

Négy erő egyensúlya (Culmann-Ritter feladat) – bemutató példa

Ezeknél a feladatoknál

adott:

- egy síkbeli szerkezet
(általában egy téglalap/kör/háromszög alakú lemez, vagy egy rúd)
- a szerkezetre 1 vagy 2 terhelőerő hat
- a szerkezet 3 db elsőfokú kényszerrel (rudak/görgők/egyszerű súrlódásmentes kényszerek valamilyen kombinációjával) van megfogva

feladat:

- a 3 elsőfokú kényszerben ébredő támasztóerők meghatározása szerkesztéssel (Culmann-szerkesztés) és számítással (Ritter-számítás)

A bemutató példa:

adott:

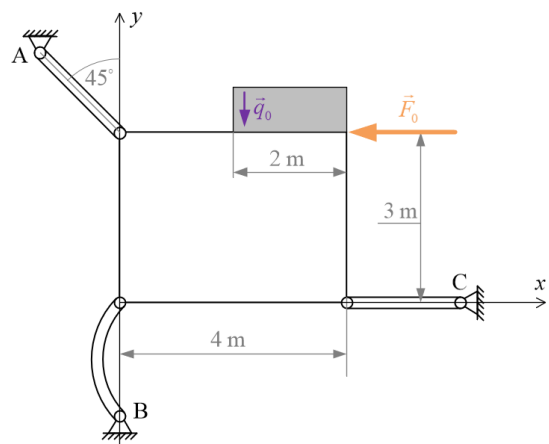
$$F_0 = 8 \text{ kN}$$

$$q_0 = 3 \text{ kN/m}$$

feladat:

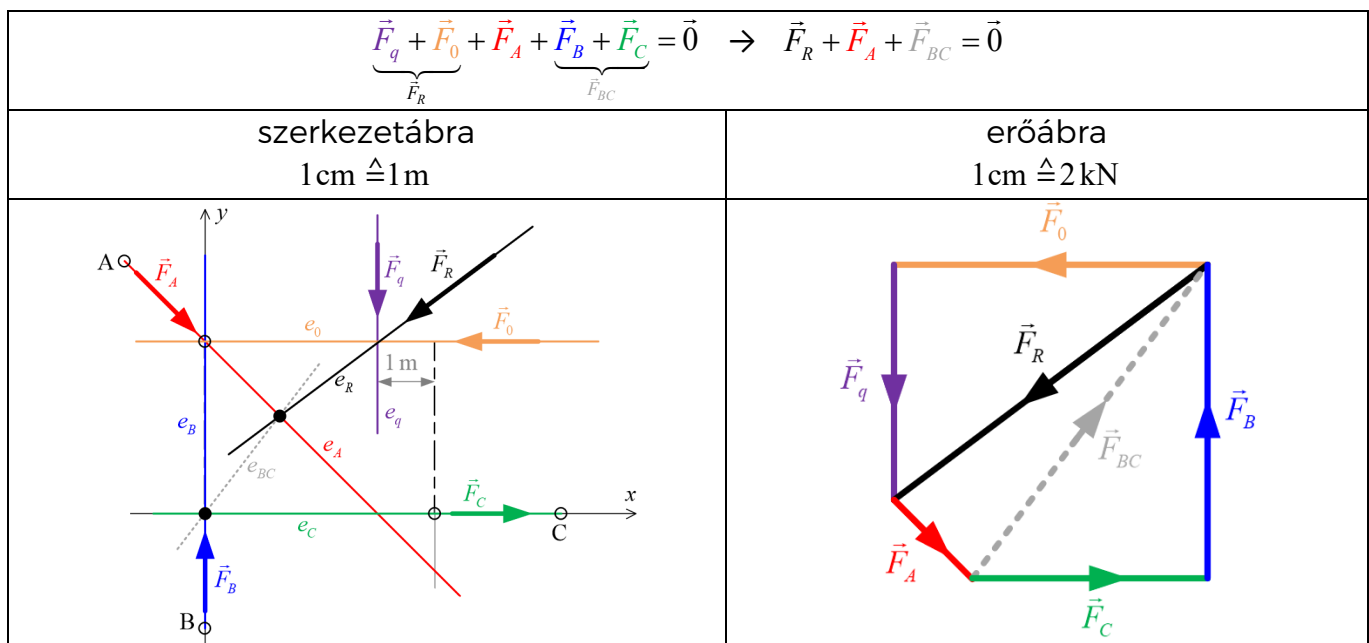
Az A, B és C csuklóknál ébredő $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ és $\vec{F}_C$ támasztóerők

- szerkesztéssel
- számítással



a) megoldás szerkesztéssel (*Culmann szerkesztés*)

$$F_q = 2 \cdot 3 = 6 \text{ kN} (\downarrow)$$



A szerkesztés gondolatmenete:

