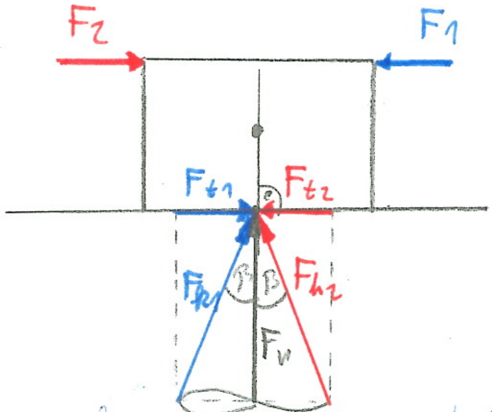
C702
B107

14. gyak

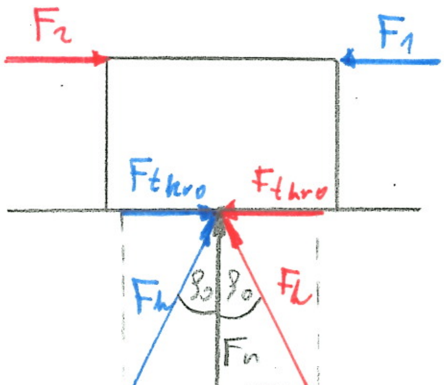
Érdes testek

- teljesen sima felület => súrlódóerőt fejtene ki a test, az elmozdul
- valóságban -> a felületek mindig érdesek => erőkifejtéskor tapadási súrl. erő jelenik meg, mely ellentétes irányú és azonos nagyságú a kifejtett erővel
  => a támasztóerőnek nem csak normális, hanem az érintkező testek érintősíkjába eső erőkomponense is lesz.



β = az F_h támasztóerő felületi normálissal bezárt szöge
(ha nem lenne súrlódás $\beta = 0$ lenne)

- F_{tkr0}-t elérve a test megmozdul:
  ↳ kritikus tangenciális erő



ρ_0: a nyugalmi súrlódási kúp félnyílásszöge

$\operatorname{tg}\rho_0 = \mu_0$ = nyugalmi (tapadási) súrlódási tényező

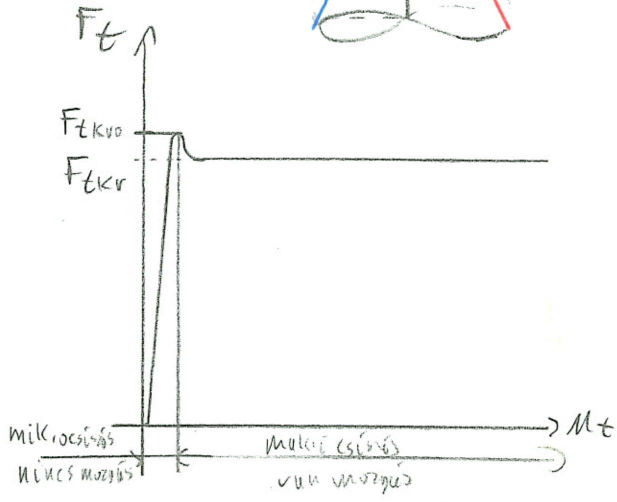
tartós nyugalom feltétele:

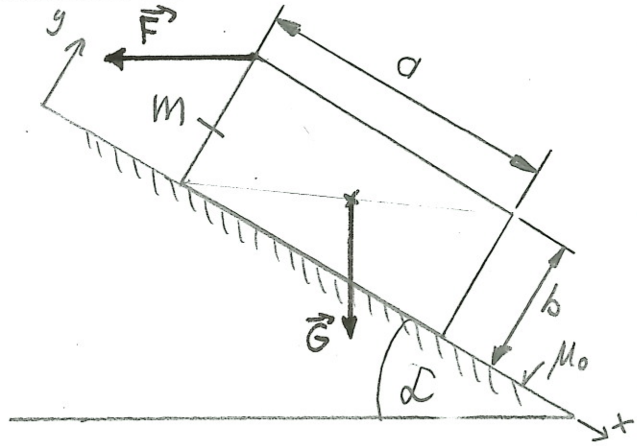
$$\beta \leq \rho_0$$

$$\operatorname{tg}\beta \leq \underbrace{\operatorname{tg}\rho_0}_{\mu_0}$$

$$\frac{|F_t|}{F_n} \leq \mu_0 \quad \Rightarrow \mu_{0\,min} = \frac{|F_t|}{F_n}$$

$$\boxed{|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n} \quad \Rightarrow F_{t\,max} = \mu_0 F_n$$





• adott:

$a = 1\,m$

$b = 0{,}5\,m$

$\mu_0 = 0{,}2 = \frac{1}{5}$

$m = 100\,kg$

$g = 10\,\frac{m}{s^2}$

$\alpha = 30°$

• Feladat:

$\vec{F}_{max} = ?$

$\vec{F}_{min} = ?$

hogy a hasáb egyensúlyban maradjon

a) szerkesztéssel

b) számítással

• Az $\vec{F}$ erő nagyságának függvényében a hasáb:
- nyugalomban van ⇒ STATIKA
- felfele mozdul el } ⇒ MOZGÁSTAN
- lefele mozdul el }

• 1) eset: $\vec{F}_{max}$ maximális húzóerő hatására a hasáb még éppen nem mozdul el felfelé ⇒ $\vec{F}_k$ támasztóerő a felfele mozgást akadályozza meg ⇒ F_t lefele mutat

• 2) eset: $\vec{F}_{min}$ minimális húzóerő hatására a hasáb még éppen nem mozdul el lefele ⇒ $\vec{F}_k$ támasztóerő a lefele mozgást akadályozza meg ⇒ F_t felfele mutat

• $\vec{F}_k$ mindkét esetben a nyugvásbeli súrlódási kúp palástján helyezkedik el

• Az egyensúly feltétele:
- $\vec{F} + \vec{G} + \vec{F}_k = \vec{0}$
- az erők 1 pontban metszik egymást

---

a) szerkesztés

szerkezetábra

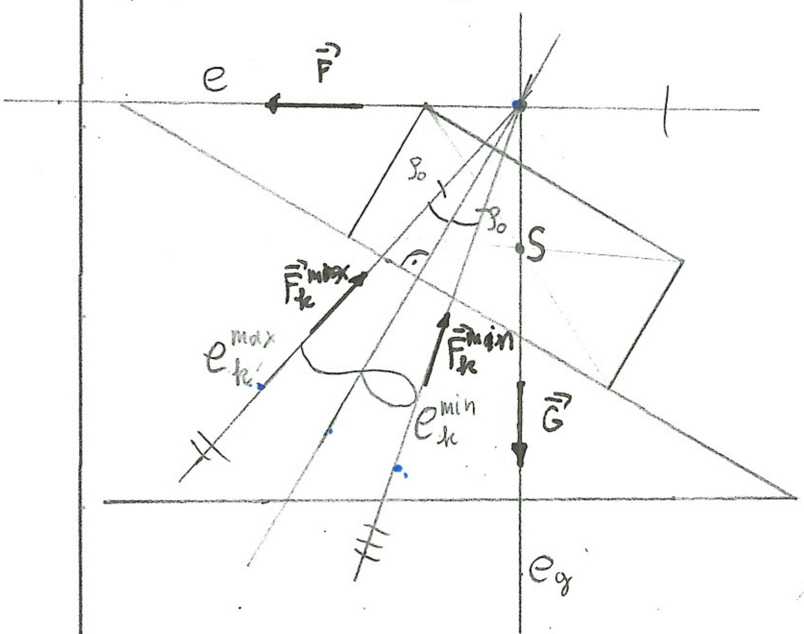
1cm ≙ 0,25m

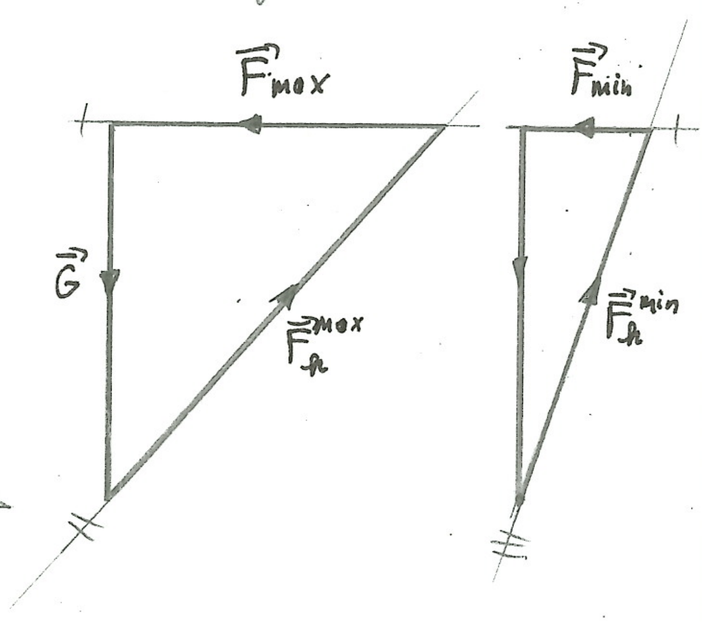
$\mu_0 = tg\,\rho_0 \Rightarrow \rho_0 = arctg\,\mu_0 = 11{,}31°$

