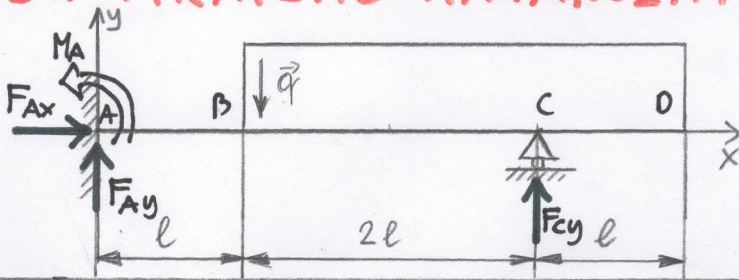


STATIKAILAG HATÁROZATLAN SZERKEZET



• adott:

$$q = 2 \text{ kN/m}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

$$I_z, E = \text{áll.}$$

• Feladat:

- támasztóerők

- igénybevételei
- ábrák

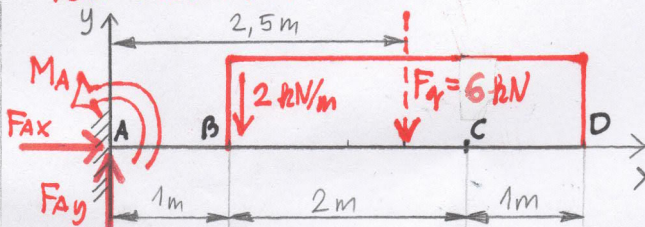
• ismeretlen támasztóerők: $F_{Ax}, F_{Ay}, M_A, F_{Cy} \Rightarrow 4 \text{ db}$

• statikai egyensúlyi egyenletek: $F_x = 0, F_y = 0, M_a = 0 \Rightarrow 3 \text{ db}$

A tartó statikailag egyszeresen határozatlan

A tartó statikailag határozható tételének egyik lehetősége a görbös támasz elhagyása

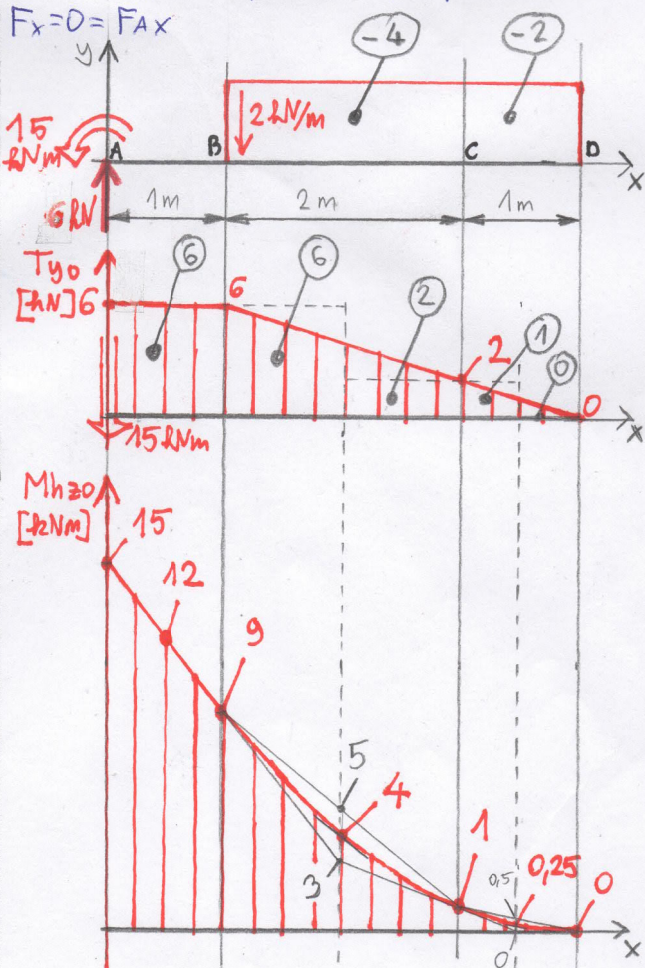
• eredeti terhelés a határozottá tett tartón



