

ELEMI SZILÁRDSÁGTAN

1. feladat

ADOTT:

Fesz. állapot P pontban: $\sigma_x = 100 \text{ MPa}$ $\sigma_y = -20 \text{ MPa}$ $\sigma_z = 20 \text{ MPa}$ $\tau_{xy} = 0 \text{ MPa}$ $\tau_{xz} = -30 \text{ MPa}$ $\tau_{yz} = 0 \text{ MPa}$	Egymásra merőleges 2 irány: $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$ $\vec{m} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}$	Anyagjellemzők: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ $\nu = 0.3$
--	---	---

FELADAT:

- Írja fel a feszültségtenzor mátrixát!
- Ábrázolja a P pontbeli feszültségállapotot elemi kockán!
- Számítsa ki a σ_n , τ_{nm} , σ_m , τ_{mn} feszültségkoordinátákat!
- Határozza meg a főfeszültségeket és a feszültségi főtengelyeket!
- Írja fel a feszültségtenzor mátrixát a főtengelyek koordinátarendszerében.
- Szemléltesse a P pontbeli feszültségállapotot elemi kockával xyz koordinátarendszerben, a főirányok (123) koordinátarendszerében valamint mny koordinátarendszerben az y tengely felől szemlélve!
- Ábrázolja a P pontbeli feszültségállapotot feszültségi Mohr körökkel.
- Határozza meg a redukált feszültségeket!
- Határozza meg a P pontbeli alakváltozási állapotot!
- Ábrázolja a P pontbeli alakváltozási állapotot elemi triéderen!
- Határozza meg a főnyúlásokat!
- Írja fel az alakváltozás-tenzor mátrixát a főtengelyek koordinátarendszerében!

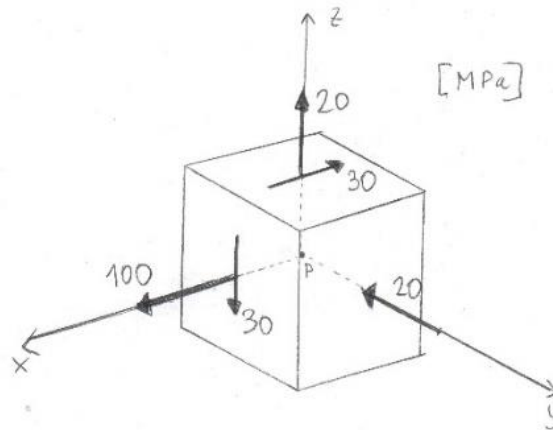
MEGOLDÁS:

a) A feszültségtenzor mátrixa:

$$\underline{\underline{F}}_P = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & -30 \\ 0 & -20 & 0 \\ -30 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Megjegyzés: a feszültségtenzor szimmetrikus, így: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

b) A P pontbeli feszültségállapot szemléltetése elemi kockán:



c) A σ_n , τ_{nm} , σ_m , τ_{mn} feszültségkoordináták kiszámítása:

n normálisú felület:

1. lépés: Az $\vec{n}$ normálisú felületen fellépő feszültségvektor:

$$\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}}_P \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & -30 \\ 0 & -20 & 0 \\ -30 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 - 15\sqrt{3} \\ 0 \\ -15 + 10\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.019 \\ 0 \\ 2.3205 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

2. lépés: Az $\vec{n}$ normálisú síkon ébredő σ_n and τ_{mn} feszültségkoordináták.

Megjegyzés A: σ_n és τ_{nm} a $\vec{\rho}_n$ feszültségvektor skalár koordinátái, így a $\vec{\rho}_n$ feszültségvektor $\vec{n}$ és $\vec{m}$ irányegységvektorokkal vett skaláris szorzataként számíthatók.

