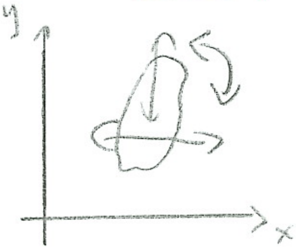
7. GYAK

EGYSZERŰ SÍKBELI SZERKEZETEK STATIKAI FELADATAI

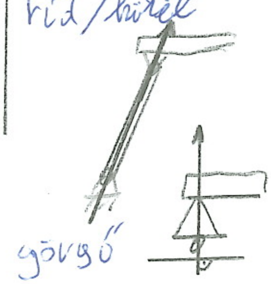
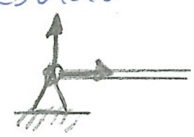
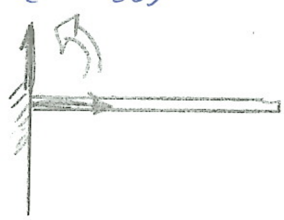
- **egyszerű síkbeli szerkezet:**
  - szabadságfokainak száma $\boxed{n = 3}$
  - felírható skaláris statikai egyenletek száma: $\boxed{3}$



$$\left.\begin{array}{l} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{array}\right\} \text{vetületi egyenletek}$$

$$\left. M_a = 0 \right\} \text{nyomatéki egyenletek}$$

- **kényszerek csoportosítása:**

	elsőfokú	másodfokú	harmadfokú
lekötött szab. fokok száma	$n_k = 1$	$n_k = 2$	$n_k = 3$
ismeretlen támasztóerők száma	1	2	3
példa	rúd/kötél  görgő	csukló 	befalazás 

- **statikailag határozott szerkezet**

feltétel: $n = n_k \Rightarrow n_k = 3 \Rightarrow$ 3 lehetőség:

a) 3 db elsőfokú kényszer ⇒ 3 rudas szerkezet (→4 erő egyensúlya)

b) 1 db elsőfokú + 1 db másodfokú kényszer ⇒ kéttámaszú tartó

c) 1 db harmadfokú kényszer ⇒ befalazott tartó

ha $n > n_k \Rightarrow$ test mozogni tud, labilis egyensúlyban lehet

ha $n < n_k \Rightarrow$ test egyensúlyban van, statikailag határozatlan

7.3.

- adott: körlemez 3 rudas megtámasztással

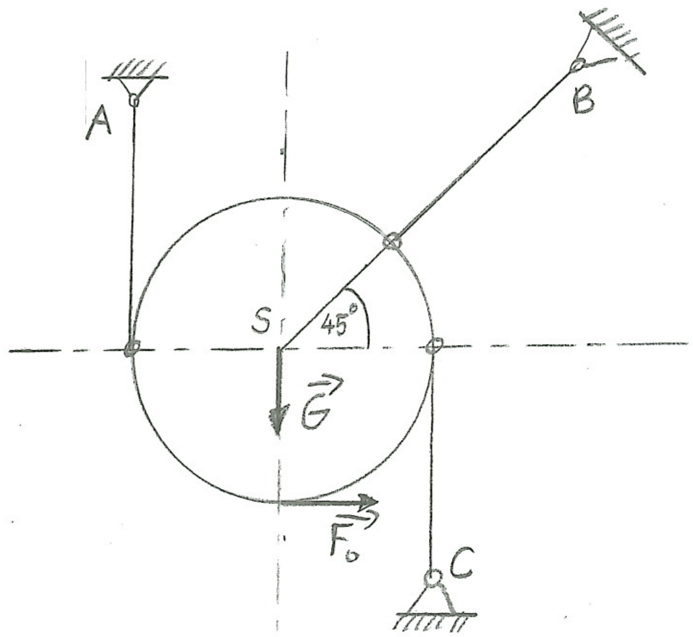
  $G = F_0 = 5\,kN$

- Feladat: támasztóerők

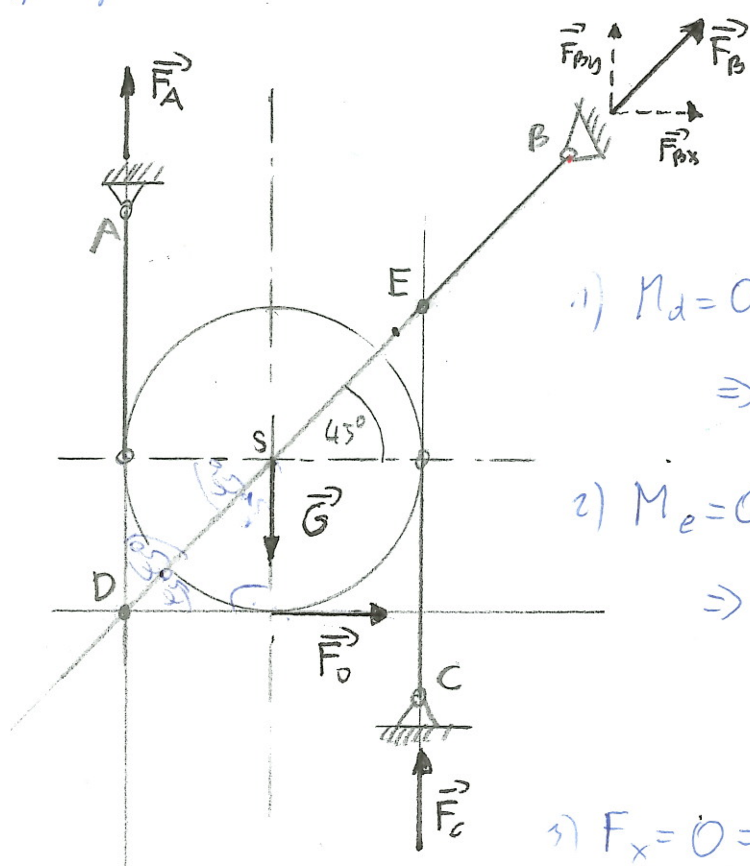
  $\vec{F}_A,\ \vec{F}_B,\ \vec{F}_C$

  a) számítással

  b) szerkesztéssel



a) Megoldás Ritter módszerrel:



- Az ismeretlen támasztóerők metszéspontjaira (D és E) felírva nyomatéki egyensúlyi egyenleteket:

1) $M_d = 0 = -RG + 2R F_{Cy}$

$$\Rightarrow F_{Cy} = \frac{RG}{2R} = \frac{G}{2} = 2{,}5\,kN\ (\uparrow)$$

2) $M_e = 0 = RG - 2R F_A + 2R F_0$

$$\Rightarrow F_A = \frac{RG + 2RF_0}{2R} = \frac{G + 2F_0}{2} = \frac{5 + 2\cdot 5}{2} = 7{,}5\,kN\ (\uparrow)$$

3) $F_x = 0 = F_0 + F_{Bx}$

$$\Rightarrow F_{Bx} = -F_0 = -5\,kN\ (\leftarrow)$$

4) $F_y = 0 = -G + F_A + F_C + F_{By}$

$$\Rightarrow F_{By} = G - F_A - F_C = 5 - 7{,}5 - 2{,}5 = -5\,kN\ (\downarrow)$$

$\vec{F}_A = (7{,}5\,\vec{j})\,kN$

$\vec{F}_B = (-5\,\vec{i} - 5\,\vec{j})\,kN$

$\vec{F}_C = (2{,}5\,\vec{j})\,kN$

b) Megoldás Culmann-módszerrel

- Az ismertek és ismeretlenek:

$\boxed{G}$ $\boxed{F_0}$ F_A F_B F_C

$\boxed{e_G}$ $\boxed{e_0}$ $\boxed{e_A}$ $\boxed{e_B}$ $\boxed{e_C}$

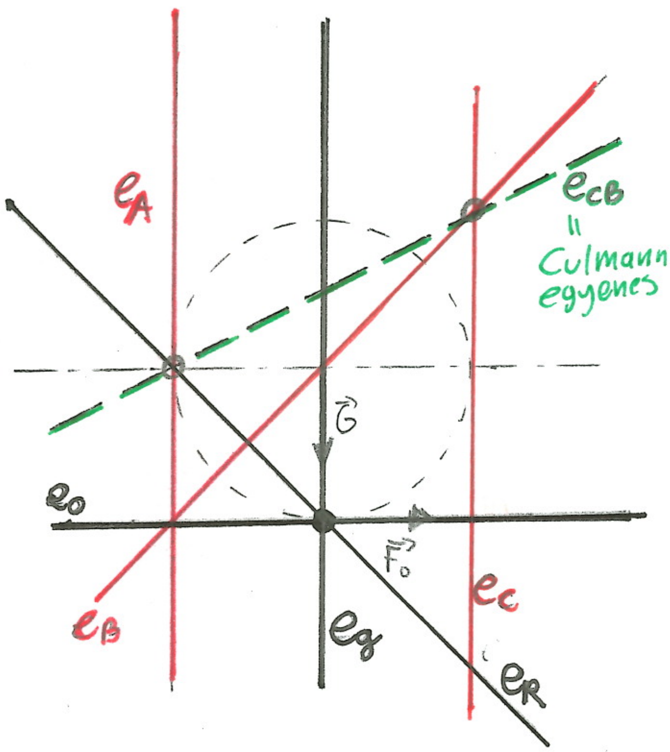
terhelő erők, támasztó erők

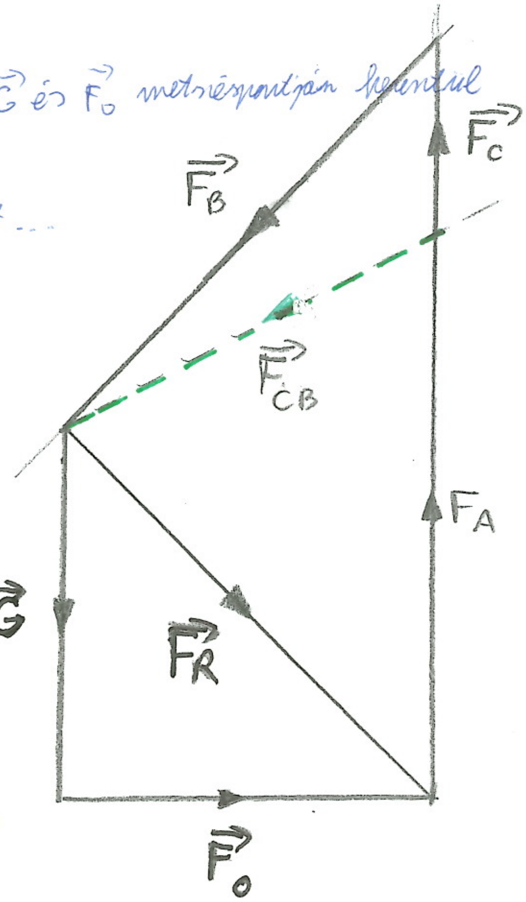
$$\underbrace{\vec{G} + \vec{F}_0}_{\vec{F}_R} + \vec{F}_A + \underbrace{\vec{F}_B + \vec{F}_C}_{\vec{F}_{BC}} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_R + \vec{F}_A + \vec{F}_{BC} = \vec{0}$$

