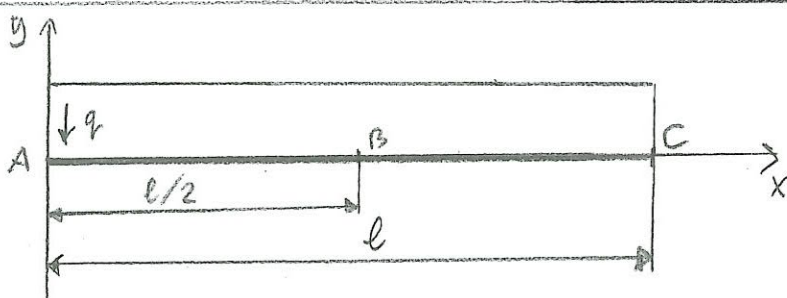
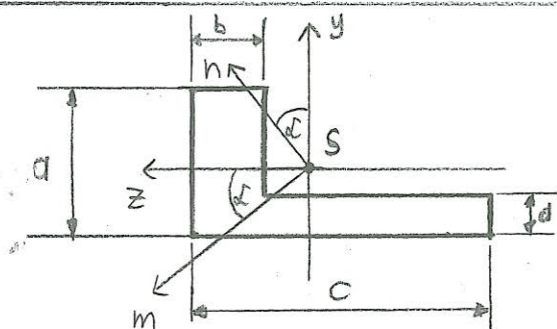


MÁSODRENDŰ NYOMATÉKOK, LEHAJLAS, KIHAJLAS



• Adott

- $a = 40 \text{ mm}$
- $b = 20 \text{ mm}$
- $c = 80 \text{ mm}$
- $d = 10 \text{ mm}$
- $l = 2 \text{ m}$
- $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
- $q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
- $\angle = 30^\circ$
- $R_{p0.2} = 400 \text{ MPa}, n = 1.5$
- $R_A = 300 \text{ MPa}$

• Feladat

- a) Milyen fokúval forgassuk el a keresztmetszetet, hogy a lehajlás minimális legyen
- b) ellenőrizzük a rudat ebben az esetben hajlításra
- c) mekkora lesz ebben az esetben az A, B, C keresztmetszetek z tengely körüli szögelfordulása és lehajlása?
- d) határozzuk meg a rúd teherhatóságát kihajlásra
- e) $\frac{I_s}{\text{mm}}$ meghatározása

A Feladat megoldásának gondolatmenete:

- Először a súlyponti tehetetlenségi tenzort kell meghatároznunk az koordináta-rendszerben, ezután térhetünk rá az egyes rész feladatokra

I.

$\frac{I_s}{\text{mm}}$ meghatározása

részalakzatokra bontás

① K.m. súlypontjának ($\rightarrow yz$ k.r.) meghatározása

② rész téglalapok másodrendű nyomatékainak kiszámítása

③ $I_y, I_z, I_{yz} = I_{zy}$ meghatározása $\Rightarrow$ STEINER TÉTEL $\Rightarrow \frac{I_s}{yz}$

II.

egy rész feladatok elvégzése

a) I_1, I_2 fő tehetetlenségi nyomatékok
 ①, ② tehetetlenségi főirányok $\Rightarrow$ SAJÁTÉRTÉK FELADAT
 ③ beforgatása z tengelybe

e) $I_n, I_m, I_{nm} = I_{mn}$ kiszámítása
 $\Rightarrow \frac{I_s}{\text{mm}}$

b) szilárdsági ellenőrzés

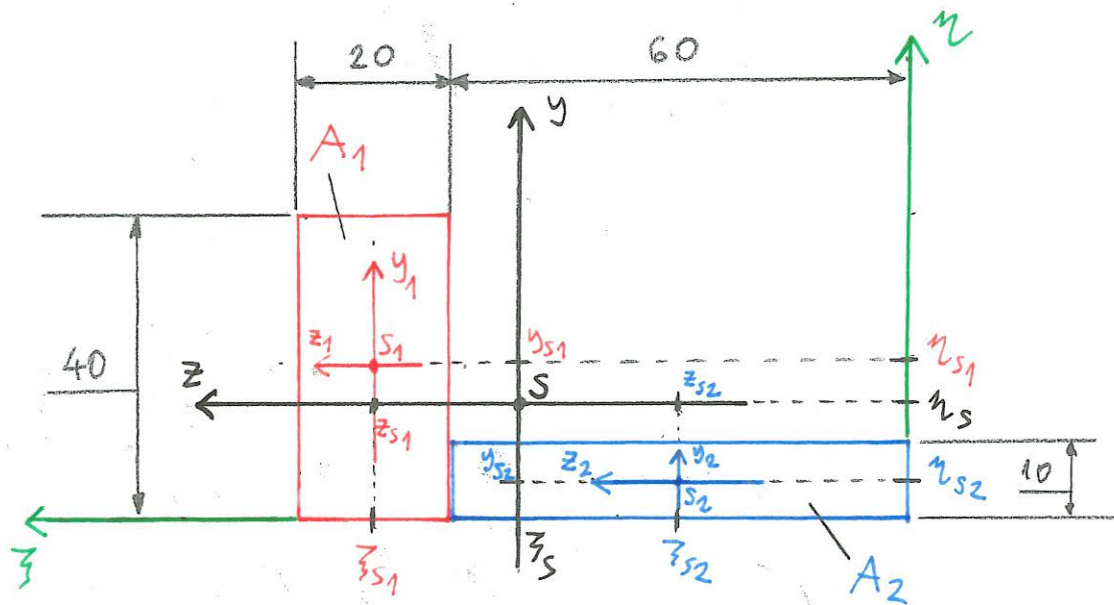
c) lehajlás számítása $\Rightarrow$ RUGALMASZÁLL DIFFERENCIÁLELETE

