

• adott: $R = 2\text{ m}$

$$F_1 = 6\text{ kN}, F_2 = 8\text{ kN}$$

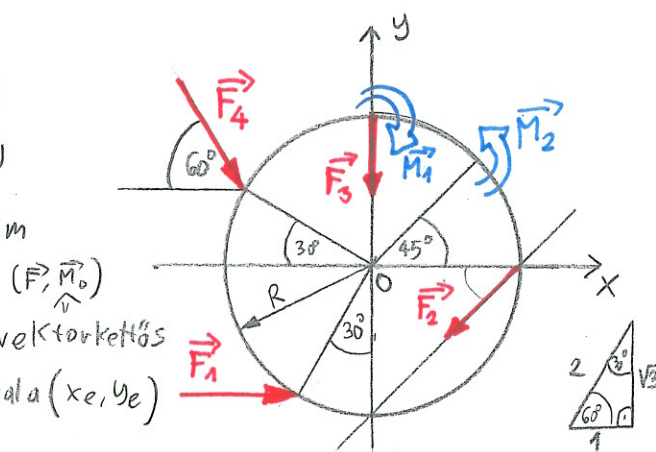
$$F_3 = 4\text{ kN}, F_4 = 12\text{ kN}$$

$$M_1 = 8\text{ kNm}, M_2 = 6\text{ kNm}$$

• Feladat:

a) origóba redukált vektorkettős

b) eredő erő hatásvonala (x_e, y_e)



a) • erővektorok:

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{i} = (6\vec{i})\text{ kN}$$

$$\vec{F}_2 = -F_2 \cos 45^\circ \vec{i} - F_2 \sin 45^\circ \vec{j} = -8 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - 8 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} = (-4\sqrt{2}\vec{i} - 4\sqrt{2}\vec{j})\text{ kN}$$

$$\vec{F}_3 = F_3 (-\vec{j}) = (-4\vec{j})\text{ kN}$$

$$\vec{F}_4 = F_4 \cos 60^\circ \vec{i} - F_4 \sin 60^\circ \vec{j} = 12 \cdot \frac{1}{2} \vec{i} - 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} = (6\vec{i} - 6\sqrt{3}\vec{j})\text{ kN}$$

• eredő erő:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 6\vec{i} - 4\sqrt{2}\vec{i} - 4\sqrt{2}\vec{j} - 4\vec{j} + 6\vec{i} - 6\sqrt{3}\vec{j} = (6 - 4\sqrt{2} + 6)\vec{i} + (-4\sqrt{2} - 4 - 6\sqrt{3})\vec{j} = (6,343\vec{i} - 20,049\vec{j})\text{ kN}$$

• az erők támadás pontjaiban mutató helyvektorok:

$$\vec{r}_1 = -R \sin 30^\circ \vec{i} - R \cos 30^\circ \vec{j} = -2 \cdot \frac{1}{2} \vec{i} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} = (-1\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})\text{ m}$$

$$\vec{r}_2 = R \vec{i} = (2\vec{i})\text{ m}$$

$$\vec{r}_3 = R \vec{j} = (2\vec{j})\text{ m}$$

$$\vec{r}_4 = -R \cos 30^\circ \vec{i} + R \sin 30^\circ \vec{j} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + 2 \cdot \frac{1}{2} \vec{j} = (-\sqrt{3}\vec{i} + 1\vec{j})\text{ m}$$

• az erők origóra kifejtett nyomatékai:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (-1\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}) \times (6\vec{i}) = -1 \cdot 6 \underbrace{\vec{i} \times \vec{i}}_0 - \sqrt{3} \cdot 6 \underbrace{\vec{j} \times \vec{i}}_{-\vec{k}} = (6\sqrt{3}\vec{k})\text{ kNm}$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (2\vec{i}) \times (-4\sqrt{2}\vec{i} - 4\sqrt{2}\vec{j}) = 2 \cdot (-4\sqrt{2}) \underbrace{\vec{i} \times \vec{i}}_0 + 2 \cdot (-4\sqrt{2}) \underbrace{\vec{i} \times \vec{j}}_{\vec{k}} = (-8\sqrt{2}\vec{k})\text{ kNm}$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = (2\vec{j}) \times (-4\vec{j}) = 2 \cdot (-4) \underbrace{\vec{j} \times \vec{j}}_0 = 0$$

$$\vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = (-\sqrt{3}\vec{i} + 1\vec{j}) \times (6\vec{i} - 6\sqrt{3}\vec{j}) = -\sqrt{3} \cdot 6 \underbrace{\vec{i} \times \vec{i}}_0 + (-\sqrt{3}) \cdot (-6\sqrt{3}) \underbrace{\vec{i} \times \vec{j}}_{\vec{k}} + 1 \cdot 6 \underbrace{\vec{j} \times \vec{i}}_{-\vec{k}} + 1 \cdot (-6\sqrt{3}) \underbrace{\vec{j} \times \vec{j}}_0 = 18\vec{k} - 6\vec{k} = (12\vec{k})\text{ kNm}$$

