

6. GYAKORLAT

**REGRESSZIÓ, MÉRÉSI ADATOK FELD.,
LIN. ALGEBRAI ALKALMAZÁSOK,
KÉPSZERKESZTÉS**

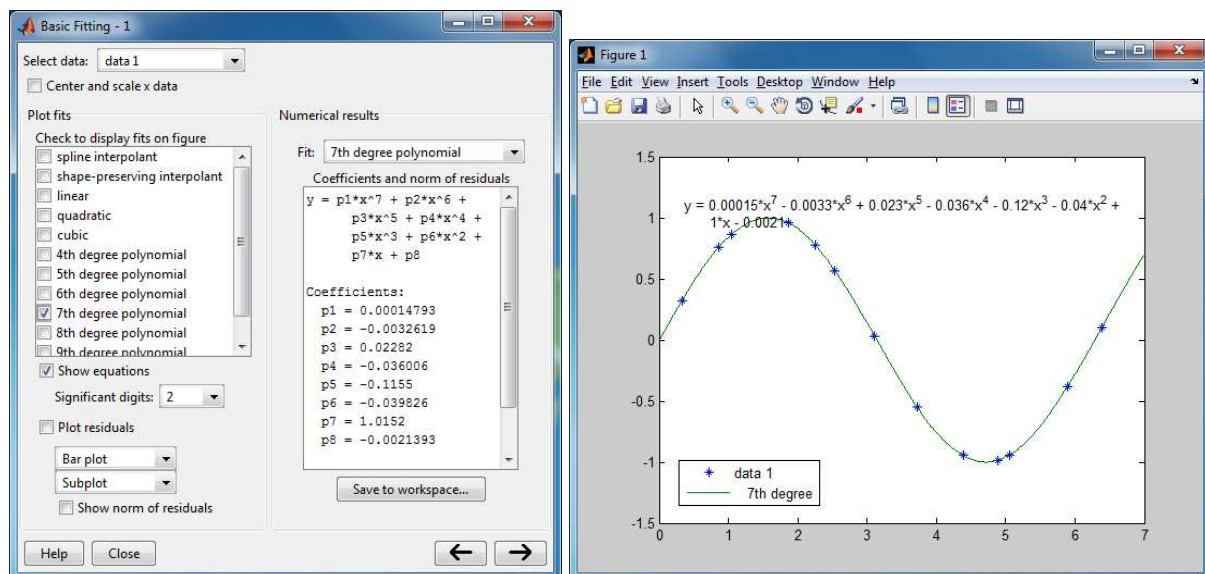
EGYSZERŰ REGRESSZIÓ

A Matlab sokféle támogatást nyújt regressziós feladatok megoldásához (lásd előadás). A legegyszerűbb esetben adott x , y pontsorozathoz kérhető polinomos közelítés a *plot* menüjében.

Ebben a mintafeladatban egy szinusz függvényt követő pontsorozathoz készítjük el a regressziós polinomot.

```
>> x = (0:0.5:6)+0.4*rand(1,13)    % x sorozat  
>> y = sin(x)                      % y sorozat  
>> plot(x,y,'*')
```

A Figure 1 ablak Tools/Basic Fitting menüpontjában kérjük ki a hetedfokú közelítést.



Ezután jelöljük be, hogy látszódjék az ábrán az egyenlet is, ill. a \rightarrow lenyomása után láthatjuk a numerikus értékeket is.

Megállapítható, hogy az eredmény nagyon hasonló a $\sin(x)$ Taylor-sorához.

MÉRÉSI ADATOK FELDOLGOZÁSA, ELEMZÉSE (VIZSGA MINTA)

Ebben a kidolgozott mintapéldában egy olyan komplex gyakorlati feladatot oldunk meg, amely a Matlab modul zárásaként összegzi tudásunkat. A megoldás *során néhány haladóbb ötletet is alkalmazunk és bemutatunk, ezek azonban nem tartoznak bele a tantárgy törzsanyagába és nem kerülnek számonkérésre sem.*

A feladatban egy rögzített rugalmas test nyúlásának mérési adatait kell feldolgoznunk, a hibás adatok kiszűrésével, statisztikákkal, regresszióval.¹ A megoldás része a megfelelő modell felállítása is (ellenőrzéssel).

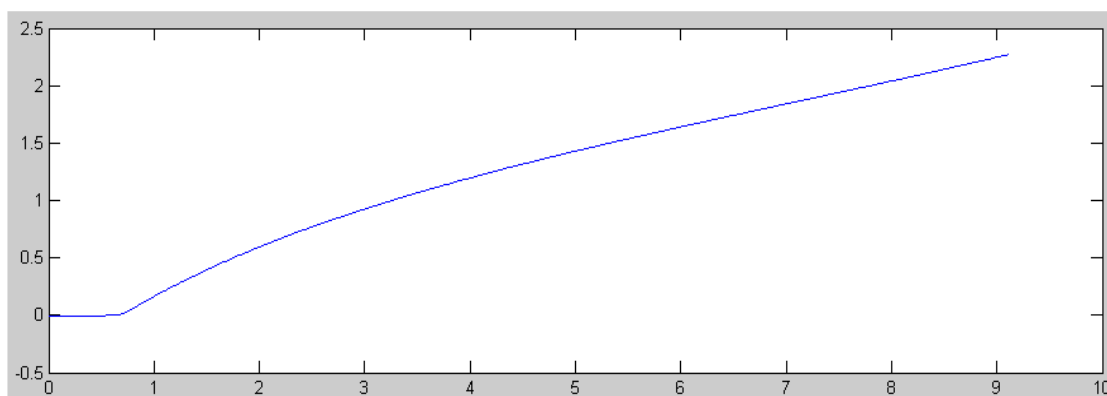
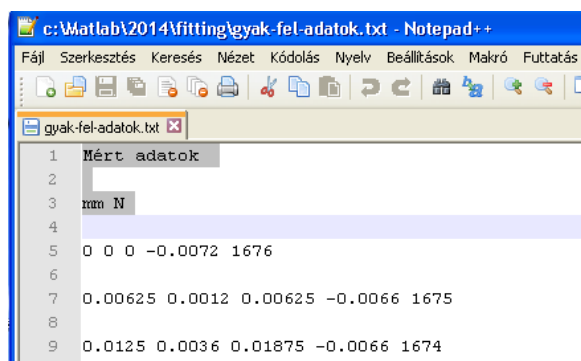
1. Adatoszlopok kinyerése, ábrázolás

