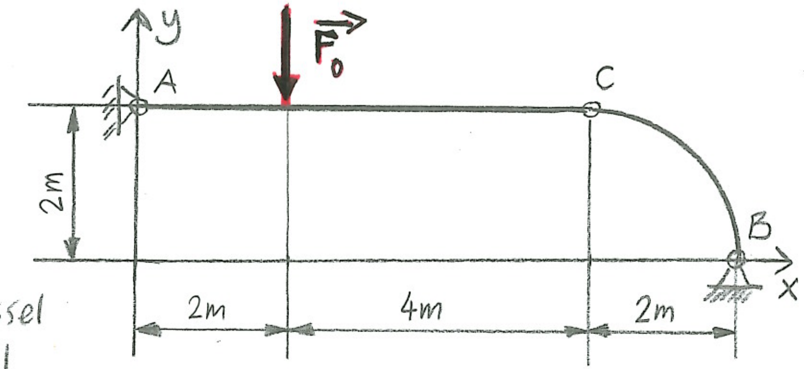
$F_0 = 20\,kN$

Feladat:

$\vec{F_A} = ?\ ,\ \vec{F_B} = ?$

a) szerkesztéssel

b) számítással



a) szerkesztéssel

– terhelt rúd: AC rúd (erre hat $\vec{F_0}$ terhelőerő)

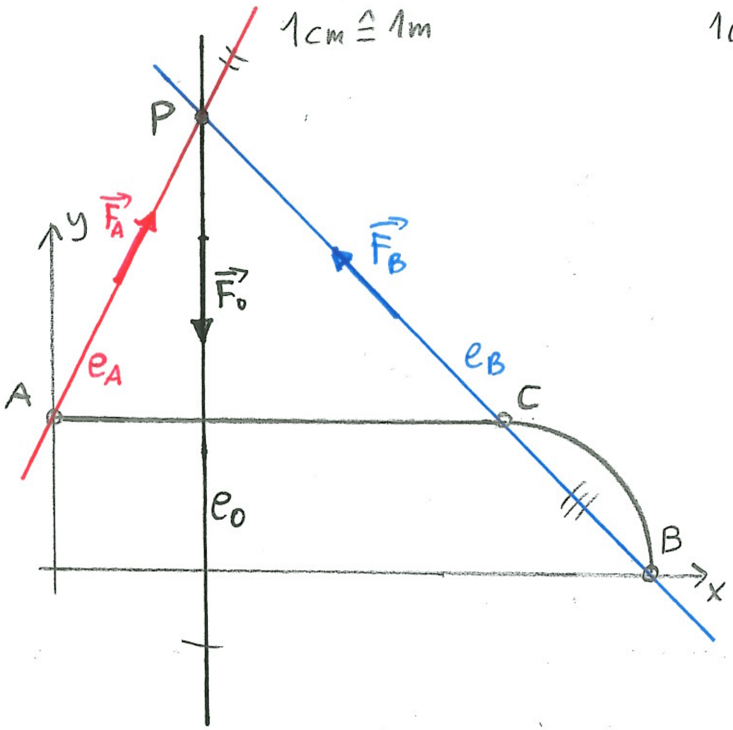
– támasztó rúd: BC rúd (erre csak a két végén hat erő)

$\Downarrow$

csak rúdirányú erő ébredhet benne

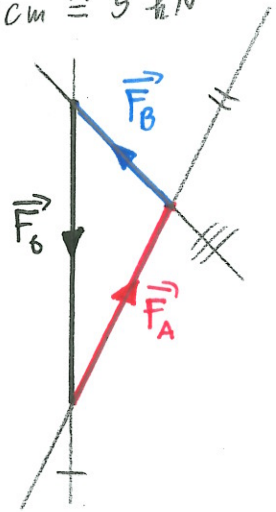
szerkezetábra

1cm ≙ 1m



erőábra

1cm ≙ 5 kN



b) számítással:

1. módszer: 3 erő egyensúlyából:

- az egyensúlyi egyenlet:

$$\vec{F_0} + \vec{F_A} + \vec{F_B} = \vec{0}$$

- az egyes erővektorok x, y irányú komponensekkel:

$$\vec{F_0} = F_0\,\vec{e_0} = F_0(-\vec{j}) = (-20\vec{j})\ kN$$

$$\vec{F_A} = F_A\,\vec{e_A} = F_A\frac{\vec{r_{AP}}}{|\vec{r_{AP}}|} = F_A\frac{2\vec{i}+4\vec{j}}{\sqrt{2^2+4^2}} = F_A\left(\frac{2}{\sqrt{20}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{20}}\vec{j}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}F_A\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}F_A\vec{j}$$

$$\vec{F_B} = F_B\,\vec{e_B} = F_B\frac{\vec{r_{BC}}}{|\vec{r_{BC}}|} = F_B\frac{-2\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{(-2)^2+2^2}} = F_B\left(-\frac{2}{\sqrt{8}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{8}}\vec{j}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}F_B\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}F_B\vec{j}$$

- visszahelyettesítve az egyensúlyi egyenletbe:

$$-20\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}F_A\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}F_A\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}F_B\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}F_B\vec{j} = \vec{0} \quad /\cdot\vec{i}\ /\cdot\vec{j}$$

$$/\cdot\vec{i} \rightarrow 1)\quad \frac{1}{\sqrt{5}}F_A - \frac{1}{\sqrt{2}}F_B = 0 \implies \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{20\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}F_B = 0$$

$$/\cdot\vec{j} \rightarrow 2)\quad -20 + \frac{2}{\sqrt{5}}F_A + \frac{1}{\sqrt{2}}F_B = 0$$

$$\frac{20}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}F_B$$

$$1)+2):\quad -20 + \frac{3}{\sqrt{5}}F_A = 0$$

$$F_B = \frac{20\sqrt{2}}{3}$$

$$F_A = \frac{20\sqrt{5}}{3}$$

- a támasztóerő vektorok:

$$\vec{F_A} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{20\sqrt{5}}{3}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{20\sqrt{5}}{3}\vec{j} = \frac{20}{3}\vec{i} + \frac{40}{3}\vec{j} = (6,\dot{6}\,\vec{i} + 13,\dot{3}\,\vec{j})\ kN$$

$$\vec{F_B} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{20\sqrt{2}}{3}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{20\sqrt{2}}{3}\vec{j} = -\frac{20}{3}\vec{i} + \frac{20}{3}\vec{j} = (-6,\dot{6}\,\vec{i} + 6,\dot{6}\,\vec{j})\ kN$$

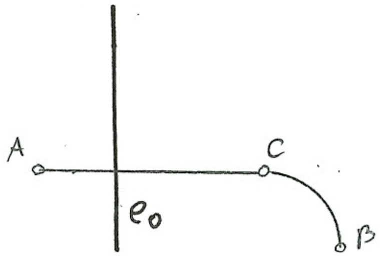
A SZERKESZTÉS LÉPÉSEI:

I. szerkezetábra

1) hosszlépték felvétele (pl.: 1cm $\triangleq$ 1m)
2) szerkezet megrajzolása

3) terhelőerő hatásvonalának berajzolása (e_0)

→ ez adott

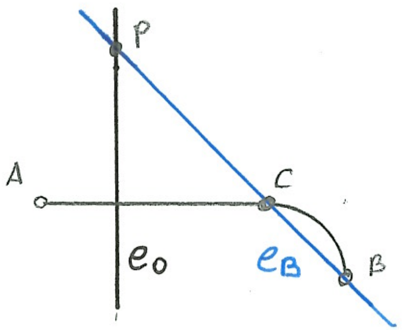


4) támasztórúd (BC rúd) csuklójánál (B pont) ébredő támasztóerő hatásvonalának megrajzolása (e_B)

→ ezt onnét tudjuk, hogy a támasztórúdban csak <u>rúdirányú</u> erő ébredhet

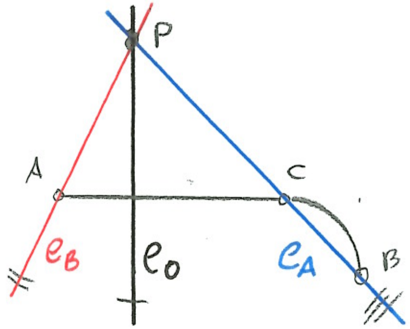
rúdirány: a rúd két végpontja által meghatározott irány (független a rúd alakjától).

e_0 és e_B metszéspontja legyen a P pont



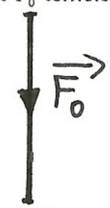
5) terhelt rúd (AC rúd) csuklójánál (A pont) ébredő támasztóerő hatásvonalának megrajzolása (e_A)

→ ezt onnét tudjuk, hogy a 3 erő egyensúlyának egyik feltétele, hogy a 3 erő hatásvonala egy pontban metssze egymást → az A pontban ébredő támasztóerő hatásvonalának át kell mennie az előző két pontban berajzolt hatásvonalak metszéspontján (P pont)