• Koncentrált nyomatékok

$$\vec{M}_1 = -M_1 \vec{k} = (-8\vec{k})\text{ kNm}$$

$$\vec{M}_2 = M_2 \vec{k} = (6\vec{k})\text{ kNm}$$

• az origóra számított nyomaték:

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^4 \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^2 \vec{M}_j = 6\sqrt{3}\vec{k} - 8\sqrt{2}\vec{k} + 0 + 12\vec{k} - 8\vec{k} + 6\vec{k} = (9,0786\vec{k})\text{ kNm}$$

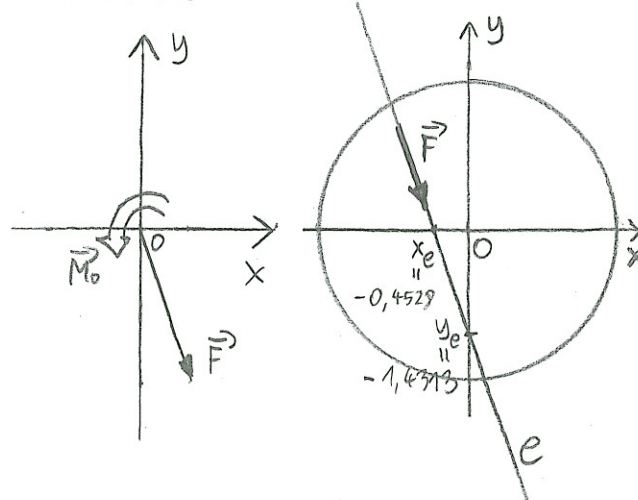
b) eredő erő hatásvonala:

$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_y} = \frac{9,0786}{-20,049} = -0,4528\text{ m}$$

$$y_e = -\frac{M_{0z}}{F_x} = -\frac{9,0786}{6,343} = -1,4313\text{ m}$$

Origóba redukált vektorkettős:

eredő erő hatásvonala:



adott:

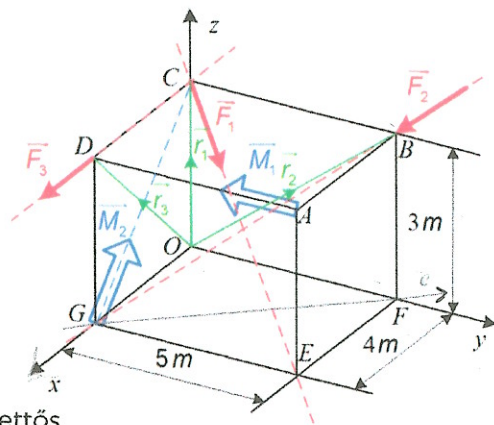
$$F_1 = 50\sqrt{2} \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = (20\vec{i} - 25\vec{j} - 15\vec{k}) \text{ N}$$

$$F_3 = 50 \text{ N}$$

$$M_1 = 30 \text{ Nm}$$

$$M_2 = 40 \text{ Nm}$$

**feladat:**

- Origóba redukált vektorkettős
- Az x, y, z tengelyekre számított nyomatékok
- Az e tengelyre számított nyomaték

kidolgozás:

- Origóba redukált vektorkettős:

- Az egyes erővektorok:

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \vec{e}_1 = F_1 \cdot \frac{\vec{r}_{CE}}{|\vec{r}_{CE}|} = 50\sqrt{2} \cdot \frac{4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2}} = 50\sqrt{2} \cdot \frac{4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}}{5\sqrt{2}} = (40\vec{i} + 50\vec{j} - 30\vec{k}) \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = (20\vec{i} - 25\vec{j} - 15\vec{k}) \text{ N}$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \vec{i} = (50\vec{i}) \text{ N}$$