Egy egyszerű szövegszerkesztővel nyissuk meg az adatfájlt (gyak-fel-adatok.txt), és tanulmányozzuk a struktúráját. Látható, hogy 5 adatoszlopunk van, amelyek rendre a megnyúlás (l) és az erő (F) értékeit tartalmazzák (1. és 2., ill. 3. és 4. oszlopok), továbbá egy azonosítót (5. oszlop), összesen 999 adatsorral. A fejléc számunkra most felesleges, ezért töröljük.

Mentsük el a fájlt (data.txt).

Ebben a feladatban a 3. és a 4. oszlop adataival fogunk tovább dolgozni. Olvassuk be az adatokat a Matlabban egy l és egy F vektorba, majd ábrázoljuk az erőt a megnyúlás függvényében!

```
>> load data.txt, l = data(:,3); F = data(:,4);  
>> plot(l,F)
```



Az $F(l)$ függvény grafikonját vizsgálva azt találjuk, hogy három részre bontható fel.

¹ A mérési adatokért és az alapötletért a szerzők köszönetet mondanak dr. Pere Balázs Tanszékvezető Úrnak.

Az első szakasz – feltehetően a befogás és a mérés technikai korlátai miatt – még nem ad reális képet a fizikai jelenségről („inicializálás”, kb. az első 70 adat). Ezután egy exponenciális/logaritmikus jellegű rész következik, majd egy lineáris szakasz figyelhető meg (a Hooke-törvény szerint).

Minket a feladat „standard” megoldása során elsősorban a lineáris rész érdekel majd, a fejlettebb (fakultatív) megoldásnál elemezzük a nem lineáris részt.

2. Osztáspontok vizsgálata

Az adatokat áttekintve láthatjuk, hogy jól érzékelhető szabályosság figyelhető meg a megnyúlási értékek sorozatában. Vizsgáljuk meg a Matlabbal, hogy vajon egyenlőközűnek vagy közel egyenlőközűnek tekinthetők-e az osztáspontok!

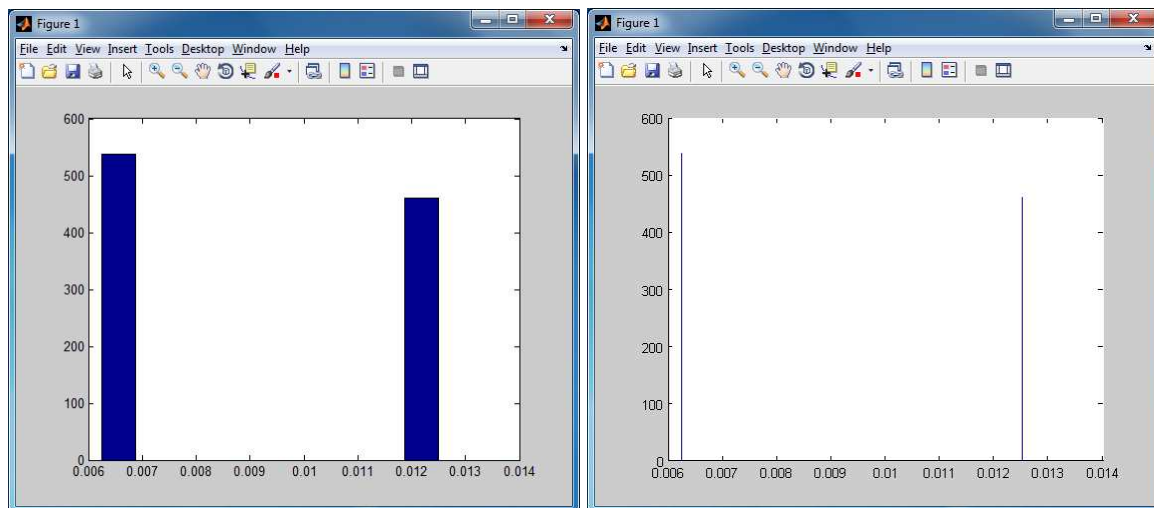
Elkészítjük a szomszédos l értékek differenciáit (távolságát).

```
>> dl = diff(l); % ; nélkül is megnézhetjük, de ...
```

Ezután hisztogramot (gyakoriság oszlopdiagramot) kérünk az adatokra, hogy áttekinthessük a struktúrát.

```
>> hist(dl)
```

A grafikonon látjuk, hogy az adatsorban csak 0,0065 és 0,012 körüli értékek szerepelnek. Módosított hisztogram (az összes eset darabszámával): `hist(dl,999)`, erről már jól látjuk, hogy valójában csak pontosan két érték fordul elő (0,00625 és 0,0125).