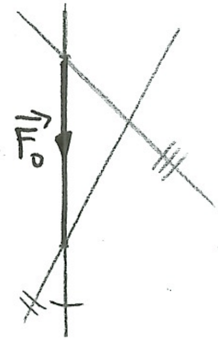


II. erőábra

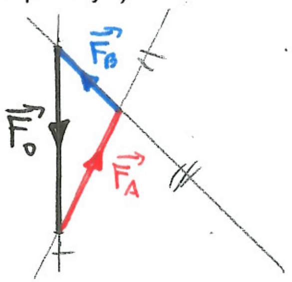
1) erőlépték felvétele (pl.: 1cm $\triangleq$ 5kN)
2) az ismert $\vec{F}_0$ terhelőerő megrajzolása (nyilat középre rakjuk)



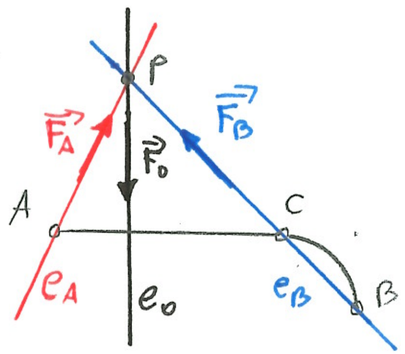
3) $\vec{F}_0$ erő egyik végpontján keresztül e_A -val, másik végpontján keresztül e_B -vel húzzunk párhuzamost
   - mindegy, hogy melyik végponton keresztül melyik támasztóerő hatásvonalával húzunk párhuzamost
   - a behúzott párhuzamosok kimetszik $\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ támasztóerők nagyságát



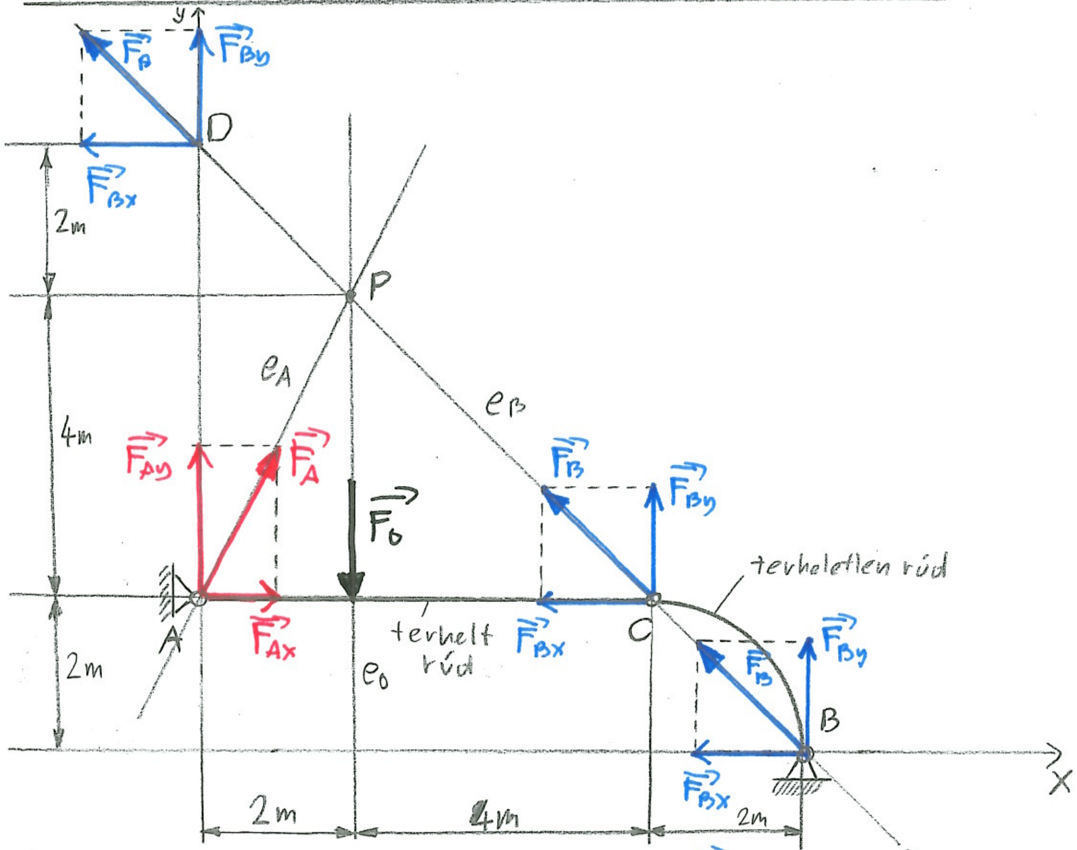
4) Rajzoljuk be az erők irányát úgy, hogy a nyílfolyam folytonos legyen (nyilakat középre rakjuk).



5) a szerkezetábrán a hatásvonalakra rajzoljuk fel az erővektorokat (a nagyság nem számít, a nyilakat a vektor végére rakjuk)



2. módszer: nyomatéki és vetületi egyenletekkel



I. terheletlen rúd csuklójában ébredő $\vec{F_B}$ támasztóerő meghatározása

1) F_{By} meghatározása:

→ nyomatéki egyenlet "a" tengelyre, $\vec{F_B}$-t C pontba toljuk → $\vec{F_{Bx}}$ komponense nem fejt ki nyomatékot "a"-ra

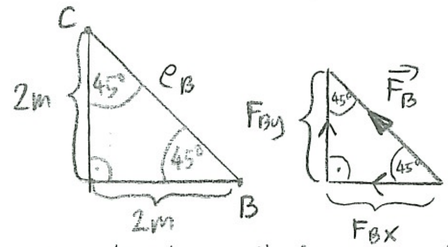
$$M_a = 0 = -2F_0 + 6F_{By} \Rightarrow F_{By} = \frac{2F_0}{6} = \frac{2\cdot 20}{6} = \frac{20}{3} = 6,\dot{6}\ kN\ (\uparrow)$$

2) F_{Bx} meghatározása:

→ a) lehetőség: nyomatéki egyenlet "a" tengelyre, $\vec{F_B}$-t D pontba toljuk → $\vec{F_{By}}$ komponense nem fejt ki nyomatékot "a"-ra

$$M_a = 0 = -2F_0 + 6F_{Bx} \Rightarrow F_{Bx} = \frac{2F_0}{6} = \frac{2\cdot 20}{6} = \frac{20}{3} = 6,\dot{6}\ kN\ (\leftarrow)$$

→ b) lehetőség: mivel tudjuk, hogy $\vec{F_B}$ rúdirányú és az egyik komponens már ismert, a másik komponens geometriai hasonlóság alapján is számítható:



A 2 háromszög hasonlósága miatt:

$$\frac{2}{2} = \frac{|F_{By}|}{|F_{Bx}|}$$
$$\Downarrow$$
$$|F_{Bx}| = |F_{By}| = 6,\dot{6}\ kN$$

Az előjel az ábráról olvasható le: $F_{Bx} = 6,\dot{6}\ kN\ (\leftarrow)$

II. terhelt rúd csuklójában ébredő $\vec{F_A}$ támasztóerő meghatározása

3) F_{Ay} meghatározása

→ a) lehetőség: nyomatéki egyenlet "c" tengelyre, $\vec{F_A}$ A pontban hagyva → $\vec{F_{Ax}}$ komponense nem fejt ki nyomatékot "c"-re

$$M_c = 0 = 4F_0 - 6F_{Ay} \Rightarrow F_{Ay} = \frac{4F_0}{6} = \frac{4\cdot 20}{6} = 13,\dot{3}\ kN\ (\uparrow)$$

→ b) lehetőség: mivel y irányban már csak az F_{Ay} ismeretlen, y irányú vetületi egyenletet is alkalmazhatunk

$$F_y = 0 = F_{Ay} - F_0 + F_{By} \Rightarrow F_{Ay} = F_0 - F_{By} = 20 - 6,\dot{6} = 13,\dot{3}\ kN\ (\uparrow)$$

4) F_{Ax} meghatározása

→ a) lehetőség: nyomatéki egyenlet "d" tengelyre, $\vec{F_A}$ A pontban hagyva → $\vec{F_{Ay}}$ komponense nem fejt ki nyomatékot "d"-re

$$M_d = 0 = -2F_0 + 6F_{Ax} \Rightarrow F_{Ax} = \frac{2F_0}{6} = \frac{2\cdot 20}{6} = 6,\dot{6}\ kN\ (\rightarrow)$$

→ b) lehetőség: mivel x irányban már csak F_{Ax} ismeretlen, x irányú vetületi egyenletet is alkalmazhatunk

$$F_x = 0 = F_{Ax} - F_{Bx} \Rightarrow F_{Ax} = F_{Bx} = 6,\dot{6}\ kN\ (\rightarrow)$$