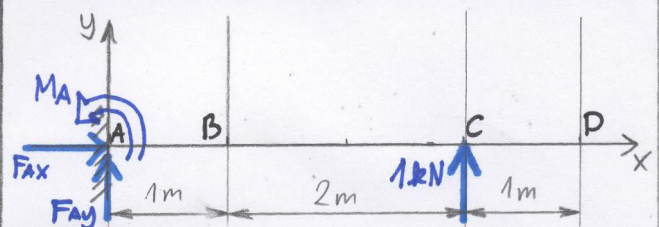
$$F_y = 0 = F_{Ay} - F_q \Rightarrow F_{Ay} = F_q = 6 \text{ kN} \quad (1)$$

$$M_a = 0 = M_A - 2,5 F_q \Rightarrow M_A = 2,5 F_q = 15 \text{ kNm} \quad (2)$$

$$F_x = 0 = F_{Ax}$$



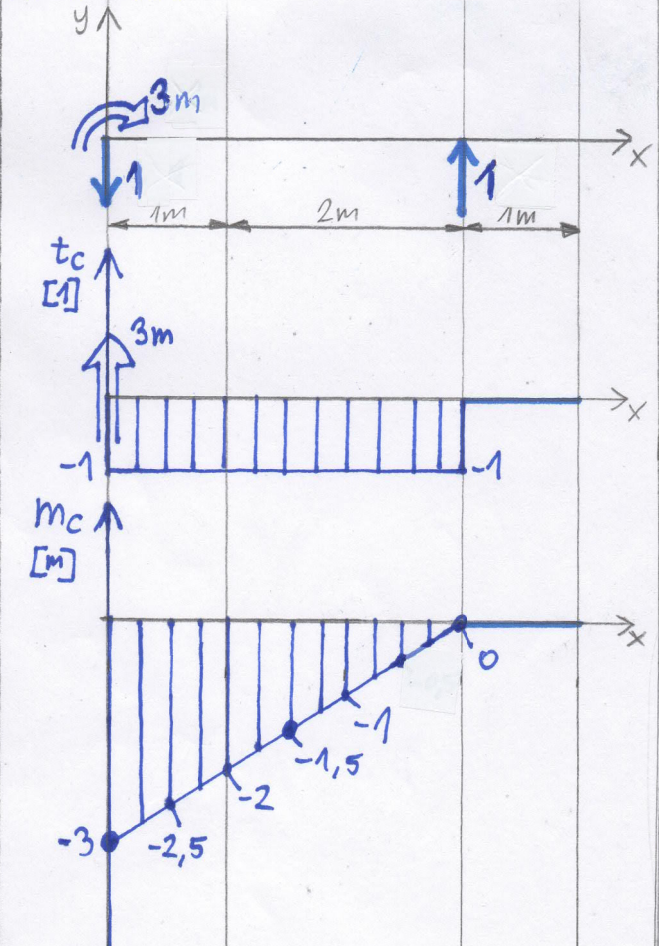
• az elhagyott támasztóerőnek megfelelő, egységnyi nagyságú terhelés



$$F_y = 0 = F_{Ay} + 1 \Rightarrow F_{Ay} = -1 \text{ kN} \quad (\downarrow)$$

$$M_a = 0 = M_A + 3 \cdot 1 \Rightarrow M_A = -3 \text{ kNm} \quad (\downarrow)$$

$$F_x = 0 = F_{Ax}$$



• a hajlító igénybevétel: $M_{hz} = M_{hz0} + F_{cy} m_c$

• az alakváltozási energia:

$$U \approx U_H = \frac{1}{2} \int_0^{4l} \frac{M_{hz}^2}{I_z \cdot E} dx = \frac{1}{2} \int_0^{4l} \frac{(M_{hz0} + F_{cy} m_c)^2}{I_z E} dx$$

• Castigliano tétel:

$$v_c = 0 = \frac{\partial U}{\partial F_{cy}} = \int_0^{4l} \frac{(M_{hz0} + F_{cy} m_c) \cdot m_c}{I_z \cdot E} dx \quad / \cdot I_z E$$

$$0 = \int_0^{4l} M_{hz0} m_c dx + F_{cy} \int_0^{4l} m_c^2 dx$$

$$F_{cy} = - \frac{\int_0^{4l} M_{hz0} m_c dx}{\int_0^{4l} m_c^2 dx}$$

• Integrálok kiszámítása Simpson formula felhasználásával:

$$\int_0^{4l} M_{hz0} m_c dx = \int_0^l M_{hz0} m_c dx + \int_l^{3l} M_{hz0} m_c dx + \underbrace{\int_{3l}^{4l} M_{hz0} m_c dx}_0 =$$

$$= \frac{1}{6} (15 \cdot (-3) + 4 \cdot 12 \cdot (-2,5) + 9 \cdot (-2)) + \frac{2}{6} (9 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 0) =$$
$$= -30,5 - 11,3 = -41,83 \text{ kNm}^3$$