*Pontos ellenőrzés és számolás is elvégezhető:

```
>> db = 0; for i = 1:998 if (dl(i) > 0.0125 - 5*eps &  
dl(i) < 0.0125 + 5*eps) db = db + 1; end; end; db  
% 5*eps nélkül nem lenne jó
```

Ha ugyanezt megcsináljuk a másik értékre is, akkor látjuk, hogy 460, ill. 538 előfordulás van. Az ellenőrzés végrehajtható a `h = hist(dl)`, ill. `h = hist(dl, 999)` parancsokkal is.

***3. A grafikon részekre bontása**

Most megkeressük az $F(l)$ diagram egyenesnek tűnő szakaszát.

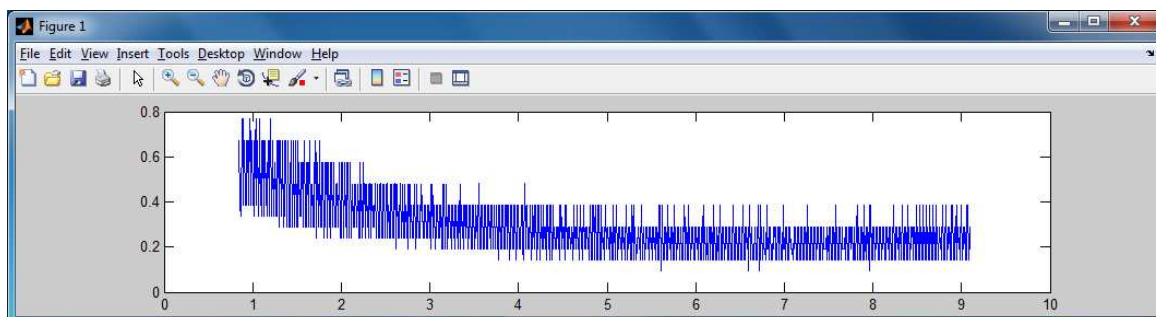
Ehhez az `axis([xkezd xvég ymin ymax])` szerkezetű paranccsal ablakot nyitunk a diagramra és ezt végigtoljuk lépésenként.

```
for bal = 1:900 ...
    jobb = bal + 99; ...
    axis([l(bal) l(jobb) min(F(bal:jobb)) max(F(bal:jobb))]), ...
    pause(0.02), ...
end
```

Az elejét még egyszer, lassabban is végignézhethetjük (írjuk át a 900-as értéket 200-ra, a pause paraméterét pedig 0,2-re).

Úgy tűnik, hogy a 200. esettől már közel lineáris a kapcsolat. Ezt azzal is ellenőrizhetjük, hogy ettől kezdve a differenciáhányadossal becsült derivált közel konstans lesz.

```
>> l_orig = l; F_orig = F; l = l_orig(100:end); F = F_orig(100:end);
% lecsípjük a megfelelő részeket (100-tól)
>> dF = diff(F); dl = diff(l); deriv_F = dF./dl;
% derivált sorozat legyártása
>> deriv_F(end+1) = deriv_F(end);
% kiegészítjük a sorozatot az utolsó elem másolatával, hogy a deriv_F
és l sorozatok elemszáma azonos legyen (ábrázoláshoz)
>> plot(l,deriv_F)
```



Feltevésünkkel ellentétben az $F'(l)$ deriváltfüggvény kb. 4,2-ig csökkenő tendenciát mutat, azaz eddig a függvény biztosan nem lineáris. A deriváltra ezen a szakaszon a következő közelítő becslést adjuk (indoklás: a függvény alakja alapján látjuk, hogy negatív kitevős exponenciális típusú, megfelelő eltolással):

$$(1) \quad F'(l) = a \cdot e^{-b \cdot (l-c)} + d,$$

ahol d az egyenes rész meredeksége az $F = F(l)$ kapcsolatban. Mivel egy exponenciális függvény határozatlan integrálja szintén exponenciális függvény, ezért az $F(l)$ függvény jó közelítéssel

$$(2) \quad F(l) = A \cdot e^{-b \cdot (l-c)} + d \cdot l + e$$

alakú lehet. (Itt kihasználtuk azt a becslésnél szokásos technikát, hogy könnyebb a deriváltból következni az eredeti függvényre, mint direkt módon becsülni az eredetit.)

A továbblépésre ezután két lehetőségünk van.

a./ Csak az egyenesnek látszó részen dolgozunk, azaz az adataink második felén, kb. az 500. ponttól kezdve.

*b./ Az exponenciális rész további vizsgálatához a (2) összefüggés A , b , c , d , e paramétereit a négyzetes eltérések minimalizálásával keressük meg.

(A mért adatsor és a becsült függvényértékek eltérései négyzetének összegét minimalizáljuk az `fminsearch()` függvény segítségével.)