- Az eredő erő:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 40\vec{i} + 50\vec{j} - 30\vec{k} + 20\vec{i} - 25\vec{j} - 15\vec{k} + 50\vec{i} = (40 + 20 + 50)\vec{i} + (50 - 25)\vec{j} + (-30 - 15)\vec{k} = (110\vec{i} + 25\vec{j} - 45\vec{k}) \text{ N}$$

- Az erők támadáspontjaiba mutató helyvektorok:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{OG} = (3\vec{k}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{OB} = (5\vec{j} + 3\vec{k}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_{OD} = (4\vec{i} + 3\vec{k}) \text{ m}$$

- Az egyes erők által az origóra kifejtett nyomatékok:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 40 & 50 & -30 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 \cdot (-30) - 3 \cdot 50) - \vec{j}(0 \cdot (-30) - 3 \cdot 40) + \vec{k}(0 \cdot 50 - 0 \cdot 40) = (-150\vec{i} + 120\vec{j}) \text{ Nm}$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & 3 \\ 20 & -25 & -15 \end{vmatrix} = \vec{i}(5 \cdot (-15) - 3 \cdot (-25)) - \vec{j}(0 \cdot (-15) - 3 \cdot 20) + \vec{k}(0 \cdot (-25) - 5 \cdot 20) = (60\vec{j} - 100\vec{k}) \text{ Nm}$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 3 \\ 50 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 \cdot 0 - 3 \cdot 0) - \vec{j}(4 \cdot 0 - 3 \cdot 50) + \vec{k}(4 \cdot 0 - 0 \cdot 50) = (150\vec{j}) \text{ Nm}$$

- A koncentrált nyomatékvektorok:

$$\vec{M}_1 = M_1(-\vec{j}) = (-30\vec{j}) \text{ Nm}$$

$$\vec{M}_2 = M_2 \cdot \vec{f}_2 = M_2 \cdot \frac{\vec{r}_{GC}}{|\vec{r}_{GC}|} = 40 \cdot \frac{-4\vec{i} + 3\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 40 \cdot \frac{-4\vec{i} + 3\vec{k}}{5} = (-32\vec{i} + 24\vec{k}) \text{ Nm}$$

- az origóra számított nyomaték:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^3 \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^2 \vec{M}_j = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \\ &= -150\vec{i} + 120\vec{j} + 60\vec{j} - 100\vec{k} + 150\vec{j} - 30\vec{j} - 32\vec{i} + 24\vec{k} = \\ &= (-150 - 32)\vec{i} + (120 + 60 + 150 - 30)\vec{j} + (-100 + 24)\vec{k} = \\ &= (-182\vec{i} + 300\vec{j} - 76\vec{k}) \text{ Nm} \end{aligned}$$

- Az x, y és z tengelyekre számított nyomatékok:

$$M_x = \vec{M}_O \cdot \vec{i} = (-182\vec{i} + 300\vec{j} - 76\vec{k}) \cdot \vec{i} = -182 \text{ Nm}$$

$$M_y = \vec{M}_O \cdot \vec{j} = (-182\vec{i} + 300\vec{j} - 76\vec{k}) \cdot \vec{j} = 300 \text{ Nm}$$

$$M_z = \vec{M}_O \cdot \vec{k} = (-182\vec{i} + 300\vec{j} - 76\vec{k}) \cdot \vec{k} = -76 \text{ Nm}$$

c) Az e tengelyre számított nyomaték:

- Az e egyenesre illeszkedő irány-egységvektor:

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}_{GF}}{|\vec{r}_{GF}|} = \frac{-4\vec{i} + 5\vec{j}}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \left(-\frac{4}{\sqrt{41}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{41}}\vec{j} \right)$$

- Az e egyenes egy tetszőleges pontjára számított nyomaték (legyen G pont):

$$\vec{M}_G = \vec{r}_{GO} \times \vec{F} + \vec{M}_O$$

ahol az $\vec{F}$ erő által kifejtett nyomaték:

$$\vec{r}_{GO} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 0 \\ 110 & 25 & -45 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 \cdot -45 - 0 \cdot 25) - \vec{j}(-4 \cdot (-45) - 0 \cdot 110) + \vec{k}(-4 \cdot 25 - 0 \cdot 110) = (-180\vec{j} - 100\vec{k}) \text{ Nm}$$

Így a G pontra számított nyomaték:

$$\vec{M}_G = \vec{r}_{GO} \times \vec{F} + \vec{M}_O = -180\vec{j} - 100\vec{k} - 182\vec{i} + 300\vec{j} - 76\vec{k} = (-182\vec{i} + 120\vec{j} - 176\vec{k}) \text{ Nm}$$