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 - 15\sqrt{3} \\ 0 \\ -15 + 10\sqrt{3} \end{bmatrix} = 25 - 7.5\sqrt{3} - 7.5\sqrt{3} + 15 = 14.019 \text{ MPa}$$

$$\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 - 15\sqrt{3} \\ 0 \\ -15 + 10\sqrt{3} \end{bmatrix} = -25\sqrt{3} + 22.5 - 7.5 + 5\sqrt{3} = -19.641 \text{ MPa}$$

m normálisú felület:

1. lépés: Az $\vec{m}$ normálisú felületen fellépő feszültségvektor:

$$\vec{\rho}_m = \underline{\underline{F}}_P \cdot \vec{m} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & -30 \\ 0 & -20 & 0 \\ -30 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50\sqrt{3}-15 \\ 0 \\ 15\sqrt{3}+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101.603 \\ 0 \\ 35.981 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

2. lépés: Az $\vec{m}$ normálisú síkon ébredő σ_m and τ_{nm} feszültségkoordináták.

$$\sigma_m = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_m = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -50\sqrt{3}-15 \\ 0 \\ 15\sqrt{3}+10 \end{bmatrix} = 75 + 7.5\sqrt{3} + 7.5\sqrt{3} + 5 = 105.981 \text{ MPa}$$

$$\tau_{nm} = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_m = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -50\sqrt{3}-15 \\ 0 \\ 15\sqrt{3}+10 \end{bmatrix} = -25\sqrt{3} - 7.5 + 22.5 + 5\sqrt{3} = -19.641 \text{ MPa}$$

Megjegyzés: látható, hogy, τ_{nm} -re ugyanaz jött ki, mint τ_{mn} -re. Ez a csúsztatófeszültségek dualitásának tételéből adódik: $\tau_{nm} = \tau_{mn}$, tehát ezt felhasználva τ_{nm} -et valójában ki sem kellett volna már számolnunk.

d) Főfeszültségek és feszültségi főtengetyvek a P pontban:

- $\vec{e}$ normálisú főfeszültségi síkon ébredő főfeszültség esetén $\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e}$, azaz nem lép fel csúsztató feszültség.
- Mint minden feszültségvektor, $\vec{\rho}_e$ a feszültségtenzorból az alábbi módon számítható: $\vec{\rho}_e = \underline{\underline{F}}_P \cdot \vec{e}$
- Az előbbi két összefüggés alapján: $\underline{\underline{F}}_P \cdot \vec{e} = \sigma_e \vec{e}$
- Szorozzuk meg a jobboldalt egy egységmátrixszal: $\underline{\underline{F}}_P \cdot \vec{e} = \sigma_e \underline{\underline{E}} \vec{e}$
- Vonjuk ki a baloldalt és emeljük ki $\vec{e}$ -t: $(\underline{\underline{F}}_P - \sigma_e \underline{\underline{E}}) \vec{e} = \vec{0}$
- Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így 2 lehetőség van:
 - $\vec{e} = \vec{0}$ (ez a triviális megoldás, ezzel nem foglalkozunk)
 - $\det[\underline{\underline{F}}_P - \sigma_e \underline{\underline{E}}] = 0$ (ez a nem-triviális megoldás feltétele)
 - (Ez a **karakterisztikus egyenlet**)