Mivel megoszló erőrendszerünk van, legelőször számítsuk ki a megoszló erőrendszer eredőjét:

$$F_q = 2 \cdot 3 = 6 \text{ kN} (\downarrow)$$

Mivel a megoszló erőrendszer konstans, hatásvonala (e_q) középen helyezkedik el

Van 5 erőnk, 2 terhelőerő ($\vec{F}_0$ és $\vec{F}_q$) és 3 ismeretlen támasztóerőnk ($\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ és $\vec{F}_C$)

- A terhelőerőknek mint mindig, ismerjük a nagyságait (F_0 adott, F_q -t előbb kiszámoltuk) és a hatásvonalait: $\vec{F}_0$ hatásvonala, e_0 az ábráról leolvasható $\vec{F}_q$ hatásvonalát (e_q) pedig előbb meghatároztuk.
- A támasztóerőknek a hatásvonalait (e_A, e_B, e_C) ismerjük. Ezeket onnan tudjuk, hogy a szerkezet 3 db elsőfokú kényszerrel (rúddal) van megtámasztva, melyekben csak rúdirányú erő ébredhet (rúdirány: a rúd 2 végpontján keresztülmenő egyenes)

Az ismertek és ismeretlenek összefoglalva:

hatásvonalak:	e_q	e_0	e_A	e_B	e_C
erővektorok:	$\vec{F}_q$	$\vec{F}_0$	$\vec{F}_A$	$\vec{F}_B$	$\vec{F}_C$

Az egyensúly feltétele:

$$\underbrace{\vec{F}_q + \vec{F}_0}_{\text{ismert terhelőerők}} + \underbrace{\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C}_{\text{keresett támasztóerők}} = \vec{0}$$

- Először összegezzük az ismert terhelőerőket (az eredő terhelőerő legyen $\vec{F}_R$) majd határozzuk meg az eredő terhelőerő hatásvonalát (e_R)

→ a feladatot visszavezettük 4 erő egyensúlyára:

$$\underbrace{\vec{F}_q + \vec{F}_0}_{\vec{F}_R} + \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_R + \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0}$$

megjegyzések:

- 1 terhelőerő esetén nyilván ez a lépés kimarad
- 2-nél több terhelőerő esetén részeredő sokszög/kötél sokszög szerkesztéssel összegezhetők az erők, de vizsgán ilyen nem lesz.

- Ezt követően összegezzünk 2 ismeretlen támasztóerőt, pl. $\vec{F}_B$ -t és $\vec{F}_C$ -t.

→ a feladatot visszavezettük 3 erő egyensúlyára:

$$\vec{F}_R + \vec{F}_A + \underbrace{\vec{F}_B + \vec{F}_C}_{\vec{F}_{BC}} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_R + \vec{F}_A + \vec{F}_{BC} = \vec{0}$$

megjegyzések:

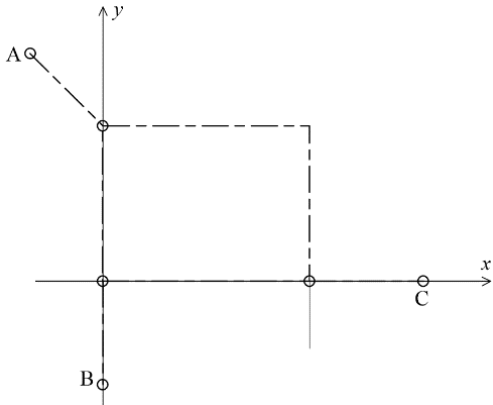
Az ismeretlen támasztóerők összegzésénél a 3 ismeretlen támasztóerőből tetszőlegesen választhatunk ki 2-őt összegzésre, de az alábbiakat tartsuk szem előtt:

- Ha 2 terhelőerő hatásvonala párhuzamos, akkor ne azt a 2-őt válasszuk!
- Ha az egyik támasztóerő hatásvonala párhuzamos a terhelőerő/eredő terhelőerő hatásvonalával, akkor ne a másik kettőt válasszuk összegzésre!
- Jelen feladatban az eredő terhelőerő és a 3 támasztóerő hatásvonala közül semelyik nem párhuzamos semelyikkel, így bármely két támasztóerőt összegezhethetnénk. A másik két lehetőséget az Alternatív megoldások tartalmazzák.

