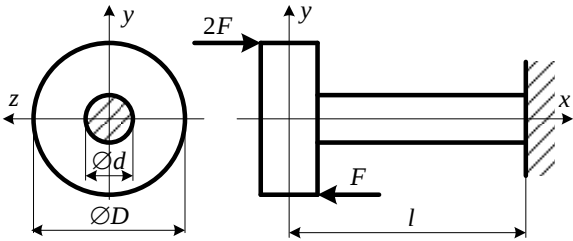


RUDAK ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEI 1 – EGYTENGELYŰ FESZÜLTÉGÁLLAPOT

A feszültségállapot egytengelyű, ha a feszültségtenzorban csak 1 nem-nulla elem van és ez a főátlóban helyezkedik el. Egytengelyű feszültségállapot húzás/nyomás valamint hajlítás esetén jön létre. Mivel mind húzás/nyomásból, mind hajlításból ugyanúgy σ_x normál feszültség adódik, ezeket simán összeadhatjuk, azaz ha ezeket az igénybevételeket kombináljuk, nem kell redukált feszültséget számítanunk.

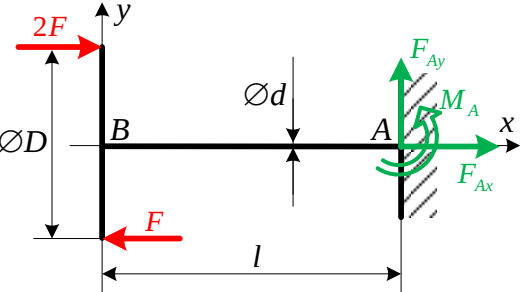
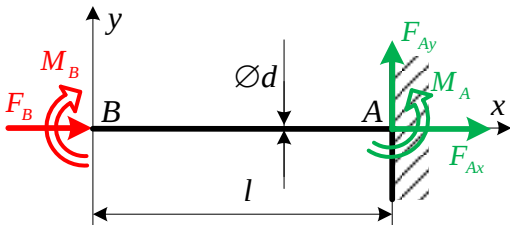
1. feladat: nyomás+hajlítás (ellenőrzés)

ADOTT:		FELADAT:
		$\sigma_{meg} = 120 \text{ MPa}$ $l = 80 \text{ cm}$ $D = 40 \text{ cm}$ $d = 10 \text{ cm}$ $F = 10 \text{ kN}$
		Ellenőrzés Zérusvonal

MEGOLDÁS:

0. lépés: Redukálás a közép vonalba

A rudak gyakran nem közvetlenül vannak terelve, hanem hozzájuk kapcsolódó merevnek tekintett alkatrészekre (pl. fogaskerék/tárcsa...) keresztül. Ebben a feladatban például egy merev tárcsa kapcsolódik a rúd végéhez és erre hatnak az erők. Ebben az esetben a 0. lépés ezen merev alkatrésze ható erőrendszer redukált vektorkettősségének kiszámítása a kapcsolódási pontba. Ezt követően a rúdhoz kapcsolódó alkatrésszel és az arra ható erőrendszerrel már nem foglalkozunk, hanem az ezt helyettesítő redukált vektorkettőssel számolunk. Amennyiben a rúd közvetlenül van terelve ez a lépés kimarad.

Mechanikai modell redukálás előtt:	Mechanikai modell redukálás után:
	
$F_B = 2F - F = F = 10 \text{ kN} (\rightarrow)$ $M_B = -\frac{D}{2} 2F - \frac{D}{2} F = -\frac{3D}{2} F = -\frac{3 \cdot 0.4}{2} \cdot 10 = -6 \text{ kNm}$	

1. lépés: Támasztó erőrendszer kiszámítása

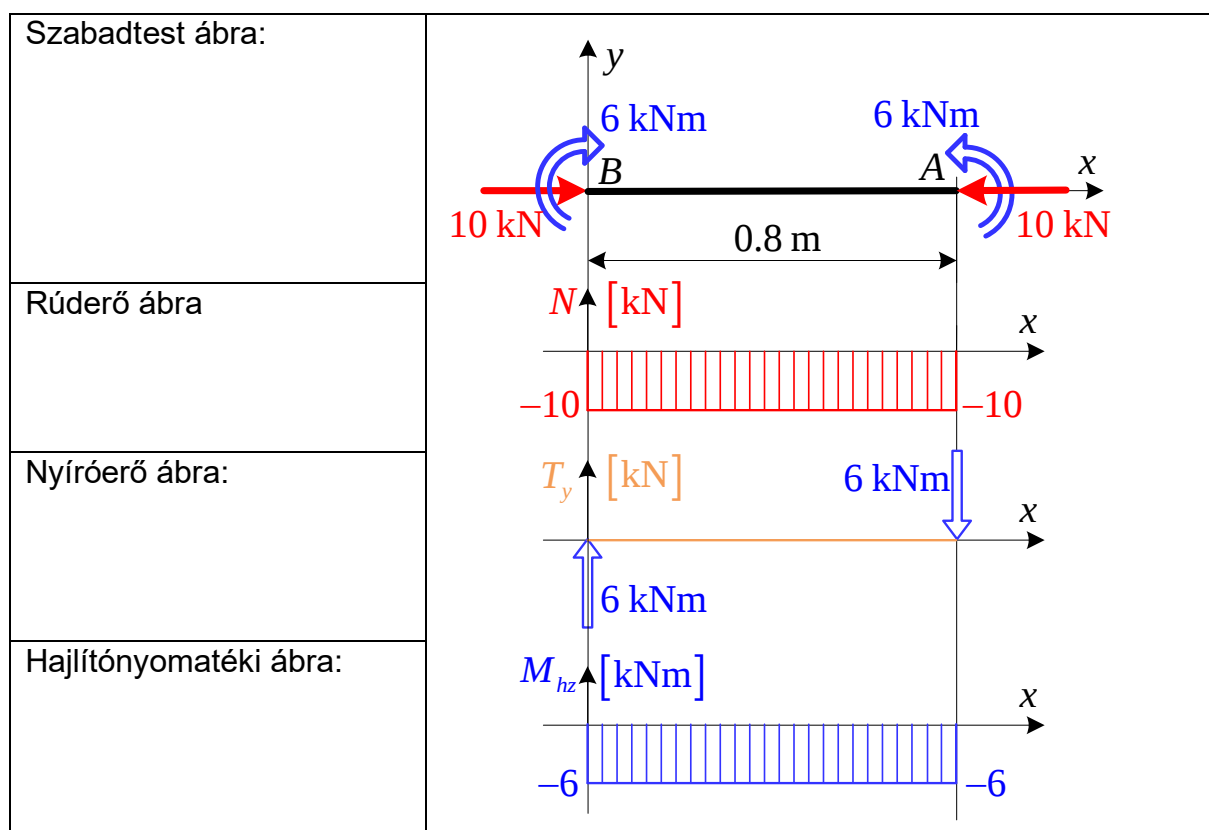
A támasztóerőket az előző lépés előtt is kiszámíthatnánk, azaz a 0. és 1. lépés feélcserélhető.

$$M_a = 0 = M_A - M_B \Rightarrow M_A = M_B = 6 \text{ kNm}$$

$$F_x = 0 = F_{Bx} + F_{Ax} \Rightarrow F_{Ax} = -F_{Bx} = -10 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$F_y = 0 = F_{Ay}$$

2. lépés: Szabadtestábra és igénybevételi ábrák



3. lépés: Veszélyes keresztmetszet(ek):

A veszélyes keresztmetszetek a rúd azon keresztmetszetei, ahol a legnagyobb igénybevételek lépnek fel. Általános esetben meg kell figyelni az összes igénybevételi ábra abszolútértékben vett maximumát. Így egy 2D feladat esetén a rúderő, nyíróerő és hajlítónyomaték szempontjából különböző helyeken lehetnek veszélyes keresztmetszetek.