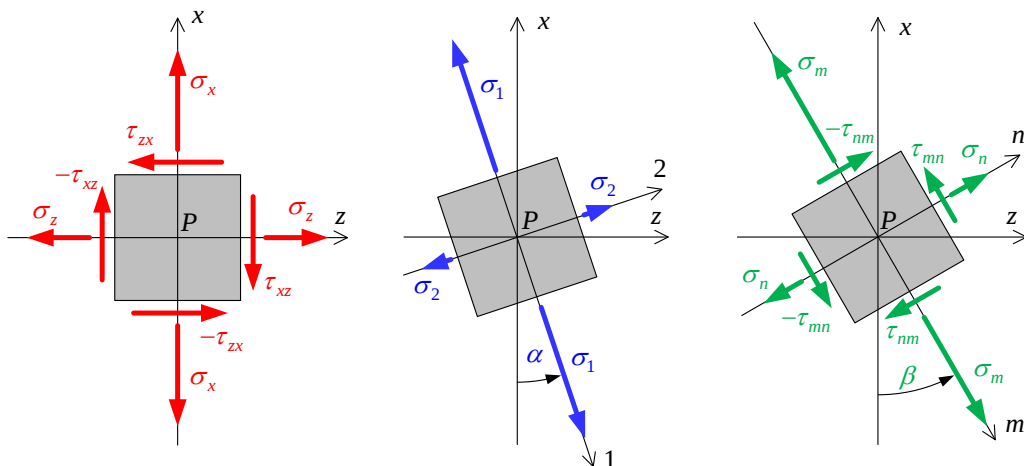
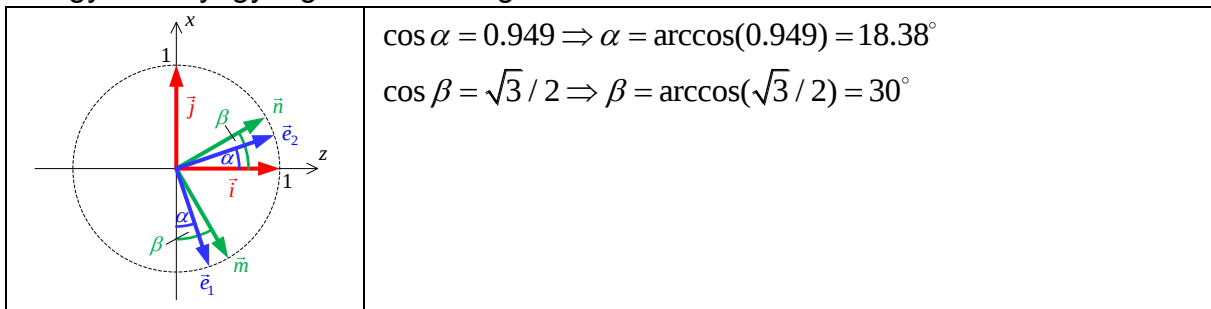
$(\underline{\underline{F}}_p - \sigma_e \underline{\underline{E}}) \vec{e} = \vec{0}$	
1. lépés: sajátértékek ($\rightarrow$ főfeszültségek)	2. lépés: sajátvektorok ($\rightarrow$ főirányok)
A karakterisztikus egyenlet: $\det[\underline{\underline{F}}_p - \sigma_e \underline{\underline{E}}] = 0$ Kibontott mátrixokkal: $\begin{bmatrix} 100 & 0 & -30 \\ 0 & -20 & 0 \\ -30 & 0 & 20 \end{bmatrix} - \sigma_e \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 100 - \sigma_e & 0 & -30 \\ 0 & -20 - \sigma_e & 0 \\ -30 & 0 & 20 - \sigma_e \end{vmatrix} = 0$ Fejtsük ki a determinánst a 2. sor szerint: $(-20 - \sigma_e)[(100 - \sigma_e)(20 - \sigma_e) - (-30)(-30)] = 0$ Mindig aszerint a sor szerint fejtünk ki, amelyikben 2 0 is van! $(-20 - \sigma_e)[2000 - 100\sigma_e - 20\sigma_e + \sigma_e^2 - 900] = 0$ $(-20 - \sigma_e)[\sigma_e^2 - 120\sigma_e + 1100] = 0$ Az első tényezőből: $\sigma_e = -20$ MPa A második tényezőből: $\sigma_e = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1100}}{2 \cdot 1} = < \frac{110}{10} \text{ MPa}$ A kapott értékeket csökkenő sorrendbe rakva: $\sigma_1 = 110 \text{ MPa}$ $\sigma_2 = 10 \text{ MPa}$ $\sigma_3 = -20 \text{ MPa}$ e) Feszültségtenzor a főirányok koordináta rendszerében: $\underline{\underline{F}}_{p,1,2,3} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$	1) σ_3 -hoz tartozó főirány: $\sigma_3 = \sigma_y \Rightarrow \vec{e}_3 = \vec{j}$ 2) σ_1 -hez tartozó főirány: $(\underline{\underline{F}}_p - \sigma_1 \underline{\underline{E}}) \vec{e}_1 = \vec{0}$ Kibontott mátrixokkal: $\left(\begin{bmatrix} 100 & 0 & -30 \\ 0 & -20 & 0 \\ -30 & 0 & 20 \end{bmatrix} - 110 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 100 - 110 & 0 & -30 \\ 0 & -20 - 110 & 0 \\ -30 & 0 & 20 - 110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -10 & 0 & -30 \\ 0 & -130 & 0 \\ -30 & 0 & -90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ A fenti mátrixegyenlet skalár alakban: $\begin{cases} -10x_1 - 30z_1 = 0 \\ -130y_1 = 0 \\ -30x_1 - 90z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3z_1 \\ y_1 = 0 \\ x_1 = -3z_1 \end{cases}$ Az 1) és 3) egyenlet ugyanaz, így 1 egyenletünk van 2 ismeretlennel $\rightarrow$ Az egyik változónak bármilyen (nem nulla) értéket adhatunk, pl. legyen : $z_1 = 1 \Rightarrow x_1 = -3$ A sajátvektor nagysága: $s_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ Az 1-es főirány irányegységvektora: $\vec{e}_1 = \frac{x_1}{s_1} \vec{i} + \frac{y_1}{s_1} \vec{j} + \frac{z_1}{s_1} \vec{k} =$ $= \frac{-3}{\sqrt{10}} \vec{i} + \frac{0}{\sqrt{10}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{10}} \vec{k} = \frac{1}{\sqrt{10}} (-3\vec{i} + \vec{k}) =$ $= -0.949\vec{i} + 0.316\vec{k}$ 3) σ_2 -höz tartozó főirány: $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{j} \times \frac{1}{\sqrt{10}} (-3\vec{i} + \vec{k}) =$ $= \frac{1}{\sqrt{10}} (-3 \underset{-\vec{k}}{\vec{j} \times \vec{i}} + \underset{\vec{i}}{\vec{j} \times \vec{k}}) = \frac{1}{\sqrt{10}} (\vec{i} + 3\vec{k}) =$ $= 0.316\vec{i} + 0.949\vec{k}$

