

• súlypontszámítás

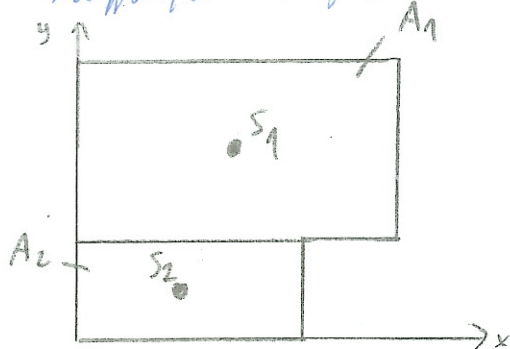
- súlypont: λ test térfogatán megadó súlyerőrendszere súlypontja

$$\vec{r}_{ic} = \vec{r}_s = \frac{\int_V \vec{r} dG}{G} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV} = \frac{\int_V \vec{r} dV}{V}$$

síkidom esetén: $\vec{r}_s = \frac{\int_A \vec{r} dA}{A}$ valamint: $\vec{r}_s = \frac{\int \vec{r} ds}{l}$

- részsúlypontok tétele:

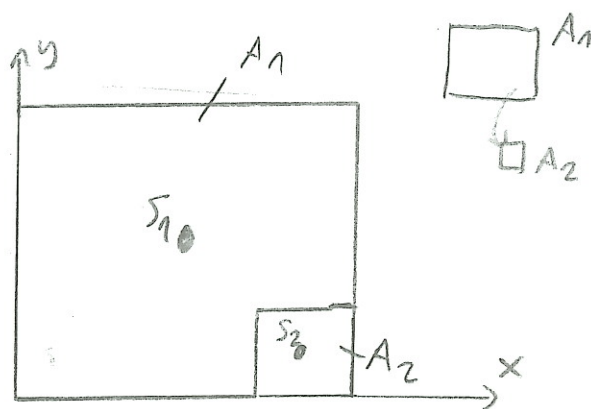
Egy alakzat súlypontját úgy is megkaphatjuk, hogy az alakzatot n részre osztjuk, minden részen a tömegét a súlypontjára koncentráltuk és az így kapott n tömegpont súlypontját számítjuk



$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^2 x_{s_i} A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^2 y_{s_i} A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i}$$

- kiegészítés tétele:

Egy síkidom súlypontját úgy is megkaphatjuk, ha a síkidomot kiegészítjük egy másik síkidommal, λ teljes (kiegészített) és a kiegészítő síkidom területeivel és súlypontjaikkal ismeretelen az eredeti síkidom súlypontja:



$$x_s = \frac{x_{s_1} \cdot A_1 - x_{s_2} \cdot A_2}{A_1 - A_2} \quad y_s = \frac{y_{s_1} \cdot A_1 - y_{s_2} \cdot A_2}{A_1 - A_2}$$

$$\vec{r}_s = \frac{\int_A \vec{r} dA}{A} = \frac{\sum_{i=1}^2 \vec{r}_{s_i} \cdot A_i}{A} \quad \begin{matrix} \nearrow \vec{r}_1 \\ \searrow \vec{r}_2 \end{matrix}$$

Fentebb láthattuk súlypontszámításra ismét súlypontok részletezésére is lehet használni

1) adott alakzatot ismét súlypontok részletezésére lehet használni

2) adott alakzatot úgy egészítjük ki, hogy az ismét súlypontok részletezésére alkalmas legyen

8.5.

adott:

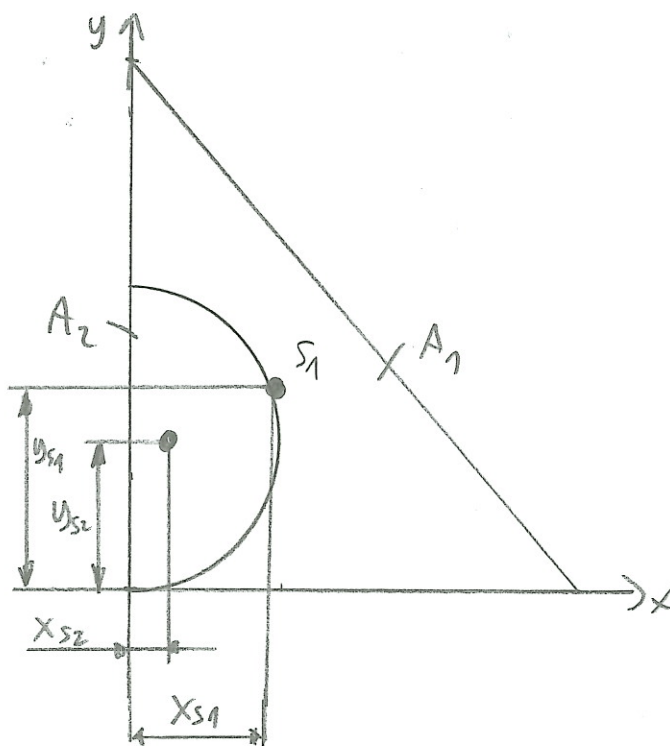
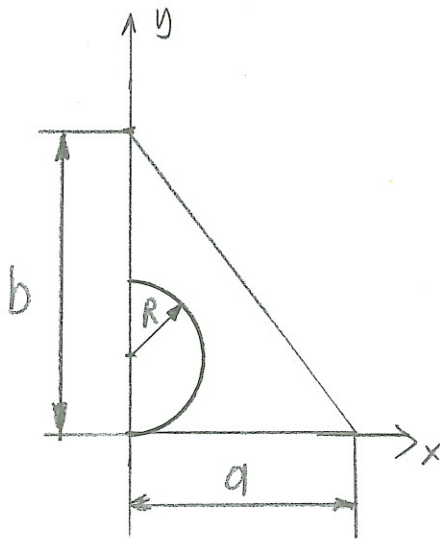
$$a = 30 \text{ cm}$$

$$b = 40 \text{ cm}$$

$$R = 10 \text{ cm}$$

feladat:

súlypont



• a háromszög területi:

$$A_1 = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{R^2 \pi}{2} = 157,08 \text{ cm}^2$$

• a háromszög súlypontjainak koordinátái:

$$x_{S1} = \frac{1}{3} a = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10 \text{ cm}$$

$$y_{S1} = \frac{1}{3} b = \frac{1}{3} \cdot 40 = 13,33 \text{ cm}$$

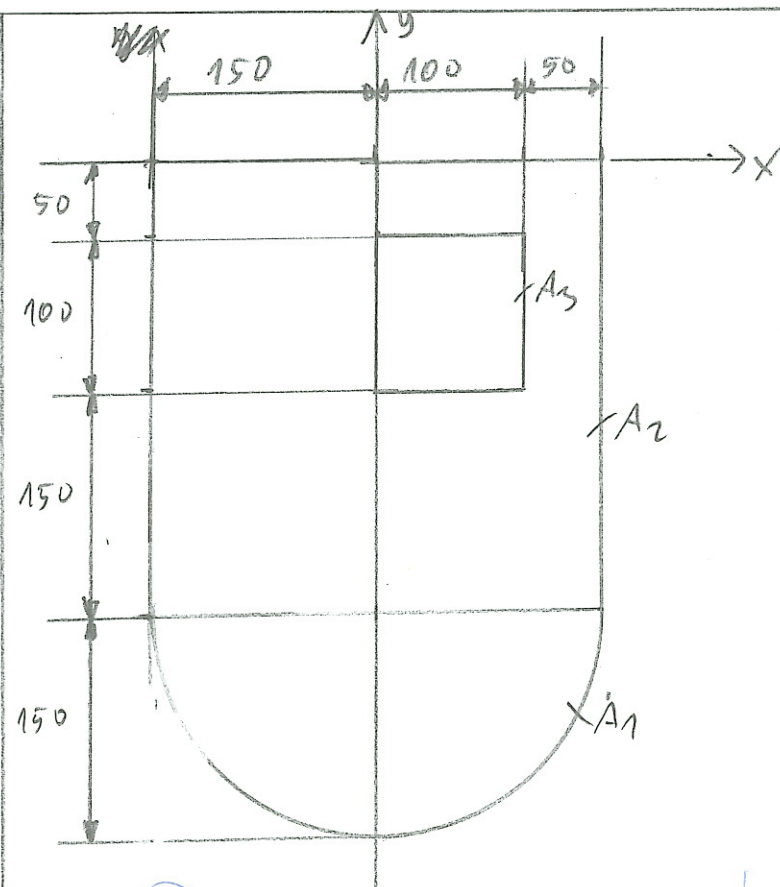
$$x_{S2} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 10}{3\pi} = 4,244 \text{ cm}$$