4. Regresszió a lineáris részre

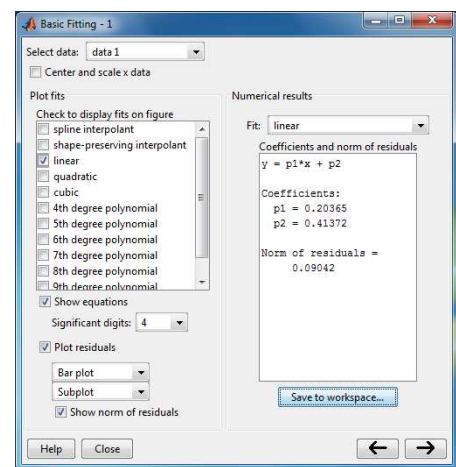
Töröljük a változóinkat, újra betöltjük az adatokat, majd vesszük az adathalmaz 2. felét.

```
>> clear all, load data.txt
>> l_orig = data(:,3); F_orig = data(:,4);
>> l = l_orig(500:end);
>> F = F_orig(500:end); plot(l,F)
```

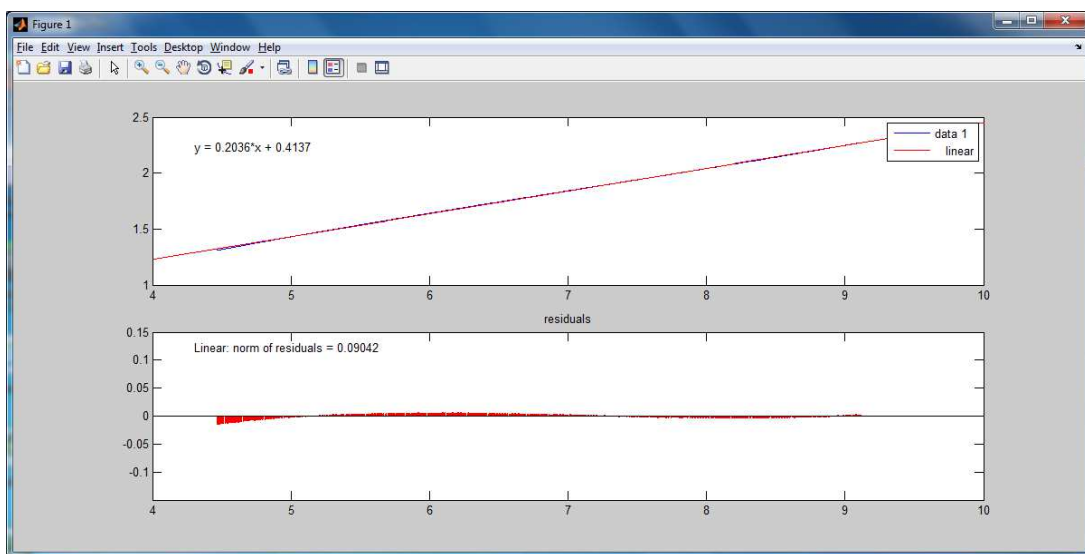
A regressziós feladat megoldását a már ismert eszközzel végezzük (Tools/Basic Fitting).

Az ablakban válasszuk ki, ill. jelöljük be a következő opciókat:

- Lineáris kapcsolat,
- Show equations,
- Plot residuals,
- Show norm of residuals.



A „Significant digits” értékét növeljük meg 4-re. A → gomb megnyomásával nyissuk ki a „Numerical results” panelt is. Itt lehetőség van az illeszkedés adatainak mentésére, ill. direkt módon is kimásolhatjuk a megfelelő változókat.

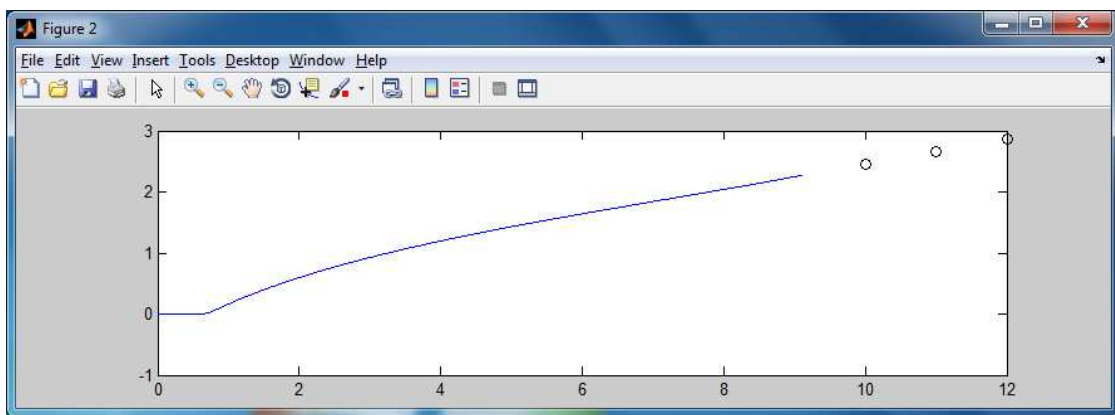


Másoljuk be a parancsablakba a megfelelő paramétereket:

```
>> p1 = 0.20365, p2 = 0.41372
```

Ezután már az $y = p1 \cdot x + p2$ képlettel további x helyeken is tudjuk az F függvény értékét becsülni.

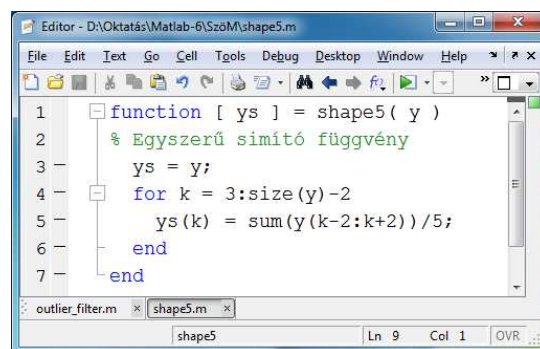
```
>> x = [10 11 12]; y = p1*x + p2; ertehtabla=[x; y]
% 3 új pontot hozunk létre
>> figure(2), plot(l_orig,F_orig), hold on, plot(x,y,'ok')
% új ábra az új pontokkal (teljes adatsor)
```



5. Adatok simítása és szűrése

A mért adatsorozat feldolgozásának fontos lépése a *simítás* (egyenetlenségek csökkentése) és ennek részeként egyes feltűnően kiugró adatok törlése (ezek feltehetően mérési hibából származnak).