d) teherhatóság | kihajlásra

I. I_s meghatározása

① A keresztmetszet súlypontjának meghatározása

- A keresztmetszetet bontsuk fel egyszerű alakzatokra (2 db téglalap), melynek súlypontját ismerjük
- A súlypont helyének meghatározásához vegyünk fel tetszőleges helyre egy η, ξ koordinátarendszert, melyben megadhatjuk a súlypont helyét



$$A_1 = 20 \cdot 40 = 800 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 10 \cdot 60 = 600 \text{ mm}^2$$

$$\eta_{S1} = 20 \text{ mm}$$

$$\eta_{S2} = 5 \text{ mm}$$

$$\xi_{S1} = 70 \text{ mm}$$

$$\xi_{S2} = 30 \text{ mm}$$

$$\eta_s = \frac{A_1 \eta_{S1} + A_2 \eta_{S2}}{A_1 + A_2} = \frac{800 \cdot 20 + 600 \cdot 5}{800 + 600} = 13,57 \text{ mm}$$

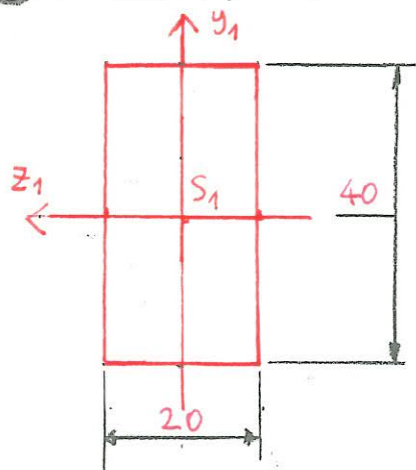
$$\xi_s = \frac{A_1 \xi_{S1} + A_2 \xi_{S2}}{A_1 + A_2} = \frac{800 \cdot 70 + 600 \cdot 30}{800 + 600} = 52,86 \text{ mm}$$

- részteglalapok súlypontjainak koordinátái η, ξ koordinátarendszerben:

$$\eta_{S1} = \eta_{S1} - \eta_s = 20 - 13,57 = 6,43 \text{ mm} \quad \eta_{S2} = \eta_{S2} - \eta_s = 5 - 13,57 = -8,57 \text{ mm}$$

$$\xi_{S1} = \xi_{S1} - \xi_s = 70 - 52,86 = 17,14 \text{ mm} \quad \xi_{S2} = \xi_{S2} - \xi_s = 30 - 52,86 = -22,86 \text{ mm}$$

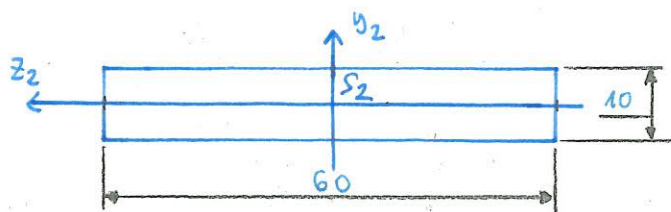
② A résztéglalapok másodrendű nyomatékai



$$I_{y1} = \frac{40 \cdot 20^3}{12} = \frac{320000}{12} = 26666,6 \text{ mm}^4$$

$$I_{z1} = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = \frac{1280000}{12} = 106666,6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y1z1} = I_{z1y1} = 0 \text{ mm}^4$$