- szerkesztés menete:
  1. erőábra ⇒ $\vec{F}_R$
  2. szerk. ábrán $\vec{F}_R$-rel párhuzamos $\vec{G}$ és $\vec{F}_0$ metszéspontján keresztül ⇒ e_R
  3. * innentől klasszikus 3 erős feladat ...

szerkezetábra





erőábra

1 cm ≙ 1 kN

---

* - SZE: ismert e_g, e_0, e_A, e_B, e_C hatásvonalak

- EA: $\vec{G}$ és $\vec{F}_0$ felvétele ⇒ $\vec{F}_R$
- SZE: $\vec{F}_R$-vel ∥ $\vec{G}$ és $\vec{F}_0$ metszéspontján keresztül ⇒ e_R
- $\vec{F}_{BC}$ hatásvonala (e_{BC} = Culmann egyenes)
  - → átmegy e_B és e_C metszéspontján mivel $\vec{F}_{BC} = \vec{F}_B + \vec{F}_C$
  - → átmegy e_A és e_R metszéspontján (3 erő egyensúlya)
- EA: - $\vec{F}_R$-t egyensúlyozzuk e_{BC} és e_A hatásvonalakon → $\vec{F}_{BC}$, $\vec{F}_A$
  - $\vec{F}_{BC}$-t e_B és e_C irányú komponensekre bontjuk → $\vec{F}_B$, $\vec{F}_C$

7.2.

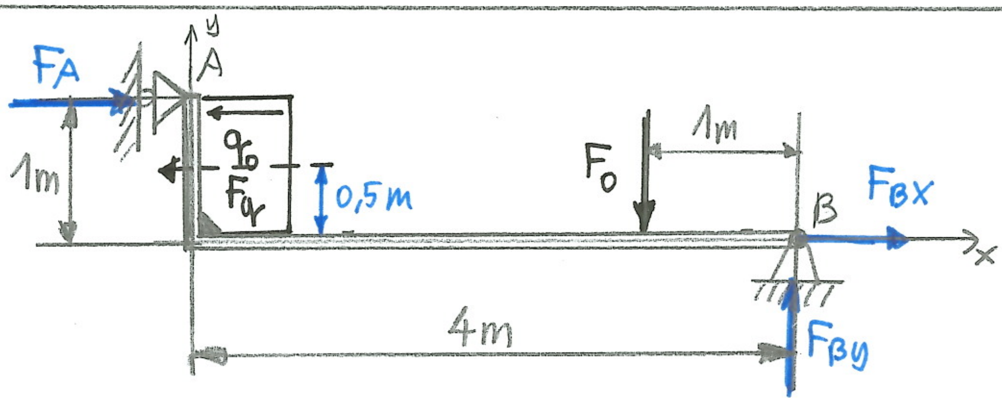
• adott:

$q_0 = 8\ kN/m$

$F_0 = 4\ kN$

• Feladat:

$\vec{F}_A, \vec{F}_B$



• A megoszló erőrendszer eredője: $F_q = q_0 \cdot 1 = 8\ kN\ (\leftarrow)$

a)

támasztóerők meghatározása számítással ⇒ egyensúlyi egyenletek:

① nyomatéki egyenlet a csuklós megtámasztás pontjára (B pont)

$$M_b = 0 = 1 \cdot F_0 + 0{,}5 \cdot F_q - 1 \cdot F_A \Rightarrow \boxed{F_A} = F_0 + 0{,}5 F_q = 4 + 0{,}5 \cdot 8 = 8\ kN\ (\rightarrow)$$

② x irányú vetületi egyenlet:

$$F_x = 0 = F_A - F_q + F_{Bx} \Rightarrow \boxed{F_{Bx}} = -F_A + F_q = -8 + 8 = 0\ kN$$

③ y irányú vetületi egyenlet:

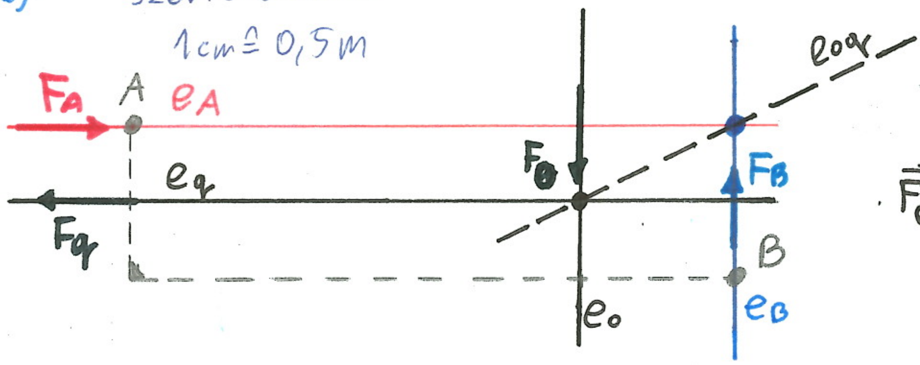
$$F_y = 0 = -F_0 + F_{By} \Rightarrow \boxed{F_{By}} = F_0 = 4\ kN\ (\uparrow)$$

$$\vec{F}_A = (8\vec{i})\ kN \qquad \vec{F}_B = (4\vec{j})\ kN$$

b)

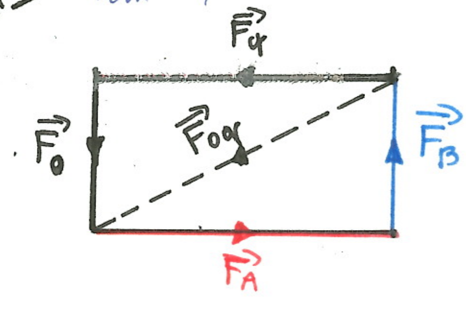
szerkezeti ábra

1cm ≙ 0,5m



erőábra

1cm ≙ 0,5 kN



szerkesztés lépései:

① sz.á. ⇒ szerkezet és 3 ismert hatásvonal (e_q, e_0, e_A) lerajzolása

② e.á. ⇒ $\vec{F}_q$ és $\vec{F}_0$ felvétele ⇒ $\vec{F}_{0q}$ kiszerkesztése

③ sz.á. ⇒ e_{0q} lerajzolása → ∥ $\vec{F}_{0q}$-val

→ átmegy e_0 és e_q metszéspontján

④ sz.á. ⇒ e_B lerajzolása mivel $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_{0q} = \vec{0}$ ⇒ e_B átmegy e_A és e_{0q} metszéspontján

⑤ e.á. ⇒ $\vec{F}_{0q}$ egyensúlyozása e_A és e_B hatásvonalakon

7.1.

- adott:

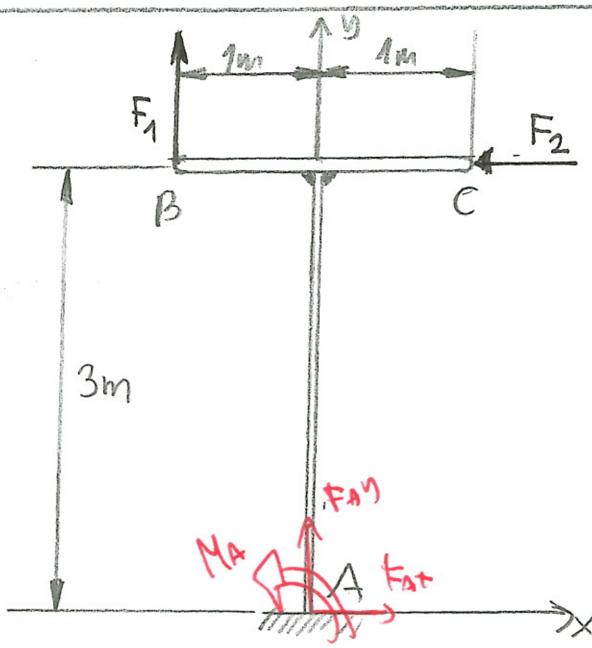
  $F_1 = 3\,kN$

  $F_2 = 1\,kN$

- feladat:

  befogásnál ébredő támasztóerő

  $(\vec{F_A}, \vec{M_A})$



- Egyensúlyi egyenletek:

$$F_x = 0 = -F_2 + F_{Ax} \Rightarrow F_{Ax} = F_2 = 1\,kN (\rightarrow)$$

$$F_y = 0 = F_1 + F_{Ay} \Rightarrow F_{Ay} = -F_1 = -3\,kN (\downarrow)$$

$$M_a = 0 = -1F_1 + 3F_2 + M_A \Rightarrow M_A = 1F_1 - 3F_2 = 1\cdot 3 - 3\cdot 1 = 0$$

$$\vec{F_A} = (\vec{i} - 3\vec{j}) \qquad \vec{M_A} = \vec{0}$$

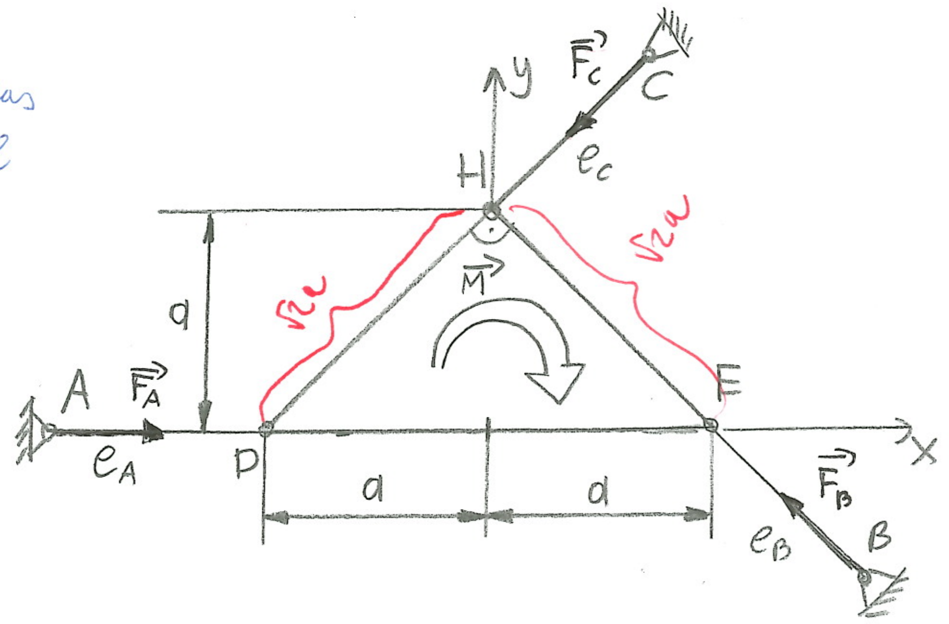
7.4.