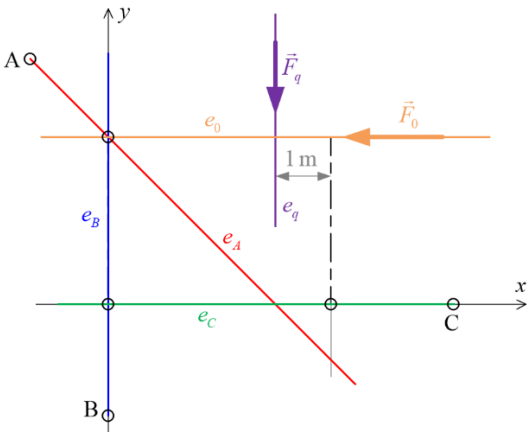
A szerkesztés lépései:

0.: A szerkezet ábrához vegyünk fel egy hosszléptéket (pl.: $1\text{ cm} \hat{=} 1\text{ m}$) az erőábrához pedig egy erőléptéket (pl.: $1\text{ cm} \hat{=} 2\text{ kN}$) úgy, hogy kényelmesen elférjünk a rendelkezésünkre álló helyen.

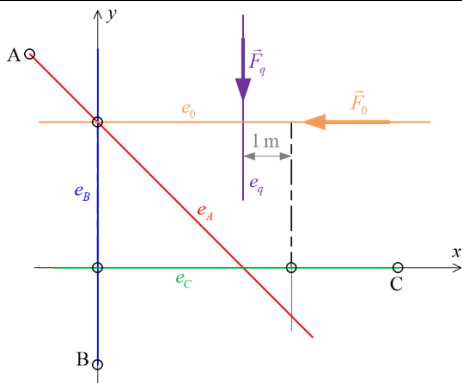
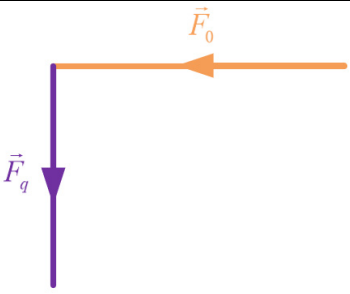
1. SZÁ: rajzoljuk meg az xy koordináta-rendszert, a szerkezetet és a csatlakozási pontokat

szerkezet ábra	erőábra
	

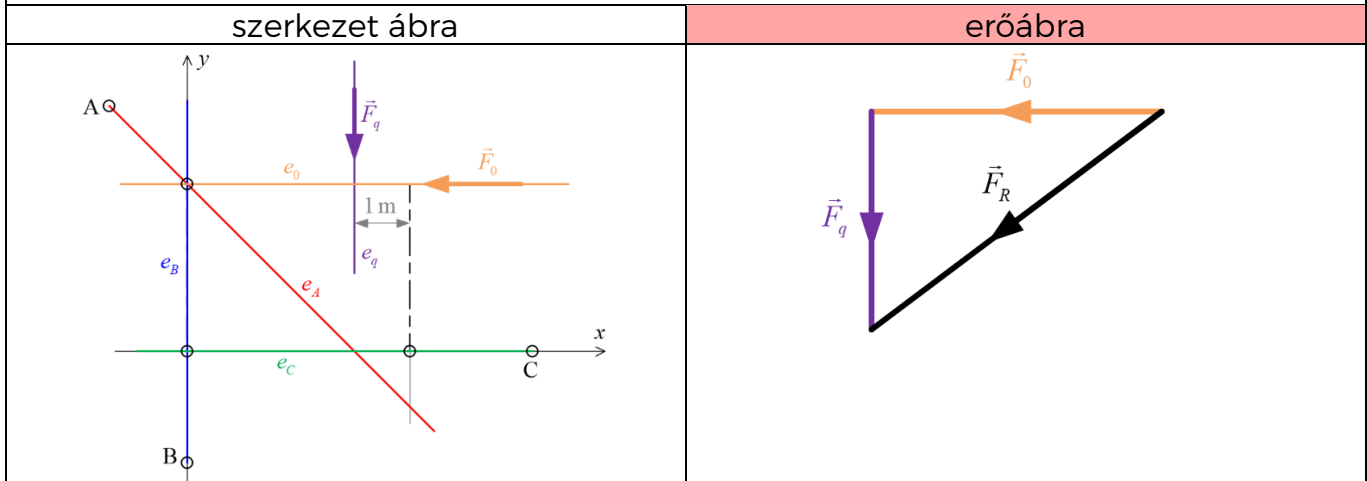
2. SZÁ: vegyük fel az ismert 5 e_q, e_0, e_A, e_B, e_C hatásvonalakat. Az ismert $\vec{F}_q, \vec{F}_0$ terhelőerő vektorokat rajzoljuk rá a hatásvonalukra (a szerkezetábrán ezeknek a hossza, illetve helye a hatásvonal mentén teljesen lényegtelen)