- Az e tengelyre számított nyomaték:

$$M_e = \vec{M}_G \cdot \vec{e} = (-182\vec{i} + 120\vec{j} - 176\vec{k}) \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{41}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{41}}\vec{j} + 0\vec{k} \right) = \left(\frac{182 \cdot 4}{\sqrt{41}} + \frac{120 \cdot 5}{\sqrt{41}} - 176 \cdot 0 \right) = \underline{\underline{207,4 \text{ Nm}}}$$

• adott:

$$F_1 = 15 \text{ kN}$$

$$F_2 = 12 \text{ kN}$$

$$F_3 = 5 \text{ kN}, \angle = 36,87^\circ$$

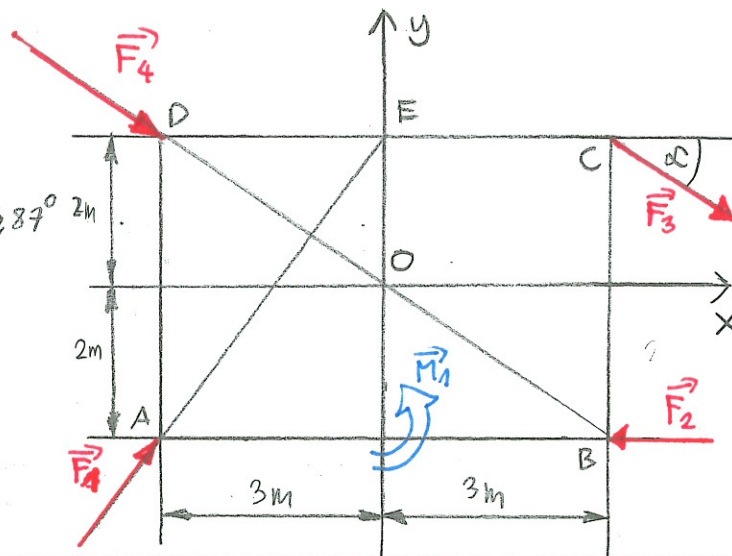
$$F_4 = 2\sqrt{13} \text{ kN}$$

$$M_1 = 45 \text{ kNm}$$

• Feladat:

a) $\vec{F}, \vec{M}_0$

b) x_e, y_e



a) • erő vektorok:

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{e}_1 = F_1 \frac{\vec{r}_{AE}}{|\vec{r}_{AE}|} = 15 \cdot \frac{3\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 15 \left(\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} \right) = (9\vec{i} + 12\vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \vec{e}_2 = F_2 (-\vec{i}) = (-12\vec{i}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \vec{e}_3 = F_3 \cos \angle \vec{i} - F_3 \sin \angle \vec{j} = 5 \cdot \cos 36,87^\circ \vec{i} - 5 \cdot \sin 36,87^\circ \vec{j} = (4\vec{i} - 3\vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_4 = F_4 \vec{e}_4 = F_4 \frac{\vec{r}_{DB}}{|\vec{r}_{DB}|} = 2\sqrt{13} \left(\frac{6\vec{i} - 4\vec{j}}{\sqrt{6^2 + (-4)^2}} \right) = 2\sqrt{13} \left(\frac{6}{\sqrt{52}}\vec{i} - \frac{4}{\sqrt{52}}\vec{j} \right) = 2\sqrt{13} \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j} \right) = (6\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ kN}$$

• eredő erő:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 9\vec{i} + 12\vec{j} - 12\vec{i} + 4\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{i} - 4\vec{j} = (9 - 12 + 4 + 6)\vec{i} + (12 - 3 - 4)\vec{j} = (7\vec{i} + 5\vec{j}) \text{ kN}$$

• az erők origóra kifejtett nyomatékai:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (-3\vec{i} - 2\vec{j}) \times (9\vec{i} + 12\vec{j}) = -3 \cdot 9 \vec{i} \times \vec{i} + (-3) \cdot 12 \vec{i} \times \vec{j} + (-2) \cdot 9 \vec{j} \times \vec{i} + (-2) \cdot 12 \vec{j} \times \vec{j} = -36\vec{k} + 18\vec{k} = (-18\vec{k}) \text{ kNm}$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (3\vec{i} - 2\vec{j}) \times (-12\vec{i}) = 3 \cdot (-12) \vec{i} \times \vec{i} + (-2) \cdot (-12) \vec{j} \times \vec{i} = (-24\vec{k}) \text{ kNm}$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = (3\vec{i} + 2\vec{j}) \times (4\vec{i} - 3\vec{j}) = 3 \cdot 4 \vec{i} \times \vec{i} + 3 \cdot (-3) \vec{i} \times \vec{j} + 2 \cdot 4 \vec{j} \times \vec{i} + 2 \cdot (-3) \vec{j} \times \vec{j} = -9\vec{k} - 8\vec{k} = (-17\vec{k}) \text{ kNm}$$