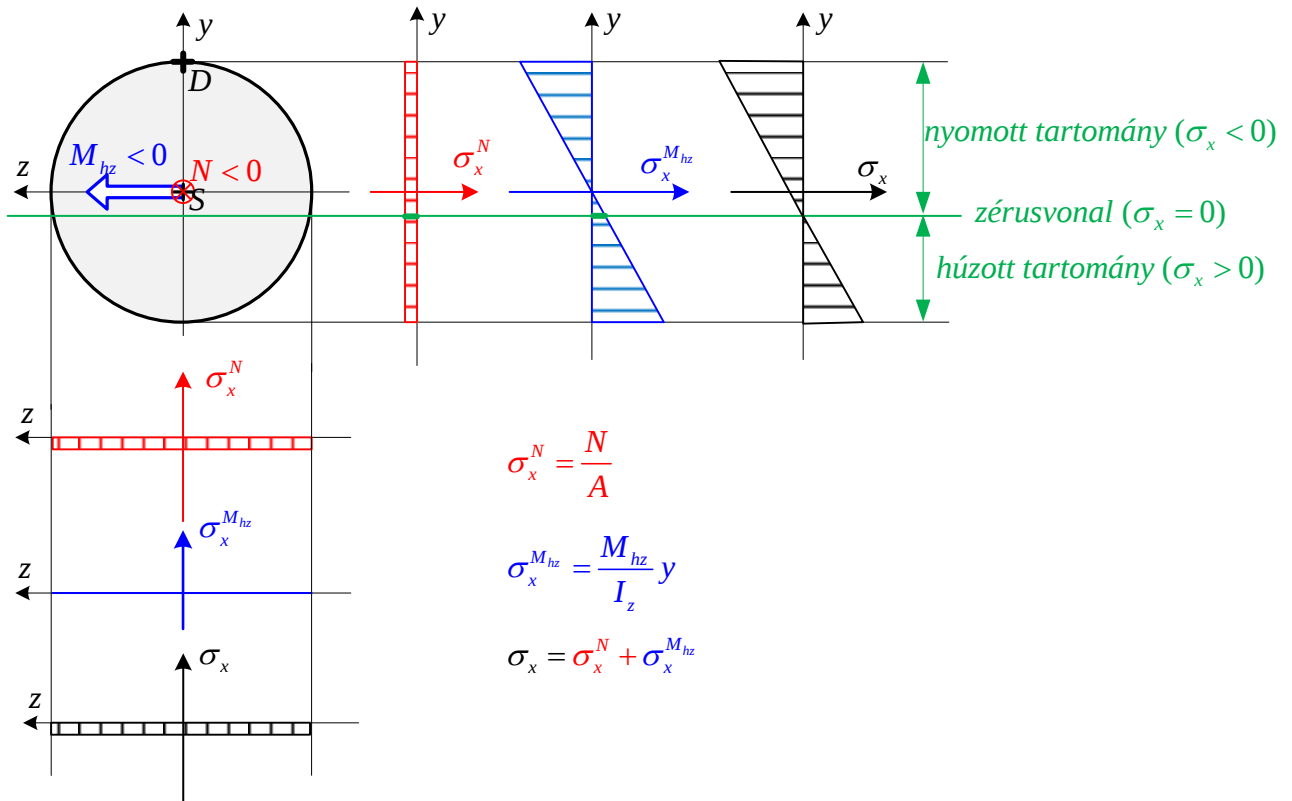
Jelen esetben mindhárom diagram konstans, így a rúd összes keresztmetszete veszélyes keresztmetszet.

A maximális igénybevételek (előjelhelyesen):

$$N = -10 \text{ kN} = -10000 \text{ N}$$

$$M_{hz} = -6 \text{ kNm} = -6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

4. lépés: Feszültségeloszlás a veszélyes keresztmetszeten y és z tengelyek mentén.



zérusvonal: A keresztmetszet azon pontjai, melyekre $\sigma_x = 0$.

A zérusvonal (amennyiben belemetsz a keresztmetszetbe) két részre bontja a keresztmetszetet:

- Húzott tartományra ($\sigma_x > 0$) és
- Nyomott tartományra ($\sigma_x < 0$)

Zérusvonal egyenlete húzás/nyomás + hajlítás esetén:

$$\sigma_x = 0 = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y \Rightarrow y = -\frac{N}{M_{hz}} \frac{I_z}{A}$$

5. lépés: veszélyes keresztmetszet veszélyes pontjainak meghatározása:

A veszélyes pont(ok) azon pontok, melyekben a legnagyobb feszültség lép fel.

Ezen pont(ok) mindig a zérusvonalától legtávolabbi pontok.

Veszélyes pont: D pont

6. lépés: ellenőrzés a veszélyes keresztmetszet veszélyes pontjában

- nyomásból adódó normálfeszültség:

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{100^2 \pi}{4} = 7853.98 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_x^N(D) = \sigma_x^N = \frac{N}{A} = \frac{-10000}{7853.98} = -1.27 \text{ MPa}$$

- hajlításból adódó normálfeszültség a D pontban:

$$I_z = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{100^4 \pi}{64} = 4908738.52 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_x^{M_{hz}}(D) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_D = \frac{-6 \cdot 10^6}{4908738.52} \cdot 50 = -61.12 \text{ MPa}$$

- nyomásból és hajlításból adódó normálfeszültség a D pontban:

$$\sigma_x(D) = \sigma_x^N(D) + \sigma_x^{M_{hz}}(D) = -1.27 \text{ MPa} - 61.12 \text{ MPa} = -62.39 \text{ MPa}$$

- A kialakuló maximális normálfeszültség:

$$\sigma_{x\max} = |\sigma_x(D)| = |-62.39| = 62.39 \text{ MPa}$$

- ellenőrzés:

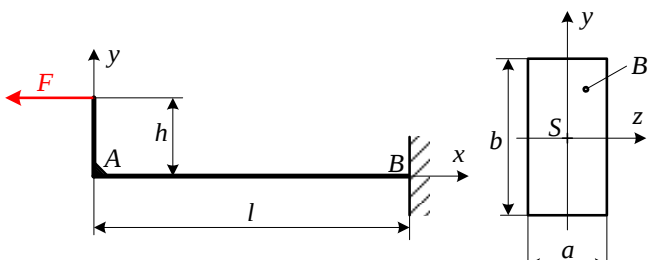
$$\sigma_{x\max} = 62.39 \text{ MPa} < \sigma_{meg} = 120 \text{ MPa}$$

A rúd szilárdságtanilag megfelel.