erőábra

1cm ≙ 200N

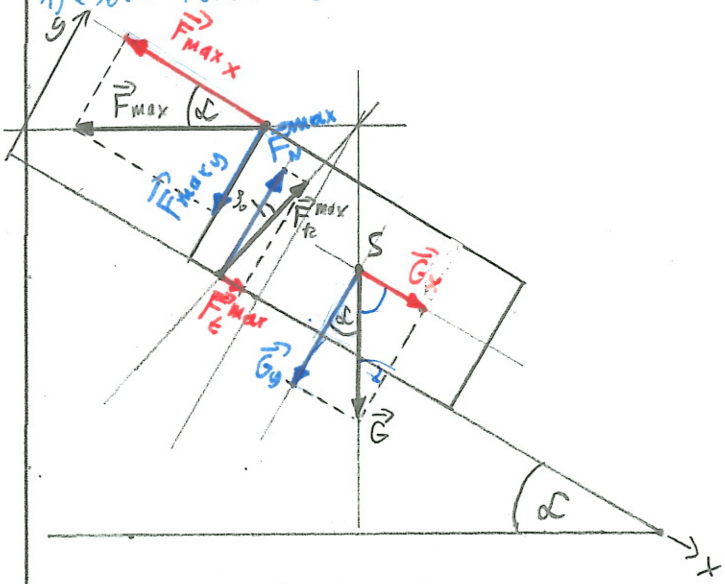
$G = mg = 100 \cdot 10 = 1000\,N\ (\downarrow)$





b) számítás

1) eset: Felfele elmozdulás határesete



• az egyes erővektorok:

$$\vec{F}_{max} = -F_{max}\cos\alpha\,\vec{i} - F_{max}\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{G} = mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_k^{max} = F_t^{max}\,\vec{i} + F_n^{max}\,\vec{j} \overset{\text{Coulomb törvény}}{=} \mu_0 F_n^{max}\,\vec{i} + F_n^{max}\,\vec{j}$$

• egyensúly feltétele:

$$\vec{F}_{max} + \vec{G} + \vec{F}_k^{max} = \vec{0}$$

• behelyettesítve az egyensúlyi egyenletbe a skalár egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} &1)\; -F_{max}\cos\alpha + mg\sin\alpha + \mu_0 F_n^{max} = 0 \\ &2)\; -F_{max}\sin\alpha - mg\cos\alpha + F_n^{max} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$2) \rightarrow F_n^{max} = F_{max}\sin\alpha + mg\cos\alpha$

$2) \rightarrow 1)$:

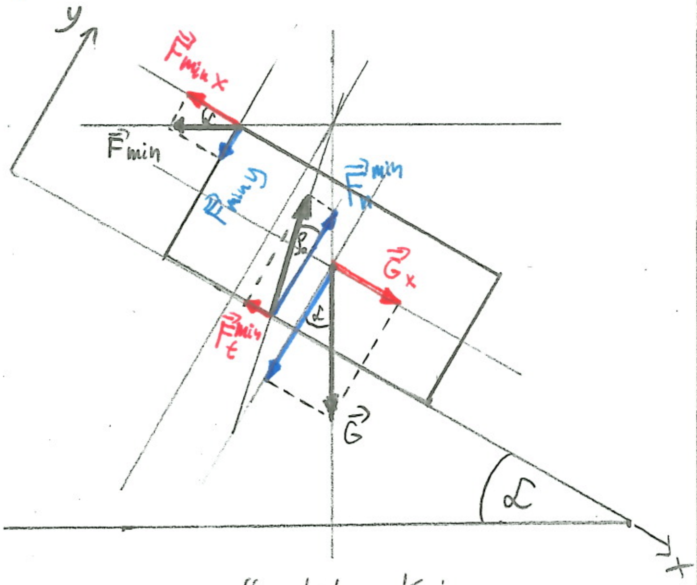
$$-F_{max}\cos\alpha + mg\sin\alpha + \mu_0\left(F_{max}\sin\alpha + mg\cos\alpha\right) = 0$$

$$F_{max}\left(\mu_0\sin\alpha - \cos\alpha\right) = -mg\left(\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha\right)$$

$$F_{max} = \frac{-mg(\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha)}{\mu_0\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{-100\cdot 10\,(\sin 30^\circ + 0{,}2\cos 30^\circ)}{0{,}2\cdot\sin 30^\circ - \cos 30^\circ} = 878{,}83\,N \;(\nwarrow)$$

$$\vec{F}_{max} = \left(-878{,}83\cos 30^\circ\,\vec{i} - 878{,}83\sin 30^\circ\,\vec{j}\right) = \left(-761{,}1\,\vec{i} - 439{,}4\,\vec{j}\right) N$$