$$\vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = \vec{0} \quad (\text{mivel } \vec{F}_4 \text{ hatásvonalát kerestől megy az origón})$$

• koncentrált nyomatékvektor:

$$\vec{M}_1 = M_1 \vec{k} = (45\vec{k}) \text{ kNm}$$

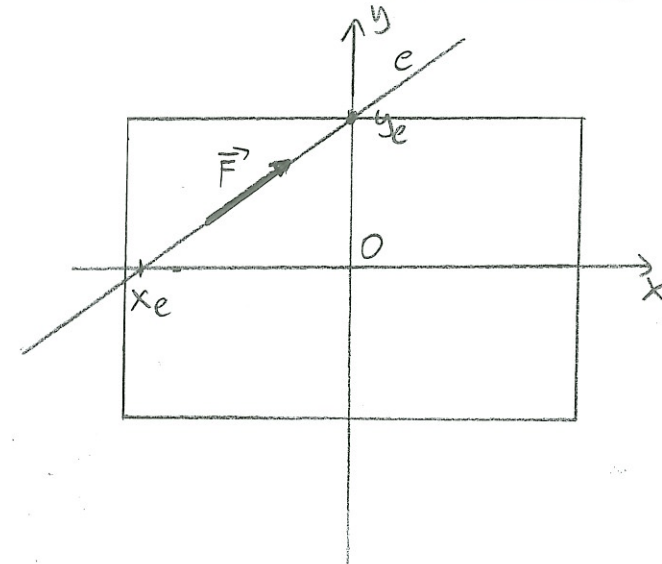
• az origóra számított nyomaték:

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^4 \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{M}_1 = -18\vec{k} - 24\vec{k} - 17\vec{k} + 0\vec{k} + 45\vec{k} = (-14\vec{k}) \text{ kNm}$$

b) eredő erő hatásvonala:

$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_y} = \frac{-14}{5} = -2,8 \text{ m}$$

$$y_e = -\frac{M_{0z}}{F_x} = -\frac{-14}{7} = 2 \text{ m}$$



Adott:

$F_1 = 5 \text{ kN}$

$F_2 = 3 \text{ kN}$

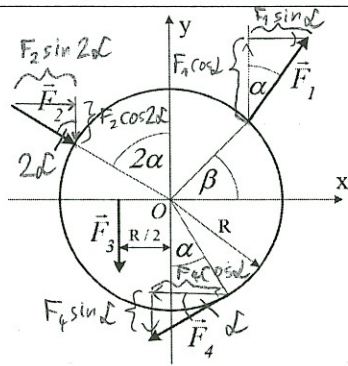
$F_3 = 3 \text{ kN}$

$F_4 = 4 \text{ kN}$

$R = 3 \text{ m}$

$\alpha = 30^\circ$

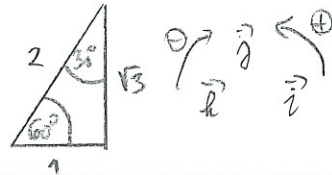
$\beta = 45^\circ$

**Feladat:**

Az eredő erő hatásvonala

a) számítással (x_e, y_e)

b) szerkesztéssel



a) megoldás számítással:

• erővektorok:

$$\vec{F}_1 = F_1 \sin \alpha \vec{i} + F_1 \cos \alpha \vec{j} = 5 \sin 30^\circ \vec{i} + 5 \cos 30^\circ \vec{j} = (2,5 \vec{i} + 2,5 \sqrt{3} \vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \sin 2\alpha \vec{i} - F_2 \cos 2\alpha \vec{j} = 3 \sin 60^\circ \vec{i} - 3 \cos 60^\circ \vec{j} = (1,5 \sqrt{3} \vec{i} - 1,5 \vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_3 = F_3 (-\vec{j}) = (-3 \vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_4 = -F_4 \cos \alpha \vec{i} - F_4 \sin \alpha \vec{j} = -4 \cos 30^\circ \vec{i} - 4 \sin 30^\circ \vec{j} = (-2 \sqrt{3} \vec{i} - 2 \vec{j}) \text{ kN}$$