Zérusvonal egyenlete:

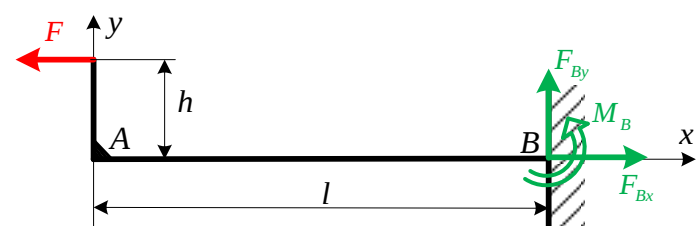
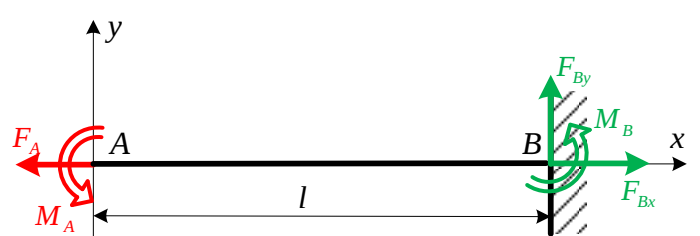
$$\sigma_x = 0 = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y \Rightarrow y = -\frac{N}{A} \frac{I_z}{M_{hz}} = -\frac{10000}{7853.98} \cdot \frac{4908738.52}{-6 \cdot 10^6} = -1.039 \text{ mm}$$

2. feladat: húzás+hajlítás (méretezés)

ADOTT:	FELADAT:
	$R_{p0.2} = 80 \text{ MPa}$ $n = 1.2$ $b = 2a$ $F = 10 \text{ kN}$ $l = 800 \text{ mm}$ $h = 100 \text{ mm}$

MEGOLDÁS

0. lépés: Redukálás a középvonalba

	
	$F_A = F = 10 \text{ kN} (\leftarrow)$ $M_A = hF = 0.1 \cdot 10 = 1 \text{ kNm}$

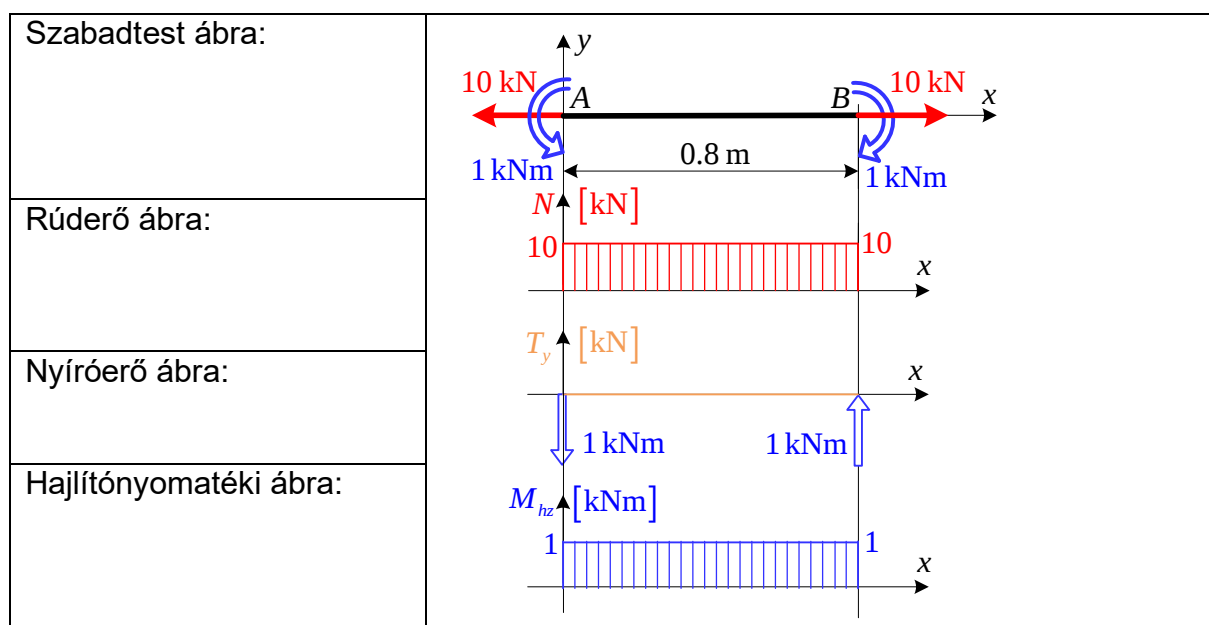
1. lépés: Támasztó erőrendszer

$$M_b = 0 = M_B + M_A \Rightarrow M_B = -M_A = -1 \text{ kNm}$$

$$F_x = 0 = -F_{Ax} + F_{Bx} \Rightarrow F_{Bx} = F_{Ax} = 10 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$F_y = 0 = F_{By}$$

2. lépés: Szabadtest ábra és igénybevételi ábrák



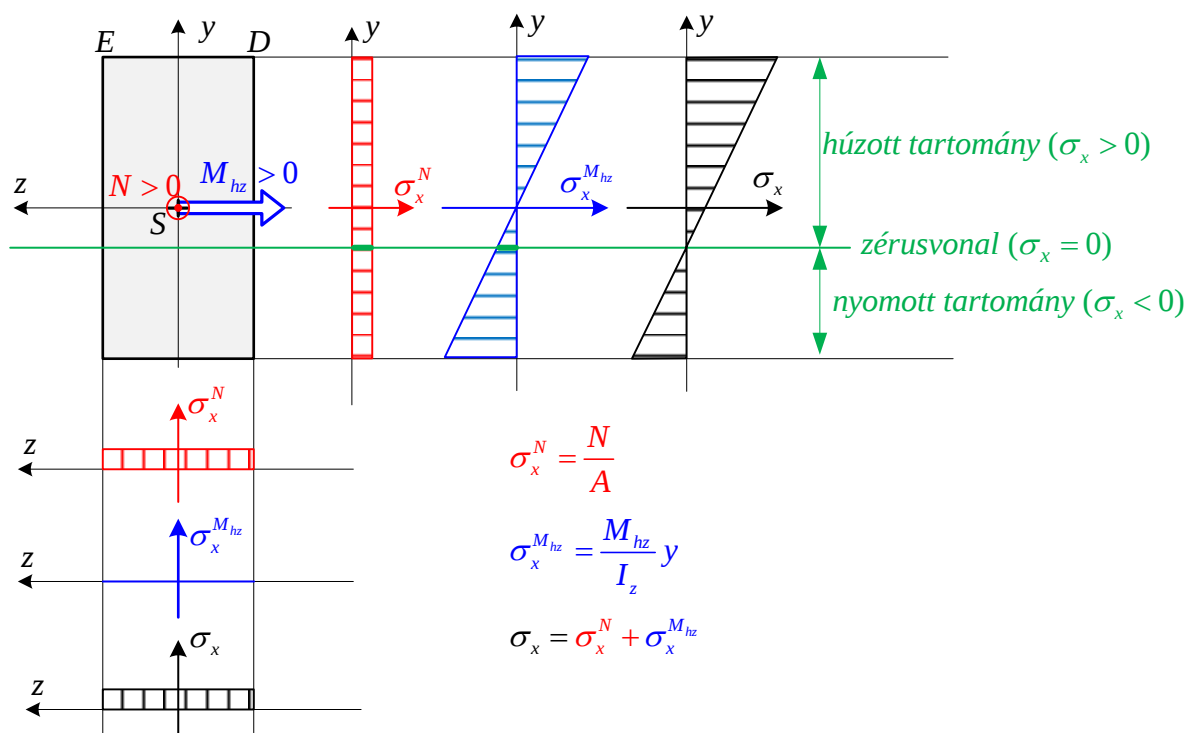
3. lépés: Veszélyes keresztmetszet(ek):