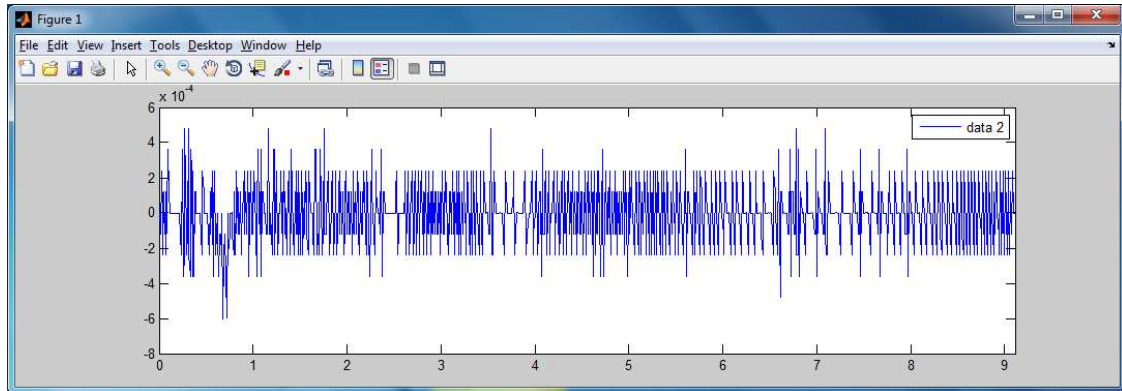
*Ha elérjük a Signal Processing Toolbox szolgáltatásait, akkor a simítási feladat megoldására igen sok eszköz áll rendelkezésünkre. (Pl. egy jól bevált módszer a Savitzky–Golay-féle simítás.) Ha csak a Matlab alapszolgáltatásai használhatóak, akkor egyszerű simításként alkalmazhatjuk pl. az 5-pontos csúszóátlag módszert, amely 5 egymás melletti érték átlagával helyettesíti a középsőt. Erre készítettünk egy saját függvényt (shape5.m).



```
1 function [ ys ] = shape5( y )
2 % Egyszerű simító függvény
3 ys = y;
4 for k = 3:size(y)-2
5     ys(k) = sum(y(k-2:k+2))/5;
6 end
7 end
```

A feladatunk megoldása ezt használva:

```
>> l = l_orig; F = F_orig;
>> Z = shape5(F); plot(l,F-Z)
% kirajzoltatjuk a simított és az eredeti sorozat eltérését
```

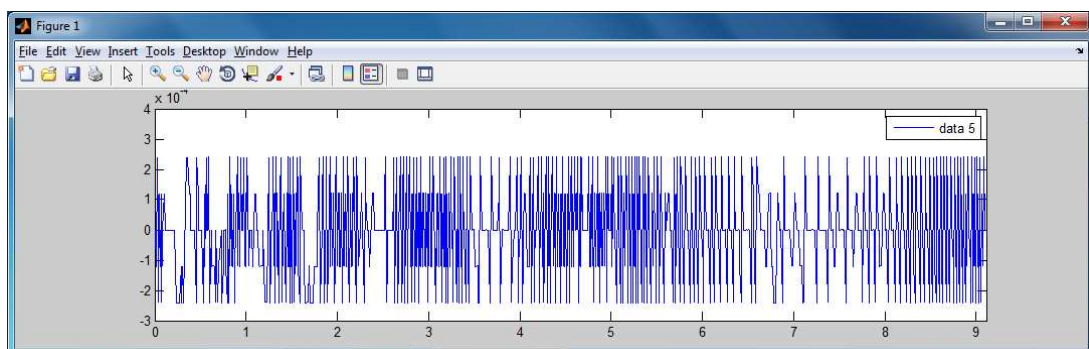
Ha a mért adatsor és a simított adatsor közötti különbség jelentős, akkor *a kiugró eseteket érdemes törölni*, mint extra zajból, vagy mérési hibából származó értékeket.

Erre a feladatra szintén egy saját függvényt készítettünk (`outlier_filter`), amely paraméterként megkapja az eredeti adatsor (x , y) mellett a simított értékek sorozatát is (ys), és az $x(k)$, $y(k)$, $ys(k)$ adathármasokból csak azokat hagyja meg, ahol az eltérés a szintén megadott limitnél kisebb. Az eredmények rendre az xf , yf , ysf sorozatokba kerülnek, amelyeket üres sorozatokból kiindulva készítünk el.

A függvény segítségével most lecsípjük a $3E-4$ -nél nagyobb hibájú adatokat:

```
>> limit = 3E-4;  
>> [ls,Fs,Zs] = outlier_filter(1,F,Z,limit); plot(ls,Fs,Zs)  
% az eredeti és a simított adatsor eltérésének kirajzoltatása a  
korrekció után
```

```
function [ xf,yf,ysf ] = outlier_filter( x,y,ys,limit )  
    xf=[]; yf=[]; ysf=[];  
    for k = 1:length(x)  
        if (abs(y(k)-ys(k))<limit)  
            xf = [xf x(k)];  
            yf = [yf y(k)];  
            ysf = [ysf ys(k)];  
        end  
    end  
end
```



Nézzük meg, hogy az eljárás hány adatot törölt.

```
>> length(ls)
```

Látjuk, hogy 939 darab adatunk maradt.