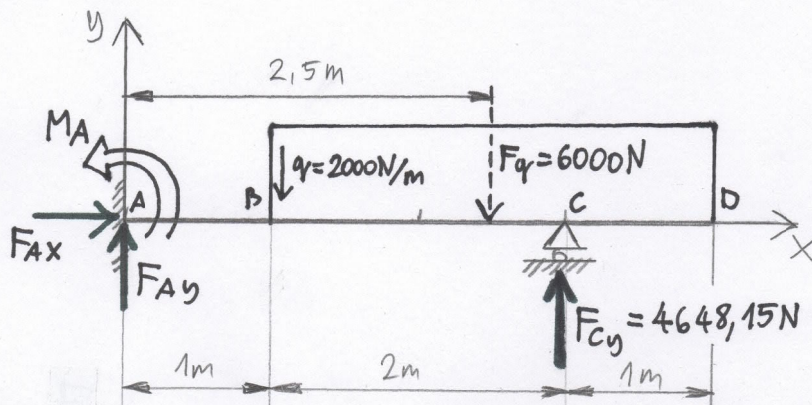
$$\int_0^{4l} m_c^2 dx = \int_0^{3l} m_c^2 dx + \underbrace{\int_{3l}^{4l} m_c^2 dx}_0 =$$

$$= \frac{3}{6} ((-3)^2 + 4 \cdot (-1,5)^2 + 0^2) = 9 \text{ m}^3$$

• Visszahelyettesítve F_{cy} képletébe:

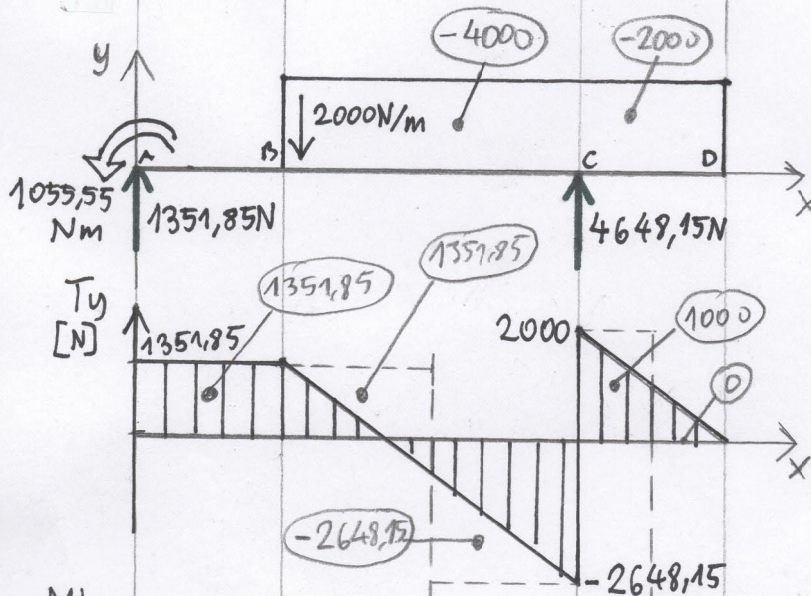
$$F_{cy} = \frac{-(-41,83)}{9} = 4,64815 \text{ kN} = 4648,15 \text{ N } (\uparrow)$$

- többi támasztóerő koordináta kiszámítása statikai egyensúlyi egyenletekből



$$F_y = 0 = F_{Ay} - F_q + F_{Cy} \Rightarrow$$

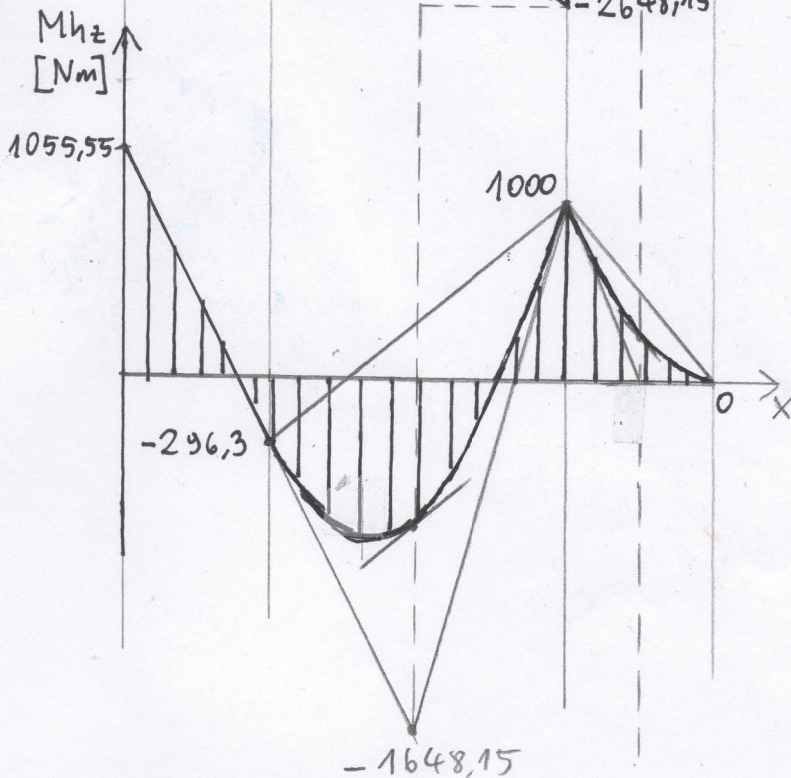
$$\begin{aligned} \Rightarrow F_{Ay} &= F_q - F_{Cy} = \\ &= 6000 - 4648,15 = \\ &= 1351,85 \text{ N} (\uparrow) \end{aligned}$$