Mindhárom diagram konstans, így a rúd összes keresztmetszete veszélyes keresztmetszet.

A maximális igénybevételek (előjelhelyesen):

$$N = 10 \text{ kN} = 10000 \text{ N}, \quad M_{hz} = 1 \text{ kNm} = 10^6 \text{ Nmm}$$

4. lépés: Feszültségeloszlás a veszélyes keresztmetszeten y és z tengelyek mentén.



5. lépés: veszélyes keresztmetszet veszélyes pontjainak meghatározása:

ED szakasz összes pontja.

6. lépés: méretezés

Amennyiben egy lépésben szeretnénk méretezni a rudat húzásra+hajlításra, egy harmadfokú egyenletet kéne megoldanunk. Hogy ezt elkerüljük, az alábbi módszert alkalmazzuk:

- 1) Elhanyagoljuk a húzás/nyomást és csak hajlításra méretezzük a rudat.
- 2) Felkerekítjük a kapott értéket (jellemzően egy szabványos értékre úgy, hogy lehetőleg húzás/nyomásra is megfeleljen a rúd)
- 3) Ellenőrizzük a rudat a választott szabványos mérettel húzás/nyomás + hajlításra.
 - Ha a rúd megfelel, kész vagyunk a feladattal
 - Ha a rúd nem felel meg, visszatérünk a 2) -höz és nagyobb mértetet választunk.

6.1 lépés: Méretezés csak hajlításra

$$I_z = \frac{ab^3}{12} = \frac{a \cdot (2a)^3}{12} = \frac{8a^4}{12} = \frac{2a^4}{3}$$

$$\sigma_{meg} = \frac{R_{p0.2}}{n} = \frac{80}{1.2} = 66.67 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x\max} \leq \sigma_{allowed}$$

$$\frac{|M_{hz}|_{\max}}{I_z} y_{\max} \leq \sigma_{allowed}$$

$$\frac{3|M_{hz}|_{\max}}{2a^4} \frac{2a}{2} \leq \sigma_{allowed}$$

$$\frac{3|M_{hz}|_{\max}}{2a^3} \leq \sigma_{allowed}$$

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{3|M_{hz}|_{\max}}{2\sigma_{allowed}}}$$

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^6}{2 \cdot 66.67}} = 28.23 \text{ mm}$$

Felkerekítve szabványos értékre:

$$a = 30 \text{ mm}$$

$$b = 60 \text{ mm}$$

6.2 lépés: ellenőrzés húzásra+hajlításra

Keresztmetszeti jellemzők:

$$A = a \cdot b = 30 \cdot 60 = 1800 \text{ mm}^2$$

$$I_z = \frac{ab^3}{12} = \frac{30 \cdot 60^3}{12} = 540000 \text{ mm}^4$$

Normálfeszültség a veszélyes pontokban:

$$\sigma_x(E) = \sigma_x(D) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} \frac{b}{2} =$$

$$= \frac{10000}{1800} + \frac{10^6}{540000} \cdot \frac{60}{2} =$$

$$= 5.56 + 55.56 = 61.12 \text{ MPa}$$

A létrejövő legnagyobb normálfeszültség:

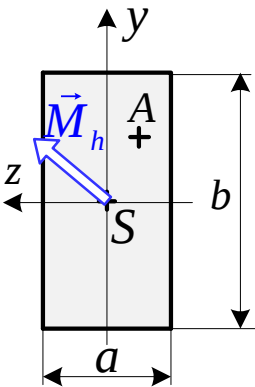
$$\sigma_{x\max} = |\sigma_x(D)| = 61.12 \text{ MPa}$$

ellenőrzés:

$$\sigma_{x\max} = 61.12 \text{ MPa} < \sigma_{meg} = 66.67 \text{ MPa}$$

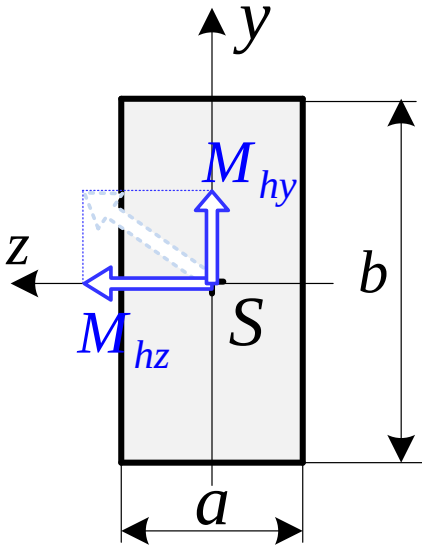
A rúd megfelel.

3. feladat: ferde hajlítás (ellenőrzés)

ADOTT:		FELADAT:
	$a = 20 \text{ mm}$ $b = 40 \text{ mm}$ $\vec{M}_h = (120\vec{j} + 150\vec{k}) \text{ Nm}$ $y_A = 10 \text{ mm}$ $z_A = -5 \text{ mm}$ $R_{p0.2} = 200 \text{ MPa}$ $n=2$	a) Feszültségtenzor A pontban b) Zérusvonal egyenlete c) Feszültség eloszlás y és z tengelyek mentén d) Feszültség eloszlás zérusvonalra merőleges tengely mentén. e) Ellenőrzés

MEGOLDÁS:

Ferde hajlítás esetén a hajlítónyomaték vektor nem párhuzamos egyik tehetetlenségi főtengellyel sem. Ebben az esetben a hajlítónyomatékot felbontjuk a tehetetlenségi főtengelyek irányába (jelen esetben y és z) eső összetevőkre, így két egyenes hajlításhoz jutunk, melyekre alkalmazhatók az egyenes hajlításnál megismert összefüggések.