$$I_{y2} = \frac{10 \cdot 60^3}{12} = \frac{2160000}{12} = 180000 \text{ mm}^4$$

$$I_{z2} = \frac{60 \cdot 10^3}{12} = \frac{60000}{12} = 5000 \text{ mm}^4$$

$$I_{y2z2} = I_{z2y2} = 0 \text{ mm}^4$$

③ A súlyponti tehetlenségi tenzor yz koordinátarendszerben

STEINER TÉTEL

$$\begin{aligned} I_y &= (I_{y1} + A_1 \cdot z_{s1}^2) + (I_{y2} + A_2 \cdot z_{s2}^2) = \\ &= (26666,6 + 800 \cdot 17,14^2) + (180000 + 600 \cdot (-22,86)^2) = 755238 \text{ mm}^4 \approx 75,53 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_z &= (I_{z1} + A_1 \cdot y_{s1}^2) + (I_{z2} + A_2 \cdot y_{s2}^2) = \\ &= (106666,6 + 800 \cdot 6,43^2) + (5000 + 600 \cdot (-8,57)^2) = 188809 \text{ mm}^4 \approx 18,88 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yz} = I_{zy} &= (I_{y1z1} + A_1 \cdot y_{s1} \cdot z_{s1}) + (I_{y2z2} + A_2 \cdot y_{s2} \cdot z_{s2}) = \\ &= (0 + 800 \cdot 6,43 \cdot 17,14) + (0 + 600 \cdot (-8,57) \cdot (-22,86)) = 205714 \text{ mm}^4 \approx 20,57 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

A súlyponti tehetlenségi tenzor yz koordinátarendszerben:

$$\underline{\underline{I_{yz}}} = \begin{bmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75,53 & -20,57 \\ -20,57 & 18,88 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$

II. egyes részfeladatok kidolgozása

a) minimális lehajlúshoz szükséges keresztmetszet elforgatás

- A lehajlás akkor lesz minimális, ha az ① főteengely körül hajlítunk, azaz a keresztmetszetet úgy kell elforgatni, hogy ① főteengelye a z tengellyel essen egybe.
- A feladat tehát a tehetetlenségi főteengelyek és főtehetetlenségi nyomatékok meghatározása, mely egy sajátérték feladatként kapható meg

$$\frac{I_s}{y^2} \vec{e} = \lambda \vec{e}$$

① sajátértékek

fő tehetetlenségi nyomatékok

$$\frac{I_s}{y^2} \vec{e} - \lambda \underline{\underline{E}} \vec{e} = \vec{0}$$

$$\left(\frac{I_s}{y^2} - \lambda \underline{\underline{E}} \right) \vec{e} = \vec{0}$$

② sajátvektorok

tehetetlenségi főirányok

• nemtriviális megoldás feltétele:

$$\det \left| \frac{I_s}{y^2} - \lambda \underline{\underline{E}} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 75,53 - \lambda & -20,57 \\ -20,57 & 18,88 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(75,53 - \lambda)(18,88 - \lambda) - (-20,57)(-20,57) = 0$$

$$1426 - 75,53\lambda - 18,88\lambda + \lambda^2 - 423,12 = 0$$

$$\lambda^2 - 94,41\lambda + 1002,88 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{94,41 \pm \sqrt{94,41^2 - 4 \cdot 1002,88}}{2} =$$

$$= \begin{cases} 82,21 \text{ cm}^4 \\ 12,2 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$I_1 > I_2 \Rightarrow I_1 = 82,21 \text{ cm}^4 \\ I_2 = 12,2 \text{ cm}^4$$

• A súlyponti tehetetlenségi tenzor főirányok koordinátarendszerében:

$$\frac{I_s}{12} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 82,21 & 0 \\ 0 & 12,2 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$

• $\lambda = I_1$ -hez tartozó főirány:

$$\left(\frac{I_s}{y^2} - I_1 \underline{\underline{E}} \right) \vec{e}_1 = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 75,53 - 82,21 & -20,57 \\ -20,57 & 18,88 - 82,21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1) -6,68 y_1 - 20,57 z_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -3,08 z_1$$

$$2) -20,57 y_1 - 63,33 z_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -3,08 z_1$$

$$1) = 2) \Rightarrow \text{legyen } z_1 = 1 \Rightarrow y_1 = -3,08$$

$$s_1 = \sqrt{y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{3,08^2 + 1^2} = 3,24$$

$$\vec{e}_1 = \frac{y_1}{s_1} \vec{j} + \frac{z_1}{s_1} \vec{k} = \frac{-3,08}{3,24} \vec{j} + \frac{1}{3,24} \vec{k} =$$

$$= -0,951 \vec{j} + 0,309 \vec{k}$$

• $\lambda = I_2$ -hez tartozó főirány

használjuk ki, hogy $\vec{i}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ jobbsodrású rendszert alkot $\Rightarrow \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \uparrow \vec{i} \uparrow \vec{e}_1 \uparrow \vec{i}$