$$M_a = 0 = M_A - 2,5 F_q + 3 F_{Cy} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_A &= 2,5 F_q - 3 F_{Cy} = \\ &= 2,5 \cdot 6000 - 3 \cdot 4648,15 = \\ &= 1055,55 \text{ Nm} (\curvearrowleft) \end{aligned}$$

$$F_x = 0 = F_{Ax}$$

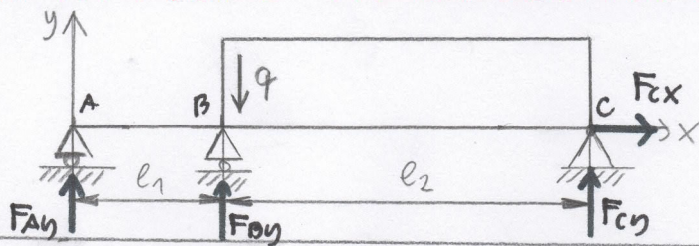


$$\vec{F}_A = (1351,85 \vec{j}) \text{ N}$$

$$\vec{F}_C = (4648,15 \vec{j}) \text{ N}$$

$$\vec{M}_A = (1055,55 \vec{k}) \text{ Nm}$$

STATIKAILAG HATÁROZATLAN SZERKEZET



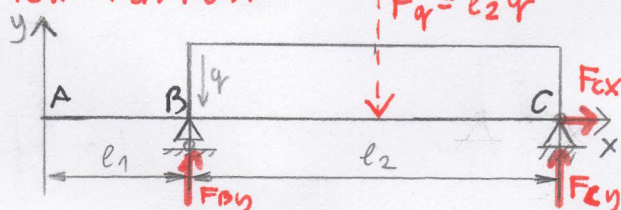
$$q = 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$l_1 = 2\text{m}$$

$$l_2 = 5\text{m}$$

- ismeretlen támasztóerők: $F_{Ay}, F_{By}, F_{Cy}, F_{Cx} \Rightarrow 4$ db
- statikai egyensúlyi egyenletek: $F_x = 0, F_y = 0, M_A = 0 \Rightarrow 3$ db
- A tartó statikailag egyszerűen határozatlan
- A statikailag határozottá tételnek elegendősége az A görgő elhagyása

eredeti terhelés a határozottá tett tartón

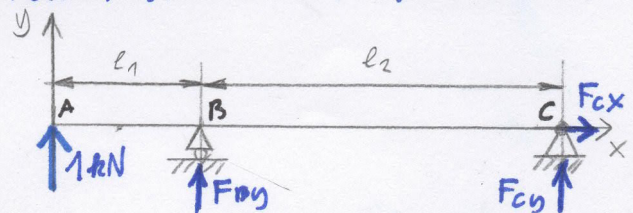


$$M_B = 0 = -\frac{l_2}{2} l_2 q + l_2 F_{Cy} \Rightarrow F_{Cy} = \frac{l_2 q}{2}$$

$$M_C = 0 = l_2 F_{By} + \frac{l_2}{2} l_2 q \Rightarrow F_{By} = \frac{l_2 q}{2}$$