szerkezet ábra	erőábra
	

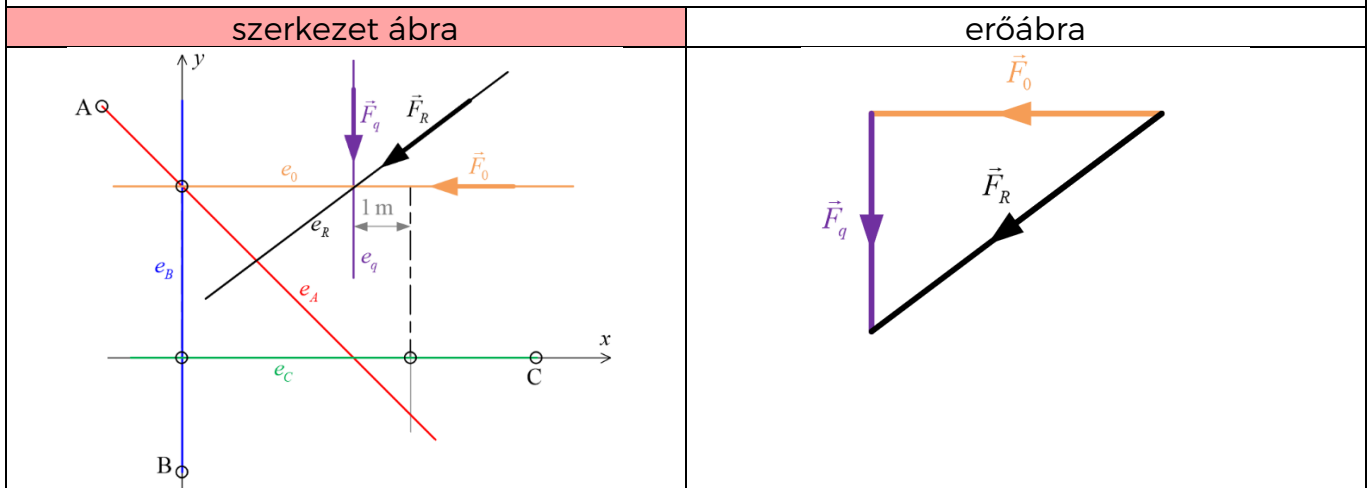
3. EÁ: Vegyük fel a 2 ismert terhelőerőt ($\vec{F}_0$ és $\vec{F}_q$) egymás után felfűzve (a sorrend mindegy)

szerkezet ábra	erőábra
	

4. EÁ: Rajzoljuk be a 2 terhelőerő ($\vec{F}_0$ és $\vec{F}_q$) eredőjét: $\vec{F}_0$ kezdőpontjából húzzunk egy vektort $\vec{F}_q$ végpontjába $\rightarrow \vec{F}_R$ eredő terhelőerő.



5. SZÁ: rajzoljuk be az eredő terhelőerő hatásvonalát (e_R). Ehhez a szerkezetábrában a két ismert terhelőerő hatásvonalának (e_q és e_0) metszéspontján keresztül húzzunk párhuzamost $\vec{F}_R$ -rel.