- a támasztóerő vektorok:

$$\vec{F_A} = (6,\dot{6}\,\vec{i} + 13,\dot{3}\,\vec{j})\ kN \qquad \vec{F_B} = (-6,\dot{6}\,\vec{i} + 6,\dot{6}\,\vec{j})$$

- **adott:** $a = 1\,m$

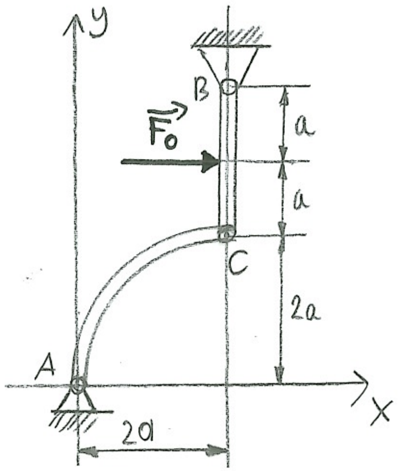
  $F_0 = 60N$

- **Feladat:** $\vec{F_A} = ?$

  $\vec{F_B} = ?$

  a) szerkesztéssel

  b) számítással



a) szerkesztéssel

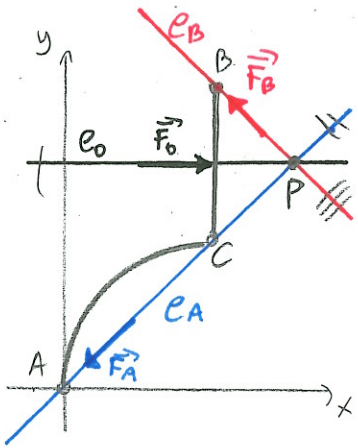
- Az A pontban ébredő $\vec{F_A}$ erő hatásvonala rúdirányú (AC egyenes) mivel AC rúd nincs terhelve, csak támaszt
- Az egyensúlyhoz a 3 erő hatásvonalának 1 pontban kell metsződnie ⇒ a B pontban ébredő $\vec{F_B}$ erő hatásvonalának át kell mennie F_0 és $\vec{F_A}$ erő hatásvonalainak metszéspontján

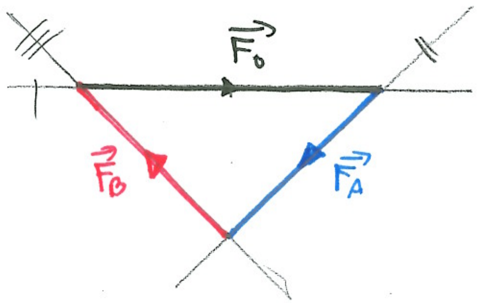
szerkezetábra

$1cm \hat{=} 1m$

erőábra

$1cm \hat{=} 15N$





b) számítással

1. módszer: egyensúlyi egyenlettel

- az egyensúlyi egyenlet:

$$\vec{F_0} + \vec{F_A} + \vec{F_B} = \vec{0}$$

- az egyes erővektorok x és y irányú komponensekkel:

$$\vec{F_0} = F_0 \vec{e_0} = F_0 \vec{i} = (60\vec{i})\,N$$

$$\vec{F_A} = F_A \vec{e_A} = F_A \frac{\vec{r_{AC}}}{|\vec{r_{AC}}|} = F_A \frac{2\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{2^2+2^2}} = F_A\left(\frac{2}{\sqrt{8}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{8}}\vec{j}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} F_A \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} F_A \vec{j}$$

$$\vec{F_B} = F_B \vec{e_B} = F_B \frac{\vec{r_{BP}}}{|\vec{r_{BP}}|} = F_B \frac{1\vec{i} - 1\vec{j}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = F_B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} F_B \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} F_B \vec{j}$$

- visszahelyettesítve az egyensúlyi egyenletbe:

$$60\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}F_A\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}F_A\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}F_B\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}F_B\vec{j} = \vec{0} \quad /\cdot\vec{i} \;/\cdot\vec{j}$$

$$\left.\begin{aligned} /\cdot\vec{i} \to 1)\;& 60 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_A + \frac{1}{\sqrt{2}}F_B = 0 \\ /\cdot\vec{j} \to 2)\;& \frac{1}{\sqrt{2}}F_A - \frac{1}{\sqrt{2}}F_B = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_A = F_B$$

$$2) \to 1):\quad 60 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_A + \frac{1}{\sqrt{2}}F_A = 0$$

$$60 + \frac{2}{\sqrt{2}}F_A = 0$$

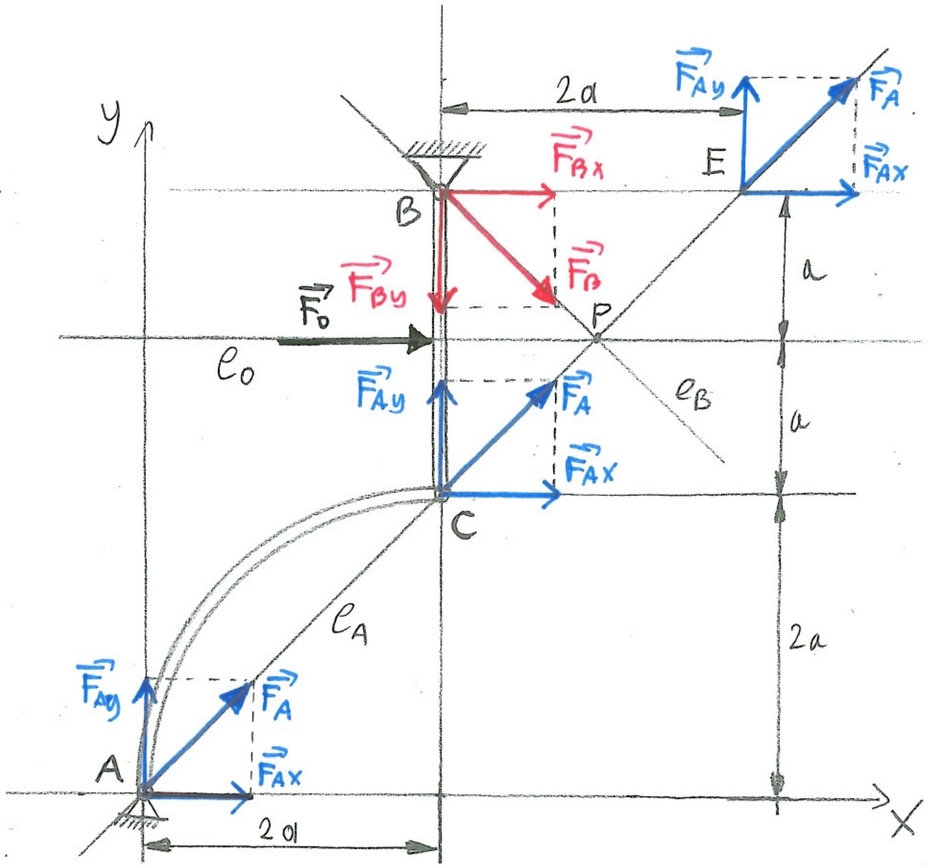
$$F_A = -\frac{60\sqrt{2}}{2} = -30\sqrt{2}$$

- a támasztóerő vektorok:

$$\vec{F_A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-30\sqrt{2})\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-30\sqrt{2})\vec{j} = (-30\vec{i} - 30\vec{j})\,N$$

$$\vec{F_B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-30\sqrt{2})\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}(-30\sqrt{2})\vec{j} = (-30\vec{i} + 30\vec{j})\,N$$

2. módszer: nyomatéki és vetületi egyenletekkel



I. terheletlen rúd csuklójában ébredő $\vec{F}_A$ támasztóerő

1) F_{Ax} meghatározása

→ nyomatéki egyenlet b tengelyre, $\vec{F}_A$ C-be tolva:

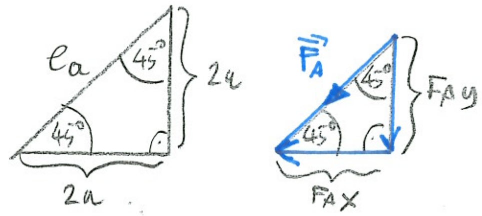
$$M_b = 0 = aF_0 + 2aF_{Ax} \Rightarrow F_{Ax} = \frac{-aF_0}{2a} = -\frac{F_0}{2} = -\frac{60}{2} = -30N(\leftarrow)$$

2) F_{Ay} meghatározása

→ a) lehetőség: nyomatéki egyenlet b tengelyre, $\vec{F}_A$ E-be tolva

$$M_b = 0 = aF_0 + 2aF_{Ay} \Rightarrow F_{Ay} = \frac{-aF_0}{2a} = -\frac{F_0}{2} = -\frac{60}{2} = -30N(\downarrow)$$