$$F_x = 0 = F_{Cx}$$

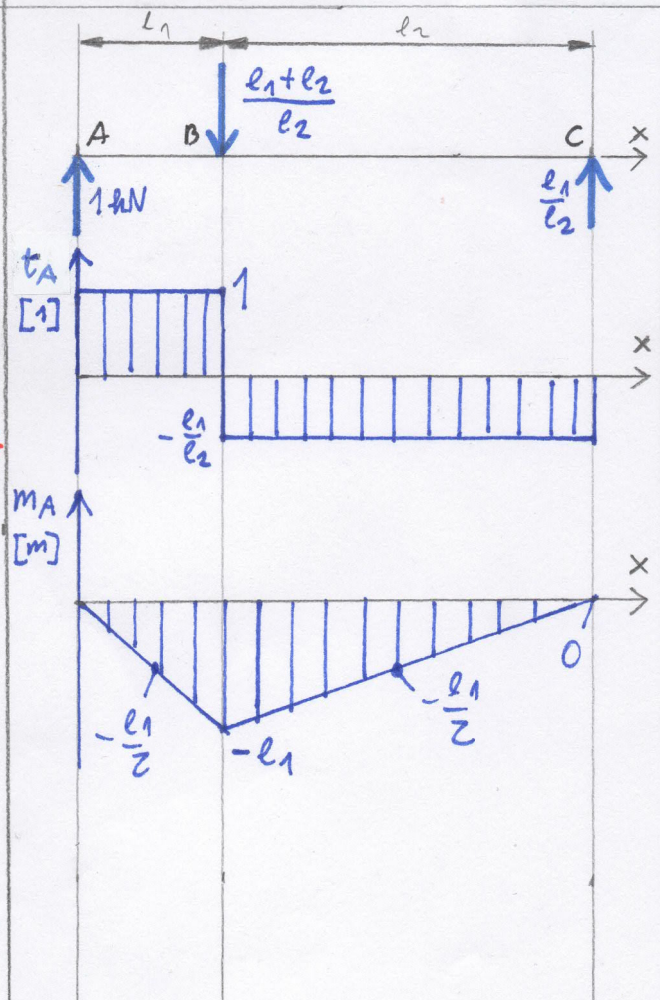
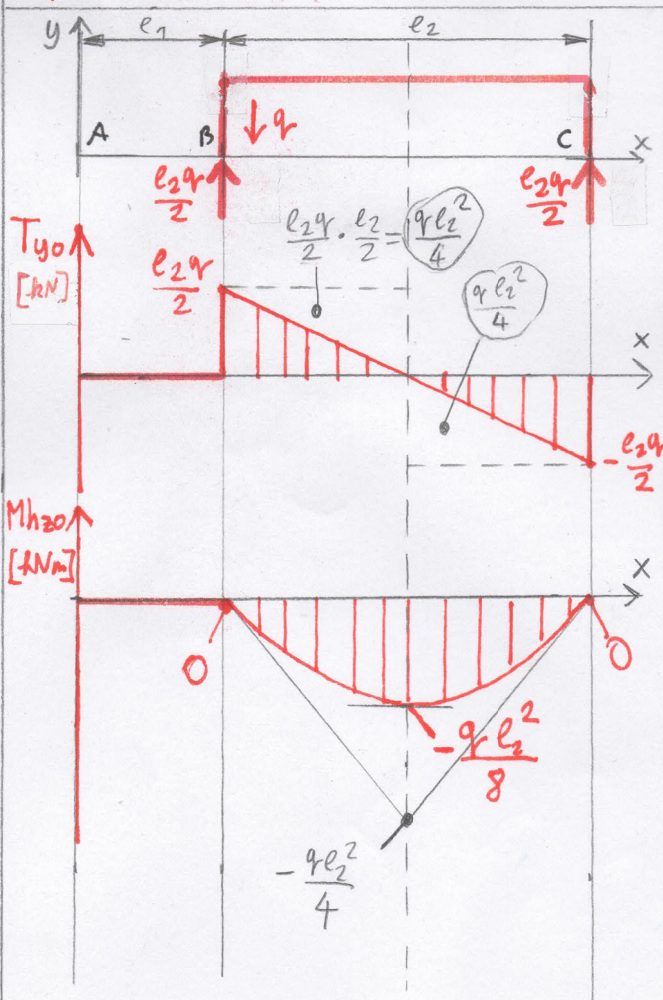
az elhagyott támasztóerőnek megfelelő, egységnyi nagyságú terhelés



$$M_B = 0 = -1 \cdot l_1 + F_{Cy} l_2 \Rightarrow F_{Cy} = \frac{l_1}{l_2}$$

$$M_C = 0 = -1 \cdot (l_1 + l_2) - F_{By} l_2 \Rightarrow F_{By} = -\frac{l_1 + l_2}{l_2}$$

$$F_x = 0 = F_{Cx}$$



• a hajlító igénybevétel: $M_{hz} = M_{hz0} + F_{Ay} m_A$

• az alakváltozási energia:

$$U \approx U_H = \frac{1}{2} \int_A^C \frac{M_{hz}^2}{I_z E} dx = \frac{1}{2} \int_A^C \frac{(M_{hz0} + F_{Ay} m_A)}{I_z E} dx$$