	Ferde hajlítás esetén egy tetszőleges y, z koordinátájú pontban a feszültség: $\sigma_x = \sigma_x(y, z) = \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z$ A hajlítónyomatékok: $M_{hz} = -150 \text{ Nm} = -150\,000 \text{ Nmm}$ $M_{hy} = 120 \text{ Nm} = 120\,000 \text{ Nmm}$ kersztmetszeti jellemzők: $I_z = \frac{ab^3}{12} = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 106\,666.67 \text{ mm}^4$ $I_y = \frac{a^3b}{12} = \frac{20^3 \cdot 40}{12} = 26\,666.67 \text{ mm}^4$
---	--

Ügyeljünk a hajlítónyomatékok előjelére! A $\vec{M}_h$ hajlítónyomaték vektor egy xyz koordinátarendszerben értelmezett nyomatékvektor ennek megfelelően előjelezve. Az M_{hz} és M_{hy} hajlítónyomatéki igénybevételeket az a hajlítónyomatéki igénybevétel előjelszabálya szerint előjelezzük.

a) Feszültségtenzor az A pontban

$$\sigma_x(A) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_A + \frac{M_{hy}}{I_y} z_A = \frac{-150\,000}{106\,666.67} \cdot 10 + \frac{120\,000}{26\,666.67} \cdot (-5) = -35.56 \text{ MPa}$$

$$\underline{\underline{F}}_A = \begin{bmatrix} \sigma_x(A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

b) Zérusvonal egyenlete és ábrázolása

Zérusvonal egyenlete:

$$\sigma_x = 0 = \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z$$

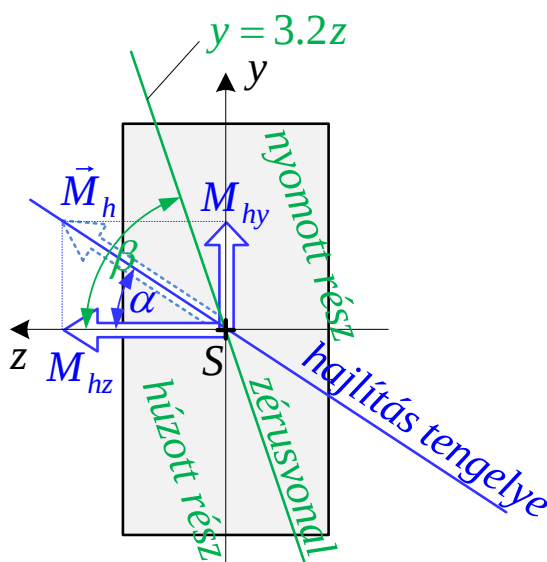
$$y = -\frac{M_{hy}}{I_y} z \cdot \frac{I_z}{M_{hz}}$$

$$y = -\underbrace{\frac{M_{hy}}{M_{hz}} \cdot \frac{I_z}{I_y}}_{\tan \alpha > 1} \cdot z$$

$$y = -\frac{120}{-150} \cdot \frac{106\,666.67}{26\,666.67} \cdot z$$

$$y = 3.2z$$

Zérusvonal ábrázolása:

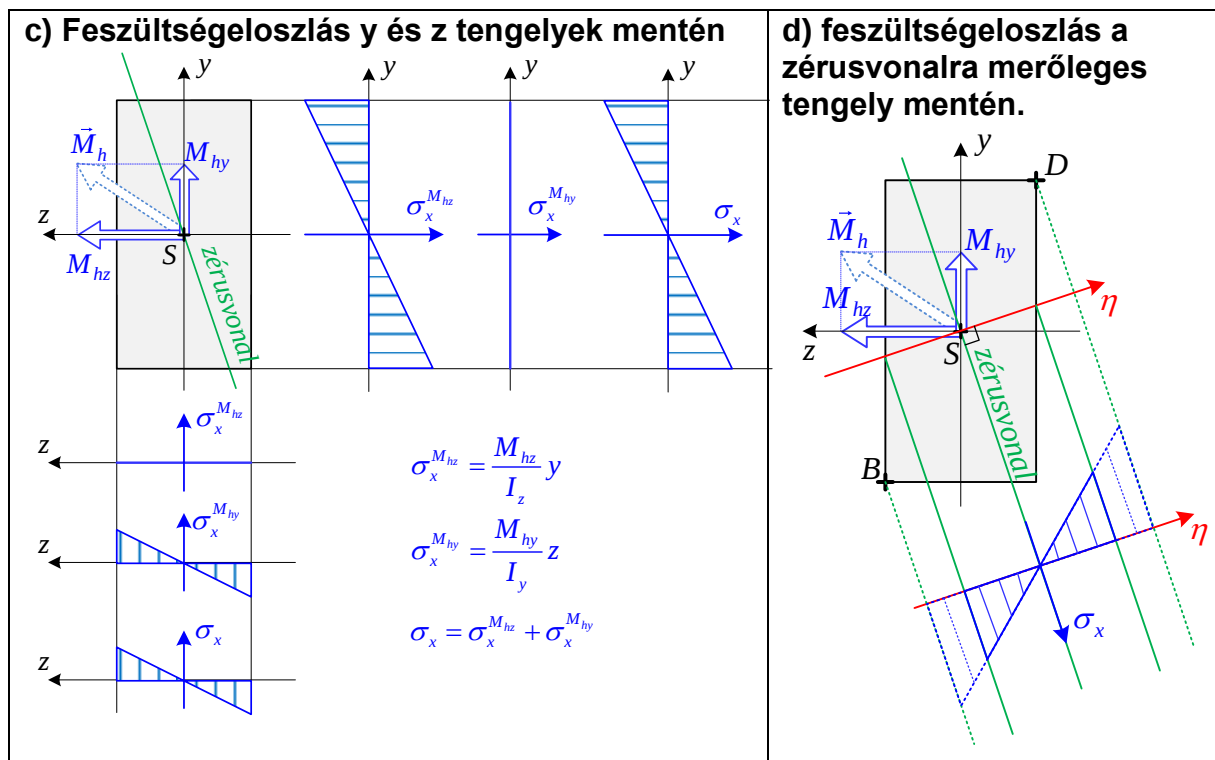


Ferde hajlítás esetén a **hajlítás tengelye** és a **zérusvonal** különböző egyenes

- A **hajlítás tengelye** az 1. főtengelyhez áll közelebb
- A **zérusvonal** a 2. főtengelyhez áll közelebb.

Amennyiben a hajlítás tengelye és a zérusvonal megegyezik, a hajlítás egyenes.

Amennyiben a keresztmetszetnek végtelen tehetetlenségi főtengelye van (pl. kör/körgyűrű/szabályos sokszög), a hajlítás tengelye és a zérusvonal mindig megegyeznek, ezen keresztmetszetű rudakat nem lehet ferdén hajlítani.



e) Rúd ellenőrzése

Veszélyes pontok: B és D (zérusvonalától legtávolabbi pontok)

$$\sigma_{x\max} = |\sigma_x(B)| = |\sigma_x(D)|$$

$$\sigma_x(D) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_D + \frac{M_{hy}}{I_y} z_D = \frac{M_{hz}}{I_z} \frac{b}{2} + \frac{M_{hy}}{I_y} \left(-\frac{a}{2} \right)$$

$$\frac{-150\,000}{106\,666.67} \cdot \frac{40}{2} + \frac{120\,000}{26\,666.67} \cdot \left(-\frac{20}{2} \right) = -73.125 \text{ MPa}$$

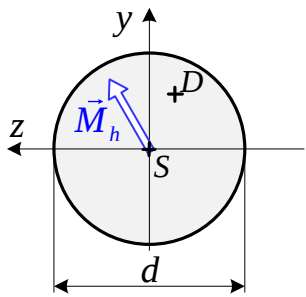
$$\sigma_{x\max} = |\sigma_x(D)| = |-73.125| = 73.125 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{meg} = \frac{R_{p0.2}}{n} = \frac{200}{2} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x\max} = 73.125 \text{ MPa} < \sigma_{meg} = 100 \text{ MPa}$$

A rúd szilárdságtanilag megfelel.