$$y_{S2} = R = 10 \text{ cm}$$

• a síkidom súlypontja:

$$x_S = \frac{x_{S1} A_1 - x_{S2} A_2}{A_1 - A_2} = \frac{10 \cdot 600 - 4,244 \cdot 157,08}{600 - 157,08} = \underline{\underline{12,04 \text{ cm}}}$$

$$y_S = \frac{y_{S1} A_1 - y_{S2} A_2}{A_1 - A_2} = \frac{13,33 \cdot 600 - 10 \cdot 157,08}{600 - 157,08} = \underline{\underline{14,92 \text{ cm}}}$$



①

$$A_1 = \frac{R^2 \pi}{2} = 35342,9 \text{ mm}^2$$

$$x_{s1} = 0$$

$$y_{s1} = -300 - \frac{4 \cdot 150}{3\pi} = -363,66 \text{ mm}$$

②

$$A_2 = 300^2 = 90000 \text{ mm}^2$$

$$x_{s2} = 0$$

$$y_{s2} = -150 \text{ mm}$$

③

$$A_3 = 100^2 = 10000 \text{ mm}^2$$

$$x_{s3} = 50 \text{ mm}$$

$$y_{s3} = -50 - 30 = -100 \text{ mm}$$

$$x_s = \frac{x_{s1}A_1 + x_{s2}A_2 - x_{s3}A_3}{A_1 + A_2 - A_3} =$$

$$= \frac{0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 - 50 \cdot 10000}{35342,9 + 90000 - 10000} =$$

$$= -4,335 \text{ mm}$$

$$y_s = \frac{y_{s1}A_1 + y_{s2}A_2 - y_{s3}A_3}{A_1 + A_2 - A_3} =$$

$$= \frac{-363,66 \cdot 35342,9 + (-150) \cdot 90000 - (-100) \cdot (10000)}{35342,9 + 90000 - 10000} =$$

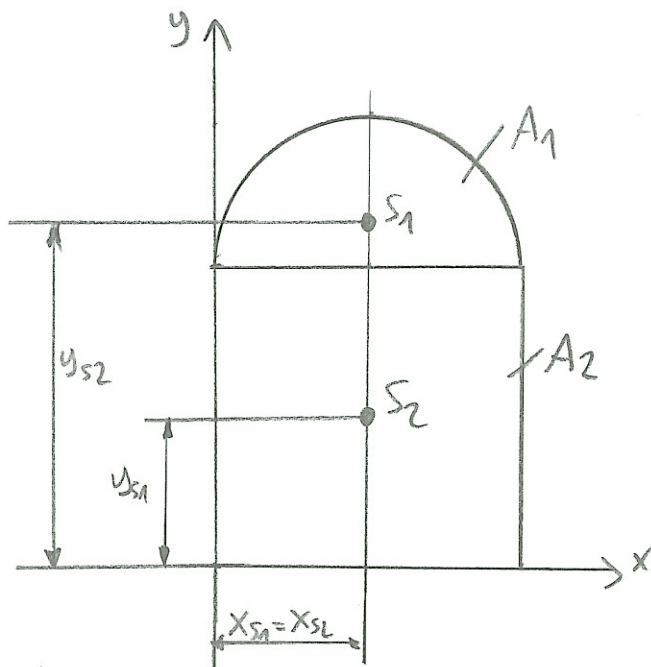
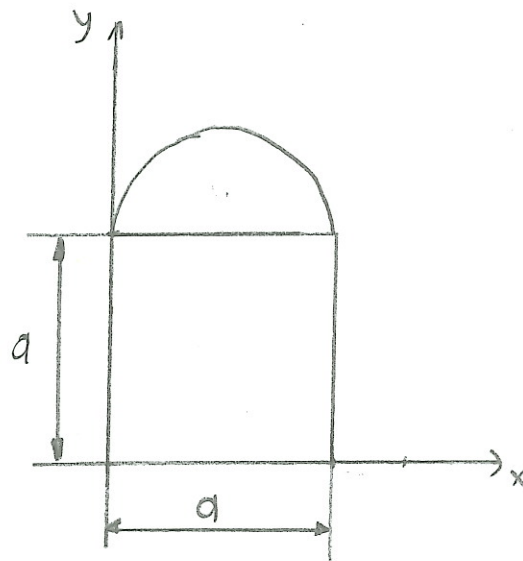
$$= -219,8 \text{ mm}$$

