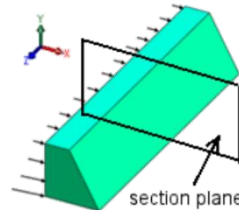


SÍKALAKVÁLTOZÁSI FELADAT MEGOLDÁSA VÉGESELEM MÓDSZERREL

Definíció: A vizsgált testnek van egy kitüntetett síkja, amely síkkal párhuzamos összes síkban azonos az alakváltozás, és ezen síkok távolsága terhelés hatására sem változik meg.



Feltételek:

- A kitüntetett síkra merőleges méret sokkal nagyobb, mint a másik 2
- A terhelés párhuzamos a kitüntetett síkkal és z tengely irányában nem változik
- A síkok távolságának változatlanóságát külső kényszer biztosítja

Következmények:

- Az elmozdulás koordináták nem függenek a z koordinátától:
 $u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(x, y)$

- z irányba a pontok nem mozdulnak el:
 $w = w(x, y) = 0$

tehát: $\vec{u}(x, y) = u(x, y)\vec{e}_x + v(x, y)\vec{e}_y$

I. A SÍKALAKVÁLTOZÁSI MECHANIKAI MODELL

ELMOZDULÁS MEZŐ

2 egymástól független elmozdulásmező van, amikkel minden mechanikai jellemző előállítható

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned} \right\}$$

ALAKVÁLTOZÁSI MEZŐ

Kinematikai egyenlet: $\underline{A} = \frac{1}{2} \left(\underline{\vec{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\vec{u}} \right)$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v & 0 \end{bmatrix} =$$

Síkalakváltozási feladat alakváltozási tenzora

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A kinematikai egyenlet skalár egyenletei:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \equiv 0.$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \equiv 0, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \equiv 0$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \underline{\underline{\varepsilon}} \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ az alakváltozási
mátrix

$\underline{\underline{\partial}}$ a differenciálási
utasítások mátrixa

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\partial}} \underline{\underline{u}}$$

FESZÜLTSG MEZŐ

Hooke törvény: $\underline{\underline{F}} = \frac{E}{1+\nu} \left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{E}} \right)$

Bebizonyítható, hogy σ_z nem független: $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ adódik, tehát a feszültség és az alakváltozás 3 független koordinátával jellemezhető.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{F}} \\ \underline{\underline{F}}_{xyz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Síkalakváltozási feladat
feszültség tenzora

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \underline{\underline{\sigma}} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \\ \underline{\underline{\sigma}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{D}}$ az anyagjellemzők
mátrixa

$\underline{\underline{\sigma}}$ a feszültség mátrix

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}}$$

II A FELADAT GYENGE ALAKJA

Vezessük be az alábbi mennyiségeket:

virtuális elmozdulásvektor:	virtuális alakváltozási vektor:	felületi tehervektor:	térfogati tehervektor:
$\delta \underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix}$	$\delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_x \\ \delta \varepsilon_y \\ \delta \gamma_{xy} \end{bmatrix}$	$\underline{\underline{p}}_0 = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$	$\underline{\underline{f}}_0 = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$

Feltételezzük, hogy: $\vec{p}(x, y) = p_x(x, y)\vec{e}_x + p_y(x, y)\vec{e}_y$, $\vec{f}(x, y) = f_x(x, y)\vec{e}_x + f_y(x, y)\vec{e}_y$

A feladat gyenge alakja:

$$\int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \delta \underline{\underline{A}} dV - \int_{(A_p)} \delta \underline{\underline{u}} \cdot \vec{p} dA - \int_{(V)} \delta \underline{\underline{u}} \cdot \vec{f} dV = 0, \quad \text{ahol: } \underline{\underline{F}} \cdot \delta \underline{\underline{A}} = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} = (\delta \underline{\underline{\varepsilon}})^T \underline{\underline{\sigma}}$$

A gyenge alak mátrixosan felírva:

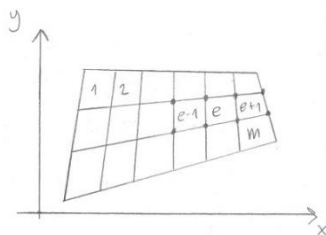
$$\int_{(V)} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} dV - \int_{(A_p)} \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}}_0 dA - \int_{(V)} \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{f}}_0 dV = 0$$