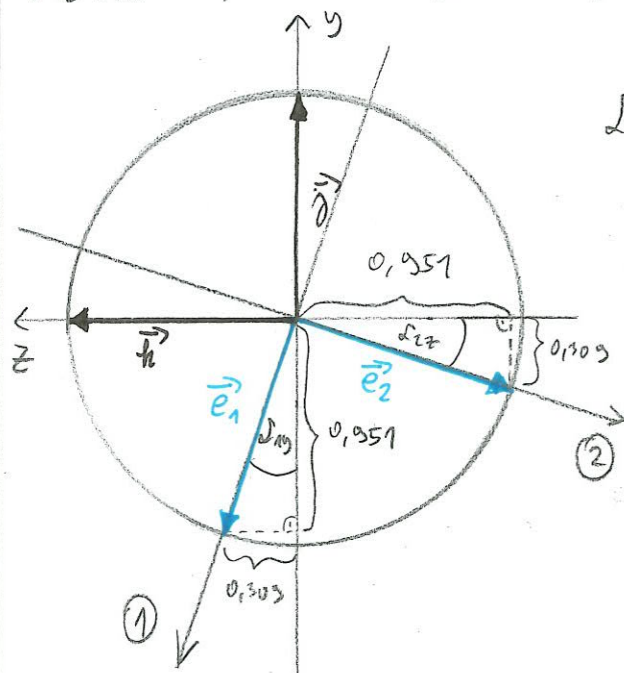
$\Downarrow$

$$\vec{e}_2 = \vec{i} \times \vec{e}_1 = \vec{i} \times (-0,951 \vec{j} + 0,309 \vec{k}) =$$

$$= -0,951 \underbrace{\vec{i} \times \vec{j}}_{\vec{k}} + 0,309 \underbrace{\vec{i} \times \vec{k}}_{-\vec{j}} =$$

$$= -0,309 \vec{j} - 0,951 \vec{k}$$

• a szükséges elforgatás meghatározása:



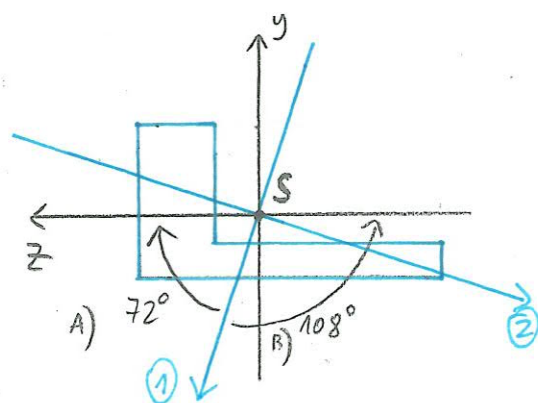
$$\alpha_{12} = \alpha_{22} = \arccos(0,951) = 18^\circ$$

⇓

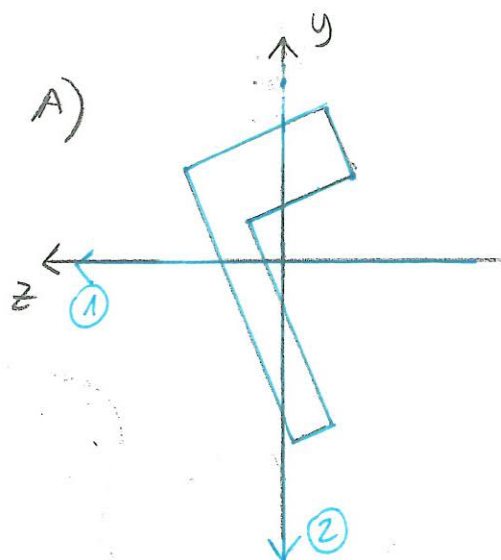
Ahhoz, hogy az ① tengely a z tengellyel essen egybe, a keresztmetszetet

A) 72° -kal kell $\curvearrowright$ irányba forgotni
VAGY

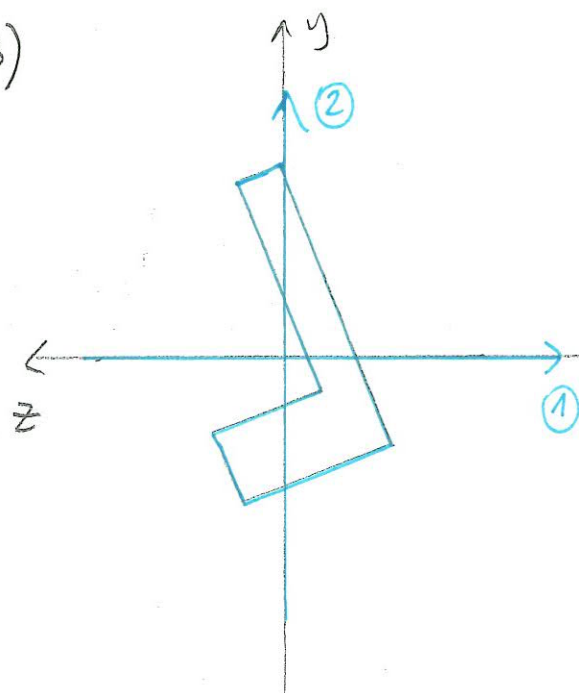
B) 108° -kal kell $\curvearrowleft$ irányban forgotni