• eredő erő:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = 2,5 \vec{i} + 2,5 \sqrt{3} \vec{j} + 1,5 \sqrt{3} \vec{i} - 1,5 \vec{j} - 3 \vec{j} - 2 \sqrt{3} \vec{i} - 2 \vec{j} = (2,5 + 1,5 \sqrt{3} - 2 \sqrt{3}) \vec{i} + (2,5 \sqrt{3} - 1,5 - 3 - 2) \vec{j} = (1,634 \vec{i} - 2,17 \vec{j}) \text{ kN}$$

• az erők támadáspontjaiba mutató helyvektorok

$$\vec{r}_1 = R \cos \beta \vec{i} + R \sin \beta \vec{j} = 3 \cos 45^\circ \vec{i} + 3 \sin 45^\circ \vec{j} = (1,5 \sqrt{2} \vec{i} + 1,5 \sqrt{2} \vec{j}) \text{ m}$$

$\vec{r}_2 \Rightarrow$ számítása nem szükséges, mert $\vec{F}_2$ hatásvonala átmegy az origón $\Rightarrow$ nem ad rá nyomatékot $\Rightarrow \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{0}$ lesz

$$\vec{r}_3 = -\frac{R}{2} \vec{i} = (-1,5 \vec{i}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_4 = R \sin \alpha \vec{i} - R \cos \alpha \vec{j} = 3 \sin 30^\circ \vec{i} - 3 \cos 30^\circ \vec{j} = (1,5 \vec{i} - 1,5 \sqrt{3} \vec{j}) \text{ m}$$

(számítása nem szükséges, lásd következő pontban)

• az erők origóra kifejtett nyomatékai:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (1,5 \sqrt{2} \vec{i} + 1,5 \sqrt{2} \vec{j}) \times (2,5 \vec{i} + 2,5 \sqrt{3} \vec{j}) = 1,5 \sqrt{2} \cdot 2,5 (\vec{i} \times \vec{j}) + 1,5 \sqrt{2} \cdot 2,5 \sqrt{3} (\vec{i} \times \vec{j}) + 1,5 \sqrt{2} \cdot 2,5 (\vec{j} \times \vec{i}) + 1,5 \sqrt{2} \cdot 2,5 \sqrt{3} (\vec{j} \times \vec{j}) = 3,75 \sqrt{6} \vec{k} - 3,75 \sqrt{2} \vec{k} = (3,88 \vec{k}) \text{ kNm}$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{0} \quad (\text{mivel } \vec{F}_2 \text{ hatásvonala átmegy az origón } \Rightarrow \vec{F}_2 \parallel \vec{r}_2)$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = (-1,5 \vec{i}) \times (-3 \vec{j}) = -1,5 \cdot (-3) \cdot \vec{i} \times \vec{j} = (4,5 \vec{k}) \text{ kNm}$$

$$\vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = (1,5 \vec{i} - 1,5 \sqrt{3} \vec{j}) \times (-2 \sqrt{3} \vec{i} - 2 \vec{j}) = 1,5 \cdot (-2) (\vec{j} \times \vec{i}) + 1,5 \cdot (-2) (\vec{i} \times \vec{j}) + (-1,5 \sqrt{3}) (-2 \sqrt{3}) (\vec{j} \times \vec{i}) + (-1,5 \sqrt{3}) (-2) (\vec{j} \times \vec{j}) = -3 \vec{k} - 3 \vec{k} + 9 \vec{k} = 3 \vec{k} \text{ kNm}$$

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^4 \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 3,88 \vec{k} + \vec{0} + 4,5 \vec{k} - 12 \vec{k} = (-3,62 \vec{k}) \text{ kNm}$$

vagy felhasználva, hogy: $\vec{r}_4 \perp \vec{F}_4$ és $|\vec{r}_4| = R$

$$\vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = (-R F_4) \vec{k} = (-3 \cdot 4) \vec{k} = (-12 \vec{k}) \text{ kNm}$$

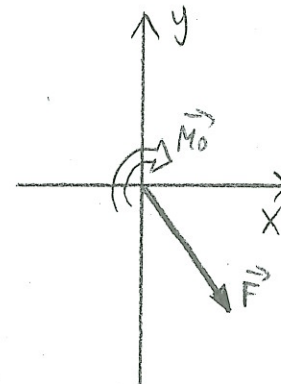
• az origóra számított nyomaték:

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^4 \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 3,88 \vec{k} + \vec{0} + 4,5 \vec{k} - 12 \vec{k} = (-3,62 \vec{k}) \text{ kNm}$$

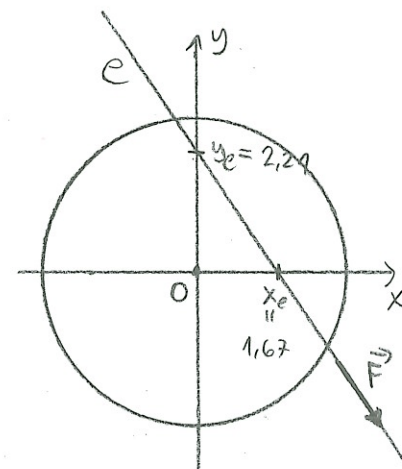
• eredő erő hatásvonala (hatásvonal metszéspontja x és y tengellyel):

$$x_e = \frac{M_{0z}}{F_y} = \frac{-3,62}{-2,17} = 1,67 \text{ m}$$

$$y_e = -\frac{M_{0z}}{F_x} = -\frac{-3,62}{1,634} = 2,21 \text{ m}$$

origóra redukált
vektorképlet:

eredő erő hatásvonala:



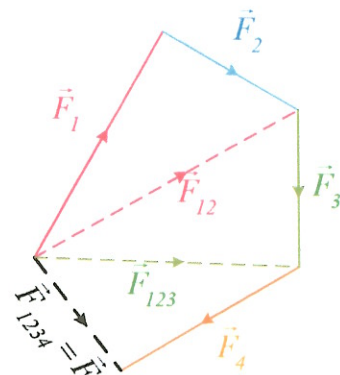
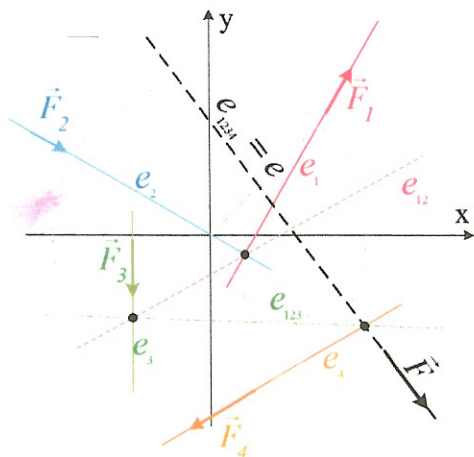
b) megoldás szerkesztéssel (részeredő sokszög szerkesztés)

szerkezetábra (SZÁ)

erőábra (EÁ)

1cm $\hat{=}$ 1m

1cm $\hat{=}$ 1kN



szerkesztés lépései:

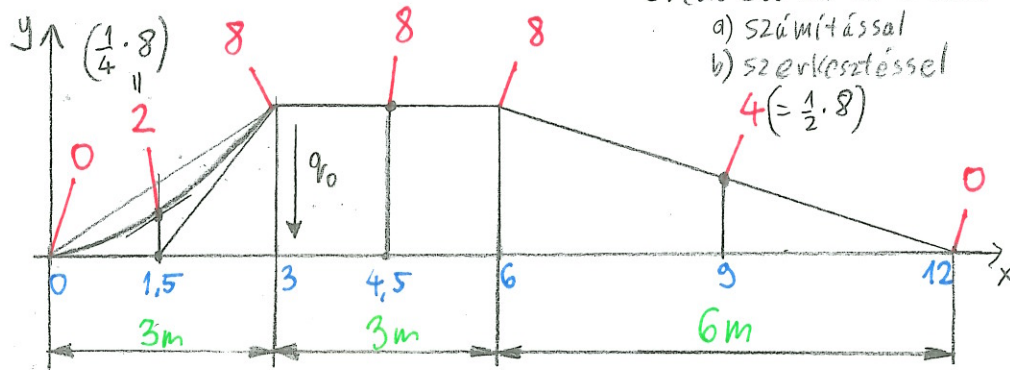
- 1) SZÁ: e_1, e_2, e_3, e_4 hatásvonalak felvétele
- 2) EÁ: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ erővektorok felvétele egymás után felfűzve
- 3) EÁ: $\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ erővektor berajzolása
- 4) SZÁ: e_{12} hatásvonal berajzolása:
 - $\vec{F}_{12}$ -vel párhuzamos
 - keresztül megy e_1 és e_2 metszéspontján
- 5) EÁ: $\vec{F}_{123} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_3$ erővektor berajzolása
- 6) SZÁ: e_{123} hatásvonal berajzolása:
 - $\vec{F}_{123}$ -mal párhuzamos
 - keresztül megy e_{12} és e_3 metszéspontján
- 7) EÁ: $\vec{F}_{1234} = \vec{F}_{123} + \vec{F}_4 (= \vec{F})$ erővektor berajzolása
- 8) SZÁ: $e_{1234} (= e)$ hatásvonal berajzolása:
 - $\vec{F}_{1234}$ -gyel párhuzamos
 - keresztül megy e_{123} és e_4 metszéspontján

