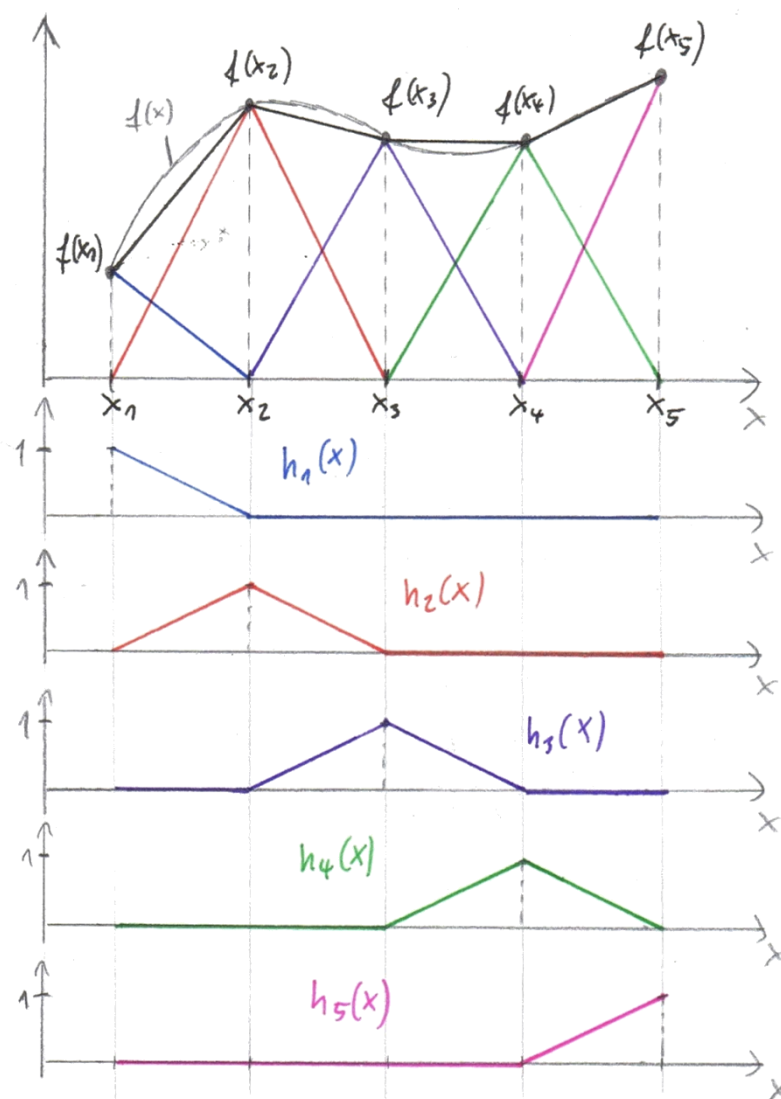


Végeselemes modellezés – kiegészítő anyag

1. Diszkretizálás gondolatmenete 1D esetén:

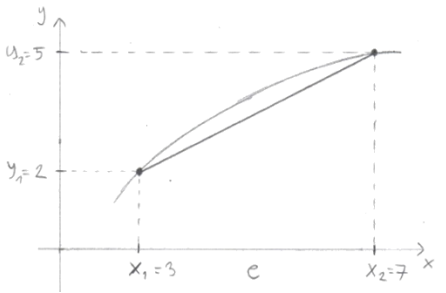
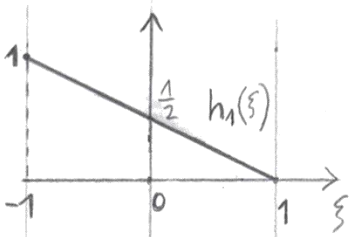
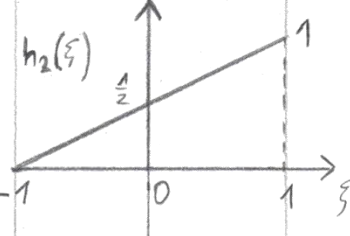
Egy tetszőleges függvényt közelítésünk 5db szakaszonként lineáris függvénnyel:

$$f(x) = \sum_{i=1}^5 h_i f(x_i)$$



A fenti $h_i(x)$ függvényeket nem tudjuk felírni egy függvényként a töréspontok miatt. De figyeljük meg, hogy minden egyes tartományt egy 1-től 0-ig csökkenő és egy 0-tól 1-ig növekvő függvénnyel közelítettünk. Ezeket már könnyedén fel tudjuk írni egy függvényként. Nevezzük el ezeket a függvényeket alakfüggvényeknek [shape functions]. Mostantól foglalkozunk csak egy tartomány, az e -edik tartomány közelítésével az alakfüggvények segítségével. Az alakfüggvényeknek definiáljunk egy lokális ξ változót. Az értelmezési tartományt (a később szükséges numerikus integrálások elvégezhetőségének érdekében) vegyük $[-1,1]$ -re.

