

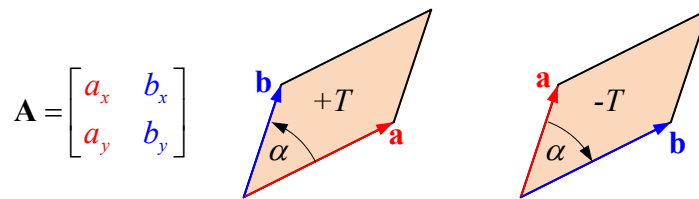
MÁTRIX DETERMINÁNSA

Négyzetes mátrixok esetén értelmezhetjük a determináns fogalmát, mely a mátrixhoz egy számot rendel hozzá, mely szám a mátrixnak egy igen fontos jellemzője, mivel ez alapján több minden is megállapítható a mátrixról.

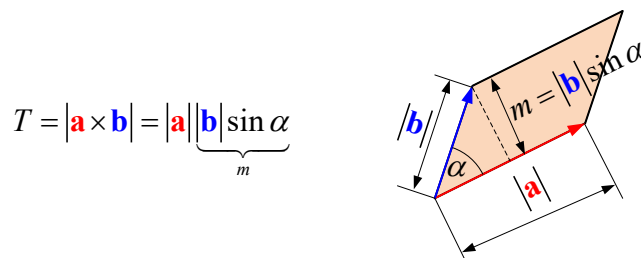
Egy $\mathbf{A}$ mátrix determinánsának jele: $\det(\mathbf{A})$ vagy $|\mathbf{A}|$

Determináns kétdimenziós esetben

Kétdimenziós esetben a determináns szemléletes jelentése a mátrix oszlopaiban elhelyezkedő oszlopvektorok által kifeszített paralelogramma előjeles területe. Az előjeles azt jelenti, hogy ha az 1. és a 2. oszlopban elhelyezkedő vektorok jobbsoderású rendszert alkotnak, akkor pozitív, ellenkező esetben negatív.



A vektoriális szorzás geometriai jelentésénél láttuk, hogy az pont a két vektor által kifeszített paralelogramma területe:



Tehát valójában az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatát kell vennünk. A fenti terület nem előjeles, mivel abszolútértéket vettünk. Az előjeles területhez végezzük el a vektoriális szorzást koordinátákkal:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}) = \\ &= a_x b_x \underbrace{\mathbf{i} \times \mathbf{i}}_0 + a_x b_y \underbrace{\mathbf{i} \times \mathbf{j}}_{\mathbf{k}} + a_y b_x \underbrace{\mathbf{j} \times \mathbf{i}}_{-\mathbf{k}} + a_y b_y \underbrace{\mathbf{j} \times \mathbf{j}}_0 = \\ &= a_x b_y \mathbf{k} - a_y b_x \mathbf{k} = (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}\end{aligned}$$

A paralelogramma előjeles területe a vektoriális szorzás eredményének $\mathbf{z}$ irányú koordinátája, azaz:

$$\det(\mathbf{A}) = a_x b_y - a_y b_x$$

Megfigyelve az eredeti mátrixot és az eredményt, azt tapasztaljuk, hogy:

2x2-es mátrix esetén a determináns a főátló és mellékátló szorzatainak különbsége:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x$$

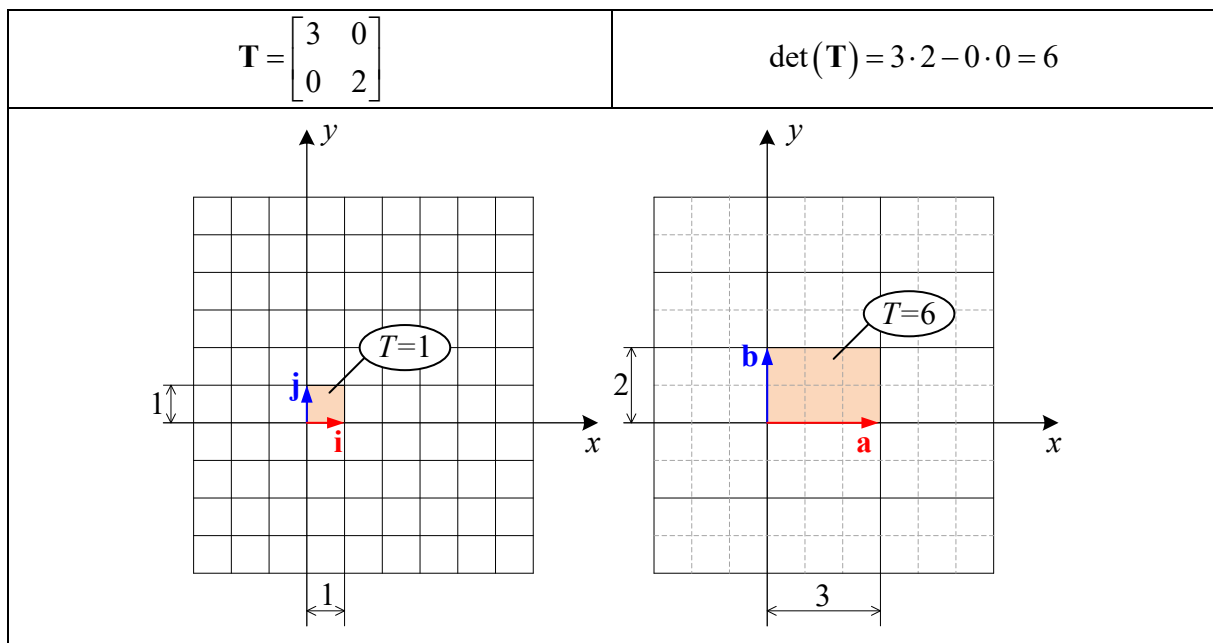
Most tekintsünk úgy az $\mathbf{A}$ mátrixra, mint egy tenzorra. Ebben az esetben az 1. és 2. oszlopokban az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ irányegységvektorok képvektorait láthatjuk. Azt mondhatjuk, hogy:

- Az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ irányegységvektorok az xy síkban kifeszítenek egy $T=1$ területű paralelogrammát (ami konkrétan egy négyzet)
- Az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ irányegységvektorok képvektorai, azaz az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok kifeszítenek egy $\det(\mathbf{A})$ területű paralelogrammát.

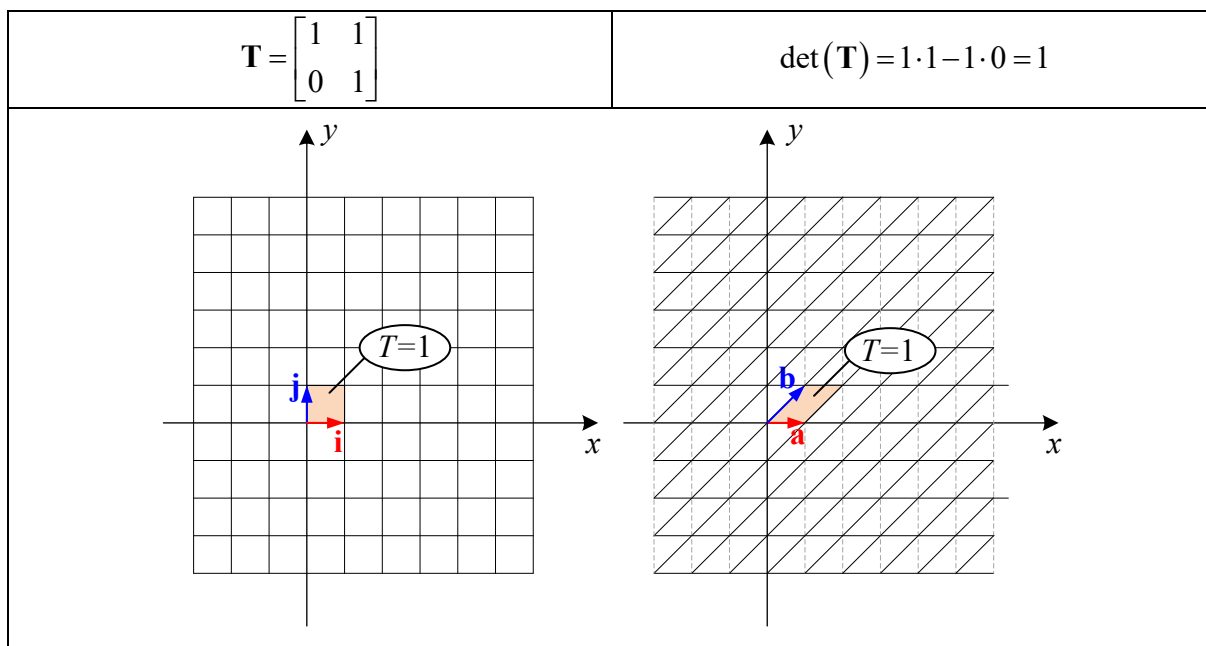
Azaz az $\mathbf{A}$ tenzorral való transzformálás után az egységnyi területből $\det(\mathbf{A})$ nagyságú terület lett. Ezek után, ha veszünk bármilyen 2 vektort a síkban, amik kifeszítenek egy valamekkora területű paralelogrammát, az $\mathbf{A}$ tenzorral való transzformálás után ezen terület $\det(\mathbf{A})$ -szorosára fog nőni.

Amennyiben a tenzorban szereplő egyik oszlopvektor a másik valahányszorosa (az oszlopvektorok lineárisan összefüggnek), akkor az általuk kifeszített paralelogramma területe 0, így a determináns is 0 lesz.