III A SÍKALAKVÁLTOZÁSI FELADAT VÉGESELEM DISZKRETIZÁLÁSA

A gyenge alak m db végeselemre felírt integrál összegeként felírva:

$$\int_{(V)} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV - \int_{(A_p)} \delta u^T \underline{p} \, dA - \int_{(V)} \delta u^T \underline{f} \, dV =$$

$$= \sum_{e=1}^m \left[\int_{(V^e)} (\delta \underline{\varepsilon}^e)^T \underline{\sigma}^e dV - \int_{(A_p^e)} (\delta u^e)^T \underline{p} \, dA - \int_{(V^e)} (\delta u^e)^T \underline{f} \, dV \right] = 0$$



A diszkretizálás gondolatmenét 1D esetben a 3. Melléklet 1. pontja tartalmazza. Az ebben leírt gondolatmenet általánosítható két- ill. három változós függvényekre is. Jelen feladatban kétváltozós függvényeket kell közelítenünk.

Az ehhez használandó lineáris alakfüggvények:

	$h_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$	$h_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$
	$h_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$h_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$

A másodfokú alakfüggvények pedig:

8 csomópontú négyzög elem:	$h_7 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$	$h_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$	$h_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$
	$h_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$		$h_4 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$
	$h_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$	$h_3 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$	$h_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$

A leképezést azért $[-1,1]$ intervallumra végezzük, mivel ezen tudjuk végrehajtani a későbbiekben a numerikus integrálást (lásd 3. melléklet).

A továbbiakban alkalmazzuk a következő elnevezéseket:

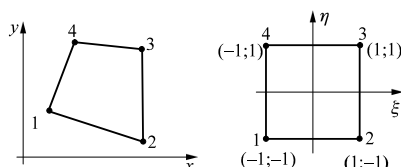
- xy koordináta-rendszer: globális koordináta-rendszer

- $\xi\eta$ koordináta-rendszer: lokális koordináta-rendszer
- xy sík négyszög tartományai: elemek [elements]
- xy sík négyszög tartományainak sarokpontjai: csomópontok [nodes]

Egy végelem modell esetén a 2 mező, amit közelíteni szeretnénk: a geometria és az elmozdulás mező.

Izoparametrikus végelemek: azok a végelemek, amelyeknél az elem elmozdulás mezőinek közelítésére és az elem geometriájának leírására (leképezésére) ugyanazokat a függvényeket alkalmazzuk.

4 csomópontú (lineáris) négyszög alakú végelem geometriájának leképezése:



Számpéldát a 2D leképezésre a 3. melléklet 2-es pontja tartalmaz.

A további képletekben a **piros színnel jelölt függvények ξ -től és η -tól**, a **kékkel jelölt függvények x -től és y -tól függenek**.

A további képletek a lineáris négyszögelemre vonatkoznak.

GEOMETRIA KÖZELÍTÉSE		ELMOZDULÁSMEZŐ KÖZELÍTÉSE	
$\left. \begin{aligned} x^e &= \sum_{i=1}^4 h_i x_i^e \\ y^e &= \sum_{i=1}^4 h_i y_i^e \end{aligned} \right\}$	ahol x_i^e és y_i^e az e -edik elem i -edik csomópontjának x és y koordinátája	$\left. \begin{aligned} u^e &= \sum_{i=1}^4 h_i u_i^e \\ v^e &= \sum_{i=1}^4 h_i v_i^e \end{aligned} \right\}$	ahol u_i^e és v_i^e az e -edik elem i -edik csomópontjának x és y irányú elmozdulása
$\underline{q}^e$ az e-edik végelem csomóponti elmozdulásvektora. Ennek az elemeit, a csomóponti elmozdulás paramétereket nem ismerjük. A cél ezeknek a paramétereknek a meghatározása.			
A közelítéseket tömörebben, mátrixos alakban is felírhatjuk:			
$\underline{r}^e = \begin{bmatrix} x^e \\ y^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix} \underline{H} \begin{bmatrix} x_1^e \\ y_1^e \\ x_2^e \\ y_2^e \\ x_3^e \\ y_3^e \\ x_4^e \\ y_4^e \end{bmatrix}$		$\underline{u}^e = \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix} \underline{H} \begin{bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \\ u_4^e \\ v_4^e \end{bmatrix}$	
$\underline{r}^e = \underline{H} \underline{x}^e$		$\underline{u}^e = \underline{H} \underline{q}^e$	