- adott: háromrúd 3 rudas megtámasztással

$a = 2\,m$

$M = 6\,kNm$

- feladat: $\vec{F_A}, \vec{F_B}, \vec{F_C}$ számítással



Megoldás Ritter-módszerrel

$$M_e = 0 = -M + \sqrt{2}a \cdot F_C \Rightarrow F_C = \frac{M}{\sqrt{2}a} = \frac{6}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2{,}12\,kN\,(\swarrow)$$

$$M_h = 0 = -M + a \cdot F_A \Rightarrow F_A = \frac{M}{a} = \frac{6}{2} = 3\,kN\,(\rightarrow)$$

$$M_d = 0 = -M + \sqrt{2}a\,F_B \Rightarrow F_B = \frac{M}{\sqrt{2}a} = \frac{6}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2{,}12\,kN\,(\nwarrow)$$

$F_A = 3\,kN\,(\rightarrow)$ $F_B = 2{,}12\,kN\,(\nwarrow)$ $F_C = 2{,}12\,kN\,(\swarrow)$

$$\vec{F_A} = (3\vec{i})\,kN$$

$$\vec{F_B} = -2{,}12 \cdot \cos 45^\circ\,\vec{i} + 2{,}12 \sin 45^\circ\,\vec{j} =$$
$$= (-1{,}5\,\vec{i} + 1{,}5\,\vec{j})\,kN$$

$$\vec{F_C} = -2{,}12 \cos 45^\circ\,\vec{i} - 2{,}12 \sin 45^\circ\,\vec{j} =$$
$$= (-1{,}5\,\vec{i} - 1{,}5\,\vec{j})\,kN$$

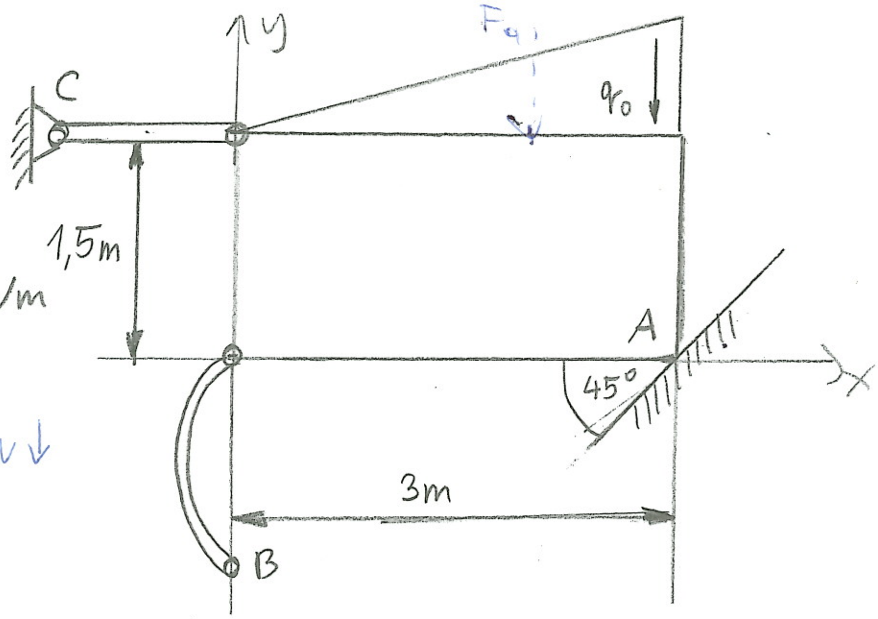
6.4.