⇒



B)



b) ellenőrzés hajlításra

1) támasztóerők meghatározása

$$F_y = q \cdot l = 2 \cdot 2 = 4 \text{ kN} (\downarrow)$$

$$M_A = 0 = M_A - \frac{l}{2} F_y$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{l}{2} F_y = \frac{2}{2} \cdot 4 = 4 \text{ kNm} (\curvearrowright)$$

$$F_y = 0 = F_A - F_y$$

$$\Rightarrow F_A = F_y = 4 \text{ kN}$$

$$F_x = 0 = F_{Ax}$$

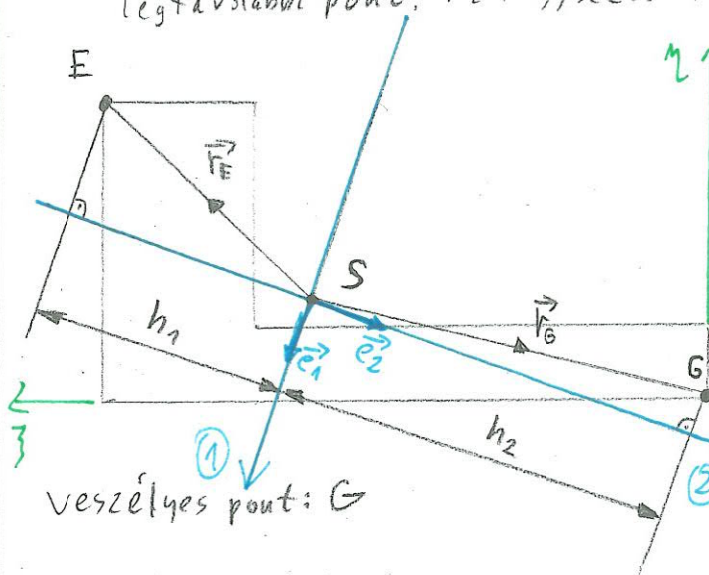
3) veszélyes keresztmetszet:

A keresztmetszet

$$|M_{hz}|_{\max} = 4 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

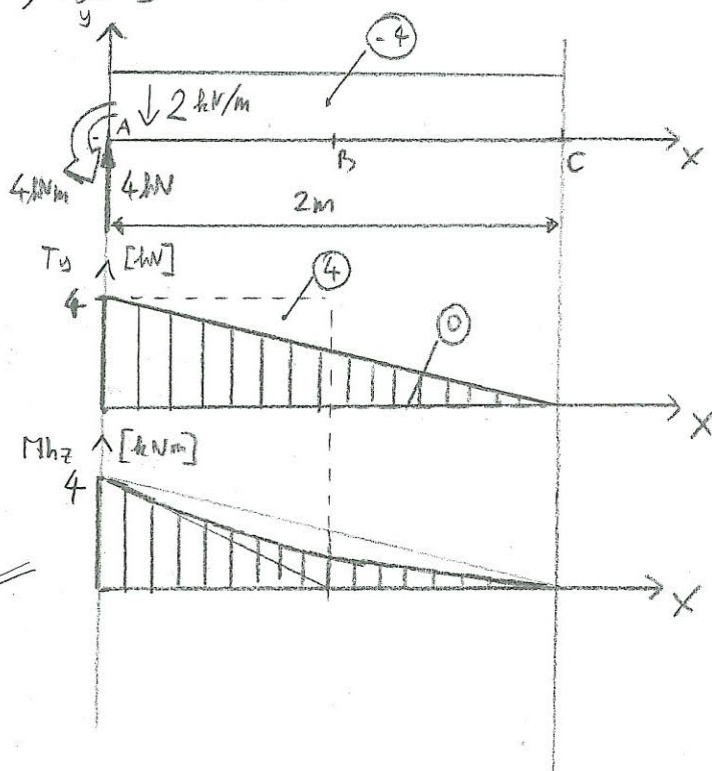
4) veszélyes pont meghatározása:

A veszélyes pont a zérusvonaltól (azaz most az ① tengelytől) legtávolabbi pont. Ezt egyszerűbb eredeti helyzetben meghatározni:



veszélyes pont: G

2) igénybevételei ábrák



$$\vec{r}_E = (40 - 13,57) \vec{j} + (80 - 52,86) \vec{k}$$

$$\vec{r}_G = -13,57 \vec{j} - 52,86 \vec{k}$$

$$h_1 = |\vec{r}_E \cdot \vec{e}_2| = \begin{vmatrix} 26,43 & 27,14 \\ -0,309 & -0,951 \end{vmatrix} = 33,98 \text{ mm}$$

$$h_2 = |\vec{r}_G \cdot \vec{e}_2| = \begin{vmatrix} -13,57 & -52,86 \\ -0,309 & -0,951 \end{vmatrix} = 54,46 \text{ mm}$$

$$h_{\max} = \max(h_1, h_2) = h_2 = 54,46 \text{ mm}$$

5) ellenőrzés elvégzése:

$$\sigma_{x\max} = \frac{|M_{hz}|_{\max}}{I_y} h_{\max} = \frac{4 \cdot 10^6}{82,21 \cdot 10^4} \cdot 54,46 = 264,98 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{meg}} = \frac{R_{p0,2}}{n} = \frac{400}{1,5} = 266,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x\max} = 264,98 \text{ MPa} < 266,6 \text{ MPa} \Rightarrow \text{a rúd szilárdságtanilag megfelel}$$

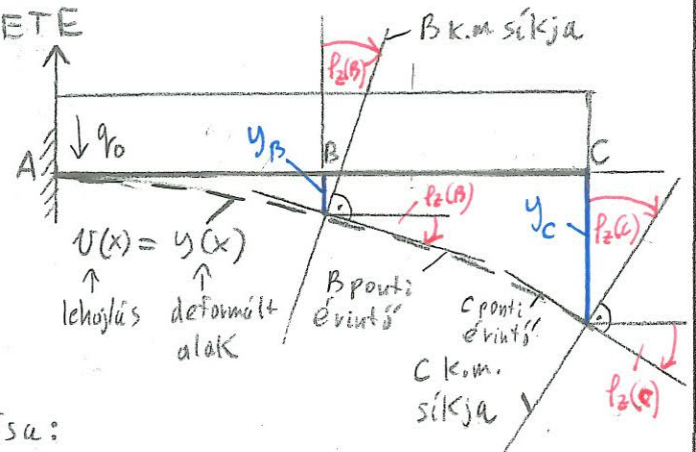
c) Szögelfordulás, lehajlás számítás

→ RUGALMAS SZÁL DIFFEGYENLETE

$$y''(x) = -\chi$$

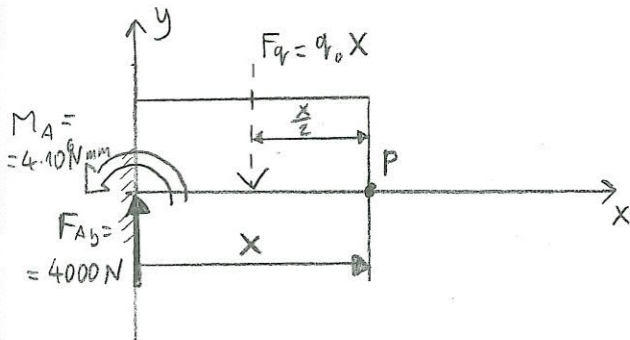
$$y''(x) = -\frac{M_{hz}(x)}{I_z E}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E \epsilon_x \quad \chi = \frac{1}{R} \\ \frac{M_{hz}(x)}{I_z} &= E \frac{1}{R} \\ \chi &= \frac{M_{hz}(x)}{I_z E} \end{aligned}$$



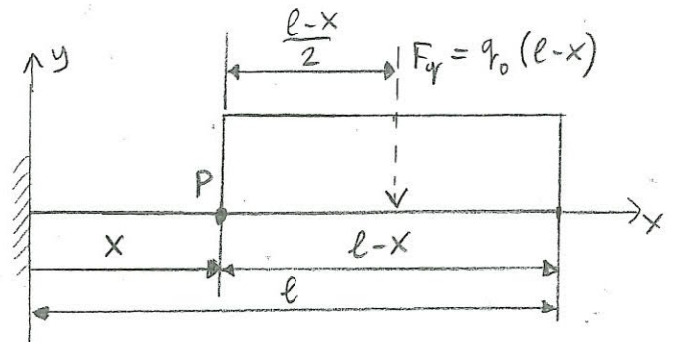
1) hajlítónyomatéki Függvény felírása:

a) lehetőség: tetszőleges k.m.-tól balra lévő E.R. redukálásával:



$$\begin{aligned} M_{hz}(x) &= M_A - F_{Ay}x + q_0x \frac{x}{2} = \\ &= 4 \cdot 10^6 - 4000x + 2x \frac{x}{2} = \\ &= x^2 - 4000x + 4 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

b) lehetőség: tetszőleges k.m.-tól jobbra lévő E.R. redukálásával:



$$\begin{aligned} M_{hz}(x) &= \frac{l-x}{2} q_0 (l-x) = \frac{q_0}{2} (l-x)^2 = \\ &= \frac{q_0}{2} (l^2 - 2lx + x^2) = \frac{q_0}{2} x^2 - q_0 lx + \frac{q_0}{2} l^2 = \\ &= \frac{2}{2} x^2 - 2 \cdot 2000x + \frac{2}{2} 2000^2 = x^2 - 4000x + 4 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

c) lehetőség: integrálással:

$$T_y(x) = \int q_0 dx = \int -2 dx = -2x + C = -2x + 4000$$

$$\text{p.f.: } T_y(x=0) = 4000 \Rightarrow -2 \cdot 0 + C = 4000 \Rightarrow C = 4000$$

$$M_{hz}(x) = -\int T_y dx = -\int (-2x + 4000) dx = -\left(-2 \frac{x^2}{2} + 4000x\right) + D = x^2 - 4000x + 4 \cdot 10^6$$

$$\text{p.f.: } M_{hz}(x=0) = 4 \cdot 10^6 \Rightarrow 2 \cdot \frac{0^2}{2} + 4000 \cdot 0 + D = 4 \cdot 10^6 \Rightarrow D = 4 \cdot 10^6$$

Most ① tengelyt beforgattuk z tengelybe $\Rightarrow I_z = I_1 = 82,21 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

② Szögelfordulás Függvény

$$\begin{aligned} \varphi_z(x) = \varphi'(x) &= \int -\frac{M_{hz}(x)}{I_z E} dx = -\frac{1}{I_z E} \int M_{hz}(x) dx = \\ &= -\frac{1}{82,21 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot \int x^2 - 4000x + 4 \cdot 10^6 dx = \\ &= -\frac{1}{1,6442 \cdot 10^{11}} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - 4000 \frac{x^2}{2} + 4 \cdot 10^6 x + C_1 \right) \end{aligned}$$

p.f.: a befalazásnál a szögelfordulás zérus: $\varphi_z(x=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$\Downarrow$

$$\varphi_z(x) = -\frac{1}{1,6442 \cdot 10^{11}} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - 2000x^2 + 4 \cdot 10^6 x \right)$$

$\Downarrow$

$$\varphi_z(A) = \varphi_z(x=0) = 0$$

$$\varphi_z(B) = \varphi_z(x=1000) = -0,0142 \text{ (rad)} \Rightarrow -0,0142 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -0,813^\circ \downarrow$$

$$\varphi_z(C) = \varphi_z(x=2000) = -0,0162 \text{ (rad)} \Rightarrow -0,0162 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -0,93^\circ \downarrow$$

③ Lehajlás Függvény

$$y(x) = \int \underbrace{\left[\int -\frac{M_{hz}(x)}{I_z E} dx \right]}_{\varphi_z(x)} dx = \int \varphi_z(x) dx = -\frac{1}{1,6442 \cdot 10^{11}} \cdot \int \left(\frac{x^3}{3} - 2000x^2 + 4 \cdot 10^6 x \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{1,6442 \cdot 10^{11}} \cdot \left(\frac{1}{3} \frac{x^4}{4} - 2000 \frac{x^3}{3} + 4 \cdot 10^6 \frac{x^2}{2} + C_2 \right)$$

p.f.: a befalazásnál az elmozdulás zérus: $y(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$$y(x) = -\frac{1}{1,6442 \cdot 10^{11}} \cdot \left(\frac{x^4}{12} - \frac{2000}{3} x^3 + 2 \cdot 10^6 x^2 \right)$$