→ b) lehetőség: geometriai hasonlóság alapján:



$$\frac{2a}{2a} = \frac{|F_{Ay}|}{|F_{Ax}|}$$
$$\Downarrow$$
$$|F_{Ay}| = |F_{Ax}| = 30N$$

ábra alapján: $F_{Ay} = -30N(\downarrow)$

II. terhelt rúd csuklójában ébredő $\vec{F}_B$ támasztóerő

3) F_{Bx} meghatározása

→ a) lehetőség: nyomatéki egyenlet c tengelyre, $\vec{F}_B$ B pontban hagyva

$$M_C = 0 = -aF_0 - 2aF_{Bx} \Rightarrow F_{Bx} = \frac{-aF_0}{2a} = -\frac{F_0}{2} = -\frac{60}{2} = -30N(\leftarrow)$$

→ b) lehetőség: x irányú vetületi egyenlet

$$F_x = 0 = F_{Ax} + F_0 + F_{Bx} \Rightarrow F_{Bx} = -F_{Ax} - F_0 = -(-30) - 60 = -30N(\leftarrow)$$

4) F_{By} meghatározása

→ a) lehetőség: nyomatéki egyenlet e tengelyre, $\vec{F}_B$ B pontban hagyva

$$M_e = 0 = aF_0 - 2aF_{By} \Rightarrow F_{By} = \frac{aF_0}{2a} = \frac{F_0}{2} = \frac{60}{2} = 30N(\uparrow)$$

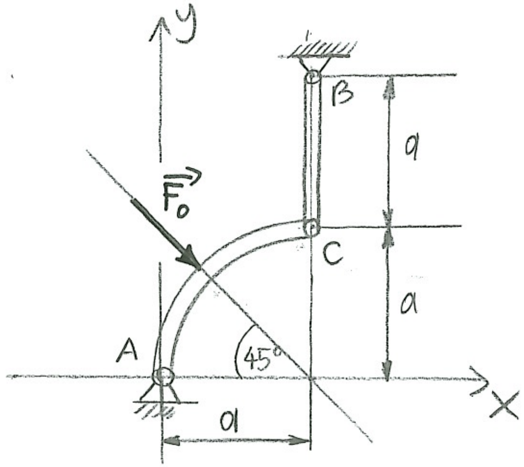
→ b) lehetőség: y irányú vetületi egyenlet

$$F_y = 0 = F_{Ay} + F_{By} \Rightarrow F_{By} = -F_{Ay} = -(-30) = 30N(\uparrow)$$

• a támasztóerő vektorok:

$$\vec{F}_A = (-30\vec{i} - 30\vec{j})N$$
$$\vec{F}_B = (-30\vec{i} + 30\vec{j})N$$

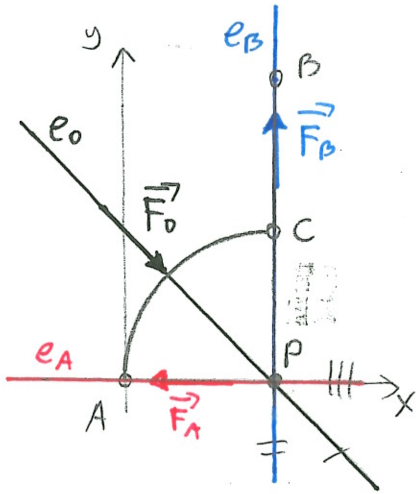
- **adott:** $a = 2\,m$
  $F_0 = 80\,N$
- **Feladat:** $\vec{F_A} = ?$
  $\vec{F_B} = ?$
  a) szerkesztéssel
  b) számítással



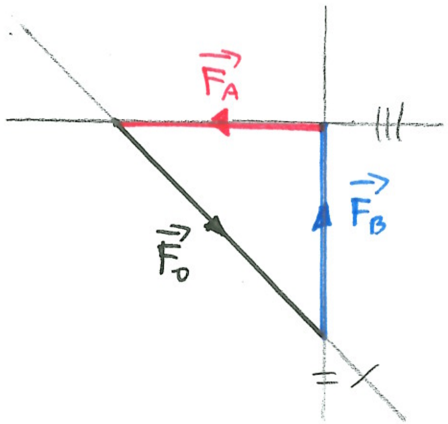
a) szerkesztéssel

- A B pontban ébredő $\vec{F_B}$ támasztóerő rúdirányú (BC egyenes) mivel BC rúd nincs terhelve, csak támaszt
- A z egyensúlyhoz a 3 erő hatásvonalának 1 pontban kell metsződnie ⇒ az A pontban ébredő $\vec{F_A}$ erő hatásvonalának át kell mennie $\vec{F_0}$ és $\vec{F_B}$ erő hatásvonalainak metszéspontján

szerkesztőábra
1cm ≙ 1m



erőábra
1cm ≙ 20 N



b) számítással

1. módszer: egyensúlyi egyenlettel

- az egyensúlyi egyenlet:
  $\vec{F_0} + \vec{F_A} + \vec{F_B} = \vec{0}$
- az egyes erővektorok x és y irányú komponenseikkel:

$$\vec{F_0} = F_0 \cos 45^\circ \vec{i} - F_0 \sin 45^\circ \vec{j} = 80\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - 80\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} = 40\sqrt{2}\,\vec{i} - 40\sqrt{2}\,\vec{j}$$

$$\vec{F_A} = F_A \vec{i}$$

$$\vec{F_B} = F_B \vec{j}$$

- visszahelyettesítve az egyensúlyi egyenletbe:

$$40\sqrt{2}\,\vec{i} - 40\sqrt{2}\,\vec{j} + F_A\vec{i} + F_B\vec{j} = \vec{0} \quad /\cdot\vec{i} / \cdot\vec{j}$$

$$/\cdot\vec{i} \Rightarrow 1)\ 40\sqrt{2} + F_A = 0 \Rightarrow F_A = -40\sqrt{2} = -56{,}57$$

$$/\cdot\vec{j} \Rightarrow 2)\ -40\sqrt{2} + F_B = 0 \Rightarrow F_B = 40\sqrt{2} = 56{,}57$$

- a támasztóerő vektorok:

$$\vec{F_A} = F_A\vec{i} = (-56{,}57\,\vec{i})\,N \qquad \vec{F_B} = F_B\vec{i} = (56{,}57\,\vec{j})\,N$$

2. módszer: nyomatéki és vetületi egyenletek

1) $F_{Bx} = 0$

2) $M_a = 0 = -aF_0 \sin 45^\circ + aF_{By} \Rightarrow$

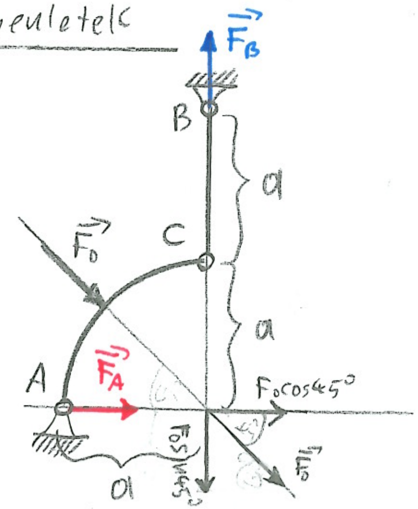
$$\Rightarrow F_{By} = \frac{aF_0 \sin 45^\circ}{a} = 80\frac{\sqrt{2}}{2} = 40\sqrt{2}\,N\,(\uparrow)$$

3) $F_x = 0 = F_{Ax} + F_{Bx} + F_0 \cos 45^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_{Ax} = -F_{Bx} - F_0 \cos 45^\circ = -40\frac{\sqrt{2}}{2}\,N\,(\leftarrow)$$

4) $F_y = 0 = F_{Ay} + F_{By} - F_0 \sin 45^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_{Ay} = -F_{By} + F_0 \sin 45^\circ = -40\frac{\sqrt{2}}{2} + 40\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