Ezután ábrázoljuk a redukált adatsorozat 2. felét, és az ábrára a megszokott módon lineáris regressziót kérünk (Basic Fitting).

```
>> l = ls(470:end); F = Fs(470:end); plot(l,F)
```

A parancsablakba most is bemásolhatók a megfelelő paraméterek:

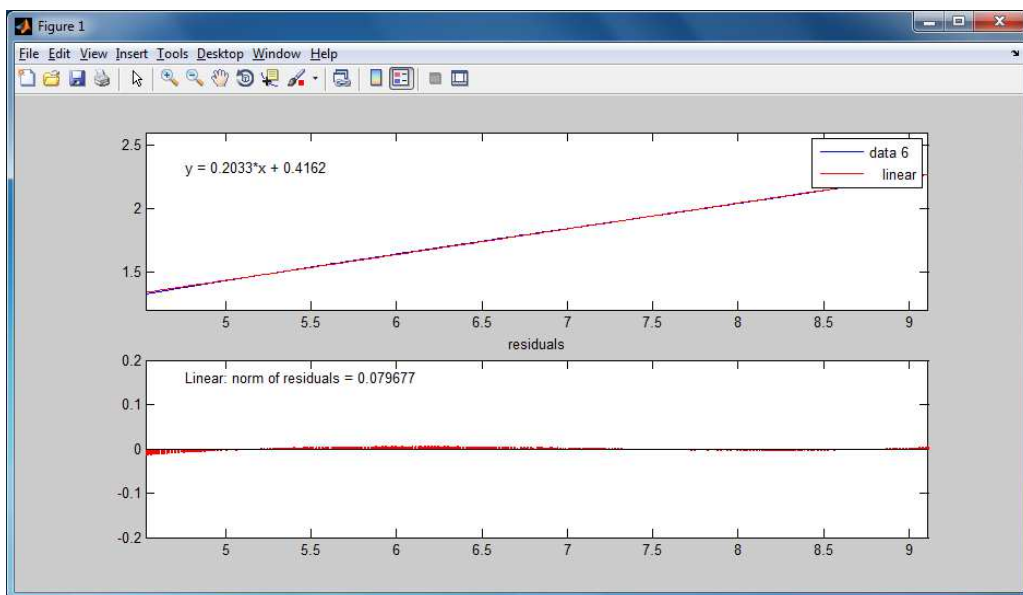
```
>> p1 = 0.20332, p2 = 0.4162
```

Szintén a fentihez hasonló módon előrejelzést is végezhetünk az $y = p1 \cdot x + p2$ képlettel.

```
>> x = [10 11 12]; y = p1*x + p2; ertektabla=[x; y]
```

```
>> figure(2), plot(l_orig,F_orig), hold on, plot(x,y,'ok')
```

Összefoglalva, látható, hogy a simítás és a pár kiugró pont törlése kevésbé módosította a korábbi eredményt, hiszen a sorozat eléggé lineáris volt. (A Signal Processing Toolbox parancsait használva is nagyon hasonló eredmény adódik.)



***6. Általános regresszió, paraméterbecslés a legkisebb négyzetek módszerével**
(Lásd az otthoni munka részben.)

SPECIÁLIS VEKTORSZORZATOK

Feladat

Hány fokos szöget zárnak be az $a = [1 \ 0]$ és $b = [1 \ 1]$ vektorok?

Tipp: Használjuk a subspace függvényt. Vigyázzunk arra, hogy ez csak oszlopvektorokra működik helyesen, és a visszatérési értéket radiánban kapjuk meg.

Feladat

Határozzuk meg az $a = [1, 3, 2]$, $b = [-1, 5, 2]$ vektorokra merőleges olyan c vektort, amelynek a hossza éppen 2!

Tipp: Az $a \times b$ vektor nyilván merőleges a -ra és b -re (cross fv.). Azt kell még biztosítani, hogy a szorzatvektor hossza 2 legyen. Ehhez használjuk a (kettes, euklideszi) normát.

SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR

Mintafeladat

Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ szimmetrikus mátrix sajátvektorait és sajátértékeit! Ellenőrizzük a sajátértékegyenlet teljesülését is!

```
>> [U L] = eig(A), ellenorzes = A*U - U*L
```

Határozzuk meg az A mátrix karakterisztikus polinomját! Helyettesítsük be a sajátértékeket a karakterisztikus polinomba, és így ellenőrizzük, hogy ezek valóban kielégítik a karakterisztikus egyenletet!

Tipp: A `polyval` parancs polinom kiértékelésére szolgál, adott helyen/helyeken.

```
>> p = poly(A), l = eig(A), polyval(p, l)
```

Feladat

Legyen $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$. Valósak-e a B mátrix sajátértékei?

Tipp: Használjuk a megoldáshoz a `poly` és a `roots` párost, ill. az `eig` parancsot!

Az `eig` parancs segítségével készítsük el a mátrixhoz az U és Λ mátrixokat úgy, hogy U oszlopvektorai az 1-re normált sajátvektorokat adják, a Λ mátrix főátlóbeli elemei pedig a sajátértékeket. Ellenőrizzük, hogy ekkor $U \cdot \Lambda \cdot \text{inv}(U)$ az eredeti mátrixot adja!