- adott: lásd ábra
- Feladat: támasztóerők

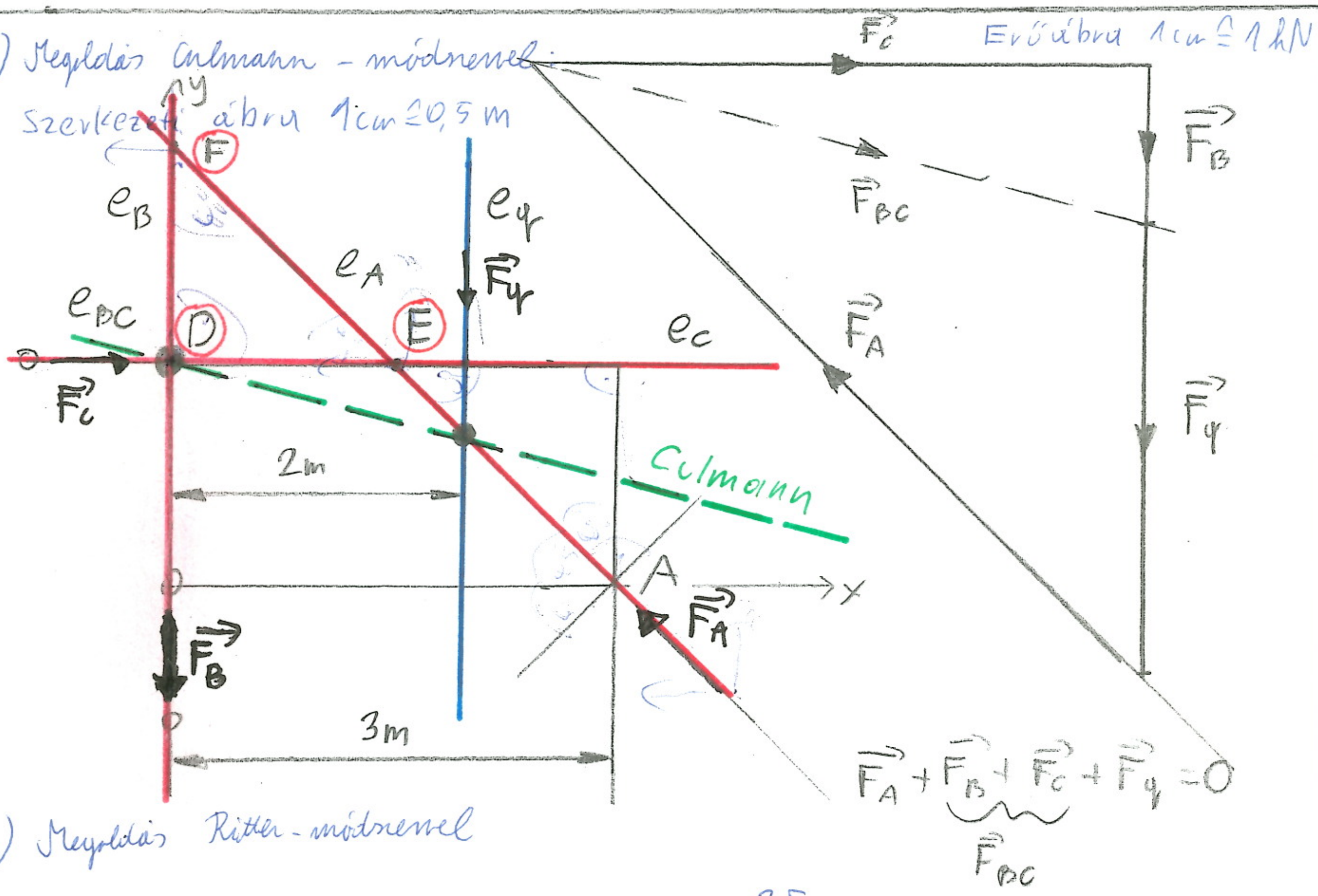
$q_{0max} = 4\,kN/m$

$\Downarrow$

$F_q = \frac{1}{2} q_{0max} \cdot l = 6\,kN \downarrow$



a) Megoldás Culmann-módszerrel:



b) Megoldás Ritter-módszerrel

$$M_d = 0 = -2F_q + 1{,}5F_{Ay} \Rightarrow F_{Ay} = \frac{2F_q}{1{,}5} = 8\,kN\,(\uparrow)$$

$$M_d = 0 = -2F_q + 1{,}5F_{Ax} \Rightarrow F_{Ax} = \frac{2F_q}{1{,}5} = 8\,kN\,(\leftarrow)$$

$$M_e = 0 = -0{,}5F_q - 1{,}5F_B \Rightarrow F_B = \frac{-0{,}5F_q}{1{,}5} = -2\,kN\,(\downarrow)$$

$$M_f = 0 = -2F_q + 1{,}5F_C \Rightarrow F_C = \frac{2F_q}{1{,}5} = 8\,kN\,(\rightarrow)$$

$\vec{F_A} = (-8\vec{i} + 8\vec{j})\,kN \qquad \vec{F_B} = (-2\vec{j})\,kN \qquad \vec{F_C} = (8\vec{i})\,kN$

CULMANN SZERKESZTÉS

- gondolatmenete:

Összegzünk két ismeretlen támasztóerőt (pl.: $\vec{F}_B$ és $\vec{F}_C$)

=> feladatot visszavezetjük 3 erő egyensúlyára

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_q = \vec{0}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{F}_A + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_q = \vec{0}$$

- lépései:

I. SZE: ① megrajzoljuk a szerkezeten a 4 ismert hatásvonalat (e_A, e_B, e_C, e_q)

② ~~le~~megrajzoljuk $\vec{F}_{BC}$ hatásvonalát (e_{BC}) = Culmann egyenes meghatározása:

1) e_{BC} átmegy e_B és e_C metszéspontján, mivel

$$\vec{F}_{BC} = \vec{F}_B + \vec{F}_C$$

2) e_{BC} átmegy e_A és e_q metszéspontján, mivel

$$\vec{F}_A + \vec{F}_q + \vec{F}_{BC} = \vec{0}$$

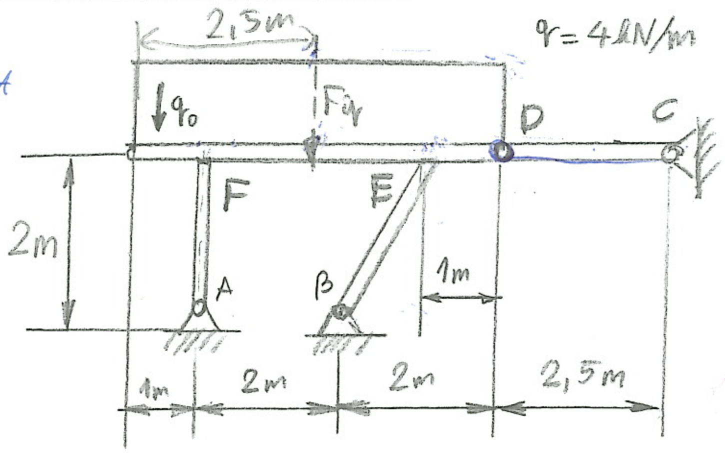
II. EÁ: ① az ismert $\vec{F}_q$-t egyensúlyozzuk e_{BC} és e_A hatásvonalakon

tehát => $\vec{F}_q$ két végpontján át párhuzamost húzunk e_{BC}-vel és e_A-val, a nyílfolyam folytonos => $\vec{F}_{BC}$, $\boxed{\vec{F}_A}$

② $\vec{F}_{BC}$-t e_B és e_C irányú komponensekre bontjuk, tehát $\vec{F}_{BC}$ két végpontján keresztül párhuzamost húzunk e_B-vel és e_C-vel, a nyílfolyam ütköző => $\boxed{\vec{F}_B}$, $\boxed{\vec{F}_C}$

6.3.