Megjegyzések:

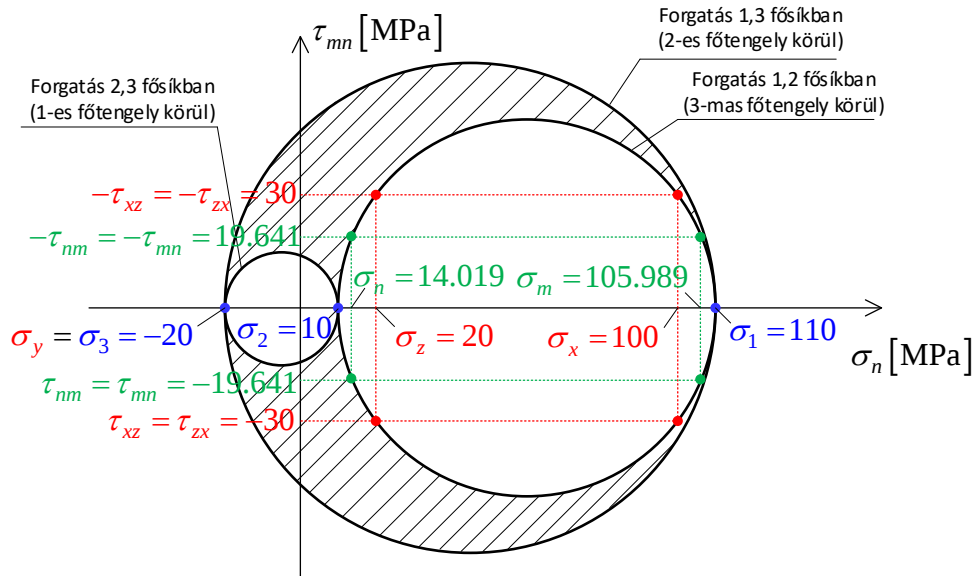
- Már a feladat elején megfigyelhetjük, hogy az y tengelyre merőleges síkon csak σ_y normál feszültség lép fel. Ezt láthatjuk az elemi kockán is, illetve a feszültségtenzorból is, mivel σ_y oszlopában (és emiatt sorában is) a csúsztatófeszültségek 0-ák. Így bármilyen számítás nélkül már a feladat legelején megállapíthatjuk, hogy $\sigma_y = -20$ MPa egy főfeszültség, az y irány pedig egy főirány.
- Amit a feladat elején még nem tudunk, hogy ez az 1., 2. vagy 3. főfeszültség/főirány. A főfeszültségek sajátértékként való kiszámítása után derült ki, hogy a σ_y a 3. főfeszültség, ebből következően az y irány a 3. főirány ($\sigma_3 = \sigma_y \Rightarrow \vec{e}_3 = \vec{j}$).
- Jobboldalt a 2)-ben a σ_1 -hez tartozó főirány lett meghatározva. Ehelyett természetesen választhattuk volna a σ_2 -höz tartozó főirányt is.
- a 3)-ban 2 lehetőségünk van
 - a 2)-höz hasonlóan számolunk, vagy
 - kihasználjuk, hogy az $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ főirányok jobbsodratú rendszert alkotnak, így ha 2-őt ismerünk közülük, a 3. egy vektoriális szorzással kiadódik.
- Ez a feladat tehát abból a szempontból speciális, hogy a 3 főfeszültség/főirány közül az egyik már a feladat legelején ismert. Természetesen ha ez a feltétel nem teljesül, a feladat akkor is megoldható, csak körülményesebb a számítás, emiatt zh-n/vizsgán csak ezen feladathoz hasonló speciális eset várható.

f) szemléltetés elemi kockán y tengely felől szemlélve:

Az egyes irányegységvektorok szögei:



g) Feszültségállapot szemléltatése feszültségi Mohr körökkel:



Megjegyzések:

- Az egyes főténgelyekre merőlegesen (azaz az egyes fősíkokban) felvett irányokhoz tartozó $\sigma_n - \tau_{mn}$ értékpárok köröket alkotnak (feszültségi Mohr körök). Ezen körök láthatók a fenti ábrán.
- Bármely irányhoz hozzárendelt $\sigma_n - \tau_{mn}$ értékpár ezen körök által közbezárt területen helyezkedik el (beszűzött terület)
- Ha felvesszük az adott x és y irányokhoz tartozó értékpárokat, valamint a kiszámított n és m irányokhoz tartozó értékpárokat (valamint az ezzel ellentétes irányokhoz tartozó értékpárokat), megfigyelhető, hogy ezek mind az 1,2 fősík Mohr körén helyezkednek el, mivel ezen irányok mind ezen fősíkokban vannak (piros és zöld pontok).

f) Redukált feszültségek kiszámítása

- Coulomb elmélet szerint a redukált feszültség:

$$\sigma_{red} (Coulomb) = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) = |\sigma_1| = 110 \text{ MPa}$$

- Mohr elmélet szerint a redukált feszültség:

$$\sigma_{red} (Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = 110 - (-20) = 130 \text{ MPa}$$

- Huber-Mises-Hencky elmélet szerint a redukált feszültség:

$$\begin{aligned} \sigma_{red} (HMH) &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} [(110 - 10)^2 + (110 - (-20))^2 + (10 - (-20))^2]} = 117.9 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Megjegyzések:

- A Coulomb elmélet rideg anyagok esetén használandó, míg a Mohr és HMM elmélet alakítható anyagok esetén.
- A HMM elmélet reálisabb eredményt ad, a Mohr elmélet a HMM-nál jellemzően nagyobb értéket ad (max. 14%-kal nagyobbat), így a biztonság fele téved.
- Amennyiben $\sigma_1 = \sigma_2$ vagy $\sigma_2 = \sigma_3$ akkor $\sigma_{red}(\text{Mohr}) = \sigma_{red}(\text{HMM})$
- Amennyiben $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ akkor $\sigma_{red}(\text{Mohr}) = \sigma_{red}(\text{HMM}) = 0$ (hidrosztatikus feszültségállapot, mely nem károsít).
- A Huber-Mises-Hencky féle redukált feszültség xyz koordinátarendszerben felírva:

$$\sigma_{red}(\text{HMM}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(100 - (-20))^2 + (100 - 20)^2 + (-20 - 20)^2 + 6(0^2 + 30^2 + 0^2) \right]} = 117.9 \text{ MPa}$$

g) Alakváltozási állapot a P pontban

Általános Hooke-törvény alapján: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}} \right)$

ahol:

- $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0.3)} = 76923 \text{ MPa}$ (csúsztató rugalmassági modulus)
- $F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 110 + 10 - 20 = 100 \text{ MPa}$ (feszültségtenzor első skalár invariánsa)
- $\underline{\underline{E}}$: 3x3-mas egységmátrix
- $\frac{\nu}{1+\nu} F_I = \frac{0.3}{1+0.3} \cdot 100 = 23.08 \text{ MPa}$

Általános Hooke-törvény kibontott mátrixokkal:

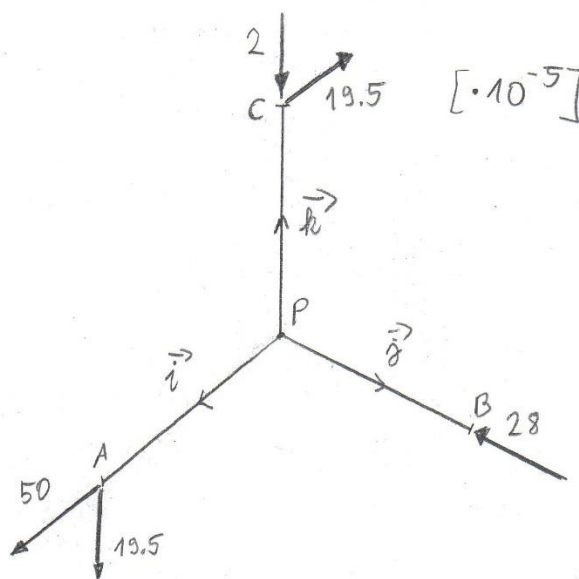
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} = \frac{1}{2G} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{F}}} - \frac{\nu}{1+\nu} \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{F_I} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{E}}} \right)$$

fajlagos nyúlások:	fajlagos szögtorzulások:
$\varepsilon_x = \frac{1}{2G} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \cdot 1 \right) =$ $= \frac{1}{2 \cdot 76923} (100 - 23.08 \cdot 1) = 5 \cdot 10^{-4}$	$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{yx} = \frac{1}{2G} \left(\tau_{xy} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \cdot 0 \right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{0}{76923} = 0$
$\varepsilon_y = \frac{1}{2G} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \cdot 1 \right) =$ $= \frac{1}{2 \cdot 76923} (-20 - 23.08 \cdot 1) = -2.8 \cdot 10^{-4}$	$\frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{zx} = \frac{1}{2G} \left(\tau_{xz} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \cdot 0 \right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{-30}{76923} = -3.9 \cdot 10^{-4}$
$\varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left(\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \cdot 1 \right) =$ $= \frac{1}{2 \cdot 76923} (20 - 23.08 \cdot 1) = -2 \cdot 10^{-5}$	$\frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{zy} = \frac{1}{2G} \left(\tau_{yz} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \cdot 0 \right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{0}{76923} = 0$