KÉP BEOLVASÁSA, MEGJELENÍTÉS, INFORMÁCIÓK LEKÉRÉSE

Kérdezzük le a „canoe.tif” fájl képjellemzőit! (Ez a fájl a Matlab rendszer tartozéka, de a közös meghajtón is megtalálható.) Milyen képtípusú ez a fájl (ColorType)?

Olvassuk be a képet a Matlabba a típusának megfelelő módon!

```
>> [X,map] = imread('canoe.tif');
```

Idézzük fel, hogy mit tanultunk az indexelt képfájlok tárolási struktúrájáról (előadás)!

Ellenőrizzük az X és a map mátrixok struktúráját (adat- és colormap mátrix)!

Milyen RGB összetevők tartoznak az $X(1, 1)$ és az $X(3, 2)$ képponthoz?

Jelenítsük meg a képet! (Használjuk az `image` parancsot.)

KÉPKONVERZIÓK

Szeretnénk az előző indexelt képet fekete-fehérré alakítani, ill. úgy megjeleníteni. Próbáljuk ki, hogy a

```
>> colormap(gray)
```

parancs nem jeleníti meg helyesen a képet.

A megoldáshoz úgy juthatunk el, ha ezt a képet szürkeárnyalatossá alakítjuk. Ehhez azonban az indexelt képet először truecolor (RGB) formátumúvá kell konvertálni.

```
>> RGB = ind2rgb(X,map); % Ellenőrizzük az RGB mátrixot!  
>> image(RGB)
```

Ezután végezhetjük el a szürkeárnyalatossá alakítást.

Ehhez használjuk az előadáson tanult R, G és B szorzókat (3. slide)! (Az új képmátrix neve legyen A).

A megjelenítéshez ezután hozzunk létre egy új háromcsatornás B mátrixot, amelynek mindhárom színcsatornájába a szürke értékeket írjuk be.

```
>> B(:,:,1)=A; B(:,:,2)=A; B(:,:,3)=A; figure(2); image(B);
```

Láthatjuk, hogy a szürkeárnyalatos kép így már korrekt (a három csatornát azért kellett használnunk, mert az egycsatornás megjelenítő parancs – imshow – a mi környezetünkben nem érhető el).

Feladat

Az előző RGB képből emeljük ki a zöld csatorna értékeit új képre, és jelenítsük meg a képet! Jelenítsük meg az RGB kép inverzét is! (Lásd előadás.)

VÁGÁSI FELADAT

Hozzunk létre egy új képfájlt, amely az előző szürke RGB kép 0 és 1 közötti double intenzitás értékeit uint8 típusúra alakítja át.

```
>> G2 = uint8(round(B*255));
```

Hajtsuk végre a G2 képfájlon a vágási feladatot a threshold.m fájl felhasználásával úgy, hogy rendre 100, 80 és 50 vágási értékeket használunk. Figyeljük meg a különbséget!

(Az új képmátrix neve lehet például GV vagy result.)

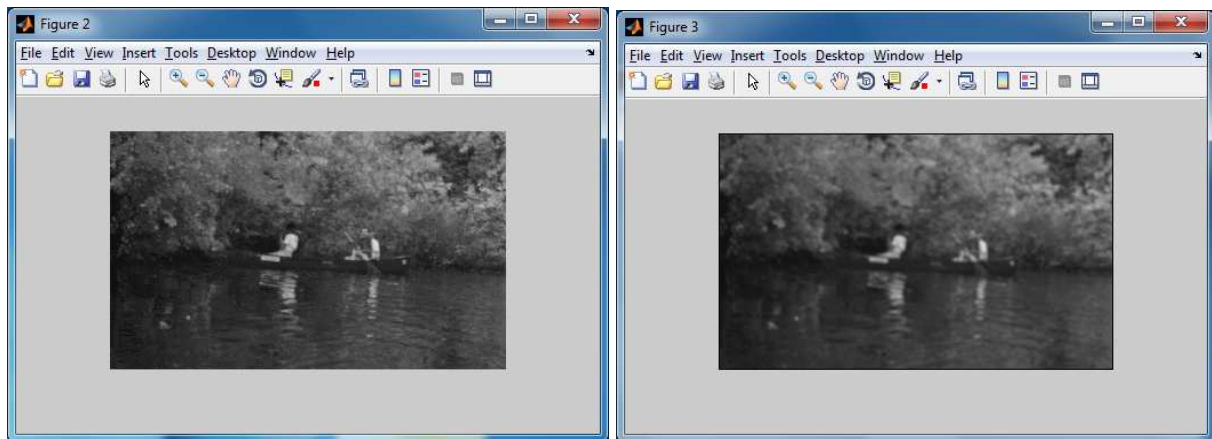
Megj. Mivel nálunk (C100) itt is szükséges a három színcsatorna használata a szürke képen, ezért a feladatot úgy tudjuk megoldani, ha külön-külön elvégezzük a szűrést az egyes csatornákra, és végül egyesítjük a mátrixokat.

Például:

```
>> result1 = threshold(G2(:,:,1),128);  
>> result2 = threshold(G2(:,:,2),128);  
>> result3 = threshold(G2(:,:,3),128);  
>> result=zeros(207,346,3); % új mátrix az eredménynek  
>> ... % result feltöltése önállóan  
>> image(result) % vágási feladat megoldva
```

SZÜRÉSI FELADAT

Hajtsuk végre a G2 képfájlon a szűrési feladatot a `simit.m` fájl felhasználásával!
(Az új képmátrix neve lehet például G3. A megjelenítéshez nálunk most is mindhárom színcsatornát fel kell tölteni.)
Hasonlítsuk össze az eredeti és a szűrt képet!