Az alábbi ábrák alapján könnyen belátható, hogy az alakfüggvények $\frac{1}{2}$ -nél metszik a függőleges tengelyt, meredekségük pedig $-\frac{1}{2}$, illetve $\frac{1}{2}$.

a közelítendő függvény az e-edik tartományon:	
az 1. alakfüggvény: $h_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi = \frac{1}{2}(1 - \xi)$	
a 2. alakfüggvény: $h_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi = \frac{1}{2}(1 + \xi)$	

Az e-edik tartomány egy tetszőleges pontjában felvett függvényérték közelítése:

$$f^e(\xi) = h_1(\xi)f(x_1) + h_2(\xi)f(x_2) = \sum_{i=1}^2 h_i(\xi)f(x_i)$$

Példa pár pontra:

$$f^e(-1) = h_1(-1)f(3) + h_2(-1)f(7) = \frac{1}{2}(1 - (-1)) \cdot 2 + \frac{1}{2}(1 + (-1)) \cdot 5 = 2$$

$$f^e(-0,5) = h_1(-0,5)f(3) + h_2(-0,5)f(7) = \frac{1}{2}(1 - (-0,5)) \cdot 2 + \frac{1}{2}(1 + (-0,5)) \cdot 5 = 2,75$$

$$f^e(0) = h_1(0)f(3) + h_2(0)f(7) = \frac{1}{2}(1 - 0) \cdot 2 + \frac{1}{2}(1 + 0) \cdot 5 = 3,5$$

$$f^e(1) = h_1(1)f(3) + h_2(1)f(7) = \frac{1}{2}(1 - 1) \cdot 2 + \frac{1}{2}(1 + 1) \cdot 5 = 5$$

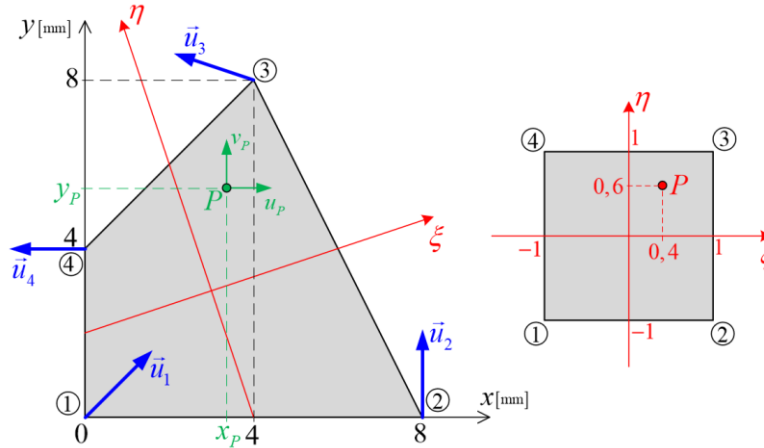
Megjegyzés: A könnyebb követhetőség kedvéért lineáris alakfüggvényeket alkalmaztunk. Természetesen alkalmazhatnánk magasabb fokú alakfüggvényeket is, melyekkel pontosabb eredményt kapnánk.

2 síkbeli elem leképezése - számpélda

Adott: az ábrán látható elem csomópontjainak koordinátái (ábra alapján) valamint elmozdulásai:

$$\vec{u}_1 = (0, 2\vec{e}_x + 0, 2\vec{e}_y) \text{ mm}, \vec{u}_2 = (0, 3\vec{e}_y) \text{ mm}, \vec{u}_3 = (-0, 3\vec{e}_x + 0, 1\vec{e}_y) \text{ mm}, \vec{u}_4 = (-0, 2\vec{e}_x) \text{ mm}$$

Feladat: A lokális ($\xi\eta$) koordinátarendszerben adott P pont koordinátája és elmozdulása a globális (xy) koordinátarendszerben