$$y(A) = y(x=0) = 0$$

$$y(B) = y(x=1000) = -8,617 \text{ mm } (\downarrow)$$

$$y(C) = y(x=2000) = -24,33 \text{ mm } (\downarrow)$$

d) terhelhetőség kihajlásra

① keresztmetszeti jellemzők

$$A = 800 + 600 = 1400 \text{ mm}^2$$

$$I_{\min} = I_2 = 12,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

② karcsúsági tényező

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{4000}{9,34} = 428,27$$

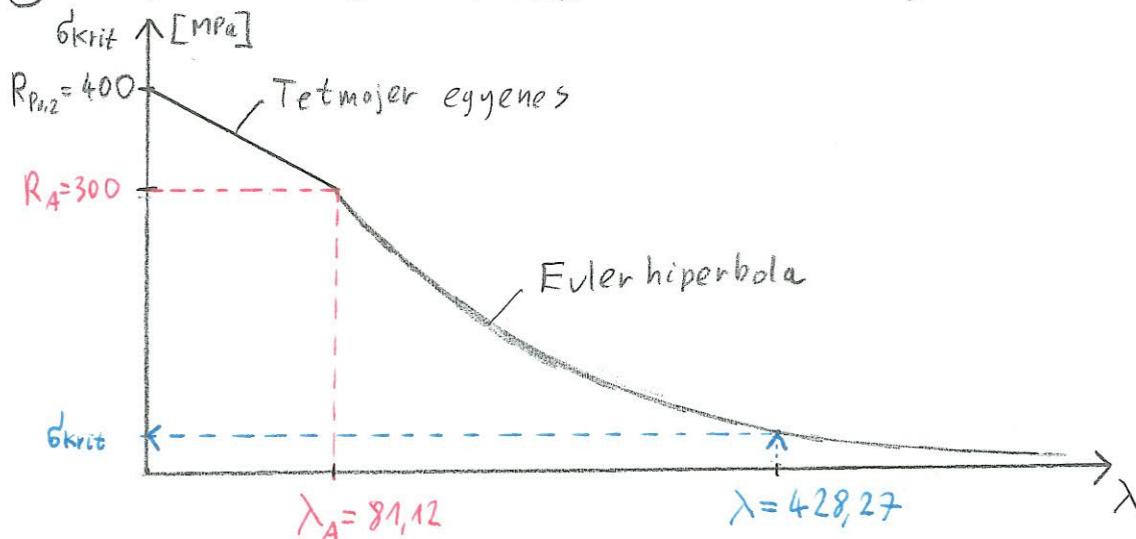
$$\rightarrow l_0 = \beta l = 2 \cdot 2000 = 4000 \text{ mm}$$

$$\rightarrow i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{12,2 \cdot 10^4}{1400}} = 9,34 \text{ mm}$$

③ képlékeny - rugalmas tartomány határa:

$$\lambda_A = \pi \sqrt{\frac{E}{R_A}} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{300}} = 81,12$$

④ Kihajlási határgörbe $\Rightarrow \sigma_{\text{krit}}$ kritikus feszültség



$\lambda = 428,27 \text{ MPa} > \lambda_A = 81,12 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{\text{krit}}$ az Euler hiperbola segítségével számítandó

$$\sigma_{\text{krit}} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = \pi^2 \frac{2 \cdot 10^5}{428,27^2} = 10,76 \text{ MPa}$$

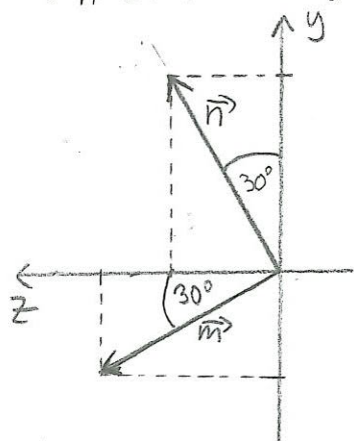
⑤ terhelhetőség meghatározása:

A kritikus erő:

$$F_{\text{krit}} = \sigma_{\text{krit}} \cdot A = 10,76 \cdot 1400 = 15064 \text{ N}$$

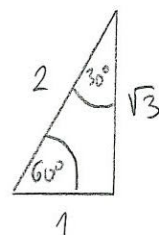
e) $\underline{I}_S$ meghatározása

• $\vec{n}$ és $\vec{m}$ irányegységvektorok:



$$\vec{n} = \cos 30^\circ \vec{j} + \sin 30^\circ \vec{k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} + 0,5 \vec{k}$$

$$\vec{m} = -\sin 30^\circ \vec{j} + \cos 30^\circ \vec{k} = -0,5 \vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k}$$



$$\underline{I}_S = \begin{bmatrix} 75,53 & -20,57 \\ -20,57 & 18,88 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$

$$\bullet I_n = \vec{n} \cdot \underline{I}_S \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 75,53 & -20,57 \\ -20,57 & 18,88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 55,13 \\ -8,37 \end{bmatrix} = 43,56 \text{ cm}^4$$

$$\bullet I_m = \vec{m} \cdot \underline{I}_S \cdot \vec{m} = \begin{bmatrix} -0,5 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 75,53 & -20,57 \\ -20,57 & 18,88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -55,58 \\ 26,64 \end{bmatrix} = 50,86 \text{ cm}^4$$

$$\bullet -I_{nm} = \vec{n} \cdot \underline{I}_S \cdot \vec{m} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 75,53 & -20,57 \\ -20,57 & 18,88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -55,58 \\ 26,64 \end{bmatrix} = -34,81 \text{ cm}^4$$

$$\bullet -I_{mn} = -I_{nm} = -34,81 \text{ cm}^4$$

$$\underline{I}_{nm} = \begin{bmatrix} I_n & -I_{nm} \\ -I_{mn} & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43,56 & -34,81 \\ -34,81 & 50,86 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$