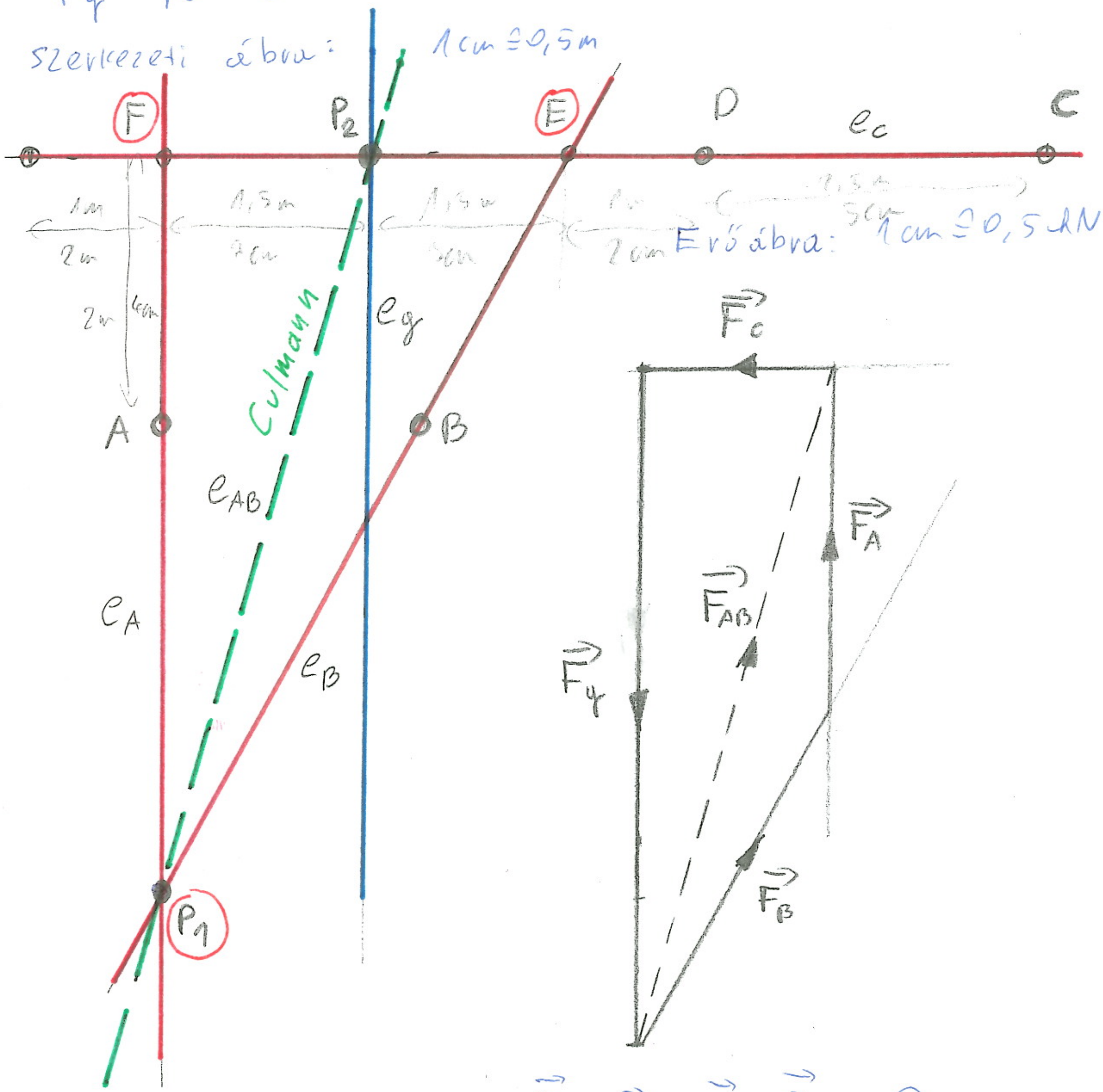
- adott: Az ábrán látható rúd, melyet 3 másik rúddal támasztunk meg
  - méretek, terhelés (ábra)
- feladat: támasztóerők
  a) szerkesztéssel
  b) számítással



a) Megoldás Culmann-módszerrel

$F_q = q\,l = 4 \cdot 5 = 20$ kN és a megoszló terhelés felénél van

szerkezeti ábra: 1cm ≙ 0,5m



$$\vec{F}_q + \vec{F}_c + \underbrace{\vec{F}_A + \vec{F}_B}_{\vec{F}_{AB}} = 0$$

b) megoldás Ritter módszerrel:

$$M_f = 0 = -1{,}5F_q + 3F_{By} \Rightarrow F_{By} = \frac{1{,}5F_q}{3} = 10\,kN\,(\uparrow)$$

$$M_f = 0 = -1{,}5F_q + 6F_{Bx} \Rightarrow F_{Bx} = \frac{1{,}5F_q}{6} = 5\,kN\,(\rightarrow)$$

$$M_e = 0 = 1{,}5F_q - 3F_A \Rightarrow F_A = \frac{1{,}5F_q}{3} = 10\,kN\,(\uparrow)$$

$$M_{P1} = 0 = -1{,}5F_q + 6F_C \Rightarrow F_C = \frac{1{,}5F_q}{6} = 5\,kN\,(\leftarrow)$$

$\vec{F_A} = (10\vec{j})\,kN \quad \vec{F_B} = (5\vec{i} + 10\vec{j})\,kN \quad \vec{F_C} = (-5\vec{i})\,kN$