8.3.

adott: $a = 10 \text{ cm}$

$$y_{fik} = \frac{4R}{3\pi}$$

feladat: súlypont



• a részalakzatok területei

$$A_1 = \frac{R^2\pi}{2} = \frac{a^2\pi}{8} = \frac{10^2\pi}{8} = 39,27 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = a^2 = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

• a részalakzatok súlypontjainak koordinátái:

$$X_{s1} = X_{s2} = \frac{a}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$y_{s1} = a + \frac{4R}{3\pi} = a + \frac{2a}{3\pi} = 12,122 \text{ cm}$$

$$y_{s2} = \frac{a}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

*

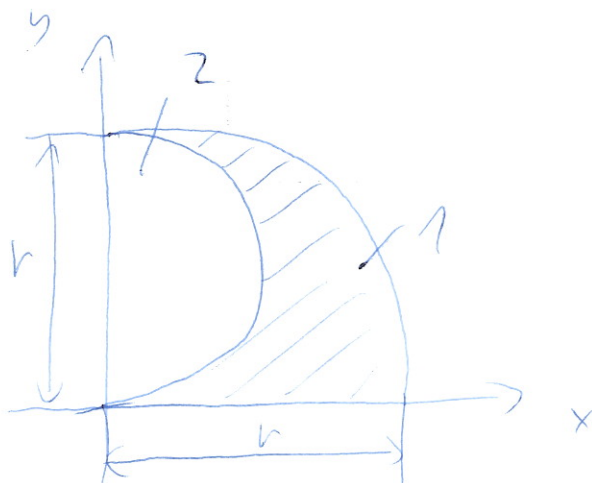
• a síkidom súlypontjának koordinátái

$$X_s = \frac{X_{s1}A_1 + X_{s2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{5 \cdot 39,27 + 5 \cdot 100}{39,27 + 100} = 5 \text{ cm}$$

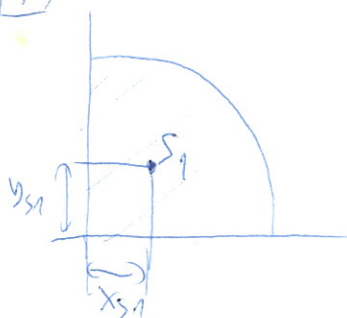
$$y_s = \frac{y_{s1}A_1 + y_{s2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{12,122 \cdot 39,27 + 5 \cdot 100}{39,27 + 100} = 7,01 \text{ cm}$$

$$* \vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_{si} \cdot A_i}{A} \quad / \cdot \vec{i} / \cdot \vec{j}$$

$$r = 10 \text{ cm}$$



1

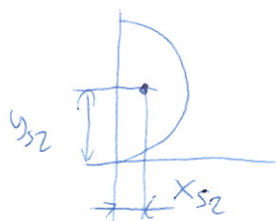


$$A_1 = \frac{r^2 \pi}{4} = 78,54 \text{ cm}^2$$

$$x_{s1} = \frac{4r\pi}{3\pi} = 4,24 \text{ cm}$$

$$y_{s1} = \frac{4r}{3\pi} = 4,24 \text{ cm}$$

2



$$A_2 = \frac{(\frac{r}{2})^2 \pi}{4} = 39,27 \text{ cm}^2$$

$$x_{s2} = \frac{4(\frac{r}{2})}{3\pi} = 2,12 \text{ cm}$$

$$y_{s2} = \frac{r}{2} = 5 \text{ cm}$$

a sikielom nielpontja

$$x_s = \frac{x_{s1} A_1 - x_{s2} A_2}{A_1 - A_2} = \frac{4,24 \cdot 78,54 - 2,12 \cdot 39,27}{78,54 - 39,27} = \underline{\underline{6,36 \text{ cm}}}$$

$$y_s = \frac{y_{s1} A_1 - y_{s2} A_2}{A_1 - A_2} = \frac{4,24 \cdot 78,54 - 5 \cdot 39,27}{78,54 - 39,27} = \underline{\underline{3,48 \text{ cm}}}$$