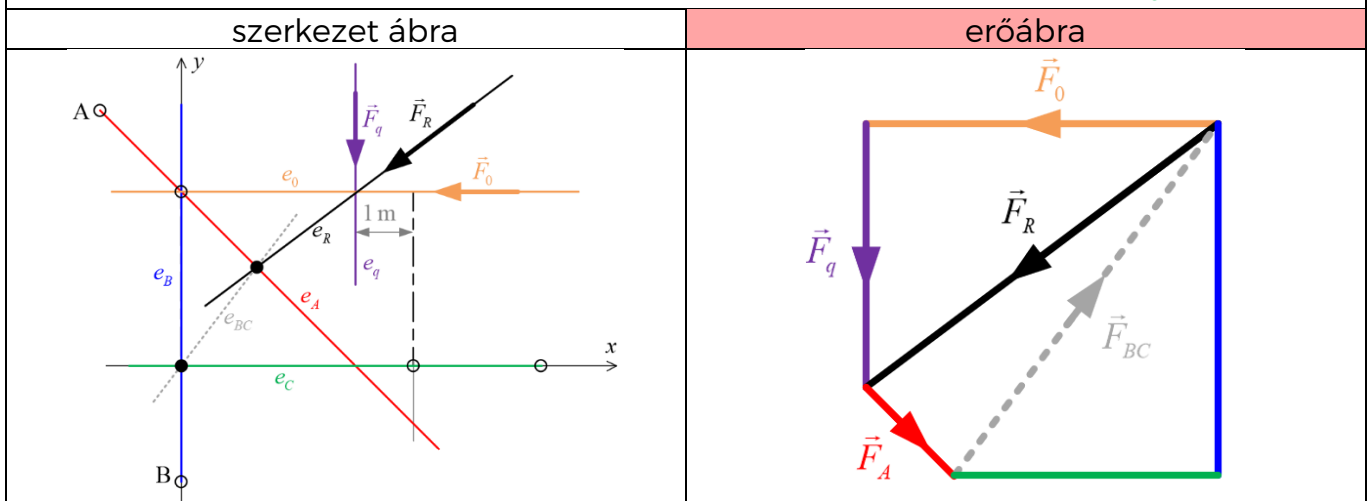


6. SZÁ: Rajzoljuk be $\vec{F}_{BC}$ hatásvonalát ($e_{BC} = \text{Culmann egyenes}$). Ezt onnan tudjuk, hogy:

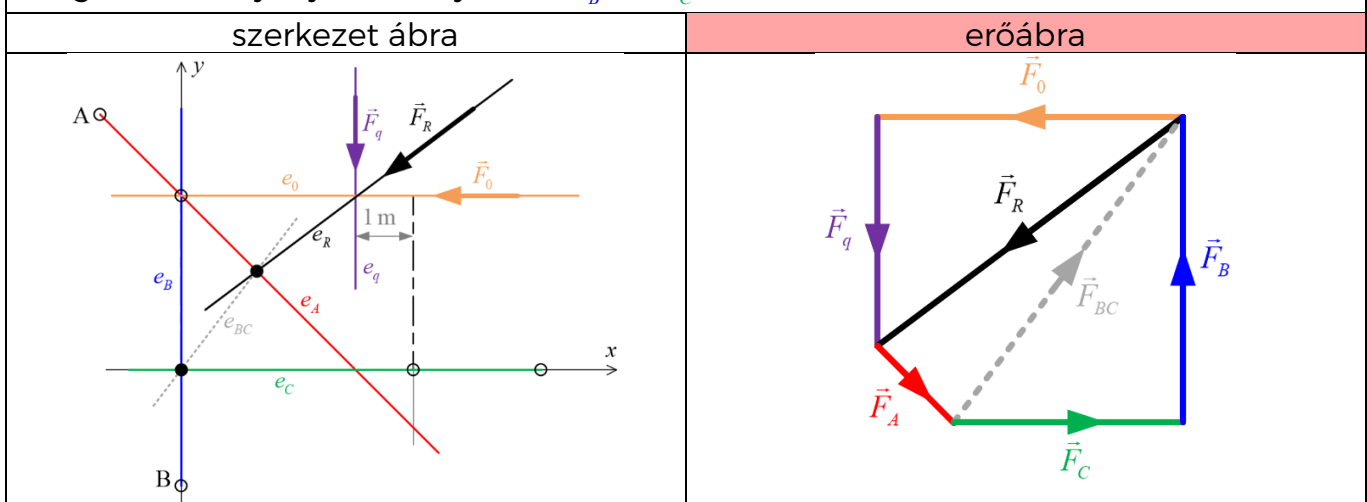
- 1) e_{BC} átmegy e_B és e_C hatásvonalak metszéspontján, mivel $\vec{F}_{BC} = \vec{F}_B + \vec{F}_C$ és 2 egymást metsző erő eredője mindig átmegy a 2 erő hatásvonalának a metszéspontján
- 2) e_{BC} átmegy e_A és e_R hatásvonalak metszéspontján, mivel $\vec{F}_R + \vec{F}_A + \vec{F}_{BC} = \vec{0}$ és 3 erő egyensúlyának egyik feltétele, hogy a 3 erő hatásvonala egy pontban metssze egymást

Tehát a lényeg, hogy miután kiválasztottunk 2 ismeretlen támasztóerőt, ezek hatásvonalainak metszéspontját kössük össze a harmadik, nem kiválasztott támasztóerő és a terhelőerő hatásvonalának metszéspontjával (ez lesz a *Culmann egyenes*). Így a feladatot visszavezettük 3 erő egyensúlyára.