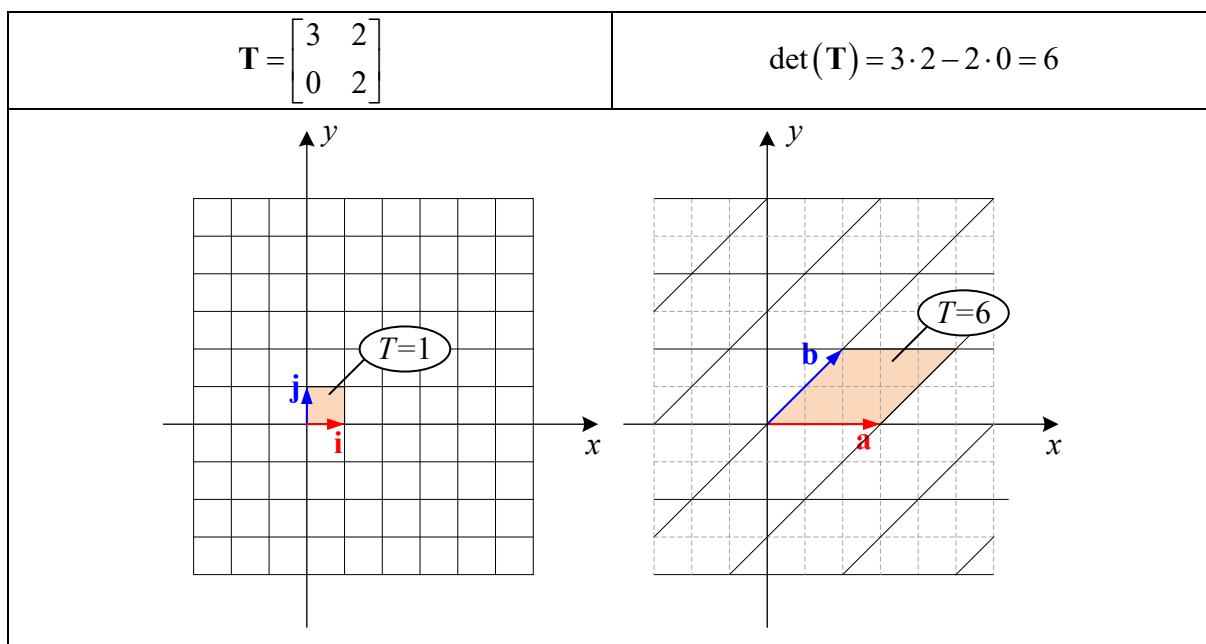
1. példa:



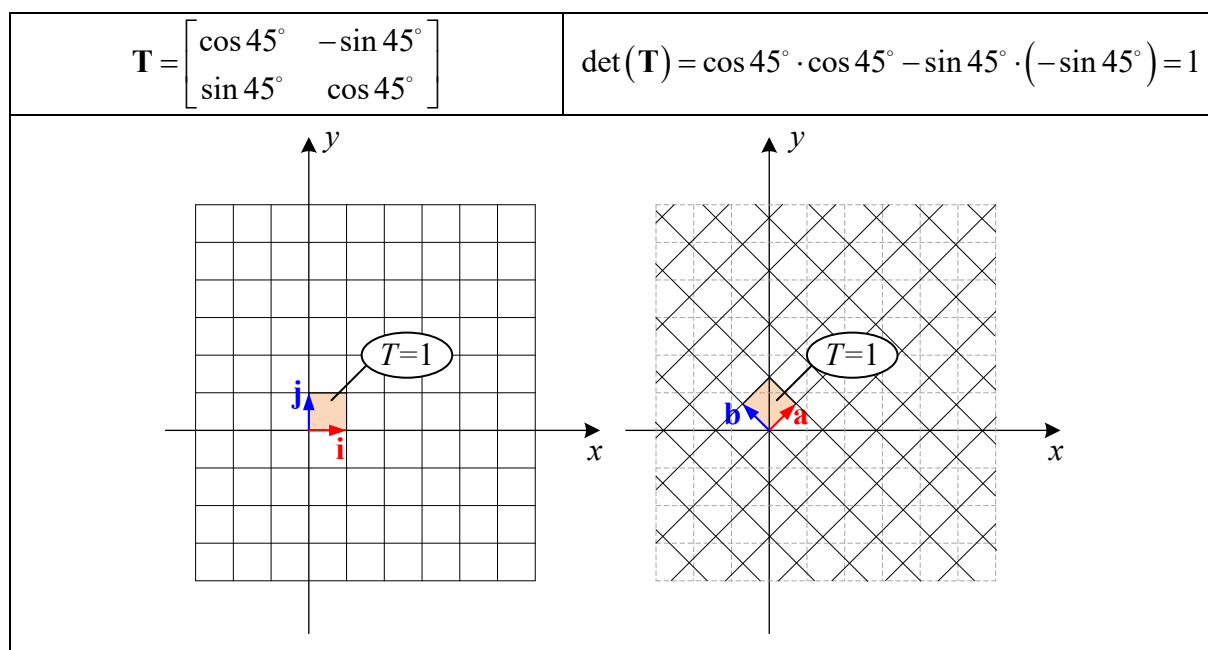
2. példa:



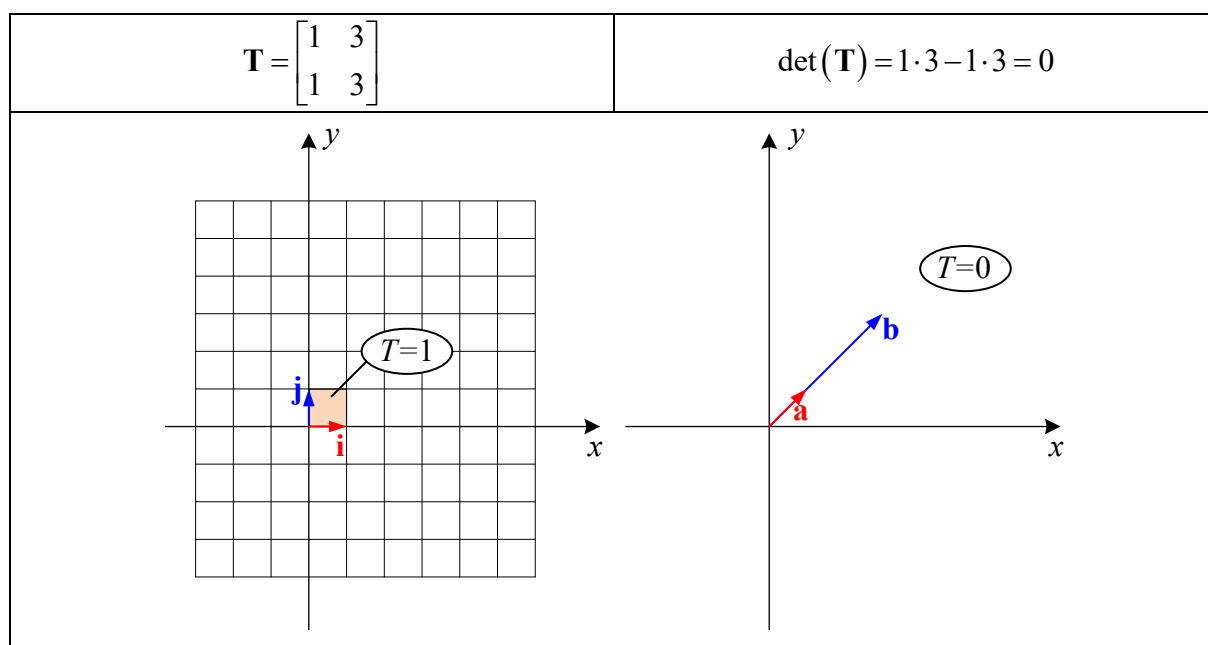
3. példa:



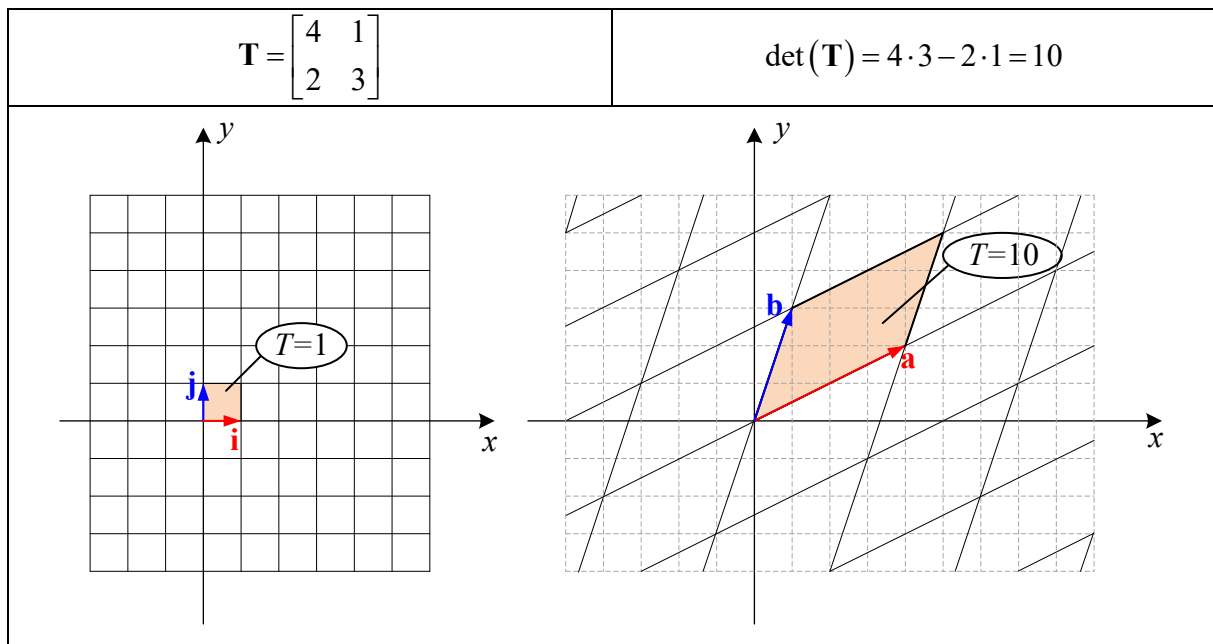
4. példa:



5. példa:



6. példa:



Determináns három és magasabb dimenziós esetekben

Háromdimenziós esetben egy mátrix determinánsa a mátrix oszlopaiban szereplő vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata.

Meghatározása vektorosan: vegyes szorzással: $V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

Magasabb dimenziós esetben már nem tudunk geometriai jelentést adni a determinánsnak, de az alább bemutatott kifejtési szabállyal bármekkora dimenzióban meghatározhatjuk a determinánst.

Determináns meghatározása kifejtési szabállyal:

Egy $n \times n$ méretű mátrix determinánsának kiszámításához válasszunk ki egy tetszőleges sort vagy oszlopot és ennek minden elemét szorozzuk meg a hozzá tartozó előjeles al-determinánssal, majd a kapott számokat összegezzük.

Előjeles al-determináns: Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak elhagyjuk az i -edik sorát és j -edik oszlopát, keletkezik egy $(n-1) \times (n-1)$ méretű mátrix. Ekkor az i -edik sor és j -edik oszlop metszéspontjában található elemhez tartozó al-determináns a létrejött $(n-1) \times (n-1)$ méretű mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ -szerese.

A fent leírtak képlettel megfogalmazva:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\mathbf{A}_{ij})$$

A $(-1)^{i+j}$ -vel való szorzás gyakorlatilag +1-gyel vagy -1-gyel való szorzást jelent. Hogy hol mivel kell szorozni az könnyen megjegyezhető a sakktáblaszabály alapján:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Példa:

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$	Első sor szerint kifejtve: $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} =$ $= 3 \cdot (8 \cdot 9 - 7 \cdot 1) - 5 \cdot (2 \cdot 9 - 4 \cdot 1) + 6 \cdot (2 \cdot 7 - 4 \cdot 8) = 17$
	Harmadik sor szerint kifejtve: $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} =$ $= 4 \cdot (5 \cdot 1 - 8 \cdot 6) - 7 \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 6) + 9 \cdot (3 \cdot 8 - 2 \cdot 5) = 17$
	Második oszlop szerint kifejtve: $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -5 \cdot (2 \cdot 9 - 4 \cdot 1) + 8 \cdot (3 \cdot 9 - 4 \cdot 6) - 7 \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 6) = 17$

MÁTRIX INVERZE

Egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix inverze az a négyzetes $\mathbf{A}^{-1}$ jelű mátrix, amivel megszorozva $\mathbf{A}$ mátrixot egységmátrixot kapunk:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

2x2-es mátrix inverzének meghatározása:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8 \cdot 2 - 6 \cdot 4} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.5 \\ 0.75 & -1 \end{bmatrix}$$

Ellenőrzés:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.25 & 0.5 \\ 0.75 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & -4+4 \\ -1.5+1.5 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát valóban egységmátrixot kaptunk.

Egy másik példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8 \cdot 3 - 6 \cdot 4} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{0} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} = ???$$

A fenti példában a 2. oszlop az első fele, azaz az oszlopok lineárisan összefüggőek, így a determináns 0, emiatt 0-val kéne osztani, ami lehetetlen. Ennek a mátrixnak nincs inverze. Az ilyen nem invertálható mátrixokat **szinguláris mátrix**oknak szoktuk hívni.

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MÁTRIX ALAKJA

Tegyük fel, hogy adottak az a_{ij} és b_i valós számok, ahol $i = 1 \dots n$ és $j = 1 \dots n$, azaz n egyenletből és n ismeretlenből áll az egyenletrendszer. A feladat azon x_j számok megtalálása, amelyek kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Ez a hagyományos skalár egyenletrendszer alak az alábbi módon írható fel mátrix alakban: vezessünk be

- egy $n \times n$ méretű $\mathbf{A}$ együtthatómátrixot, amely az a_{ij} együtthatókat tartalmazza
- egy $\mathbf{b}$ oszlopmátrixot, mely az egyenletrendszer jobboldalán lévő számokat (szabad tagokat) tartalmazza.
- és egy $\mathbf{x}$ oszlopmátrixot, mely az ismeretleneket tartalmazza