8.4.

adott

$$a = 80 \text{ mm}$$

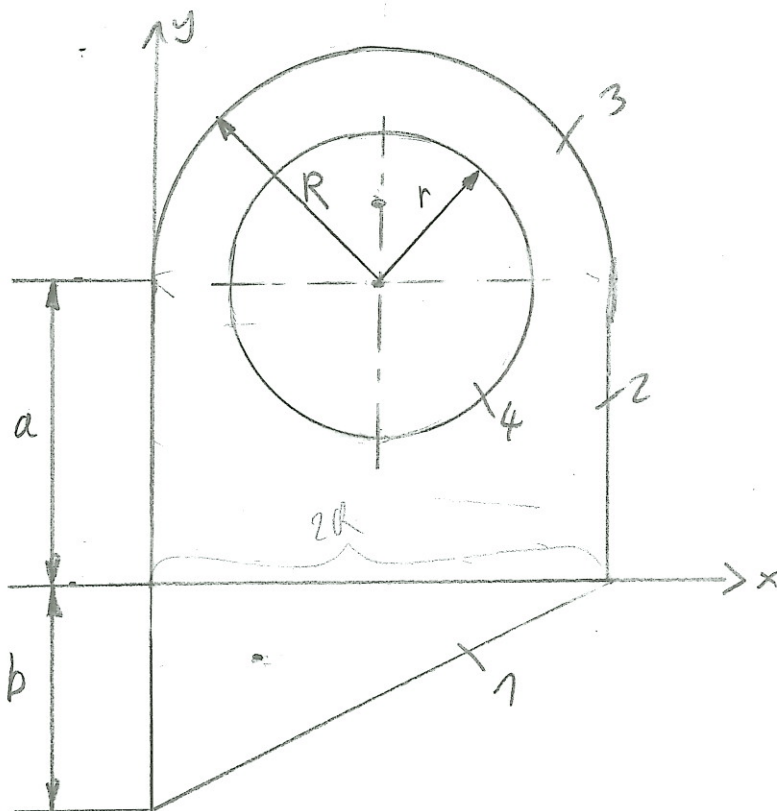
$$b = 60 \text{ mm}$$

$$R = 60 \text{ mm}$$

$$r = 40 \text{ mm}$$

$$y_{\text{fic}} = \frac{4R}{3\pi}$$

Feladat: súlypont



• a részalakzatok területei:

$$A_1 = \frac{2R \cdot b}{2} = 60 \cdot 60 = 3600 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 2R \cdot a = 2 \cdot 60 \cdot 80 = 9600 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = \frac{R^2 \pi}{2} = \frac{60^2 \pi}{2} = 5654,9 \text{ mm}^2$$

$$A_4 = r^2 \pi = 40^2 \pi = 5026,5 \text{ mm}^2$$

• a részalakzatok súlypontjainak koordinátái:

$$x_{s1} = \frac{1}{3} \cdot 2R = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 60 = 40 \text{ mm} ; y_{s1} = -\frac{1}{3} b = -\frac{1}{3} \cdot 60 = -20 \text{ mm}$$

$$x_{s2} = R = 60 \text{ mm} ; y_{s2} = \frac{a}{2} = 40 \text{ mm}$$

$$x_{s3} = R = 60 \text{ mm}$$

$$y_{s3} = a + \frac{4R}{3\pi} = 80 + \frac{4 \cdot 60}{3\pi} = 105,47 \text{ mm}$$