• **adott:** $a = 1{,}5\ m$

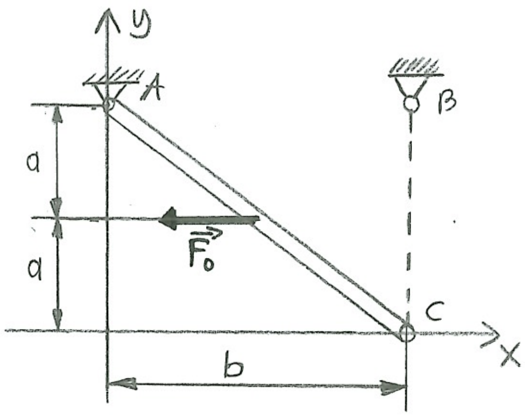
$b = 4\ m$

$F_0 = 12\ kN$

• **Feladat:** $\vec{F_A} = ?$, $\vec{F_B} = ?$

a) szerkesztéssel

b) számítással



a) szerkesztéssel

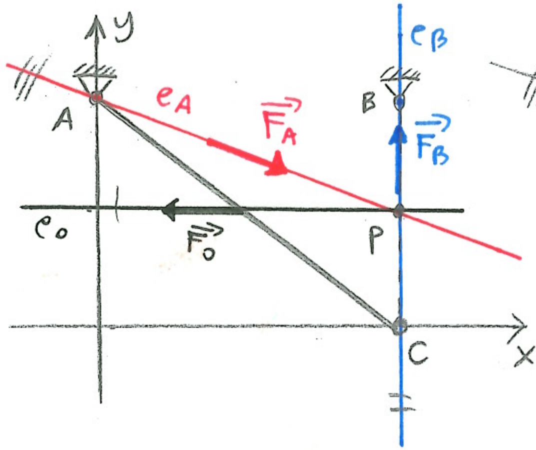
- A B pontban ébredő $\vec{F_B}$ erő hatásvonala függőleges, mivel a kötélben csak kötélirányú erő ébredhet
- Az egyensúlyhoz a 3 erő hatásvonalának 1 pontban kell metsződnie $\Rightarrow$ Az A pontban ébredő $\vec{F_A}$ erő hatásvonalának át kell mennie $\vec{F_0}$ és $\vec{F_B}$ erő hatásvonalainak metszéspontján

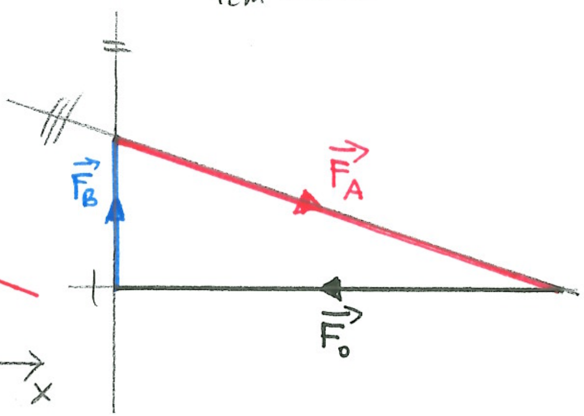
szerkezetábra

1cm $\hat{=}$ 1m

erőábra

1cm $\hat{=}$ 2 kN





b) számítással

1. módszer: egyensúlyi egyenlettel

• az egyensúlyi egyenlet:

$$\vec{F_0} + \vec{F_A} + \vec{F_B} = \vec{0}$$

• az egyes erővektorok x, y irányú komponensekkel:

$$\vec{F_0} = F_0 \vec{e_0} = F_0(-\vec{i}) = (-12\vec{i})\ kN$$

$$\vec{F_A} = F_A \vec{e_A} = F_A \frac{\vec{r_{AP}}}{|\vec{r_{AP}}|} = F_A \frac{4\vec{i} - 1{,}5\vec{j}}{\sqrt{4^2 + (-1{,}5)^2}} = F_A\left(\frac{4}{\sqrt{18{,}25}}\vec{i} - \frac{1{,}5}{\sqrt{18{,}25}}\vec{j}\right) =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{73}} F_A \vec{i} - \frac{3}{\sqrt{73}} F_A \vec{j}$$

$$\vec{F_B} = F_B \vec{e_B} = F_B \vec{e_B} = F_B \vec{j}$$

• visszahelyettesítve az egyensúlyi egyenletbe:

$$-12\vec{i} + \frac{8}{\sqrt{73}} F_A \vec{i} - \frac{3}{\sqrt{73}} F_A \vec{j} + F_B \vec{j} = \vec{0} \quad /\cdot\vec{i} \,/\cdot\vec{j}$$

$$/\cdot\vec{i} \rightarrow 1)\ -12 + \frac{8}{\sqrt{73}} F_A = 0 \quad \Rightarrow F_A = \frac{12\sqrt{73}}{8} = \frac{3\sqrt{73}}{2}$$

$$/\cdot\vec{j} \rightarrow 2)\ -\frac{3}{\sqrt{73}} F_A \vec{j} + F_B = 0$$

$$1) \rightarrow 2):\ -\frac{3}{\sqrt{73}} \cdot \frac{3\sqrt{73}}{2} + F_B = 0$$

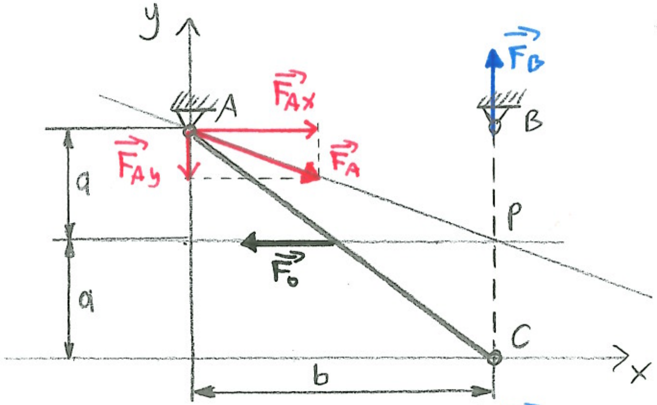
$$F_B = \frac{3}{\cancel{\sqrt{73}}} \cdot \frac{3\cancel{\sqrt{73}}}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

• a támasztóerő vektorok:

$$\vec{F_A} = \frac{8}{\cancel{\sqrt{73}}} \frac{3\cancel{\sqrt{73}}}{2} \vec{i} - \frac{3}{\cancel{\sqrt{73}}} \frac{3\cancel{\sqrt{73}}}{2} \vec{j} = (12\vec{i} - 4{,}5\vec{j})\ kN$$

$$\vec{F_B} = (4{,}5\vec{j})\ kN$$

2. módszer: nyomatéki és vetületi egyenletekkel



I. terheletlen kötél csuklójában ébredő $\vec{F}_B$ támasztóerő meghatározása

1) F_{Bx} meghatározása

$$F_{Bx} = 0$$

2) F_{By} meghatározása

$$M_a = 0 = -aF_0 + bF_{By} \Rightarrow F_{By} = \frac{aF_0}{b} = \frac{1,5\cdot 12}{4} = 4,5\ kN(\uparrow)$$

II. terhelt rúd csuklójában ébredő $\vec{F}_A$ támasztóerő meghatározása

3) F_{Ax} meghatározása

$$F_x = 0 = F_{Ax} - F_0 \Rightarrow F_{Ax} = F_0 = 12\ kN(\rightarrow)$$

4) F_{Ay} meghatározása

$$F_y = 0 = F_{Ay} + F_{By} \Rightarrow F_{Ay} = -F_{By} = -4,5\ kN(\downarrow)$$

megjegyzés: F_{Ax}-et és F_{Ay}-t a "b" tengelyre felírt nyomatéki egyenletekkel is kiszámíthatjuk $\vec{F}_A$-t A és P pontokba tolva

- a támasztó erő vektorok:

$$\vec{F}_A = (12\vec{i} - 4,5\vec{j})\ kN \qquad \vec{F}_B = (4,5\vec{j})\ kN$$

• **adott:**

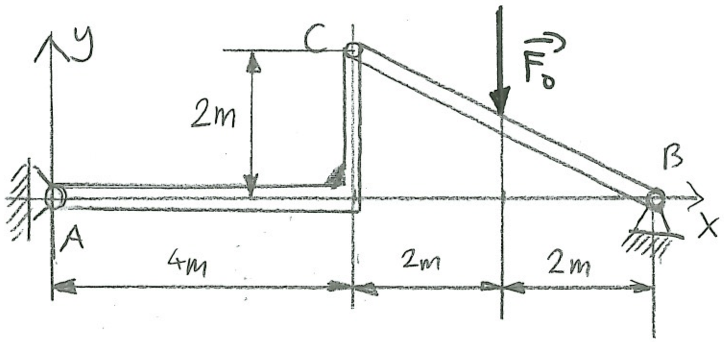
$F_0 = 8$ kN

• **Feladat**

$\vec{F_A} = ?$, $\vec{F_B} = ?$

a) szerkesztéssel

b) számítással



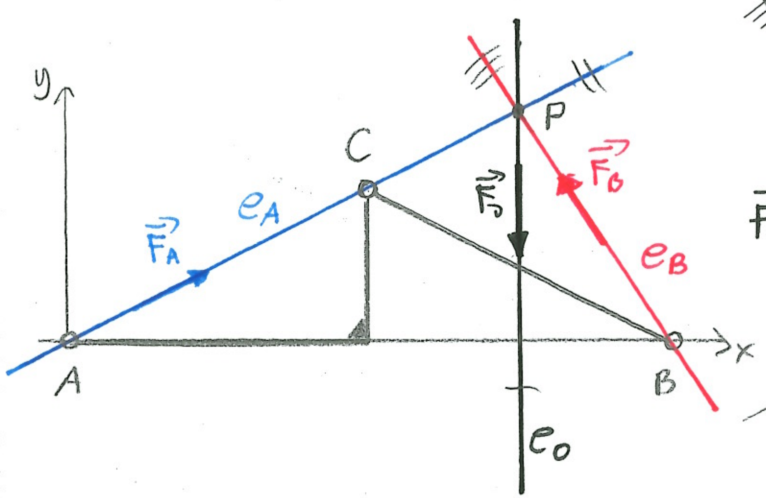
a) szerkesztéssel

– Az "A" pontban ébredő $\vec{F_A}$ erő hatásvonala rúdirányú (AC egyenes) mivel AC rúd nincs terhelve, csak támaszt