---

alt mód

$M_e = 0 \Rightarrow F_A$

$M_{P1} = 0 \Rightarrow F_C$

$F_x = 0 \Rightarrow F_{Bx}\ (\Rightarrow F_{By})$

$F_y = 0 \Rightarrow F_{By}$

$$\frac{F_{By}}{F_{Bx}} = \frac{2}{1}$$

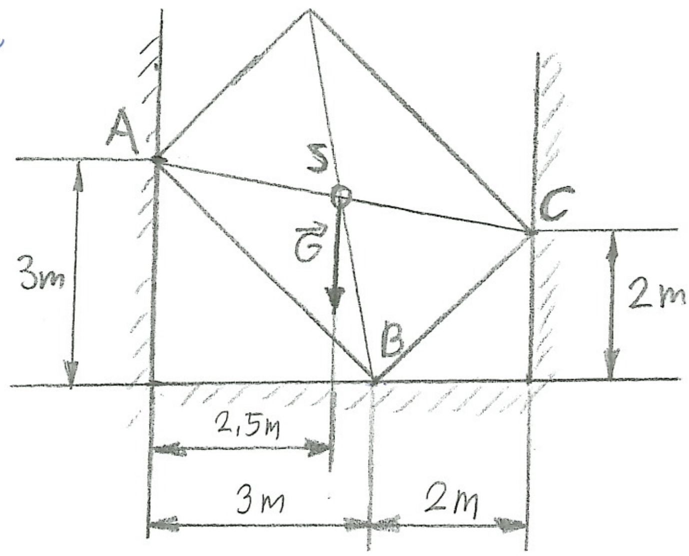
6.2.

• adott: Egy hasáb egy veremben

$\vec{G} = (-400\,\vec{j})\,N$

$\mu_0 \approx 0$

méretek (→ ábra)

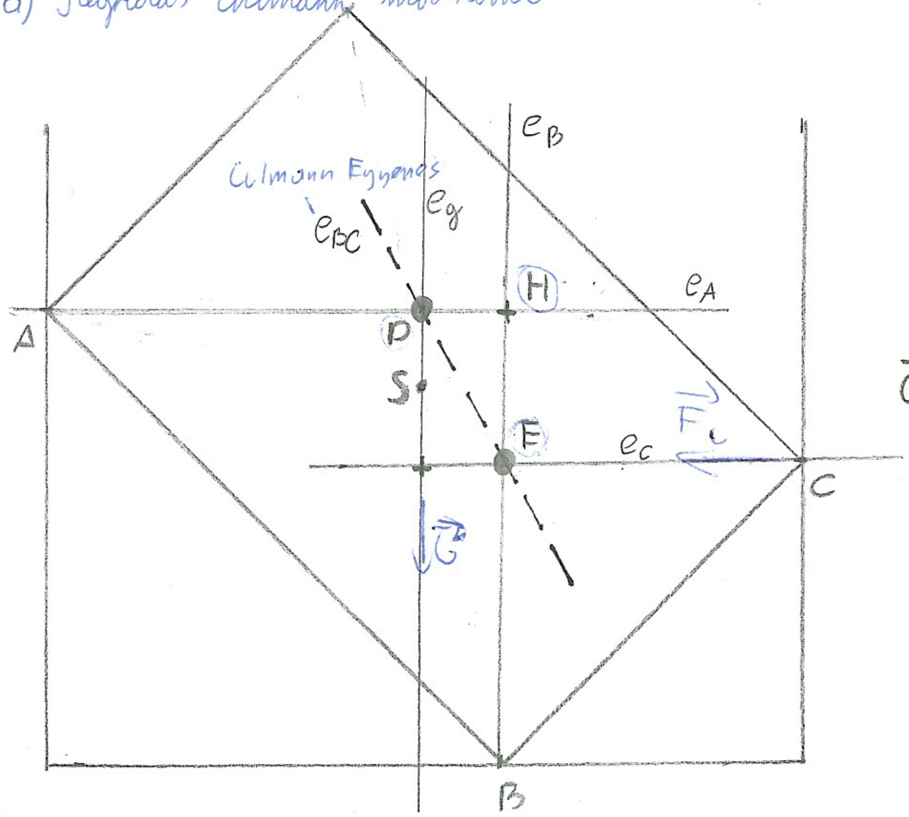


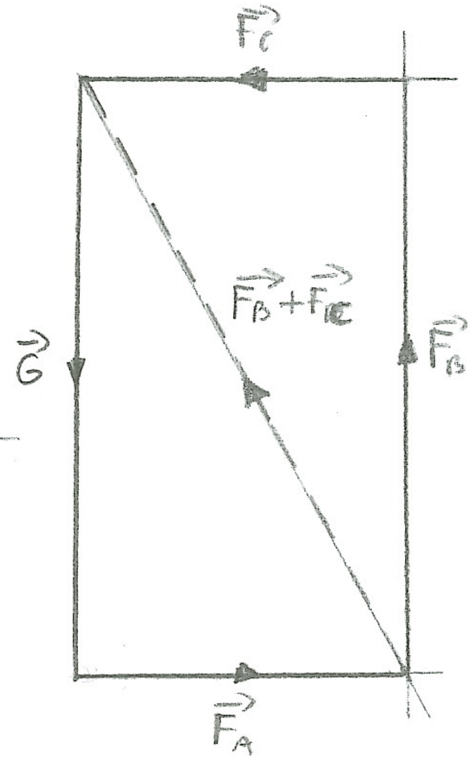
• feladat: támasztóerők

a) szerkesztéssel

b) számítással

a) Megoldás Culmann módszerrel





$$\vec{G} + \vec{F_A} + \underbrace{\vec{F_B} + \vec{F_C}}_{\vec{F_{BC}}} = 0$$

b) Megoldás számítással:

$$M_e = 0 = 0{,}5G - 1F_A \Rightarrow F_A = \frac{-0{,}5G}{-1} = 0{,}5G = 200N\ (\rightarrow)$$

$$M_h = 0 = -1 \cdot F_C + 0{,}5G \Rightarrow F_C = \frac{-0{,}5G}{-1} = 0{,}5G = 200N\ (\leftarrow)$$

$$F_y = 0 = -G + F_B \Rightarrow F_B = G = 400N\ (\uparrow)$$

$F_A = (200\,\vec{i})N \quad F_C = (-200\,\vec{i})N \quad F_B = (400\,\vec{j})N$