• Castigliano tétel:

$$v_A = 0 = \frac{\partial U}{\partial F_{Ay}} = \int_A^C \frac{(M_{hz0} + F_{Ay} m_A) m_A}{I_z E} dx \quad / \cdot I_z E$$

$$0 = \int_A^C M_{hz0} m_A dx + F_{Ay} \int_A^C m_A^2 dx$$

$$F_{Ay} = \frac{- \int_A^C M_{hz0} m_A dx}{\int_A^C m_A^2 dx}$$

• integrálok kiszámítása Simpson Formula felhasználásával:

$$\int_A^C M_{hz0} m_A dx = \int_A^B M_{hz0} m_A dx + \int_B^C M_{hz0} m_A dx =$$

$$= \frac{l_2}{6} \left(0 \cdot (-l_1) + 4 \cdot \left(-\frac{q l_2^2}{8} \right) \cdot \left(-\frac{l_1}{2} \right) + 0 \cdot 0 \right) = \frac{l_2}{6} \cdot 4 \cdot \frac{q l_2^2 l_1}{16} = \frac{q l_1 l_2^3}{24}$$

$$\int_A^C m_A^2 dx = \int_A^B m_A^2 dx + \int_B^C m_A^2 dx = \frac{l_1}{6} \left(0^2 + 4 \cdot \left(-\frac{l_1}{2} \right)^2 + (-l_1)^2 \right) +$$

$$+ \frac{l_2}{6} \left((-l_1)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{l_1}{2} \right)^2 + 0^2 \right) = 2 l_1^2 \cdot \left(\frac{l_1}{6} + \frac{l_2}{6} \right) = l_1^2 \cdot \frac{l_1 + l_2}{3}$$

• vissza helyettesítve F_{Ay} képletébe:

$$F_{Ay} = \frac{- \frac{q l_1 l_2^3}{24}}{l_1^2 \cdot \frac{l_1 + l_2}{3}} = - \frac{q l_2^3}{8 l_1 (l_1 + l_2)} = - \frac{6 \cdot 5^3}{8 \cdot 2 \cdot (2+5)} = -6,6964 \text{ kN} (\downarrow)$$

- többi támaszó erő koordináta kiszámítása statikai egyensúlyi egyenletek ből

$$M_b = 0 = 2 \cdot 6,696 -$$

$$- 2,5 \cdot 30 + 5 F_{cy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{cy} = \frac{2,5 \cdot 30 - 2 \cdot 6,696}{5} =$$

$$= 12,322 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$M_c = 0 = 7 \cdot 6,696 -$$

$$- 5 F_{by} + 2,5 \cdot 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{by} = \frac{7 \cdot 6,696 + 2,5 \cdot 30}{5} =$$

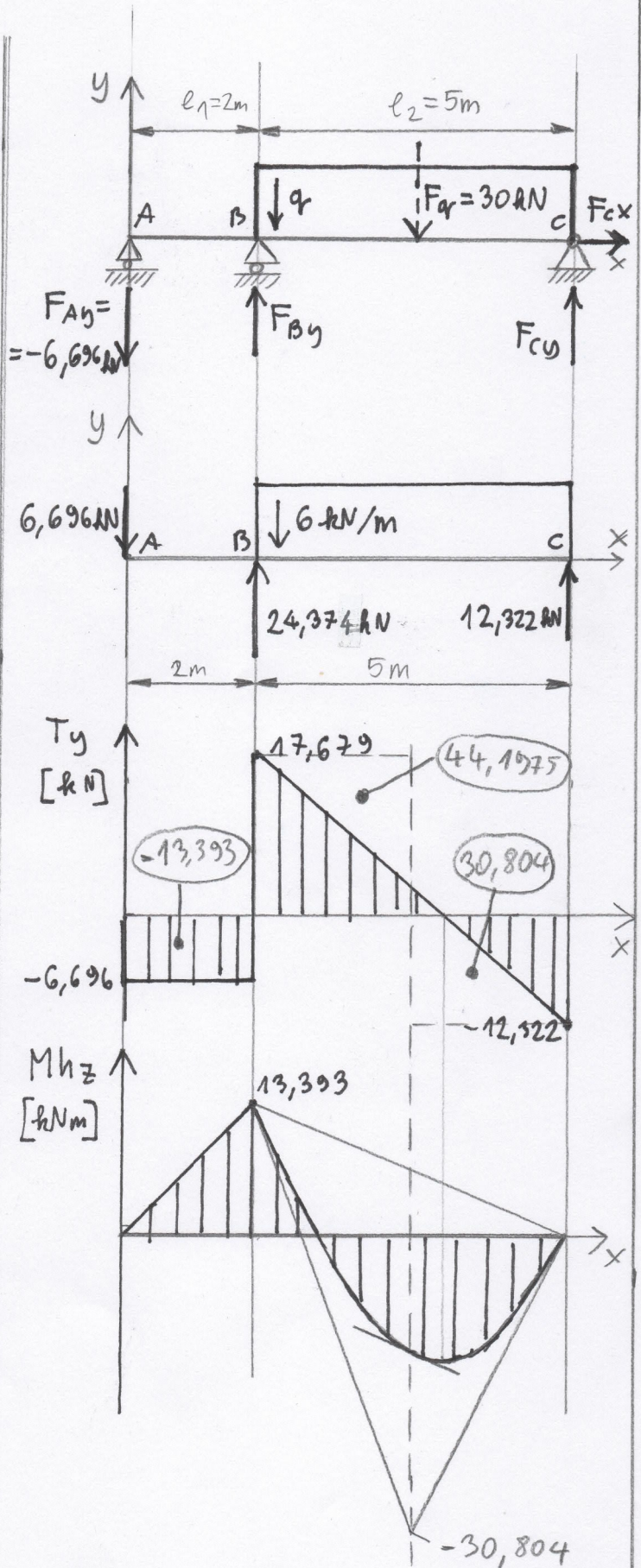
$$= 24,374 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$F_x = 0 = F_{cx}$$