4. feladat: egyenes hajlítás (méretezés)

ADOTT:	FELADAT:
	$\sigma_{meg} = 150 \text{ MPa}$ $\vec{M}_h = (40\vec{j} + 30\vec{k}) \text{ Nm}$ $z_D = -3 \text{ mm}$ $y_D = 5 \text{ mm}$
	a) Zérusvonal egyenlete és ábrázolása b) Feszültségeloszlás y és z tengelyek mentén c) Feszültségeloszlás zérusvonalra merőleges tengely mentén e) Méretezés d) Feszülstégtenzor D pontban

MEGOLDÁS:

a) Zérusvonal egyenlete és ábrázolása

A hajlító nyomatékok:

$$M_{hz} = -30 \text{ Nm}$$

$$M_{hy} = 40 \text{ Nm}$$

Zérusvonal egyenlete:

$$\sigma_x = 0 = \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z$$

$$y = -\frac{M_{hy}}{I_y} z \cdot \frac{I_z}{M_{hz}}$$

$$y = -\frac{M_{hy}}{M_{hz}} \cdot \frac{I_z}{I_y} \cdot z$$

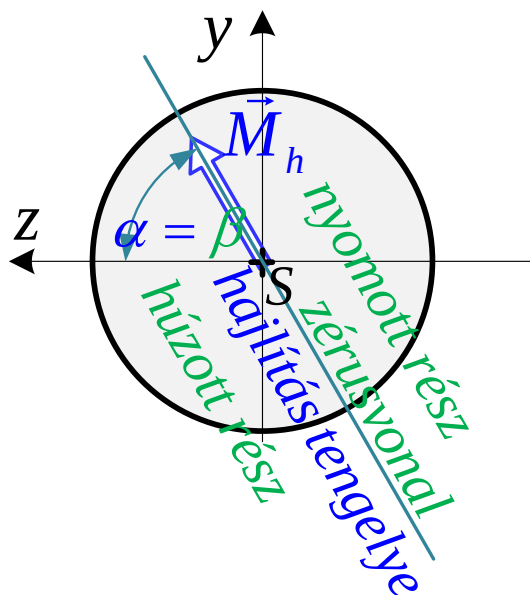
$$\underbrace{\frac{M_{hz}}{M_{hy}}}_{\tan \alpha = 1} = \underbrace{\frac{I_z}{I_y}}_{\tan \beta = \tan \alpha}$$

$$y = -\frac{M_{hy}}{M_{hz}}$$

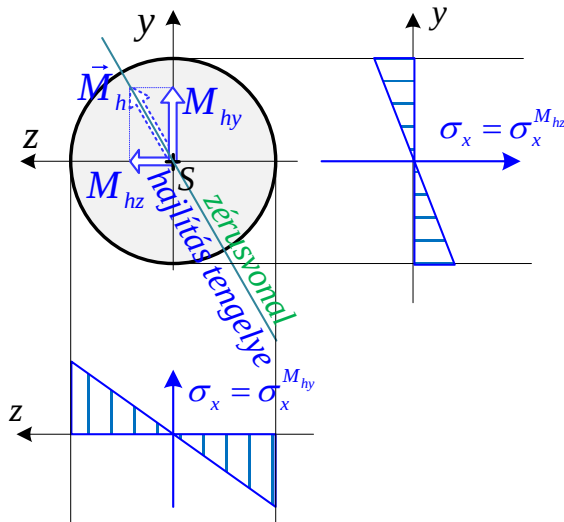
$$y = -\frac{40}{-30} \cdot z$$

$$y = \frac{4}{3} z$$

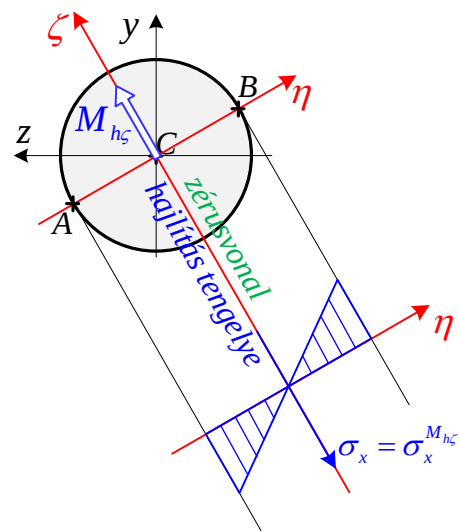
Zérusvonal ábrázolása:



b) Feszültségeloszlás y és z tengelyek mentén:



c) Feszültségeloszlás a zérusvonalra merőleges tengely mentén



d) méretezés

A keresztmetszet másodrendű nyomatéka tetszőleges tengelyre:

$$I_y = I_z = I_\zeta = \frac{d^4 \pi}{64}$$

Az eredő hajlítónyomaték (= hajlítónyomaték ζ tengely körül):

$$M_{h\zeta} = -\sqrt{M_{hy}^2 + M_{hz}^2} = -\sqrt{40^2 + (-30)^2} = -50 \text{ Nm} = -50\,000 \text{ Nmm}$$

A negatív előjel oka, hogy a zérusvonal felett (pozitív η tartományban) nyomott a rúd, a zérusvonal alatt (negatív η tartományban) húzott a rúd).

veszélyes pontok: A és B (a zérusvonalától (= ζ tengelytől) legtávolabbi pontok)

$$\begin{aligned} \sigma_{x\max} &\leq \sigma_{meg} \\ \frac{|M_{h\zeta}|}{I_\zeta} \eta_{\max} &\leq \sigma_{meg} \\ \frac{64|M_{h\zeta}|}{d^4\pi} \frac{d}{2} &\leq \sigma_{meg} \\ \frac{32|M_{h\zeta}|}{d^3\pi} &\leq \sigma_{meg} \\ d &\geq \sqrt[3]{\frac{32|M_{h\zeta}|}{\sigma_{meg}\pi}} \\ d &\geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 50\,000}{150\pi}} = 15.03 \text{ mm} \Rightarrow d = 16 \text{ mm} \end{aligned}$$

e) Feszültségtenzor D pontban

A keresztmetszet másodrendű nyomatéka tetszőleges tengelyre:

$$I_y = I_z = I_\zeta = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{16^4 \pi}{64} = 3217 \text{ mm}^4$$

Mivel a D pont helye y és z koordinátákkal adott, az M_{hz} és M_{hy} hajlítónyomatékokkal célszerű számolni:

$$\sigma_x(D) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_D + \frac{M_{hy}}{I_y} z_D = \frac{-30\,000}{3217} \cdot 5 + \frac{40\,000}{3217} \cdot (-3) = -46.627 - 37.302 = -83.929 \text{ MPa}$$

$$\underline{\underline{F}}_D = \begin{bmatrix} \sigma_x(D) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -83.929 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Megjegyzések:

Ebben a feladatban egy kör keresztmetszetű rúd volt hajlításnak kitéve. Bár a hajlítónyomaték nem volt párhuzamos sem az y , sem a z tengellyel, mégsem volt ferde a hajlítás, mivel egy kör keresztmetszet esetében minden tengely tehetetlenségi főtengely, ezért a hajlítás tengelye mindig azonos a zérusvonallal, így ilyen keresztmetszetet nem lehet ferdén hajlítani.