ALAKVÁLTOZÁS KÖZELÍTÉSE

1.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^e}{\partial x} \\ \frac{\partial v^e}{\partial y} \\ \frac{\partial u^e}{\partial x} + \frac{\partial v^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}} \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{D}}$ a differenciálási utasítások mátrixa

2.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{H}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \\ u_4^e \\ v_4^e \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q}}^e}$$

3.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \\ u_4^e \\ v_4^e \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q}}^e}$$

$\underline{\underline{B}}$ az alakváltozás-csomóponti elmozdulás mátrix, de általában csak B mátrixnak hívjuk.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{u}}^e = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{H}} \underline{\underline{q}}^e = \underline{\underline{B}}^e \underline{\underline{q}}^e$$

Probléma: a B mátrixban szereplő alakfüggvények ξ és η függvényei, viszont x és y szerint kell őket deriválni → Megoldás: láncszabály alkalmazása

$$\frac{\partial h_i}{\partial x} = \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial y} = \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

A fenti két egyenletet tömörebben is felírhatjuk mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \text{ ahol: } \left(\underline{\underline{J}}^e \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ amiből: } \underline{\underline{J}}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{J}}^e$ az e -edik elem Jacobi mátrixa, mely kapcsolatot teremt az xy és $\xi\eta$

koordinátarendszerek között. Ennek elemeit a csomóponti koordináták ismeretében meg tudjuk határozni, mivel azok ismertek.

$$\underline{\underline{J}}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial \xi} x_i^e & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial \xi} y_i^e \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial \eta} x_i^e & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial \eta} y_i^e \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{L}}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{G}}_i^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}}_{(\underline{\underline{J}}^e)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{L}}_i}$$

A számítás menete:

- 1) Az alakfüggvények ξ és η szerinti deriváltjainak előállítás ($\rightarrow \underline{\underline{L}}_i$)
- 2) Az alakfüggvények deriváltjainak kiszámítása konkrét ξ és η értékekkel
- 3) A $\underline{\underline{J}}^e$ kiszámítása konkrét $\xi\eta$ párosra
- 4) $\underline{\underline{J}}^e$, mint 2x2-es, számokat tartalmazó mátrix invertálása $\rightarrow (\underline{\underline{J}}^e)^{-1}$
- 5) Az alakfüggvények x és y szerinti deriváltjait tartalmazó $\underline{\underline{G}}_i^e = (\underline{\underline{J}}^e)^{-1} \underline{\underline{L}}_i$ mátrix előállítása
- 6) A $\underline{\underline{B}}^e$ mátrix feltöltése $\underline{\underline{G}}_i^e$ mátrix elemeiből.

Számpéldát Jacobi mátrix előállítására a 3. melléklet 3. pontja tartalmaz.

Ennek mintájára a virtuális alakváltozás is felírható:

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \partial \delta \underline{\underline{u}}^e = \partial \underline{\underline{H}} \delta \underline{\underline{q}}^e = \underline{\underline{B}} \delta \underline{\underline{q}}^e$$

FESZÜLTÉGMEZŐ KÖZELÍTÉSE

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \\ \tau_{xy}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \\ \tau_{xy}^e \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}^e} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{bmatrix} = \underline{\underline{\sigma}}^e$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \\ \tau_{xy}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \\ \tau_{xy}^e \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}^e} \begin{bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \\ u_4^e \\ v_4^e \end{bmatrix} = \underline{\underline{\sigma}}^e$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^e = \underline{\underline{\sigma}}^e = \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{B}}^e \underline{\underline{q}}^e$$