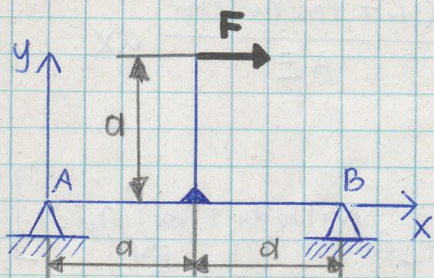
$$\vec{F}_A = (-6,696 \vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_B = (24,374 \vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_C = (12,322 \vec{j}) \text{ kN}$$



STATIKAILAG HATÁROZATLAN RÚDSZERKEZET



adott:

$$F = 40 \text{ kN}$$

$$A = 400 \text{ mm}^2$$

$$a = 2 \text{ m}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$I_z = 80000 \text{ mm}^4$$

Feladat:

támasztó
erőrendszert

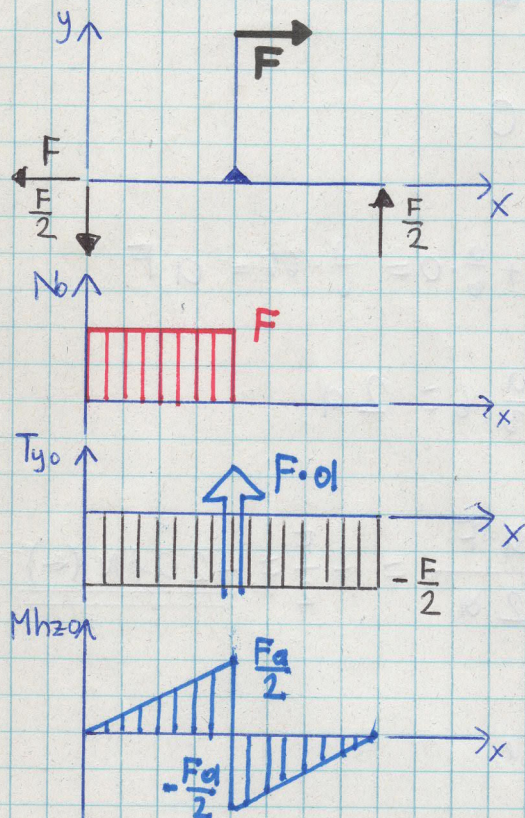
Statikai ismeretlenek száma: 4 Statikai egyenletek száma: 3

→ nemet statikailag egyenlően határozatlan

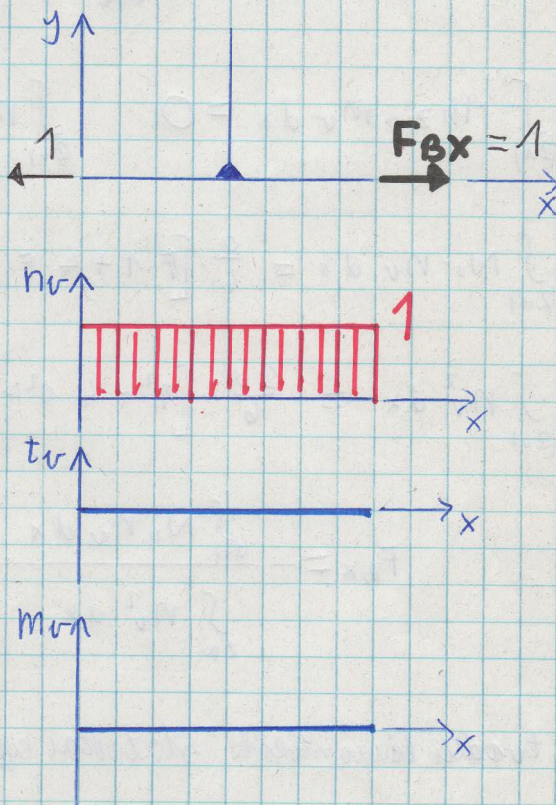
→ statikailag határozatlanságot egy lehetséges eset: B-nunként helyett egyenes támasz