Az alakfüggvények és a csomóponti koordináták összefoglalva:

i	az alakfüggvények	x_i	y_i
1	$h_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	0	0
2	$h_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	8	0
3	$h_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	4	8
4	$h_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$	0	4

P pont koordinátái a globális (xy) koordinátarendszerben:

$$x_p(0, 4; 0, 6) = \sum_{i=1}^4 h_i x_i = h_2 x_2 + h_3 x_3 = \frac{1}{4}(1+0, 4)(1-0, 6) \cdot 8 + \frac{1}{4}(1+0, 4)(1+0, 6) \cdot 4 = 3, 36 \text{ mm}$$

$$y_p(0, 4; 0, 6) = \sum_{i=1}^4 h_i y_i = h_3 y_3 + h_4 y_4 = \frac{1}{4}(1+0, 4)(1+0, 6) \cdot 8 + \frac{1}{4}(1-0, 4)(1+0, 6) \cdot 4 = 5, 44 \text{ mm}$$

P pont elmozdulása:

$$u_p(0, 4; 0, 6) = \sum_{i=1}^4 h_i u_i = h_1 u_1 + h_3 u_3 + h_4 u_4 = \frac{1}{4}(1-0, 4)(1-0, 6) \cdot 0, 2 + \frac{1}{4}(1+0, 4)(1+0, 6) \cdot (-0, 3) + \frac{1}{4}(1-0, 4)(1+0, 6) \cdot (-0, 2) = -0, 204 \text{ mm}$$

$$v_p(0, 4; 0, 6) = \sum_{i=1}^4 h_i v_i = h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3 = \frac{1}{4}(1-0, 4)(1-0, 6) \cdot 0, 2 + \frac{1}{4}(1+0, 4)(1-0, 6) \cdot 0, 3 + \frac{1}{4}(1+0, 4)(1+0, 6) \cdot 0, 1 = 0, 14 \text{ mm}$$

3 síkbeli elem Jacobi mátrixa – számpélda

Számítsuk ki az előző feladatban szereplő végeelem Jacobi mátrixát és Jacobi determinánsát!

i	az alakfüggvények	alakfüggvények ξ szerinti deriváltjai	alakfüggvények η szerinti deriváltjai	x_i	y_i
1	$h_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$\frac{\partial h_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta)$	$\frac{\partial h_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi)$	0	0
2	$h_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$\frac{\partial h_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1-\eta)$	$\frac{\partial h_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi)$	8	0
3	$h_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	$\frac{\partial h_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)$	$\frac{\partial h_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)$	4	8
4	$h_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$	$\frac{\partial h_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta)$	$\frac{\partial h_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)$	0	4

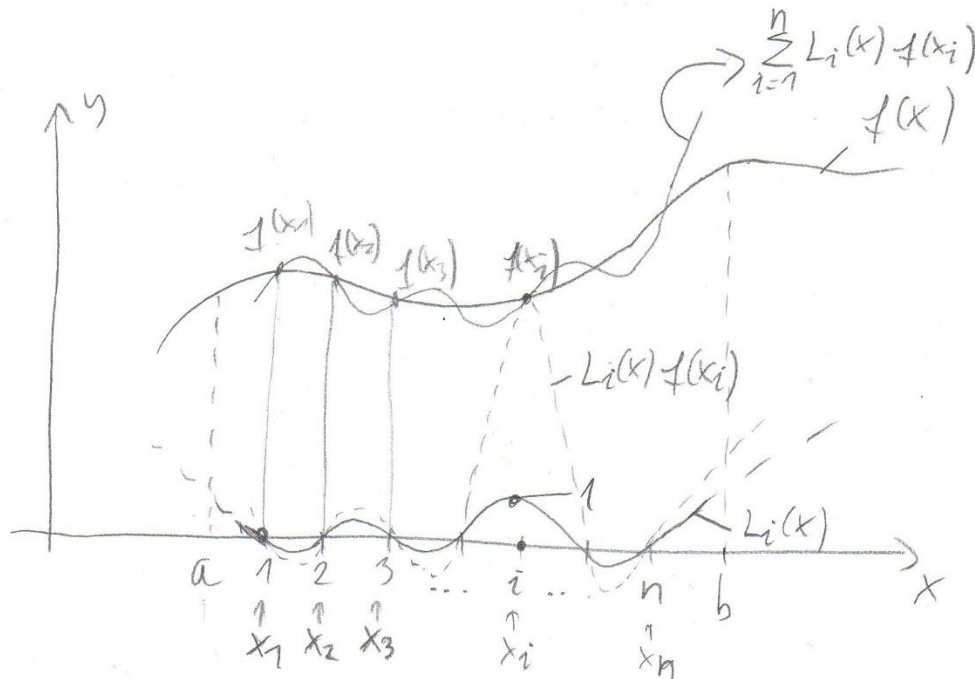
$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{J}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial h_3}{\partial \xi} x_3 & \frac{\partial h_3}{\partial \xi} y_3 + \frac{\partial h_4}{\partial \xi} y_4 \\ \frac{\partial h_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial h_3}{\partial \eta} x_3 & \frac{\partial h_3}{\partial \eta} y_3 + \frac{\partial h_4}{\partial \eta} y_4 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\eta) \cdot 8 + \frac{1}{4}(1+\eta) \cdot 4 & \frac{1}{4}(1+\eta) \cdot 8 - \frac{1}{4}(1+\eta) \cdot 4 \\ -\frac{1}{4}(1+\xi) \cdot 8 + \frac{1}{4}(1+\xi) \cdot 4 & \frac{1}{4}(1+\xi) \cdot 8 + \frac{1}{4}(1-\xi) \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\eta & 1+\eta \\ -1+\xi & 3+\xi \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