VISSZAHELYETTESÍTÉS A GYENGE ALAK EGY TAGJÁBA

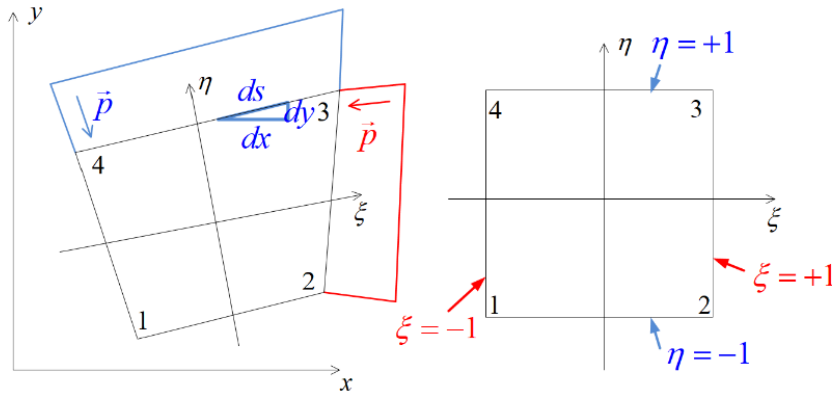
$$\int_{(V)} (\delta \underline{\underline{\varepsilon}})^T \underline{\underline{\sigma}}^e dV - \int_{(A_p)} (\delta \underline{\underline{u}})^T \underline{\underline{p}}_{=0} dA - \int_{(V)} (\delta \underline{\underline{u}})^T \underline{\underline{f}}_{=0} dV =$$

$$= \int_{(V^e)} \underbrace{(\delta \underline{\underline{q}}^e)^T}_{(\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^e)^T} \underbrace{(\underline{\underline{B}}^e)^T \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{B}}^e \underline{\underline{q}}^e}_{\underline{\underline{\sigma}}^e} dV - \int_{(A_p^e)} \underbrace{(\delta \underline{\underline{q}}^e)^T}_{(\delta \underline{\underline{u}}^e)^T} \underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{p}}_{=0} dA - \int_{(V^e)} \underbrace{(\delta \underline{\underline{q}}^e)^T}_{(\delta \underline{\underline{u}}^e)^T} \underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{f}}_{=0} dV$$

ahol:

$$dV = 1 \det(\underline{\underline{J}}(\xi, \eta)) d\xi d\eta$$

dA : Az az elemi felület, amelyen felületi terhelés hat az elemre. Meghatározása:



Fenti és lenti oldalélen:

$$dA = 1 ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \text{ ahol:}$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

Ha $\eta = \text{állandó} \rightarrow d\eta = 0$, így:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x(\xi, \eta = \pm 1)}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(\xi, \eta = \pm 1)}{\partial \xi}\right)^2} d\xi$$

J_A

(lent: $\eta = -1$, fent: $\eta = 1$)

Jobb és bal oldali oldalélen:

$$dA = 1 ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \text{ ahol:}$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

Ha $\xi = \text{állandó} \rightarrow d\xi = 0$, így:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x(\xi = \pm 1, \eta)}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(\xi = \pm 1, \eta)}{\partial \eta}\right)^2} d\eta$$

J_A

bal oldalon: $\xi = -1$, jobb oldalon: $\xi = 1$

A fentieket felhasználva a gyenge alak egy elemre, ha a terhelés pl. a fenti élre hat:

$$= \int_{(V^e)} \underbrace{(\delta \underline{\underline{q}}^e)^T}_{(\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^e)^T} \underbrace{(\underline{\underline{B}}^e)^T \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{B}}^e \underline{\underline{q}}^e}_{\underline{\underline{\sigma}}^e} dV - \int_{(A_p^e)} \underbrace{(\delta \underline{\underline{q}}^e)^T}_{(\delta \underline{\underline{u}}^e)^T} \underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{p}}_{=0} dA - \int_{(V^e)} \underbrace{(\delta \underline{\underline{q}}^e)^T}_{(\delta \underline{\underline{u}}^e)^T} \underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{f}}_{=0} dV =$$