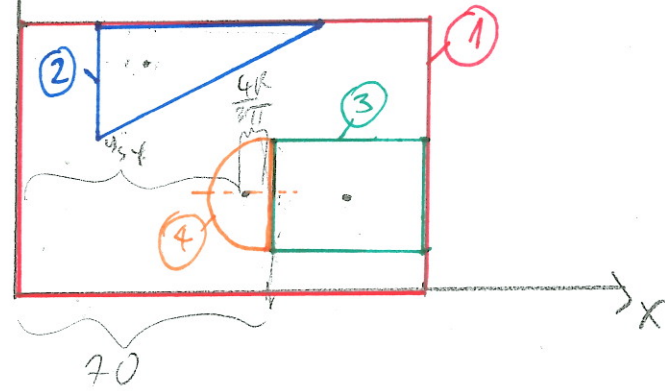
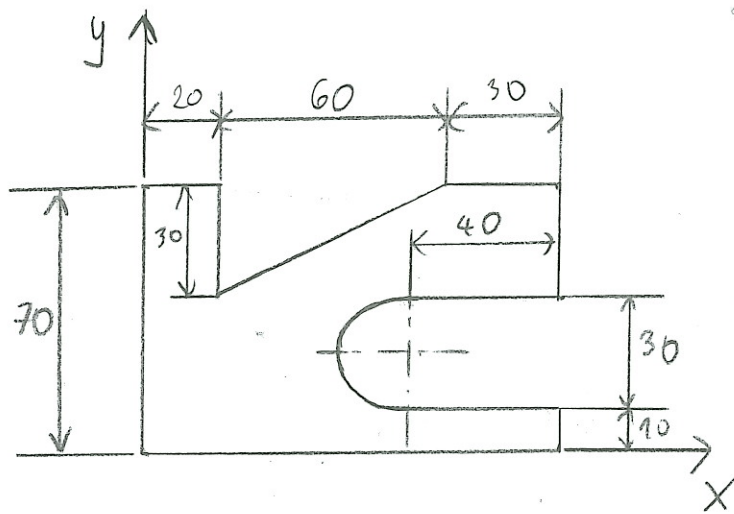
$$x_{s4} = R = 60 \text{ mm}$$

$$y_{s4} = a = 80 \text{ mm}$$

• a szökőm súlypontja:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^3 x_{si} \cdot A_i - x_4 A_4}{\sum_{i=1}^3 A_i - A_4} = \frac{40 \cdot 3600 + 60 \cdot 9600 + 60 \cdot 5654,9 - 60 \cdot 5026,5}{3600 + 9600 + 5654,9 - 5026,5} = 54,8 \text{ mm}$$

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^3 y_{si} A_i - y_4 A_4}{\sum_{i=1}^3 A_i - A_4} = \frac{-20 \cdot 3600 + 40 \cdot 9600 + 105,47 \cdot 5654,9 - 80 \cdot 5026,5}{3600 + 9600 + 5654,9 - 5026,5} = 36,6 \text{ mm}$$