Alakváltozási tenzor mátrixa:

$$\underline{\underline{A}}_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & -19.5 \\ 0 & -28 & 0 \\ -19.5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

h) P pontbeli alakváltozási állapot szemléltetése elemi triéderen



i) Főnyúlások meghatározása

Megjegyzés: 2 lehetőségünk van:

- Vagy megoldjuk a $(\underline{\underline{A}}_p - \varepsilon_e \underline{\underline{E}})\vec{e} = \vec{0}$ sajátérték feladatot (hasonlóan, ahogy azt a d) pontban tettük a feszültségre)
- Vagy alkalmazzuk az általános Hooke törvényt a főirányok koordináta rendszerében.

Mivel már kiszámítottuk a főfeszültségeket, az utóbbi módszert alkalmazzuk.

A főnyúlások:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2G} \left(\sigma_1 - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \cdot 1 \right) = \frac{1}{2 \cdot 76923} (110 - 23.08 \cdot 1) = 5.65 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2G} \left(\sigma_2 - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \cdot 1 \right) = \frac{1}{2 \cdot 76923} (10 - 23.08 \cdot 1) = -8.5 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2G} \left(\sigma_3 - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \cdot 1 \right) = \frac{1}{2 \cdot 76923} (-20 - 23.08 \cdot 1) = -2.8 \cdot 10^{-4}$$

j) Alakváltozási tenzor a főirányok koordinátarendszerében

$$\underline{\underline{A}}_{p,1,2,3} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56.5 & 0 & 0 \\ 0 & -8.5 & 0 \\ 0 & 0 & -28 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

A főfeszültségekhez tartozó főirányok, illetve a főnyúlásokhoz tartozó főirányok azonosak.

A feladat Matlab kódja:

```
clear all
clc

% DATA INPUT %%%%%%%%%%%%%%
% Stress tensor elements:
Sx=100;
Sy=-20;
Sz=20;
Txy=0;
Txz=-30;
Tyx=0;

% given directions:
n=[1/2;0;sqrt(3)/2];
m=[-sqrt(3)/2;0;1/2];

% Material properties:
E=2e5; % Young's modulus
nu=0.3; % Poisson's ratio
```

```

% STRESS TENSOR %%%%%%%%%%%%%%
F=[Sx Txy Txz
   Txy Sy Tyz
   Txz Tyz Sz];

% STRESS COORDINATES (Sn and Tmn)%%%%%%%%
Rn=F*n;
Sn=n'*Rn
Tmn=m'*Rn

% PRINCIPAL STRESSES/AXES %%%%%%%%%%%%%%
[V,D]=eig(F,'vector');
% Principal stresses:
[S123,idx]=sort(D,'descend');
S1=S123(1);
S2=S123(2);
S3=S123(3);
% Stress tensor in the csys of the principal axes:
F123=diag(S123)
% Principal axes:
e123=V(:,idx)

% EQUIVALENT STRESSES %%%%%%%%%%%%%%
S_Coulomb=max(abs(S1),abs(S3))
S_Mohr=S1-S3
S_HMH=sqrt(0.5*((S1-S2)^2+(S1-S3)^2+(S2-S3)^2))

% STRAIN TENSOR %%%%%%%%%%%%%%
G=E/(2*(1+nu));
FI=sum(diag(F));
A=1/(2*G)*(F-(nu/(1+nu))*FI*eye(3))

% PRINCIPAL STRAIN %%%%%%%%%%%%%%

% Method 1:
[V,D]=eig(A,'vector');
% Principal strains:
[E123,idx]=sort(D,'descend');
% Strain tensor in the csys of the principal axes:
A123=diag(E123)
% Principal axes:
e123=V(:,idx)

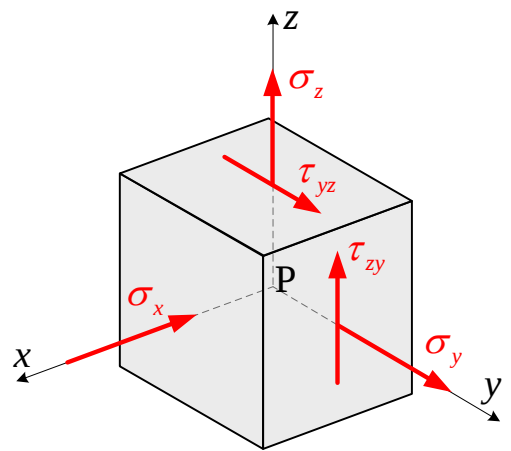
% Method 2:
A123=1/(2*G)*(F123-(nu/(1+nu))*FI*eye(3))