Ilyen feladat esetén általában egy $\eta\zeta$ -val jelölt koordinátarendszert kötünk az eredő hajlítónyomatékhoz (ζ a hajlítónyomaték irányába mutat, azaz megegyezik a hajlítás tengelyével és a zérusvonallal, η tengely pedig erre merőleges).

A másodrendű nyomaték bármely tengelyre:

$$I_y = I_z = I_\zeta = \frac{d^4 \pi}{64}$$

Ellenőrzés/méretezés esetén célszerű az $\eta\zeta$ koordinátarendszerben számolni, mivel a veszélyes pontok mindig az η tengelyen vannak:

$$\sigma_{x\max} = \frac{|M_{h\zeta}|}{I_\zeta} \eta_{\max} \leq \sigma_{\text{meg}}$$

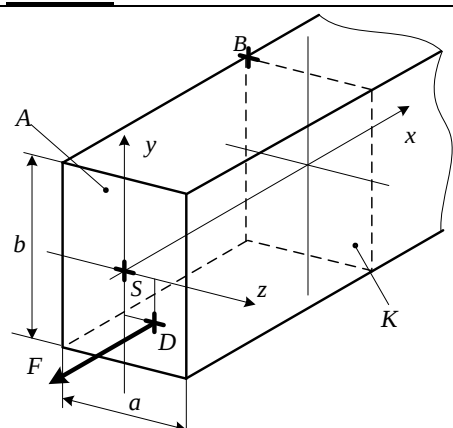
$$\text{ahol: } |M_{b\zeta}| = \sqrt{M_{hy}^2 + M_{hz}^2}, \quad \eta_{\max} = d / 2$$

Ha a feladat egy y és z koordinátaival adott B pontban a feszültség kiszámítása, a feszültséget a hajlítónyomaték y és z irányú összetevőivel számítjuk:

$$\sigma_x(B) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_B + \frac{M_{hy}}{I_y} z_B$$

5. feladat: excentrikus húzás (ellenőrzés)

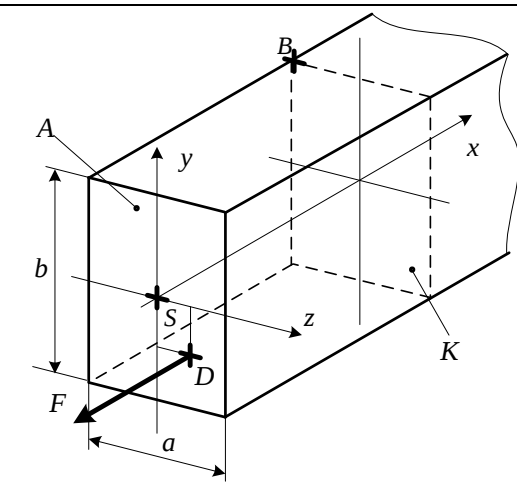
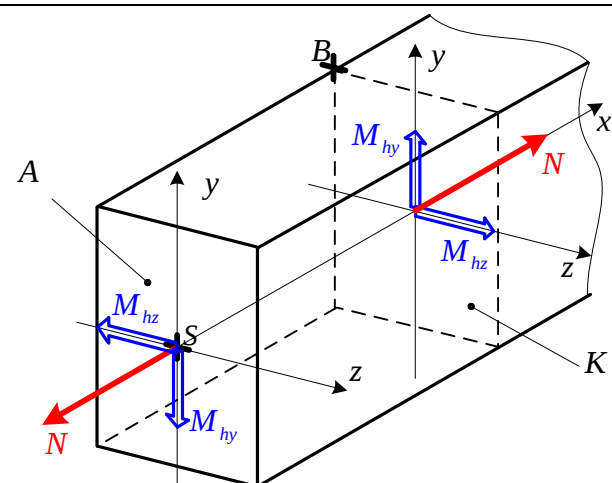
Excentrikus húzás/nyomás esetén a keresztmetszetre ható eredő erő párhuzamos a rúd középvonalával és nem megy át a súlyponton.

ADOTT:	FELADAT:
 $a = 20 \text{ mm}$ $b = 60 \text{ mm}$ $F = 90 \text{ kN}$ $D(0, -12, 6) \text{ mm}$ $R_{p0.2} = 750 \text{ MPa}$ $n = 2$	a) Tetszőleges K keresztmetszett igénybevétele. b) Feszültségtenzor S és B pontokban c) Zérusvonal egyenlete és ábrázolása d) Feszültségeloszlás y és z tengelyek mentén e) Feszültségeloszlás a zérusvonalra merőleges tengely mentén f) ellenőrzés

MEGOLDÁS:

a) K keresztmetszet igénybevétele

Az A keresztmetszetre ható erőrendszer redukálása a súlypontba:

redukálás előtt:	redukálás után:
	

F erő támadáspontjának koordinátái: $(D(0, -12, 6) = D(x_D, y_D, z_D))$

$$y_D = -12 \text{ mm}$$

$$z_D = 6 \text{ mm}$$

Tetszőleges K keresztmetszet igénybevételei:

$$N = F = +90 \text{ kN} = +90\,000 \text{ N}$$

$$M_{hy} = z_D N = 6 \cdot 90\,000 = +540\,000 \text{ Nmm}$$

$$M_{hz} = y_D N = -12 \cdot 90\,000 = -1\,080\,000 \text{ Nmm}$$

Megjegyzés a hajlítónyomatékok előjelével kapcsolatban:

- y_D és z_D koordináták adottak a megfelelő előjelekkel
- Húzás esetén, N pozitív, nyomás esetén N negatív
- Amennyiben összeszorozzuk a megfelelően előjelezett y_D és z_D koordinátát a megfelelően előjelezett N rúderővel, automatikusan megkapjuk a hajlítónyomatékokat megfelelő előjellel.

Természetesen a jobb kezünket is használhatjuk a hajlítónyomatékok irányának meghatározásához, majd alkalmazhatjuk a hajlítóigénybevétel előjelszabályát.