– Az egyensúlyhoz a 3 erő hatásvonalának 1 pontban kell metsződnie $\Rightarrow$ a B pontban ébredő $\vec{F_B}$ erő hatásvonalának át kell mennie $\vec{F_0}$ és $\vec{F_A}$ erő hatásvonalainak metszéspontján (P pont)

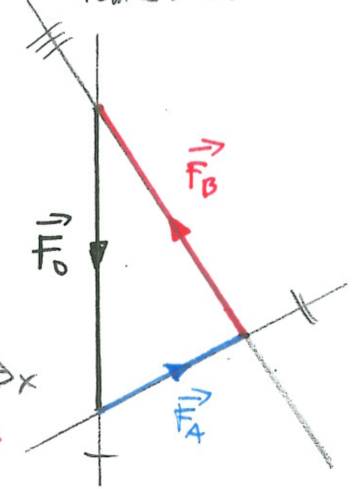
szerkesztábra

$1\,\text{cm} \triangleq 1\,\text{m}$



erőábra

$1\,\text{cm} \triangleq 2$ kN



b) számítással

1. módszer: 3 erő egyensúlyából

• az egyensúlyi egyenlet

$$\vec{F_0} + \vec{F_A} + \vec{F_B} = \vec{0}$$

• az egyes erővektorok x, y irányú komponensekkel:

$$\vec{F_0} = F_0 \vec{e_0} = F_0(-\vec{j}) = (-8\vec{j})\ \text{kN}$$

$$\vec{F_A} = F_A \vec{e_A} = F_A \frac{\vec{r_{AC}}}{|\vec{r_{AC}}|} = F_A \frac{4\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{4^2+2^2}} = F_A\left(\frac{4}{\sqrt{20}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{20}}\vec{j}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} F_A \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}} F_A \vec{j}$$

$$\vec{F_B} = F_B \vec{e_B} = F_B \frac{\vec{r_{BP}}}{|\vec{r_{BP}}|} = F_B \frac{-2\vec{i}+3\vec{j}}{\sqrt{(-2)^2+3^2}} = F_B\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{13}} F_B \vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}} F_B \vec{j}$$

• visszahelyettesítve az egyensúlyi egyenletbe

$$-8\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{5}} F_A \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}} F_A \vec{j} - \frac{2}{\sqrt{13}} F_B \vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}} F_B \vec{j} = \vec{0} \quad /\cdot\vec{i}\ /\cdot\vec{j}$$

$$/\cdot\vec{i} \Rightarrow 1)\ \frac{2}{\sqrt{5}} F_A - \frac{2}{\sqrt{13}} F_B = 0 \quad \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} F_A - \frac{2}{\cancel{\sqrt{13}}}\, 2\cancel{\sqrt{13}} = 0$$

$$/\cdot\vec{j} \Rightarrow 2)\ -8 + \frac{1}{\sqrt{5}} F_A + \frac{3}{\sqrt{13}} F_B = 0 \qquad F_A = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$

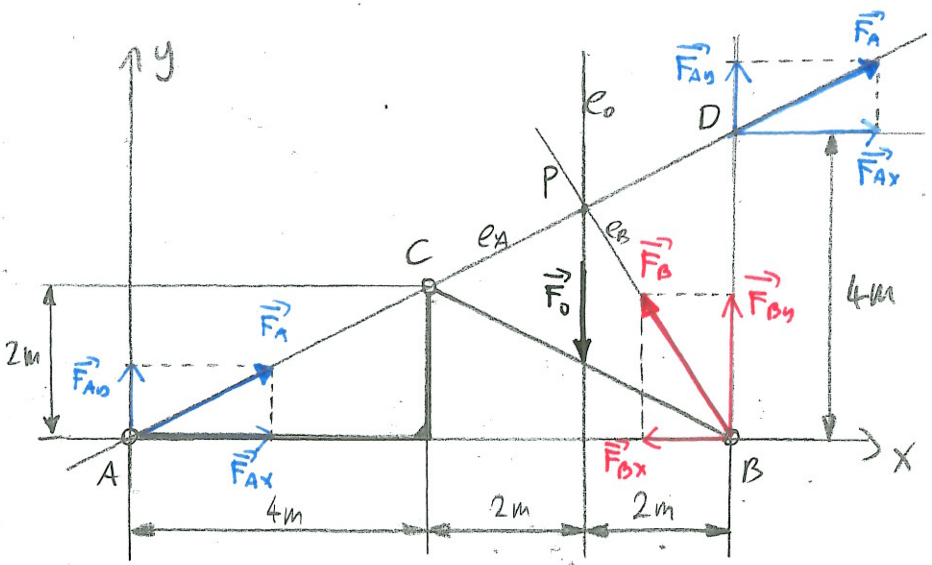
$$1) - 2\cdot 2):\ 16 - \frac{8}{\sqrt{13}} F_B = 0 \Rightarrow F_B = \frac{16\sqrt{13}}{8} = 2\sqrt{13}$$

• a támasztóerő vektorok:

$$\vec{F_A} = \frac{2}{\sqrt{5}} 2\sqrt{5}\, \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}} 2\sqrt{5}\, \vec{j} = (4\vec{i} + 2\vec{j})\ \text{kN}$$

$$\vec{F_B} = -\frac{2}{\cancel{\sqrt{13}}} 2\cancel{\sqrt{13}}\, \vec{i} + \frac{3}{\cancel{\sqrt{13}}} 2\cancel{\sqrt{13}}\, \vec{j} = (-4\vec{i} + 6\vec{j})\ \text{kN}$$

2. módszer: nyomatéki és vetületi egyenletekkel



$$M_b = 0 = -8F_{Ay} + 2F_0 \Rightarrow F_{Ay} = \frac{2F_0}{8} = \frac{2\cdot 8}{8} = 2\ kN\ (\uparrow)$$

$$M_b = 0 = 2F_0 - 4F_{Ax} \Rightarrow F_{Ax} = \frac{2F_0}{4} = \frac{2\cdot 8}{4} = 4\ kN\ (\rightarrow)$$

$$F_x = 0 = F_{Ax} - F_{Bx} \Rightarrow F_{Bx} = F_{Ax} = 4\ kN\ (\leftarrow)$$

$$F_y = 0 = F_{Ay} - F_0 + F_{By} \Rightarrow F_{By} = F_0 - F_{Ay} = 8 - 2 = 6\ kN\ (\uparrow)$$

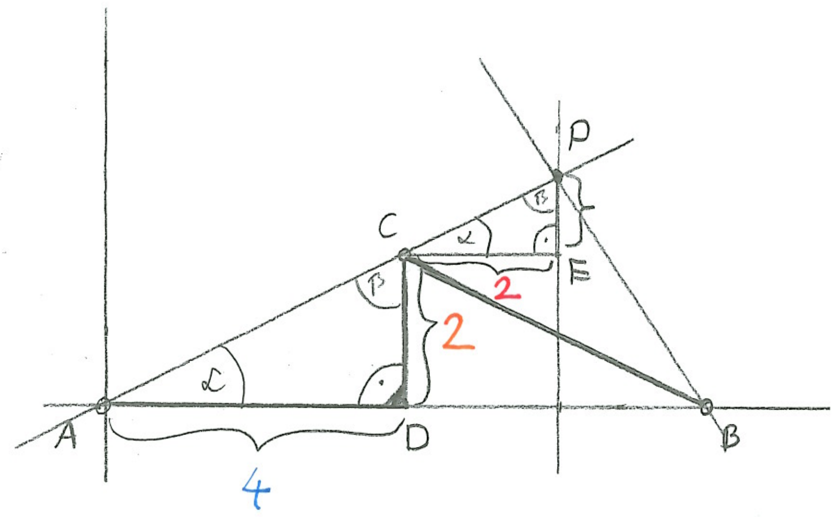
- a támasztóerő vektorok:

$$\vec{F_A} = (4\vec{i} + 2\vec{j})\ kN$$

$$\vec{F_B} = (-4\vec{i} + 6\vec{j})\ kN$$

- P pont helyének meghatározása számításhoz

→ hasonló háromszögek segítségével

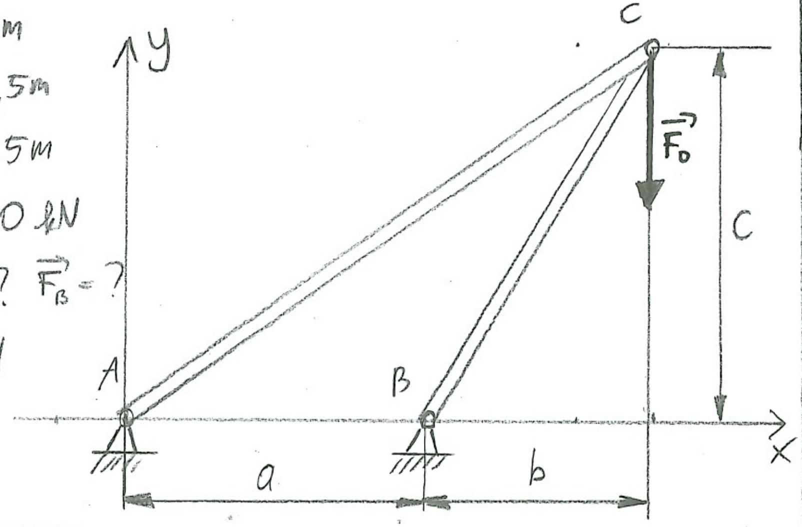


• adott: $a = 2\,m$
$b = 1{,}5\,m$
$c = 2{,}5\,m$
$F = 10\,kN$

• Feladat: $\vec{F_A} = ?$ $\vec{F_B} = ?$

· a) szerkesztéssel

b) számítással



a) szerkesztéssel

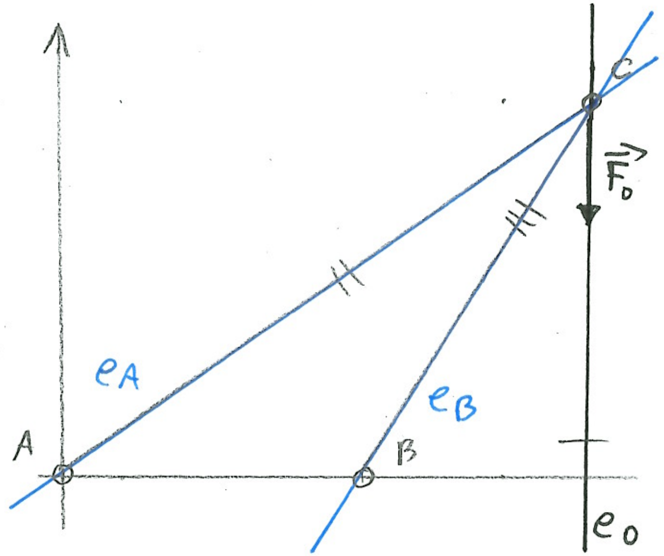
AC és BC rúdis támasztórúd ⇒ csak rúdirányú erő ébredhet bennük

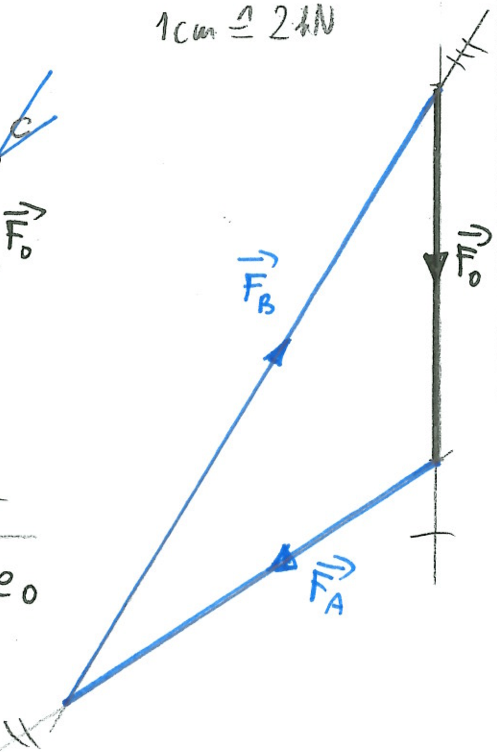
szerkezetábra

$1\,cm \triangleq 0{,}5\,m$

erőábra

$1\,cm \triangleq 2\,kN$





b) számítással

1. módszer: 3 erő egyensúlyából

• az egyensúlyi egyenlet:

$$\vec{F_0} + \vec{F_A} + \vec{F_B} = \vec{0}$$

• az egyes erővektorok x, y irányú koordinátákkal felírva:

$$\vec{F_0} = F_0 \vec{e_0} = F_0(-\vec{j}) = (-10\vec{j})\ kN$$

$$\vec{F_A} = F_A \vec{e_A} = F_A \frac{\vec{r_{AC}}}{|\vec{r_{AC}}|} = F_A \frac{3{,}5\vec{i} + 2{,}5\vec{j}}{\sqrt{3{,}5^2 + 2{,}5^2}} = F_A\left(\frac{3{,}5}{\sqrt{18{,}5}}\vec{i} + \frac{2{,}5}{\sqrt{18{,}5}}\vec{j}\right) =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{74}} F_A \vec{i} + \frac{5}{\sqrt{74}} F_A \vec{j}$$

$$\vec{F_B} = F_B \vec{e_B} = F_B \frac{\vec{r_{BC}}}{|\vec{r_{BC}}|} = F_B \frac{1{,}5\vec{i} + 2{,}5\vec{j}}{\sqrt{1{,}5^2 + 2{,}5^2}} = F_B\left(\frac{1{,}5}{\sqrt{8{,}5}}\vec{i} + \frac{2{,}5}{\sqrt{8{,}5}}\vec{j}\right) =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{34}} F_B \vec{i} + \frac{5}{\sqrt{34}} F_B \vec{j}$$

• behelyettesítve az egyensúlyi egyenletbe:

$$-10\vec{j} + \frac{7}{\sqrt{74}} F_A \vec{i} + \frac{5}{\sqrt{74}} F_A \vec{j} + \frac{3}{\sqrt{34}} F_B \vec{i} + \frac{5}{\sqrt{34}} F_B \vec{j} = \vec{0} \quad / \cdot \vec{i} / \cdot \vec{j}$$

$/\cdot\vec{i} \rightarrow 1)$ $\frac{7}{\sqrt{74}} F_A + \frac{3}{\sqrt{34}} F_B = 0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{34}} F_B = -\frac{7}{\sqrt{74}} F_A$

$/\cdot\vec{j} \rightarrow 2)$ $-10 + \frac{5}{\sqrt{74}} F_A + \frac{5}{\sqrt{34}} F_B = 0$ $\quad F_B = -\frac{7}{3}\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{74}} F_A$

$1) \rightarrow 2)$: $-10 + \frac{5}{\sqrt{74}} F_A + \frac{5}{\cancel{\sqrt{34}}}\left(-\frac{7}{3}\frac{\cancel{\sqrt{34}}}{\sqrt{74}}\right) F_A = 0$ $\quad\Big|\quad F_B = -\frac{7}{3}\frac{\sqrt{34}}{\cancel{\sqrt{74}}} \cdot \left(-\frac{3\cancel{\sqrt{74}}}{2}\right) = \frac{7}{2}\sqrt{34}$

$$\frac{15 F_A}{3\sqrt{74}} - \frac{35 F_A}{3\sqrt{74}} = 10$$

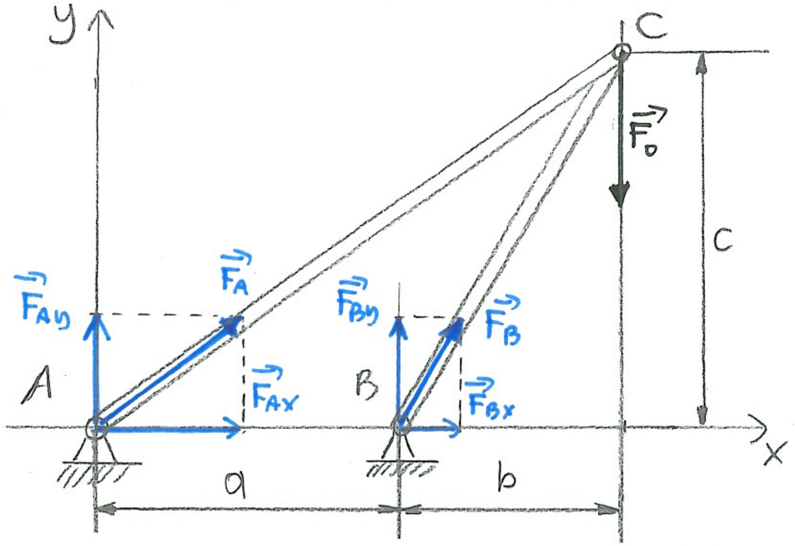
$$F_A = -\frac{30\sqrt{74}}{20} = -\frac{3\sqrt{74}}{2}$$