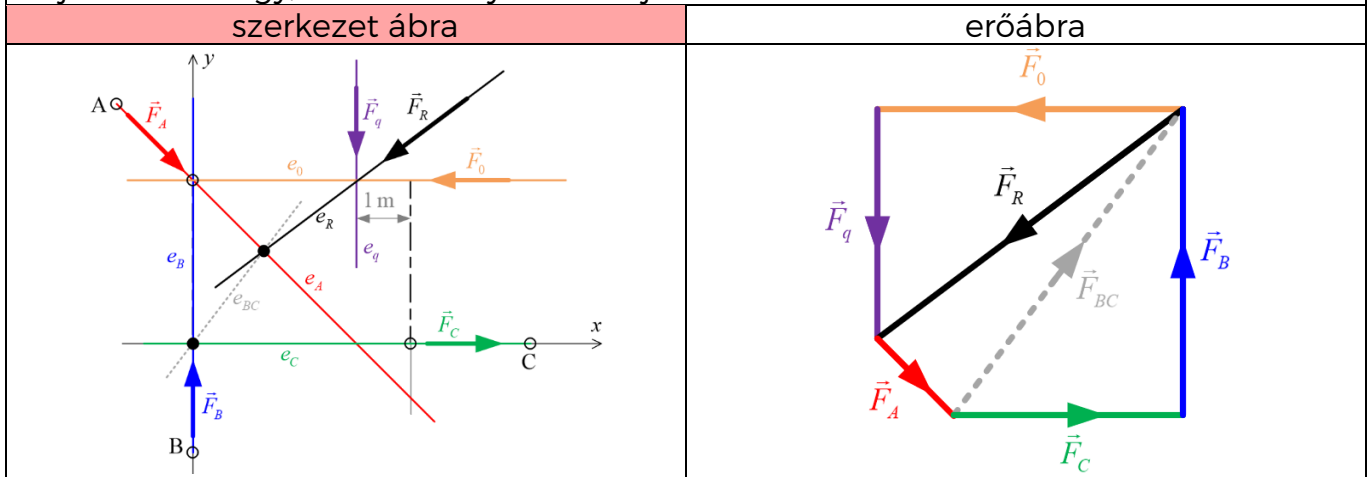
9. EÁ: Most foglalkozunk a másik két ismeretlen támasztóerő vektorral. Mivel $\vec{F}_{BC} = \vec{F}_B + \vec{F}_C$, nincs más dolgunk, mint az $\vec{F}_{BC}$ erővektort e_B és e_C irányú összetevőkre bontani. Ehhez $\vec{F}_{BC}$ egyik végpontján keresztül e_B -vel, másik végpontján keresztül e_C -vel húzzunk párhuzamost. Szintén mindegy, melyiken keresztül melyikkel húzunk, ahogy jobban kinéz az ábra. Ennek eredményeként kimetsződik $\vec{F}_B$ és $\vec{F}_C$ nagysága.



10. EÁ: Mivel $\vec{F}_{BC}$ -t összetevőkre bontottuk, a nyílfolyamnak ütközőnek kell lennie (tehát a zöld és kék útvonalon kell eljutni $\vec{F}_{BC}$ kezdőpontjából a végpontjába) Ennek megfelelően rajzoljuk rá a nyilakat $\vec{F}_B$ és $\vec{F}_C$ erővektorokra. Ezzel az erőábra elkészült.



11. SZÁ: Végezetül most, hogy már ismerjük minden erő irányát, rajzoljuk rá a szerkezetábrában a támasztóerők hatásvonalaira a támasztóerővektorokat. Az, hogy ezeket a vektorokat a hatásvonal mentén hova rajzoljuk és milyen hosszúnak rajzoljuk teljesen mindegy, csak az irány stimmeljen.

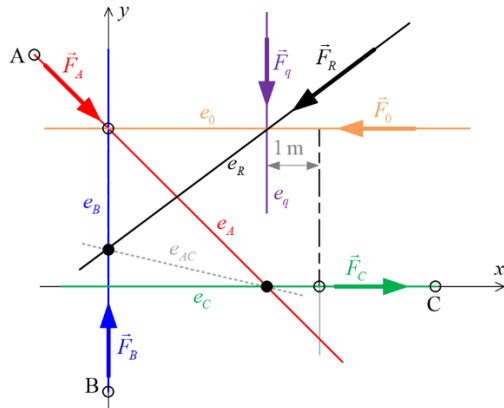


Alternatív megoldások:

$$\underbrace{\vec{F}_q + \vec{F}_0}_{\vec{F}_R} + \underbrace{\vec{F}_A + \vec{F}_C}_{\vec{F}_{AC}} + \vec{F}_B = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_R + \vec{F}_{AC} + \vec{F}_B = \vec{0}$$