• adatok: $q_0 = 8 \text{ kN/m}$

• feladat:

eredő erő hatásvonalát

- a) számítással
b) szerkesztéssel



a) az egyes részek eredői:

$$\vec{F}_{q_1} = \int_0^3 q_1(x) dx (-\vec{j}) = \frac{3}{6} (0 + 4 \cdot 2 + 8) (-\vec{j}) = (-8\vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_{q_2} = \int_3^6 q_2(x) dx (-\vec{j}) = \frac{3}{6} (8 + 4 \cdot 8 + 8) (-\vec{j}) = (-24\vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_{q_3} = \int_6^{12} q_3(x) dx (-\vec{j}) = \frac{6}{6} (8 + 4 \cdot 4 + 0) (-\vec{j}) = (-24\vec{j}) \text{ kN}$$

• az eredő erő:

$$\vec{F}_q = \vec{F}_{q_1} + \vec{F}_{q_2} + \vec{F}_{q_3} = -8\vec{j} - 24\vec{j} - 24\vec{j} = (-56\vec{j}) \text{ kN}$$

• az egyes részek által az origóra kifejtett nyomaték:

$$\vec{M}_{o_1} = \int_0^3 x q_1(x) dx (-\vec{k}) = \frac{3}{6} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 1.5 \cdot 2 + 3 \cdot 8) (-\vec{k}) = (-18\vec{k}) \text{ kNm}$$

$$\vec{M}_{o_2} = \int_3^6 x q_2(x) dx (-\vec{k}) = \frac{3}{6} (3 \cdot 8 + 4 \cdot 4.5 \cdot 8 + 6 \cdot 8) (-\vec{k}) = (-108\vec{k}) \text{ kNm}$$

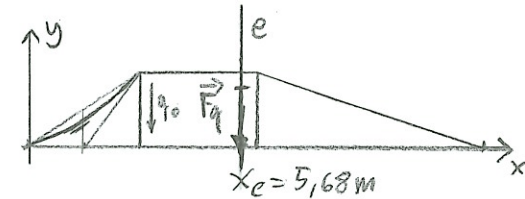
$$\vec{M}_{o_3} = \int_6^{12} x q_3(x) dx (-\vec{k}) = \frac{6}{6} (6 \cdot 8 + 4 \cdot 9 \cdot 4 + 12 \cdot 0) (-\vec{k}) = (-192\vec{k}) \text{ kNm}$$

• az origóra kifejtett nyomaték:

$$\vec{M}_o = \vec{M}_{o_1} + \vec{M}_{o_2} + \vec{M}_{o_3} = -18\vec{k} - 108\vec{k} - 192\vec{k} = (-318\vec{k}) \text{ kNm}$$

• az eredő erő hatásvonalát:

$$x_e = \frac{M_{o_2}}{F_{q_2}} = \frac{-318}{-56} = 5,68 \text{ m}$$



b) szerkesztéssel:

• az egyes részek eredő hatásvonalai számítással:

$$x_{e1} = \frac{M_{o_1}}{F_{q_1}} = \frac{-18}{-8} = 2,25 \text{ m} \quad | \quad x_{e2} = \frac{M_{o_2}}{F_{q_2}} = \frac{-108}{-24} = 4,5 \text{ m} \quad | \quad x_{e3} = \frac{M_{o_3}}{F_{q_3}} = \frac{-192}{-24} = 8 \text{ m}$$

• a fentiek alapján az eredő erő kötélsokszög szerkesztéssel:

szerkesztőábrán

$$1 \text{ cm} \hat{=} 2 \text{ m}$$

erőábrán

$$1 \text{ cm} \hat{=} 8 \text{ kN}$$