Ellenőrzésként:

- M_{hy} esetén y tengely felett húzás, alatta nyomás van, ez tehát egy pozitív hajlító igénybevétel.
- M_{hz} esetén z tengely felett nyomás, alatta húzás van, ez tehát egy negatív hajlító igénybevétel.

excentrikus húzás = **húzás** + **ferde hajlítás** =

= **húzás** + **egyenes hajlítás z tengely körül** + **egyenes hajlítás y tengely körül**.

Egytengelyű feszültségállapotunk van az alábbi normálfeszültséggel:

$$\sigma_x(y, z) = \sigma_x^N + \sigma_x^{M_h}(y, z) = \sigma_x^N + \sigma_x^{M_{hz}}(y) + \sigma_x^{M_{hy}}(z)$$

$$\sigma_x(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z$$

b) Feszültségtenzor S és B pontokban:

Keresztmetszeti jellemzők:

$$A = ab = 20 \cdot 60 = 1200 \text{ mm}^2$$

$$I_z = \frac{ab^3}{12} = \frac{20 \cdot 60^3}{12} = 360000 \text{ mm}^4$$

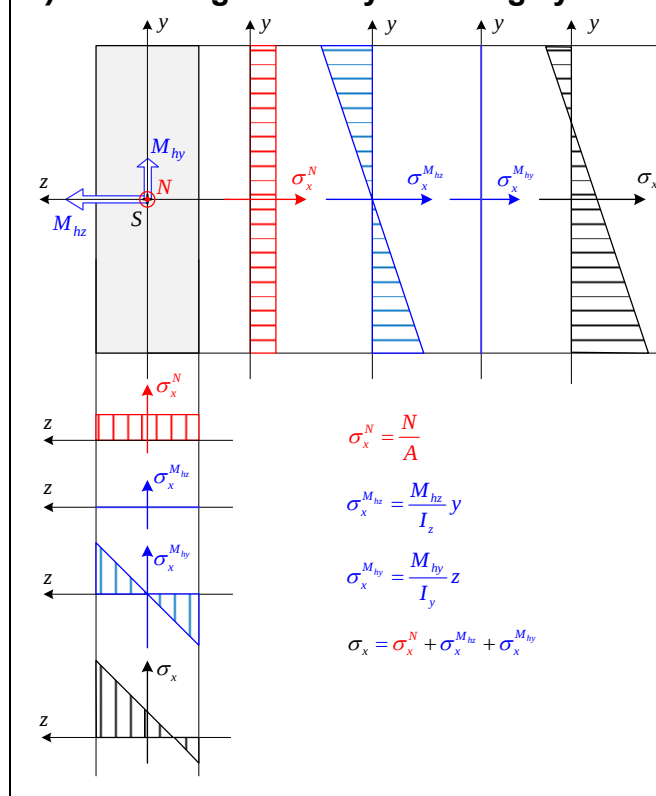
$$I_y = \frac{a^3b}{12} = \frac{20^3 \cdot 60}{12} = 40000 \text{ mm}^4$$

$\sigma_x(S) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y_S + \frac{M_{hy}}{I_y} z_S =$ $= \frac{90000}{1200} + \frac{-1080000}{360000} \cdot 0 + \frac{540000}{40000} \cdot 0 =$ $= 75 + 0 + 0 = 75 \text{ MPa}$	$\underline{\underline{F}}_S = \begin{bmatrix} 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$
$\sigma_x(B) = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y_B + \frac{M_{hy}}{I_y} z_B = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} \frac{b}{2} + \frac{M_{hy}}{I_y} \left(-\frac{a}{2} \right) =$ $= \frac{90000}{1200} + \frac{-1080000}{360000} \cdot \frac{60}{2} + \frac{540000}{40000} \cdot \left(-\frac{20}{2} \right) =$ $= 75 - 90 - 135 = -150 \text{ MPa}$	$\underline{\underline{F}}_B = \begin{bmatrix} -150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$

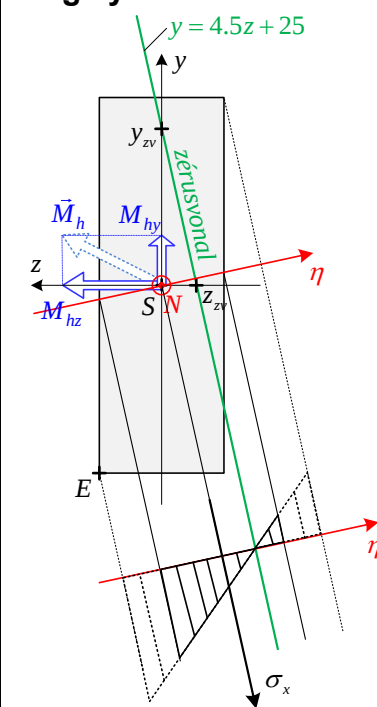
c) Zérusvonal egyenlete és ábrázolása:

Zérusvonal egyenlete:	Zérusvonal ábrázolása:
$\sigma_x = 0 = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y + \frac{M_{hy}}{I_y} z$ $\frac{M_{hz}}{I_z} y = -\frac{N}{A} - \frac{M_{hy}}{I_y} z$ $y = -\frac{NI_z}{AM_{hz}} - \frac{M_{hy} I_z}{I_y M_{hz}} z$ $y = -\underbrace{\frac{I_z}{I_y} \frac{M_{hy}}{M_{hz}}}_{\tan \alpha} z - \frac{NI_z}{AM_{hz}}$ $y = -\frac{360000}{40000} \frac{540000}{-1080000} z - \frac{90000 \cdot 360000}{1200 \cdot (-1080000)}$ $y = -\frac{360000}{40000} \frac{540000}{-1080000} z - \frac{90000 \cdot 360000}{1200 \cdot (-1080000)}$ $y = 4.5z + 25$ Koordináta tengelyekkel vett metszéspontok: $y_{zv} = 25 \text{ mm}$ $0 = 4.5z_{zv} + 25 \Rightarrow z_{zv} = -\frac{25}{4.5} = 5.56 \text{ mm}$	

d) Feszültségeloszlás y és z tengelyek mentén:



e) Feszültségeloszlás a zérusvonalra merőleges tengely mentén:



f) ellenőrzés

veszélyes pont: E (zérusvonalától legtávolabbi pont)

$$\begin{aligned}\sigma_x(E) &= \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} y_E + \frac{M_{hy}}{I_y} z_E = \frac{N}{A} + \frac{M_{hz}}{I_z} \left(-\frac{b}{2}\right) + \frac{M_{hy}}{I_y} \frac{a}{2} = \\ &= \frac{90\,000}{1200} + \frac{-1\,080\,000}{360\,000} \cdot \left(-\frac{60}{2}\right) + \frac{540\,000}{40\,000} \cdot \frac{20}{2} = \\ &= 75 + 90 + 135 = 300 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\sigma_{x\max} = |\sigma_x(E)| = 300 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{meg} = \frac{R_{P0.2}}{n} = \frac{750}{2} = 375 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x\max} = 300 \text{ MPa} < \sigma_{meg} = 375 \text{ MPa}$$

A rúd szilárdságtanilag megfelel.