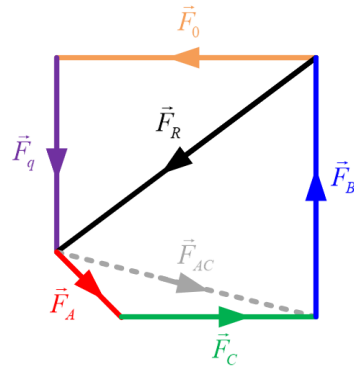
szerkezetábra

1 cm $\hat{=}$ 1 m



erőábra

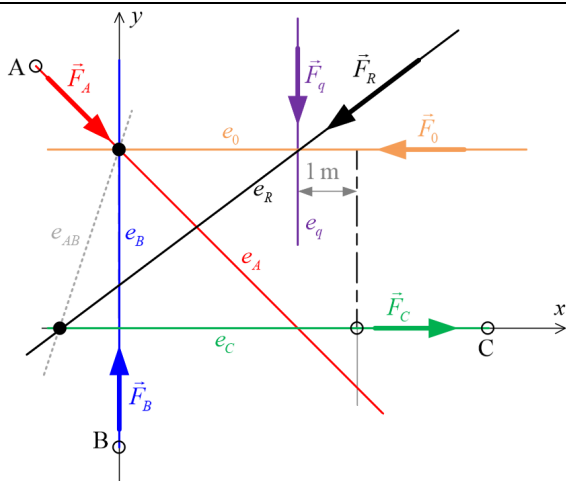
1 cm $\hat{=}$ 2 kN



$$\underbrace{\vec{F}_q + \vec{F}_0}_{\vec{F}_R} + \underbrace{\vec{F}_A + \vec{F}_B}_{\vec{F}_{AB}} + \vec{F}_C = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_R + \vec{F}_{AB} + \vec{F}_C = \vec{0}$$

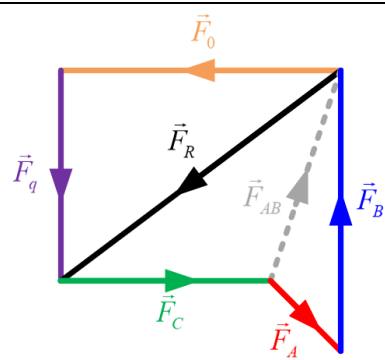
szerkezetábra

1 cm $\hat{=}$ 1 m



erőábra

1 cm $\hat{=}$ 2 kN



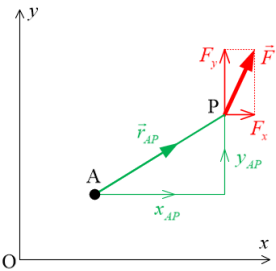
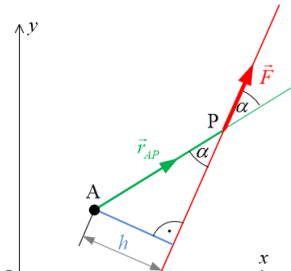
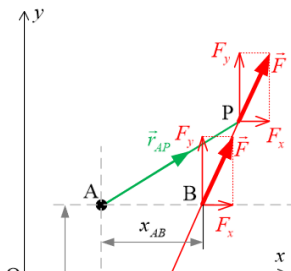
b) megoldás számítással (Ritter-számítás)

A Ritter-számítás lényege:

- Az ismeretlen támasztóerők hatásvonalainak metszéspontjaira (pontosabban a metszésponton átmenő síkra merőleges tengelyre) írunk fel nyomatéki egyenleteket.

Ekkor a két támasztóerő, mely hatásvonalainak metszéspontjára felírtuk a nyomatéki egyenletet nem fejt ki nyomatékot, tehát csak 1 ismeretlen erőnk marad, ami fejt ki, így csak 1 ismeretlenünk lesz az egyenletben.

- Ha az ismeretlen erő hatásvonala vízszintes, vagy függőleges, akkor nagyon könnyedén fel tudjuk írni az általa kifejtett nyomatékot az erő és erőkar szorzataként.
- Ha az ismeretlen támasztóerő hatásvonala ferdén áll, akkor egy sokkal macerásabb a helyzet, az alábbi módokon írhatjuk fel az általa kifejtett nyomatékot:

1. lehetőség	2. lehetőség	3. lehetőség
 A nyomatékvektor definíciója szerint: $\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F} =$ $= (x_{AP}\vec{i} + y_{AP}\vec{j}) \times (F_x\vec{i} + F_y\vec{j})$ $= x_{AP}F_y\vec{k} - y_{AP}F_x\vec{k}$ Az a tengelyre számított nyomaték: $M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a = \vec{M}_A \cdot \vec{k} =$ $= (x_{AP}F_y\vec{k} - y_{AP}F_x\vec{k}) \cdot \vec{k}$ $\boxed{M_a = x_{AP}F_y - y_{AP}F_x}$	 A nyomatékvektor nagysága a vektoriális szorzás definíciójából: $ \vec{M}_A = \vec{F} \vec{r}_{AP} \sin \alpha$ Ahol h az ún. erőkar (Az A pont és az erő hatásvonalának merőleges távolsága) Így az a tengelyre számított nyomaték az erőkar és erő szorzata: $\boxed{M_a = hF}$ irány: jobbkéz szabály alapján	 Szintén az erőkar szorozzuk az erővel, de úgy, hogy az erőt először felbontjuk x és y irányú összetevőkre, majd felhasználjuk, hogy az erő a hatásvonala mentén szabadon tologatható, így eltoljuk úgy, hogy egyszer az x, máskor az y komponense ne fejtse ki nyomatékot A-ra, így amelyik komponens fejt ki nyomatékot, azt szorozzuk az erőkarjával: $\boxed{M_a = x_{AB}F_y}$ $\boxed{M_a = y_{AC}F_x}$ irány: jobbkéz szabály alapján