Ha az így előállított mátrixokkal felírjuk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mátrixegyenletet az azonos lesz fent felírt skalár egyenletrendszerrel.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Az előzőekben ismertetett inverz segítségével a mátrixegyenletet az alábbi módon oldhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \quad / \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \underbrace{\mathbf{AA}^{-1}}_{\mathbf{E}} \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Amennyiben az összes szabad tag 0, azaz $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor az egyenletrendszert **homogén**nek nevezzük. Az ilyen egyenletrendszernek az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (azaz minden ismeretlen 0) mindig megoldása, ezt hívjuk triviális megoldásnak. Ettől eltérő, tehát nemtriviális megoldás akkor létezik, ha az együtthatómátrix szinguláris, azaz determinánsa 0. Ebben az esetben végtelen sok megoldás van.

Amennyiben $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ az egyenletrendszer **inhomogén**. Amennyiben az együttható mátrix determinánsa 0, azaz szinguláris, abban az esetben az ilyen egyenletrendszernek nincs megoldása.

1. példa: inhomogén egyenletrendszer, nonszinguláris együtthatómátrix

megoldás hagyományosan:	megoldás mátrixosan:
$\begin{cases} 1) & 8x_1 + 4x_2 = 4 \\ 2) & 6x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$ $1) \Rightarrow 4x_2 = 4 - 8x_1$ $x_2 = 1 - 2x_1$ $1) \rightarrow 2): 6x_1 + 2(1 - 2x_1) = 8$ $2x_1 = 6$ $x_1 = 3$ $1) \Rightarrow x_2 = 1 - 2 \cdot 3 = -5$	$\underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$ Az együttható mátrix inverzét az inverzszámításos példában már kiszámítottuk: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.5 \\ 0.75 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.5 \\ 0.75 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 4 \\ 3 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

2. példa: inhomogén egyenletrendszer, szinguláris együtthatómátrix

megoldás hagyományosan:	megoldás mátrixosan:
$\begin{cases} 1) & 8x_1 + 4x_2 = 4 \\ 2) & 6x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$ $1) \Rightarrow 4x_2 = 4 - 8x_1$ $x_2 = 1 - 2x_1$ $1) \rightarrow 2): 6x_1 + 3(1 - 2x_1) = 8$ $3 = 8$ Ez határozottan nem igaz, így ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása.	$\underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$ Az együttható mátrix determinánsa: $\det(\mathbf{A}) = 8 \cdot 3 - 6 \cdot 4 = 0$ Mivel a determináns 0, nem tudjuk venni az együttható mátrix inverzét, így az egyenletrendszer nem megoldható.

3. példa: homogén egyenletrendszer, nonszinguláris együtthatómátrix

megoldás hagyományosan:	megoldás mátrixosan:
$\begin{cases} 1) & 8x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2) & 6x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ $1) \Rightarrow 4x_2 = 0 - 8x_1$ $x_2 = -2x_1$ $1) \rightarrow 2): 6x_1 + 2(-2x_1) = 0$ $2x_1 = 0$ $x_1 = 0$ $1) \Rightarrow x_2 = 2 \cdot 0 = 0$	$\underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$ Az együttható mátrix inverzét az inverzszámításos példában már kiszámítottuk: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.5 \\ 0.75 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.5 \\ 0.75 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. példa: homogén egyenletrendszer, szinguláris együtthatómátrix

megoldás hagyományosan:	megoldás mátrixosan:
$\begin{cases} 1) & 8x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2) & 6x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ $1) \Rightarrow 4x_2 = 0 - 8x_1$ $x_2 = -2x_1$ $1) \rightarrow 2): 6x_1 + 3(-2x_1) = 0$ $0 = 0$ legyen $x_1 = c$ $1) \Rightarrow x_2 = -2x_1 = -2c$	$\underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_b$ Az együttható mátrix szinguláris így nem tudjuk venni az inverzét és mátrixos módon megoldani, de mivel az egyenletrendszer homogén, így végtelen sok megoldás van, ami a hagyományos megoldásból látható.

Látható, hogy ebben az esetben azonossághoz jutottunk, így x_1 -nek akármilyen értéket adhatunk, x_2 pedig ennek -2-szerese lesz.