Jól megfigyelhető, hogy a szűrt kép elmosódottabb, és a szélén fekete „keret” jelenik meg. Próbáljunk ki néhány más átlagszűrőt is!

OTTHONI MUNKA

Feladat

Próbáljunk ki tanult alapstatisztikákat a mérési adatsorra!

Általános regresszió, paraméterbecslés a legkisebb négyzetek módszerével (Kiegészítés a mérési adatok feldolgozásához)

Ebben a részben egy olyan általános regressziós eljárást mutatunk be, amely a mostani konkrét feladat mellett sok más probléma megoldására is használható. Csak annyi a teendőnk, hogy a mintamegoldás megfelelő sorait átírjuk (ezek most piros kommentezésűek)!

Célunk a feladatnak megfelelően az exponenciális rész regresszióval történő becslése.
Az eredeti adatsor 100. pontjánál kezdjük az illesztést.

```
>> clear all
>> load data.txt
>> l = data(:,3); F = data(:,4); xdata=l(100:end); ydata=F(100:end);
% adatelőkészítés
```

Következik az $A \cdot e^{-b(l-c)} + d \cdot l + e$ típusú illesztés végrehajtása, a `fitc` függvény hívja meg az `fminsearch` parancsot.

```
>> [estimates, model] = fitc(xdata,ydata) % a kapott paraméterek
>> est_fun = [num2str(estimates(1),4), '*exp(-', num2str(estimates(2),4), '*(x-', ...
num2str(estimates(3),4), '))+ ', num2str(estimates(4),4), '*x+', num2str(estimates(5),4)]
% a képletünk karakterlánca szövegdarabkákból összeragasztva
>> [sse, FittedCurve] = model(estimates);
% FittedCurve a becsléssel kapott értéksorozat
>> sse % minimalizált négyzetes eltérés
>> R_square = min(min(corrcoef(ydata,FittedCurve).^2))
% determinációs együttható
```

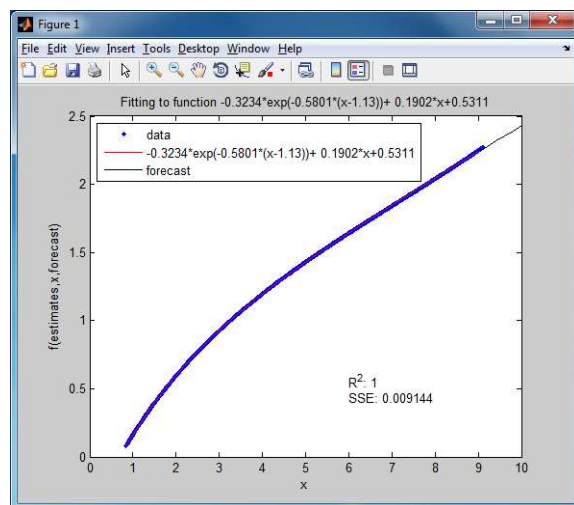
Ezután kirajzoljuk az adatokat és a regressziós függvényt, majd előrejelzést is készítünk.

```
>> plot(xdata, ydata, '.'), hold on
>> plot(xdata, FittedCurve, 'r')
>> xlabel('x'), ylabel('f(estimates,x,forecast)')
>> title(['Fitting to function ', est_fun]);
>> x = [9:0.2:10]; y = inline(est_fun), plot(x, y(x), 'k')
% előrejelzés a [9, 10] tartományban
>> legend('data', est_fun, 'forecast', 2)
>> text(6,0.5, [{'R^2: ', num2str(R_square,4)}]; [{'SSE: ', num2str(sse,4)}])
% R-négyzet pozícionálását kell átírni megfelelő helyre
>> hold off
```

Az eredményt elemezve látható, hogy az illesztésünk R-négyzet értéke (determinációs együtthatója) gyakorlatilag 1, azaz az illesztés szinte tökéletes. Így a lineáris tag most kapott együtthatója az anyag fizikai viselkedését leíró rugalmassági együttható: 0.1902.

Megjegyezzük, hogy ez pontosabb a lineáris regresszióval kapott értéknél!

Végül közöljük a fitc() függvény definícióját is. Itt látunk példát függvénydefiníciók egymásba ágyazására és tetszőleges darabszámú paraméter átvételére (params).



```
function [estimates, model] = fitc(xdata, ydata)
% Call fminsearch with starting point.
start_point = [-1, 0.5, 1, 0.2, 0.4];
% saját alkalmas kezdőpontok A,b,c,d,e-re
model = @expfunc; % itt tesszük hozzáférhetővé a model függvényt
estimates = fminsearch(model, start_point);
% expfunc accepts curve parameters as inputs, and outputs sse,
% the sum of squares error for
% A*exp(-b*(xdata-c)) + d*xdata + e
% and the FittedCurve. FMINSEARCH only needs sse, but we want
```

```
% to plot the FittedCurve at the end.  
function [sse, FittedCurve] = expfunc(params)  
    A = params(1);    % 1. paraméter  
    b = params(2);    % 2. paraméter  
    c = params(3);    % 3. paraméter  
    d = params(4);    % 4. paraméter  
    e = params(5);    % 5. paraméter  
    FittedCurve = A.*exp(-(b * xdata-c))+d*xdata+e;  
    % a függvény definíciója  
    ErrorVector = FittedCurve - ydata;  
    sse = sum(ErrorVector .^ 2);  
end  
end
```