Általában a 3. lehetőséget célszerű alkalmazni a legtöbbszor x_{AB} és y_{AC} értékeket könnyebb leolvasni, mint a h -t. De:

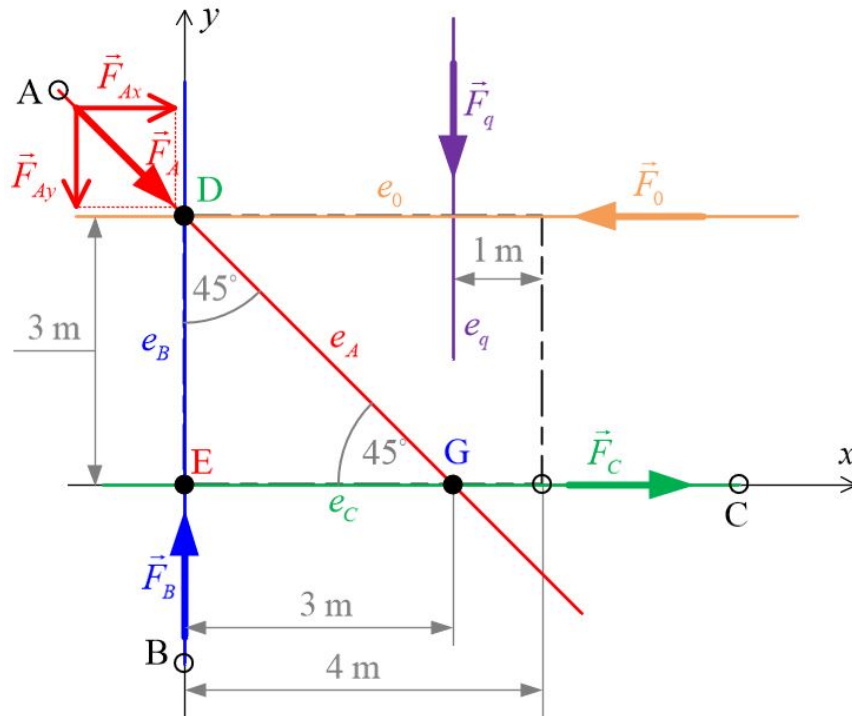
- Ha vízszintes vagy függőleges irányban már csak 1 ismeretlen támasztóerő koordinátánk van, akkor vetületi egyensúlyi egyenleteket is alkalmazhatunk.

Így például, ha a 3 ismeretlen támasztóerő hatásvonala közül egy vízszintes, egy függőleges és egy ferde (ez a felállás elég gyakran előfordul, a bemutató példa is ilyen) akkor azt célszerű csinálni, hogy a 2, ferde hatásvonalat tartalmazó metszéspontra írunk fel nyomatéki egyenletet,

így a nyomatékot létrehozó ismeretlen támasztóerő egyszer vízszintes, egyszer függőleges, melyek könnyen számíthatók. Ezek után már vízszintesen és függőlegesen is csak 1 ismeretlenünk marad, a ferde hatásvonalú erő x és y irányú összetevője, melyeket vetületi egyensúlyi egyenletekből könnyedén kiszámíthatunk, így megúsza a ferde hatásvonalú erővel történő nyomatékszámítást.

- Ha két hatásvonal párhuzamos, akkor csak 2 metszéspontunk van, ilyenkor mindenképp vetületi egyensúlyi egyenleteket is kell alkalmaznunk.

Egy lehetséges (ajánlott) megoldás Ritter számítással:



$$M_d = 0 = -3F_q + 3F_C \Rightarrow F_C = \frac{3F_q}{3} = F_q = 6 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$M_g = 0 = 3F_0 - 3F_B \Rightarrow F_B = \frac{3F_0}{3} = F_0 = 8 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$F_x = 0 = F_{Ax} + F_C - F_0 \Rightarrow F_{Ax} = F_0 - F_C = 8 - 6 = 2 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$F_y = 0 = -F_{Ay} + F_B - F_q \Rightarrow F_{Ay} = F_B - F_q = 8 - 6 = 2 \text{ kN} (\downarrow)$$

$$\vec{F}_A = (2\vec{i} - 2\vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_B = (0\vec{i} + 8\vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_C = (6\vec{i} + 0\vec{j}) \text{ kN}$$