```

2. feladat

Egy test P pontja körüli elemi környezet feszültségi állapotát az ábra szemlélteti. Tudjuk, hogy $\sigma_x = -416 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 640 \text{ MPa}$, $\sigma_z = 512 \text{ MPa}$. Az ábrán nem jelölt csúsztatófeszültségek értéke nulla, a τ_{yz} csúsztatófeszültség értékét azonban nem ismerjük. Tudjuk még továbbá, hogy az egyik főfeszültség értéke 496 MPa .

Feladat: Mohr-féle és Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültség.



A feszültség tenzor:

$$\underline{\underline{F}}_P = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -416 & 0 & 0 \\ 0 & 640 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & 512 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\det \left[\underline{\underline{F}}_P - \sigma_e \underline{\underline{E}} \right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} -416 - \sigma_e & 0 & 0 \\ 0 & 640 - \sigma_e & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & 512 - \sigma_e \end{vmatrix} = 0$$

$$(-416 - \sigma_e) \left[(640 - \sigma_e)(512 - \sigma_e) - \tau_{yz}^2 \right] = 0$$

$$(-416 - \sigma_e) \left[327680 - 640\sigma_e - 512\sigma_e + \sigma_e^2 - \tau_{yz}^2 \right] = 0$$

$$(-416 - \sigma_e) \left[\sigma_e^2 - 1152\sigma_e + 327680 - \tau_{yz}^2 \right] = 0$$

$$\sigma_e^2 - 1152\sigma_e + 327680 - \tau_{yz}^2 = 0$$

Tudjuk, hogy az egyik főfeszültség 496 MPa , így ezt helyettesítsük be σ_e helyére:

$$496^2 - 1152 \cdot 496 + 327680 - \tau_{yz}^2 = 0$$

$$\tau_{yz}^2 = 496^2 - 1152 \cdot 496 + 327680 = 2304 \text{ MPa}^2$$

$$\sigma_e^2 - 1152\sigma_e + 327680 - 2304 = 0$$

$$\sigma_e^2 - 1152\sigma_e + 325376 = 0$$

$$\sigma_e = \frac{1152 \pm \sqrt{1152^2 - 4 \cdot 1 \cdot 325376}}{2 \cdot 1} = < \begin{matrix} 656 \text{ MPa} \\ 496 \text{ MPa} \end{matrix}$$

A főfeszültségek:

$$\sigma_1 = 656 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 496 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -416 \text{ MPa}$$

Redukált feszültségek:

- Mohr elmélet szerint a redukált feszültség:

$$\sigma_{red} (Mohr) = \sigma_1 - \sigma_3 = 656 - (-416) = 1072 \text{ MPa}$$

- Huber-Mises-Hencky elmélet szerint a redukált feszültség:

$$\begin{aligned} \sigma_{red} (HMH) &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(656 - 496)^2 + (656 - (-416))^2 + (496 - (-416))^2 \right]} = 1001.63 \text{ MPa} \end{aligned}$$