$$= (\delta \underline{\underline{q}}^e)^T \underbrace{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\underline{\underline{B}}^e)^T \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{B}}^e \det(\underline{\underline{J}}^e) d\xi d\eta \underline{\underline{q}}^e}_{\underline{\underline{K}}^e} - (\delta \underline{\underline{q}}^e)^T \underbrace{\int_{-1}^1 (\underline{\underline{H}}(\xi, \eta = 1))^T \underline{\underline{p}}_{=0}(\xi, \eta = 1) J_A^e(\xi, \eta = 1) d\xi}_{\underline{\underline{f}}_p^e} -$$

$$- (\delta \underline{\underline{q}}^e)^T \underbrace{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{f}}_{=0} \det(\underline{\underline{J}}^e) d\xi d\eta}_{\underline{\underline{f}}_f^e} = (\delta \underline{\underline{q}}^e)^T \left(\underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{q}}^e - \left(\underline{\underline{f}}_p^e + \underline{\underline{f}}_f^e \right) \right) = (\delta \underline{\underline{q}}^e)^T \left(\underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{q}}^e - \underline{\underline{f}}^e \right)$$

A kapcsos zárójelekkel bevezetett új mennyiségek: (zárójelekben a mátrixok mérete)

- $\underline{\underline{K}}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\underline{\underline{B}}^e)^T \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{B}}^e \det(\underline{\underline{J}}^e) d\xi d\eta$: a végelem merevségi mátrixa [8x8]
- $\underline{\underline{f}}_p^e = \int_{-1}^1 (\underline{\underline{H}}(\xi, \eta=1))^T \underline{\underline{p}}_0(\xi, \eta=1) J_A^e(\xi, \eta=1) d\xi$: a felületi terhelésből adódó tehervektor [8x1]
- $\underline{\underline{f}}_f^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{f}}_0 \det(\underline{\underline{J}}^e) d\xi d\eta$: a térfogati terhelésből adódó tehervektor [8x1]
- $\underline{\underline{f}}^e = \underline{\underline{f}}_p^e + \underline{\underline{f}}_f^e$: a végelem tehervektora [8x1]

Ezeknek a mennyiségeknek a kiszámításához minden adatot ismerünk. Az integrálásokat numerikusan, **Gauss-kvadratúrával** végezzük el.

A Gauss integrálás gondolatmenetét a 3. Melléklet 4. pontja tartalmazza.

Szám példát tehervektor előállításra a 3. Melléklet 5. pontja tartalmaz.

A CSOMÓPONTI ELMOZDULÁSOK MEGHATÁROZÁSA

A rugalmas peremérték feladat gyenge alakja az m db végelemből álló teljes szerkezetre:

$$\sum_{e=1}^m (\delta \underline{\underline{q}}^e)^T (\underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{q}}^e - \underline{\underline{f}}^e) = 0 \rightarrow \text{az összegzés után: } \delta \underline{\underline{q}} (\underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} - \underline{\underline{f}}) = 0 \text{ ahol:}$$

- $\underline{\underline{K}}$: a teljes szerkezet merevségi mátrixa (globális merevségi mátrix)
- $\underline{\underline{q}}$: a teljes szerkezet csomóponti elmozdulás vektora
- $\underline{\underline{f}}$: a teljes szerkezet tehervektora

(Az összegzést lásd a 4. fejezetben!)

Mivel $\delta \underline{\underline{q}} \neq 0$, a zárójelben lévő kifejezésnek kell 0-nak lennie, amiből az alábbi lineáris algebrai egyenletrendszer adódik $\underline{\underline{q}}$ -ra:

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}}$$

Ebben az egyenletben $\underline{\underline{K}}$ merevségi mátrix szinguláris, azaz $\det(\underline{\underline{K}}) = 0$, így nem tudjuk venni az inverzét, a fenti egyenletrendszer így nem megoldható.

Ahhoz, hogy a fenti egyenletrendszer megoldható legyen, még figyelembe kell venni a kinematikai peremfeltételeket: Ha a teljes szerkezet i -edik elmozdulás koordinátája 0, akkor a merevségi mátrix i -edik sorát és oszlopát, valamint a tehervektor és csomóponti elmozdulásvektor i -edik sorát törölni kell. A megfelelő törlések után a megoldandó egyenletrendszer:

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}} \rightarrow \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\underline{f}}$$