2) eset: lefele elmozdulás határesete



• az egyes erővektorok:

$$\vec{F}_{min} = -F_{min}\cos\alpha\,\vec{i} - F_{min}\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{G} = mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_k^{min} = -F_t^{min}\,\vec{i} + F_n^{min}\,\vec{j} \overset{\text{Coulomb törvény}}{=} -\mu_0 F_n^{min}\,\vec{i} + F_n^{min}\,\vec{j}$$

• egyensúly feltétele:

$$\vec{F}_{min} + \vec{G} + \vec{F}_k^{min} = \vec{0}$$

• behelyettesítve az egyensúlyi egyenletbe a skalár egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} &1)\; -F_{min}\cos\alpha + mg\sin\alpha - \mu_0 F_n^{min} = 0 \\ &2)\; -F_{min}\sin\alpha - mg\cos\alpha + F_n^{min} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$2) \rightarrow F_n^{min} = F_{min}\sin\alpha + mg\cos\alpha$

$2) \rightarrow 1)$

$$-F_{min}\cos\alpha + mg\sin\alpha - \mu_0\left(F_{min}\sin\alpha + mg\cos\alpha\right) = 0$$

$$F_{min}\left(-\mu_0\sin\alpha - \cos\alpha\right) = +mg\left(-\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha\right)$$

$$F_{min} = \frac{+mg(-\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha)}{-\mu_0\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{+100\cdot 10\,(-\sin 30^\circ + 0{,}2\cos 30^\circ)}{-0{,}2\sin 30^\circ - \cos 30^\circ} = 338{,}29\,N \;(\nwarrow)$$

$$\vec{F}_{min} = \left(-338{,}29\cos 30^\circ\,\vec{i} - 338{,}29\sin 30^\circ\,\vec{j}\right) = \left(-292{,}97\,\vec{i} - 169{,}15\,\vec{j}\right) N$$

• adott:

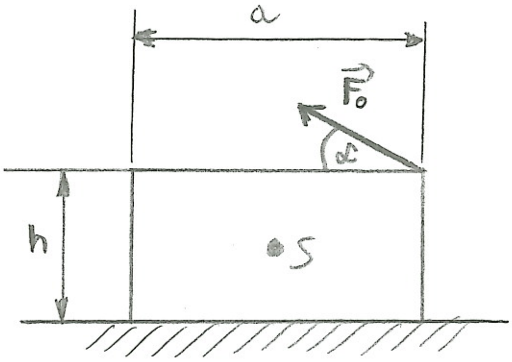
$\alpha = 30°$

$m = 200\,kg$

$\mu_0 = 0{,}2 \ (= \frac{1}{5})$

$a = 1\,m$

$h = 0{,}6\,m$



• Feladat:

$\vec{F} = ?$, hogy a hasáb nyugalomban maradjon

a) szerkesztéssel

b) számítással

---

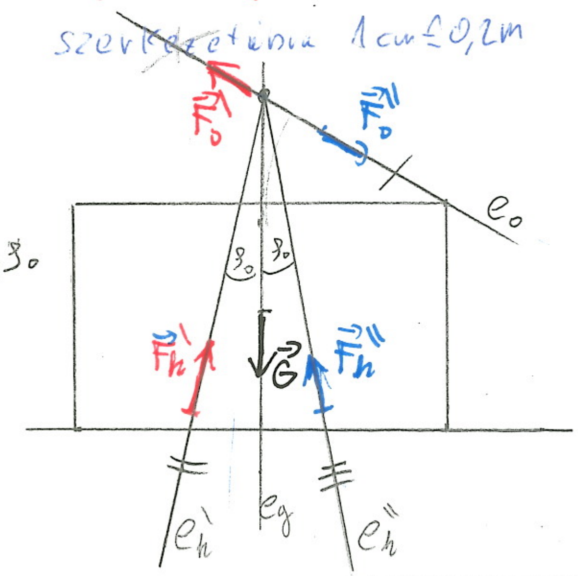
a) szerkesztéssel:

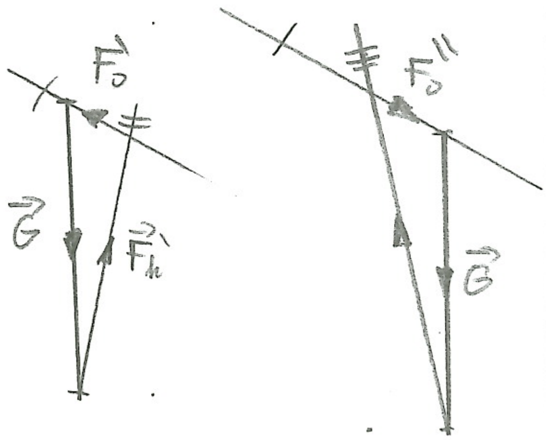
szerkezetábra $1\,cm \hat{=} 0{,}2\,m$

$G = mg = 2000\,N$ (↓)

erőábra $1\,cm \hat{=} 500\,N$

$\mu_0 = tg\,\rho_0$





---

b) számítással:

1) balra elmozdulás határesete:

– egyensúlyi egyenlet:

$$\vec{G} + \vec{F}_h' + \vec{F}_0' = \vec{0}$$

– az egyes erővektorok:

$$\vec{G} = -G\vec{j}$$

$$\vec{F}_h' = F_t'\vec{i} + F_n'\vec{j} = \mu_0 F_n'\vec{i} + F_n'\vec{j}$$

$$\vec{F}_0' = -F_0'\cos\alpha\,\vec{i} + F_0'\sin\alpha\,\vec{j}$$

– behelyettesítve, majd $/\cdot\vec{i}, \cdot\vec{j}$ a skalár egyenletek:

$$1)\quad \mu_0 F_n' - F_0'\cos\alpha = 0$$

$$2)\quad -G + F_n' + F_0'\sin\alpha = 0$$

2) $\Rightarrow F_n' = G - F_0\sin\alpha$

1) $\Rightarrow \mu_0(G - F_0'\sin\alpha) - F_0'\cos\alpha = 0$

$$\mu_0 G - \mu_0 F_0'\sin\alpha - F_0'\cos\alpha = 0$$

$$F_0'(-\mu_0\sin\alpha - \cos\alpha) = -\mu_0 G$$

$$F_0' = \frac{-\mu_0 G}{-\mu_0\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{-0{,}2\cdot 2000}{-0{,}2\cdot\sin 30° - \cos 30°} = 414{,}1\,N \ (↖)$$

2) jobbra elmozdulás határesete:

- egyensúlyi egyenlet:

$$\vec{G} + \vec{F}_k'' + \vec{F}_0'' = \vec{0}$$

- az egyes erővektorok:

$$\vec{G} = -G\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_k'' = -F_t''\,\vec{i} + F_n''\,\vec{j} = -\mu_0 F_n''\,\vec{i} + F_n''\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_0'' = F_0''\cos\alpha\,\vec{i} - F_0''\sin\alpha\,\vec{j}$$

- behelyettesítve, majd $/\cdot\vec{i}$ $/\cdot\vec{j}$ a skalár egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} 1)\quad & -\mu_0 F_n'' + F_0''\cos\alpha = 0 \\ 2)\quad & -G + F_n'' - F_0''\sin\alpha = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$2) \Rightarrow F_n'' = F_0''\sin\alpha + G$$

$$\downarrow$$

$$1) \Rightarrow -\mu_0\left(F_0''\sin\alpha + G\right) + F_0''\cos\alpha = 0$$

$$-\mu_0 F_0''\sin\alpha - \mu_0 G + F_0''\cos\alpha = 0$$

$$F_0''\left(-\mu_0\sin\alpha + \cos\alpha\right) = +\mu_0 G$$

$$F_0'' = \frac{\mu_0 G}{-\mu_0\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{0{,}2\cdot 2000}{-0{,}2\sin 30^\circ + \cos 30^\circ} = 522{,}18\,N\,(\searrow)$$

végeredmények:

$$\vec{F}_0' = -F_0'\cos\alpha\,\vec{i} + F_0'\sin\alpha\,\vec{j} = -414{,}1\cdot\cos 30^\circ\,\vec{i} + 414{,}1\cdot\sin 30^\circ\,\vec{j} =$$
$$= \left(-358{,}62\,\vec{i} + 207{,}05\,\vec{j}\right)N$$

$$\vec{F}_0'' = F_0''\cos\alpha\,\vec{i} - F_0''\sin\alpha\,\vec{j} = 522{,}18\cos 30^\circ\,\vec{i} - 522{,}18\sin 30^\circ\,\vec{j} =$$
$$= \left(452{,}22\,\vec{i} - 261{,}09\,\vec{j}\right)N$$