• a támasztóerő vektorok

$$\vec{F_A} = \frac{7}{\cancel{\sqrt{74}}}\left(-\frac{3\cancel{\sqrt{74}}}{2}\right)\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{74}}\left(-\frac{3\sqrt{74}}{2}\right)\vec{j} = (-10{,}5\vec{i} - 7{,}5\vec{j})\ kN$$

$$\vec{F_B} = \frac{3}{\cancel{\sqrt{34}}}\frac{7}{2}\cancel{\sqrt{34}}\,\vec{i} + \frac{5}{\cancel{\sqrt{34}}}\frac{7}{2}\cancel{\sqrt{34}}\,\vec{j} = (10{,}5\vec{i} + 17{,}5\vec{j})\ kN$$

2. módszer: nyomatéki és vetületi egyenletekkel



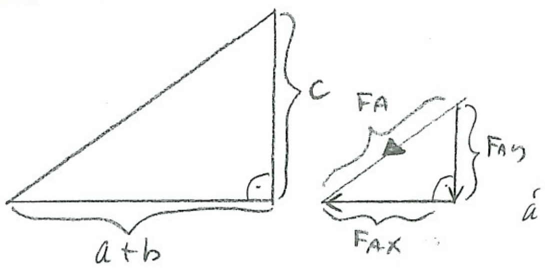
- F_{By} meghatározása ⇒ nyomatéki egyenlet "a" tengelyre

$$M_a = 0 = -(a+b)F_0 + aF_{By} \Rightarrow F_{By} = \frac{(a+b)F_0}{a} = \frac{3{,}5 \cdot 10}{2} = 17{,}5\ kN\ (\uparrow)$$

- F_{Ay} meghatározása → y irányú vetületi egyenlet:

$$F_y = 0 = F_{Ay} + F_{By} - F_0 \Rightarrow F_{Ay} = F_0 - F_{By} = 10 - 17{,}5 = -7{,}5\ kN\ (\downarrow)$$

- F_{Ax} meghatározása → geometriai hasonlóságból:



$$\frac{|F_{Ax}|}{|F_{Ay}|} = \frac{a+b}{c}$$

$$\Downarrow$$

$$|F_{Ax}| = \frac{a+b}{c}|F_{Ay}| = \frac{3{,}5}{2{,}5} \cdot 7{,}5 = 10{,}5$$

ábráról az irány:

$$F_{Ax} = -10{,}5\ kN\ (\leftarrow)$$

- F_{Bx} meghatározása → x irányú vetületi egyenlet

$$F_x = 0 = F_{Ax} + F_{Bx} \Rightarrow F_{Bx} = -F_{Ax} = -(-10{,}5) = 10{,}5\ kN\ (\rightarrow)$$

$$\vec{F}_A = (-10{,}5\,\vec{i} - 7{,}5\,\vec{j})\ kN \qquad \vec{F}_B = (10{,}5\,\vec{i} + 17{,}5\,\vec{j})\ kN$$

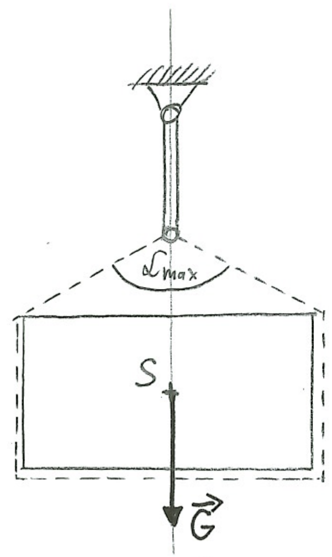
• **adott:**

Egy emelővel egy 1 tonna tömegű terhet emelünk, amely az ábrán látható módon, acélsodronnyal van kötözve. Az acélsodrony $K_{max} = 8\ kN$ kötélerőt képes elviselni.

• **Feladat**

Mekkora lehet a két kötélág közti maximális szög, hogy a kötél ne szakadjon le?

a) szerkesztés b) számítás



$$G = mg = 1000\ kg \cdot 10\ \frac{m}{s^2} = 10\ kN$$

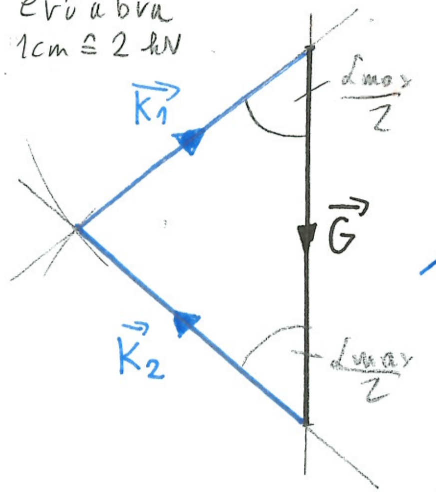
a) szerkesztéssel

– Most az erők ismertek ($G = 10\ kN$, $K_1 = K_2 = 8\ kN$), a hatásvonalak viszont nem ismertek (α_{max} a kérdés)

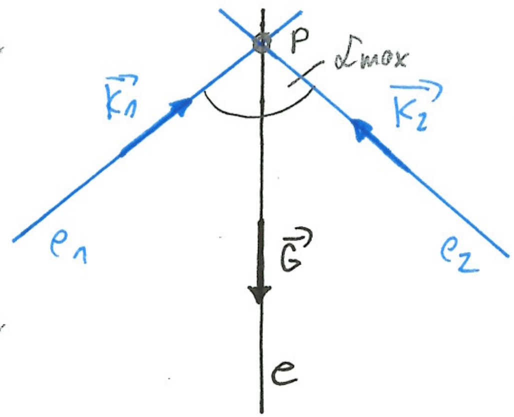
– Ilyen esetben először az erőábrát rajzoljuk meg
 → $\vec{G}$ mindkét végéből körzőzünk K_{max}-szal

– A szerkezetábrához egy közös ponton át párhuzamosokat húzunk az összes erővel ⇒ lemérhető az α_{max} szög

erőábra
1cm ≙ 2 kN



szerkezetábra



b) számítással

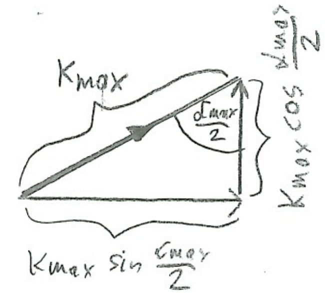
• az egyensúlyi egyenlet:

$$\vec{G} + \vec{K}_{1max} + \vec{K}_{2max} = \vec{0}$$

• az egyes erővektorok x és y irányú komponensekkel:

$$\vec{G} = G(-\vec{j}) = (-10\vec{j})\ kN$$

$$\vec{K}_{1max} = K_{max}\sin\frac{\alpha_{max}}{2}\vec{i} + K_{max}\cos\frac{\alpha_{max}}{2}\vec{j} = 8\sin\frac{\alpha_{max}}{2}\vec{i} + 8\cos\frac{\alpha_{max}}{2}\vec{j}$$



$$\vec{K}_{2max} = -K_{max}\sin\frac{\alpha_{max}}{2}\vec{i} + K_{max}\cos\frac{\alpha_{max}}{2}\vec{j} = -8\sin\frac{\alpha_{max}}{2}\vec{i} + 8\cos\frac{\alpha_{max}}{2}\vec{j}$$

• Visszahelyettesítve az egyensúlyi egyenletbe:

$$-10\vec{j} + 8\sin\frac{\alpha_{max}}{2}\vec{i} + 8\cos\frac{\alpha_{max}}{2}\vec{j} - 8\sin\frac{\alpha_{max}}{2}\vec{i} + 8\cos\frac{\alpha_{max}}{2}\vec{j} \quad /\cdot\vec{i}/\cdot\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l} /\cdot\vec{i} \rightarrow 1)\ 8\sin\frac{\alpha_{max}}{2} - 8\sin\frac{\alpha_{max}}{2} = 0 \\ /\cdot\vec{j} \rightarrow 2)\ 8\cos\frac{\alpha_{max}}{2} + 8\cos\frac{\alpha_{max}}{2} - 10 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 0$$

$$2) \rightarrow 16\cos\frac{\alpha_{max}}{2} = 10$$

$$\cos\frac{\alpha_{max}}{2} = \frac{10}{16}$$

$$\frac{\alpha_{max}}{2} = \arccos\frac{10}{16} = 51{,}32°$$

$$\alpha_{max} = 2 \cdot 51{,}32° = 102{,}64°$$