A Jacobi determináns:

$$\begin{aligned}
 \det(\underline{\underline{J}}) &= (3-\eta)(3+\xi) - (-1+\xi)(1+\eta) = 9 + 3\xi - 3\eta - \eta\xi + 1 + \eta - \xi - \eta\xi = \\
 &= 2\xi - 2\eta - 2\eta\xi + 10
 \end{aligned}$$

4 numerikus integrálás Gauss-kvadratúra

Az integrálni kívánt függvényt Lagrange-polinomokkal közelítjük:



$f(x) \approx \sum_{i=1}^n L_i(x) f(x_i)$, ahol $L_i(x)$ a Lagrange-féle interpolációs polinomok:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Ezzel az integrál közelítő értéke:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) \underbrace{\int_a^b L_i(x) dx}_{W_i}$$

Az integrálás pontossága függ az x integrálási pontok megválasztásától

Bizonyítható, hogy ha:

- Az x integrálási pontok a Legendre-polinom gyökhelyei
- $a=-1$, $b=1$

akkor az integrálra a lehető legjobb közelítést kapjuk. Ha az integrandusz $2n-1$ -ed, vagy annál kisebb fokú polinom, akkor a közelítő érték megegyezik az egzakt megoldással. Ekkor a közelítő megoldást Gauss-kvadratúrának nevezzük. A Gauss-kvadratúrához szükséges integrálási pontok és súlyok:

integrálási pontok száma (g)	integrálási pont (X_i)	súly (W_i)
g=1	0	2
g=2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
g=3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$

A merevségi és tehervektorok numerikusan integrálva:

$$\underline{\underline{K}}^e = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \left(\underline{\underline{B}}^e(X_i, X_j) \right)^T \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{B}}^e(X_i, X_j) \det \left(\underline{\underline{J}}^e(X_i, X_j) \right) W_i W_j$$

$$\underline{\underline{f}}_{=p}^e = \sum_{i=1}^g \left(\underline{\underline{H}}(X_i, \eta=1) \right)^T \underline{\underline{p}}_0(X_i, \eta=1) J_A^e(X_i, \eta=1) W_i \quad (\text{terhelés fenti élen})$$

$$\underline{\underline{f}}_{=f}^e = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \underline{\underline{H}}^T(X_i, X_j) \underline{\underline{f}}_0(X_i, X_j) \det \left(\underline{\underline{J}}^e(X_i, X_j) \right) W_i W_j$$