MÁTRIX SAJÁTÉRTÉKE, SAJÁTVEKTORA

Tekintsük az alábbi tenzort:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

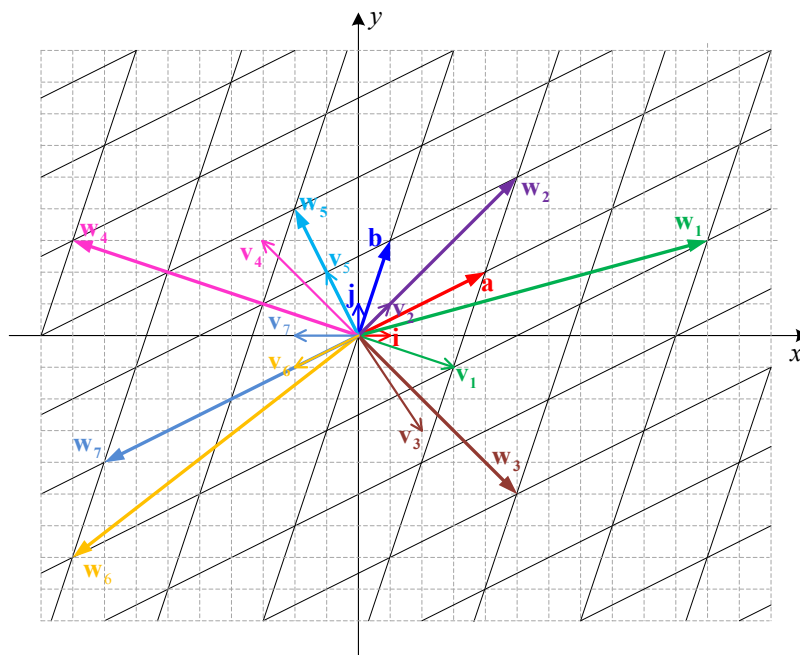
Határozzuk meg az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ irányegységvektorok, valamint $\mathbf{v}_1 = (3\mathbf{i} - \mathbf{j})$, $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{i} + \mathbf{j})$,

$\mathbf{v}_3 = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$, $\mathbf{v}_4 = (-3\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$, $\mathbf{v}_5 = (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$, $\mathbf{v}_6 = (-2\mathbf{i} - \mathbf{j})$, $\mathbf{v}_7 = (-2\mathbf{i} + 0\mathbf{j})$ képvektorait!

A számításokat az alábbi táblázatban végeztük el:

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_7$
	1	0	3	1	2	-3	-1	-2	-2
	0	1	-1	1	-3	3	2	-1	0
4 1	4	1	11	5	5	-9	-2	-9	-8
2 3	2	3	3	5	-5	3	4	-7	-4
	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{w}_1$	$\mathbf{w}_2$	$\mathbf{w}_3$	$\mathbf{w}_4$	$\mathbf{w}_5$	$\mathbf{w}_6$	$\mathbf{w}_7$

Ábrázoljuk ezeket a vektorokat xy síkban:



Mit tapasztalunk? A tenzor a vektorokat általánosságban megnyújtja és elforgatja vagy jobbra, vagy balra. Viszont feltűnhet, hogy van 2 olyan vektor, melyeket nem forgat el, csak megnyújt. Az egyik a $\mathbf{v}_2$, a másik a $\mathbf{v}_5$ vektorok. Ezen vektorokat nevezzük a tenzor sajátvektorainak. A megnyújtás során a $\mathbf{v}_2$ vektor 5-szörösére nyúlt, azaz $\mathbf{w}_2 = 5\mathbf{v}_2$, míg $\mathbf{v}_5$ vektor kétszeresére nyúlt, azaz $\mathbf{w}_5 = 2\mathbf{v}_5$. Tehát ezekben az esetekben a tenzorral való szorzás ugyanazt eredményezte, mintha egy skalár számmal szoroztuk volna meg a vektort. Ezeket a számokat (tehát amekkora értékkel a sajátvektorok megnyúltak) nevezzük a tenzor sajátértékeinek.

Egy $\mathbf{T}$ tenzor sajátvektorai azok a vektorok, melyek transzformáció során nem fordulnak el, csak megnyúlnak, míg a sajátértékei azok a skalárok, melyek a megnyúlás mértékét adják meg. A sajátvektorokat $\mathbf{q}$ -val, a sajátértékeket λ -val jelölve egy $\mathbf{T}$ tenzor sajátértékei és sajátvektorai azok a skalárok és vektorok, melyek teljesítik az alábbi egyenletet:

$$\mathbf{T}\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q}$$

A példánkban próbálgatással belefutottunk 2 sajátvektorba, de természetesen van módszer, mellyel ezeket meg tudjuk határozni, ezt tekintjük most át.

Sajátérték és sajátvektor kiszámítása

Induljunk ki a definícióból, szorozzuk meg mindkét oldalt egy egységmátrixszal (ezt büntetlenül megtehetjük, mivel az egységmátrixszal való szorzás nem változtatja meg a mátrixok/vektorok értékét), ezután vonjuk ki a jobb oldalt majd emeljük ki $\mathbf{q}$ -t:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\mathbf{q} &= \lambda\mathbf{q} \quad / \cdot \mathbf{E} \\ \underbrace{\mathbf{T}\mathbf{E}}_{\mathbf{T}}\mathbf{q} &= \lambda\mathbf{E}\mathbf{q} \quad / -\lambda\mathbf{E}\mathbf{q} \\ \mathbf{T}\mathbf{q} - \lambda\mathbf{E}\mathbf{q} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{q} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Azt tapasztalhatjuk, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszerhez jutottunk, ahol az együtthatómátrix $\mathbf{A} = (\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E})$. Ahogy azt az egyenletrendszeres résznél tapasztaltuk, egy ilyen egyenletrendszernek akkor van nemtriviális megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa 0. Mi most természetesen nemtriviális megoldást szeretnénk kapni, tehát azt kell megvizsgálunk, milyen λ paraméter esetén lesz az együtthatómátrix determinánsa 0, azaz:

$$\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

Ezt az egyenletet szokás **karakterisztikus egyenlet**nek is hívni. ha megvannak a szükséges λ paraméterek, azaz a sajátértékek, azt visszahelyettesítve a fenti homogén egyenletrendszerbe kiszámíthatjuk az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat.

Keressük meg a fenti példa tenzorának sajátértékeit és sajátvektorait ezzel a módszerrel.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1. lépés: sajátértékek meghatározása:

A karakterisztikus egyenlet behelyettesítve a fenti tenzort és az egységmátrixot:

$$\left[\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

Az egységmátrixot λ -val beszorozva egy λ -kat tartalmazó diagonálmátrixot kapunk:

$$\left[\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0$$

Kivonva a λ -kat tartalmazó diagonálmátrixot:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Látható tehát, hogy az eredeti tenzor főátlójában lévő elemekből kell kivonogatni a λ -kat, a fenti lépéseket nem kell ilyen részletesen leírogatni. Most fejtsük ki a fenti determinánst:

$$(4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \cdot 1 = 0$$

$$12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

Tehát egy másodfokú egyenlethez jutottunk. Alkalmazzuk rá a megoldó képletet:

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} = \frac{5}{2}$$

Ezzel megkaptuk a 2 sajátértéket. Ezeket általában nagyság szerint sorbarakjuk, azaz:

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 5$$

2. lépés: sajátvektorok meghatározása:

Most, hogy ismerjük a sajátértékeket ismertek a homogén lineáris egyenletrendszerünk együtthatómátrixai. Egyesével helyettesítsük be a kapott sajátértékeket és határozzuk meg a hozzájuk tartozó sajátvektorokat.

$\lambda_1 = 2$ -höz tartozó sajátvektor:	$\lambda_2 = 5$ -höz tartozó sajátvektor:
$(\mathbf{T} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$ $\begin{bmatrix} 4-\lambda_1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Átírva egyenletrendszer alakra: $\left. \begin{array}{l} 1) \ 2x_1 + 1y_1 = 0 \\ 2) \ -2x_1 + 1y_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 = -2x_1$ Látható, hogy a 2 egyenlet ugyanaz, így az egyik ismeretlennek szabadon választhatunk bármilyen 0-tól különböző értéket: legyen: $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = -2$ Tehát egy lehetséges sajátvektor:	$(\mathbf{T} - \lambda_2 \mathbf{E}) \mathbf{q}_2 = \mathbf{0}$ $\begin{bmatrix} 4-\lambda_2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Átírva egyenletrendszer alakra: $\left. \begin{array}{l} 1) \ -x_2 + y_2 = 0 \\ 2) \ 2x_2 - 2y_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y_2 = x_2$ Látható, hogy a 2 egyenlet ugyanaz, így az egyik ismeretlennek szabadon választhatunk bármilyen 0-tól különböző értéket: legyen: $x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1$ Tehát egy lehetséges sajátvektor:

$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ Természetesen ennek bármilyen skalárszorosa is sajátvektor, mivel x_1-et szabadon választottuk. $ \mathbf{q}_1 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{q}_1}{ \mathbf{q}_1 } = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.447 \\ -0.894 \end{bmatrix}$	$\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Természetesen ennek bármilyen skalárszorosa is sajátvektor, mivel x_2-őt szabadon választottuk. $ \mathbf{q}_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{q}_2}{ \mathbf{q}_2 } = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}$
---	---

Amennyiben a $\mathbf{T}$ tenzor szimmetrikus, a sajátvektorok mindig merőlegesek (ortogonálisak) egymásra. Ebben az esetben elég csak az egyik sajátvektort kiszámítani, a másik vektoriális szorzással kiadódik.

A számítógépek nem az ebben a leírásban bemutatott módszerekkel számolnak, mivel nagyméretű mátrixok esetén ezek a módszerek rendkívül lassúak (illetve numerikus kerekítési hibákból adódó pontatlanság is felléphet). Ehelyett különböző numerikus módszereket alkalmaznak, melyeket viszont papíron lenne körülményesebb alkalmazni. A leggyakrabban alkalmazott numerikus módszerek:

- determináns, inverz számítás, egyenletrendszer megoldás → Gauss elimináció
- sajátérték feladat megoldás → Lánczos módszer