$$\textcircled{1} A_1 = 110 \cdot 70 = 7700 \text{ mm}^2$$

$$x_{s1} = 55 \text{ mm}$$

$$y_{s1} = 35 \text{ mm}$$

$$\textcircled{2} A_2 = \frac{60 \cdot 30}{2} = 900 \text{ mm}^2$$

$$x_{s2} = 20 + \frac{1}{3} \cdot 60 = 40 \text{ mm}$$

$$y_{s2} = 70 - \frac{1}{3} \cdot 30 = 60 \text{ mm}$$

$$\textcircled{3} A_3 = 30 \cdot 40 = 1200 \text{ mm}^2$$

$$x_{s3} = 70 + \frac{40}{2} = 90 \text{ mm}$$

$$y_{s3} = 10 + \frac{30}{2} = 25 \text{ mm}$$

$$\textcircled{4} A_4 = \frac{15^2 \pi}{2} = 353,43 \text{ mm}^2$$

$$x_{s4} = 70 - \frac{4 \cdot 15}{3\pi} = 63,63 \text{ mm}$$

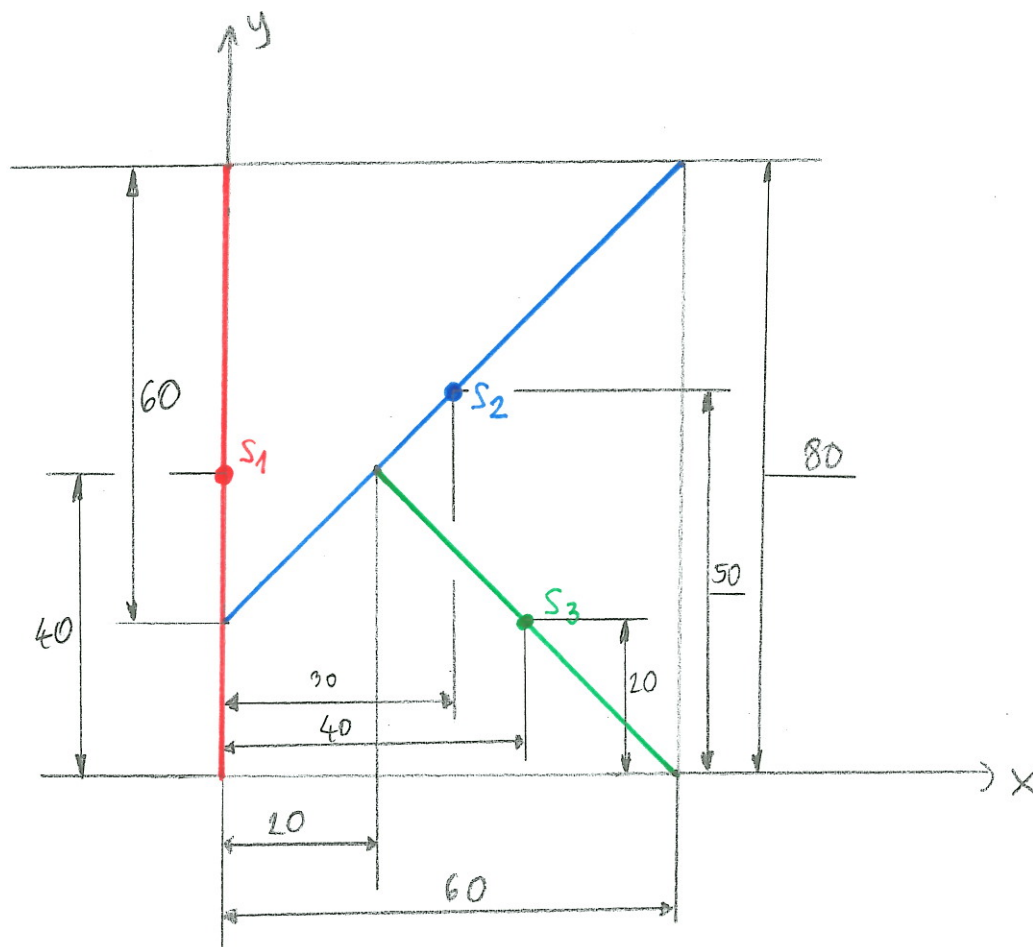
$$y_{s4} = 10 + \frac{30}{2} = 25 \text{ mm}$$

$$x_s = \frac{x_{s1} \cdot A_1 - x_{s2} \cdot A_2 - x_{s3} \cdot A_3 - x_{s4} \cdot A_4}{A_1 - A_2 - A_3 - A_4} =$$

$$= \frac{55 \cdot 7700 - 40 \cdot 900 - 90 \cdot 1200 - 63,63 \cdot 353,43}{7700 - 900 - 1200 - 353,43} = \underline{\underline{49 \text{ mm}}}$$

$$y_s = \frac{y_{s1} \cdot A_1 - y_{s2} \cdot A_2 - y_{s3} \cdot A_3 - y_{s4} \cdot A_4}{A_1 - A_2 - A_3 - A_4} =$$

$$= \frac{35 \cdot 7700 - 60 \cdot 900 - 25 \cdot 1200 - 25 \cdot 353,43}{7700 - 900 - 1200 - 353,43} = \underline{\underline{33,67 \text{ mm}}}$$



• az egyes vonalak hossza:

$$l_1 = 80 \text{ mm}$$

$$l_2 = \sqrt{60^2 + 60^2} = 84,85 \text{ mm}$$

$$l_3 = \sqrt{40^2 + 40^2} = 56,57 \text{ mm}$$

• az egyes vonalak súlypontjai:

$$x_{s1} = 0 \text{ mm} \quad y_{s1} = 40 \text{ mm}$$

$$x_{s2} = 30 \text{ mm} \quad y_{s2} = 50 \text{ mm}$$

$$x_{s3} = 40 \text{ mm} \quad y_{s3} = 20 \text{ mm}$$

• a súlypont koordinátái:

$$x_s = \frac{x_{s1}l_1 + x_{s2}l_2 + x_{s3}l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{0 \cdot 80 + 30 \cdot 84,85 + 40 \cdot 56,57}{80 + 84,85 + 56,57} = 21,72 \text{ mm}$$

$$y_s = \frac{y_{s1}l_1 + y_{s2}l_2 + y_{s3}l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{40 \cdot 80 + 50 \cdot 84,85 + 20 \cdot 56,57}{80 + 84,85 + 56,57} = 38,72 \text{ mm}$$