Szuperpozícióval ábrák a statikailag határozatlanságot megleltet:

• eredeti terhelés



• egyenlő F_{Bx} terhelés



$$M_{hz} = M_{hz0} + F_{Bx} \cdot M_v$$

$$N = N_0 + F_{Bx} \cdot n_v$$

$$U = U_M + U_N = \frac{1}{2} \int_{(2a)} \frac{M_{hz}^2}{I_z E} dx + \frac{1}{2} \int_{(2a)} \frac{N^2}{A E} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{(2a)} \frac{(M_{hz0} + F_{Bx} \cdot M_v)^2}{I_z E} dx + \frac{1}{2} \int_{(2a)} \frac{(N_0 + F_{Bx} \cdot n_v)^2}{A E} dx$$

$$u_B = 0 = \frac{\partial U}{\partial F_{Bx}} = \int_{(2a)} \frac{(M_{hz0} + F_{Bx} \cdot m_v) m_v}{I_z E} dx + \int_{(2a)} \frac{(N_0 + F_{Bx} n_v) n_v}{AE} dx$$

$$0 = \frac{1}{I_z E} \cdot \left[\int_{(2a)} M_{hz0} m_v dx + F_{Bx} \int_{(2a)} m_v^2 dx \right] + \frac{1}{AE} \left[\int_{(2a)} N_0 n_v dx + F_{Bx} \int_{(2a)} n_v^2 dx \right]$$

$$0 = \frac{1}{I_z E} \cdot \int_{(2a)} M_{hz0} m_v dx + \frac{1}{I_z E} F_{Bx} \int_{(2a)} m_v^2 dx + \frac{1}{AE} \int_{(2a)} N_0 n_v dx + \frac{1}{AE} F_{Bx} \int_{(2a)} n_v^2 dx$$

$$F_{Bx} = - \frac{\frac{1}{I_z E} \cdot \int_{(2a)} M_{hz0} m_v dx + \frac{1}{AE} \int_{(2a)} N_0 n_v dx}{\frac{1}{I_z E} \cdot \int_{(2a)} m_v^2 dx + \frac{1}{AE} \int_{(2a)} n_v^2 dx}$$

$$\int_{(2a)} M_{hz0} m_v dx = 0 \quad \int_{(2a)} m_v^2 dx = 0$$

$$\int_{(2a)} N_0 \cdot n_v dx = \frac{a}{6} \cdot [F \cdot 1 + 4 \cdot F \cdot 1 + F \cdot 1] + \frac{a}{6} \cdot 0 = \frac{a}{6} \cdot 6F = a \cdot F$$

$$\int_{(2a)} n_v^2 dx = \frac{2a}{6} \cdot [1^2 + 4 \cdot 1^2 + 1^2] = \frac{a}{3} \cdot 6 = 2a$$

$$F_{Bx} = - \frac{\int_{(2a)} N_0 n_v dx}{\int_{(2a)} n_v^2 dx} = - \frac{a \cdot F}{2a} = - \frac{F}{2} = \underline{\underline{-20 \text{ kN} (\leftarrow)}}$$

- további támasztóerők statikai egyenletei:

$$F_x = 0 = F_{Ax} + F + F_{Bx} \Rightarrow F_{Ax} = -F - F_{Bx} = -40 + 20 = \underline{\underline{-20 \text{ kN} (\leftarrow)}}$$

$$M_a = 0 = -a \cdot F + 2a F_{By} \Rightarrow F_{By} = \frac{aF}{2a} = \frac{F}{2} = \frac{40}{2} = \underline{\underline{20 \text{ kN} (\uparrow)}}$$

$$M_b = 0 = -a \cdot F - 2a F_{Ay} \Rightarrow F_{Ay} = \frac{aF}{-2a} = -\frac{F}{2} = -\frac{40}{2} = \underline{\underline{-20 \text{ kN} (\downarrow)}}$$