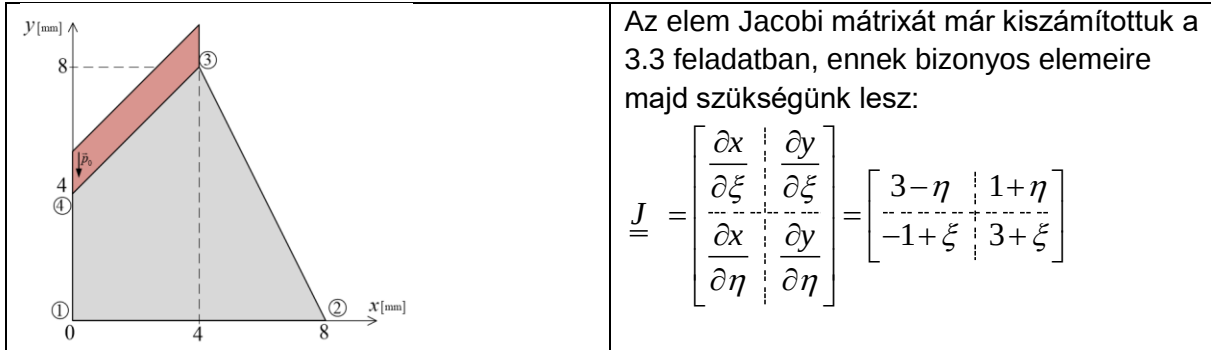
Integrálások során jellemzően $g=2$ Gauss pontot alkalmazunk.

5 Tehervektor meghatározása – számpélda

Adott: az ábrán látható elem csomópontjainak koordinátái (ábra alapján) valamint terhelése:

$$\vec{p}_0 = (-2\vec{e}_y) \text{ MPa}$$

Feladat: az elem tehervektorának előállítás



Az integráláshoz 2 Gauss pontos integrálást alkalmazunk, ennek pontjai és súlyai 3.4 alapján:

i	X_i	W_i
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

A tehervektor előállítása:

$$\underline{f}_p = \int_{-1}^1 \underline{H}(\xi, \eta=1)^T \underline{p}_o(\xi, \eta=1) J_A(\xi, \eta=1) d\xi$$

ahol:

$$\underline{H}(\xi, \eta=1) = \begin{bmatrix} h_1(\xi, \eta=1) & 0 & h_2(\xi, \eta=1) & 0 & h_3(\xi, \eta=1) & 0 & h_4(\xi, \eta=1) & 0 \\ 0 & h_1(\xi, \eta=1) & 0 & h_2(\xi, \eta=1) & 0 & h_3(\xi, \eta=1) & 0 & h_4(\xi, \eta=1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{p}_o(\xi, \eta=1) = \underline{p}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ (ez konstans, így független } \xi \text{-től és } \eta \text{-tól is)}$$

$$J_A(\xi, \eta=1) = \sqrt{\left(\frac{\partial x(\xi, \eta=1)}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(\xi, \eta=1)}{\partial \xi}\right)^2} = \sqrt{(3-\eta)^2 + (1+\eta)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{8}$$

(ez ξ -től független, csak η -tól függ, de az meg konstans 1)

Gauss integrálással felírva a tehervektor:

$$\underline{f}_p = \sum_{i=1}^2 \underline{H}(X_i, 1)^T \underline{p}_o(X_i, 1) J_A(X_i, 1) W_i$$

$$\underline{f}_p = \underline{H}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)^T \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \sqrt{8} \cdot 1 + \underline{H}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)^T \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \sqrt{8} \cdot 1$$

Az alakfüggvények értékei a Gauss pontokban:

X_1 -ben	X_2 -ben
$h_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)(1-1) = 0$	$h_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1-1) = 0$
$h_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)(1-1) = 0$	$h_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1-1) = 0$
$h_3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)(1+1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$	$h_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$
$h_4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)(1+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$	$h_4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1+1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Behelyettesítve:

$$\underline{f}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \sqrt{8} \cdot 1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \sqrt{8} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \sqrt{8} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \sqrt{8} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{8} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\sqrt{8} - \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{8} - \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\sqrt{8} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{8} \\ 0 \\ -2\sqrt{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4\sqrt{2} \\ 0 \\ -4\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ N}$$

Megjegyzés: Ilyen egyszerű esetben, amikor konstans a nyomás, egyszerűbb módon is ki tudjuk számítani a csomóponti erőket:

A fenti felület nagysága, amire a nyomás hat: $A = \sqrt{4^2 + 4^2} \cdot 1 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ mm}^2$

Az eredő erő nagysága: $F = p_0 \cdot A = 2 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ N}$

Mivel a nyomás konstans, az eredő erő 50-50%-ban oszlik el a 2 csomópont között, így a tehervektor:

$$f_{=p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4\sqrt{2} \\ 0 \\ -4\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ N}$$