

3. GYAKORLAT

MÁTRIXARITMETIKA

PONTOZOTT MŰVELETEK

A Matlab az azonos méretű mátrixok(vektorok) között megengedi az elempáronkénti műveleteket. Ez hasonló az Excel blokkok(tartományok) között elempáronként elvégezhető műveletekhez. Ezek a következők:

- összeadás, kivonás (nem szabad $.$ jelet a $+$ illetve a $-$ elé írni!)
- szorzás, osztás, hatványozás (itt kötelező az elempáronkénti műveletek előtt a $.$ jelet használni!)

Ha az egyik operandus skalár, akkor ez valójában a másik operandusnak megfelelő méretű és csupa azonos elemből álló mátrixot jelent.

A pontozott transzponálás és a sima transzponálás között csak annyi a különbség, hogy a komplex elemek konjugálása az elsőnél nem történik meg, sima transzponáláskor viszont igen.

Példák, feladat

a./ Legyen $A = [1 \ 2; \ 3 \ 4]$, ekkor

$B = A - 3$ valójában az $A - [3 \ 3; \ 3 \ 3]$ műveletet jelenti.

b./ $B = A.^{-1}$ valójában az $A.^{[-1 \ -1; \ -1 \ -1]}$ műveletet jelenti, azaz az B mátrix elemei az A mátrix elemeinek reciprokjai lesznek.

c./ Ha $B = [3 \ 2; \ 4 \ 1]$, akkor $C = A.*B$ mátrix $[1*3, 2*2; 3*4, 4*1]$ azaz $[3 \ 4; \ 12 \ 4]$ lesz.

Kérdés: Kommutatív a pontozott szorzás?

d./ $A = [8 \ 1 \ -5; \ 3 \ 13 \ 7; \ 1 \ 2 \ 34.5]$

Szimmetrikus-e a $B = A + A'$ mátrix?

Mi a válaszuk akkor, ha $A(1, 3) = -5 - i$, azaz az A mátrix a főátlón kívül tartalmaz komplex elemet?

Feladat

Adott a C és az $A = [1 \ 5; \ 2 \ 3]$ mátrix. Állítsuk elő a B mátrixot, ha ...

a./ $C = [2 \ -5; \ 2 \ -6]$ és $C = A.*B$

b./ $C = [0.5 \ -5; \ 2 \ -1.5]$ és $C = A./B$

Ellenőrizzük az eredményeket!

A megoldások: $(C./A)$ és $(A./C)$

A pontozott műveleteket elsősorban a függvények kiszámításánál használjuk. Ilyenkor a pont nélküli kifejezés hibaüzenetet generálhat (ill. nem feltétlenül az történik, amit szeretnénk)!

Feladat

Legyen $x = 0:\pi/9:\pi$ (sorvektor). Hajtsuk végre a Matlabban a $\sin(x)/x$ és a $\sin(x)./x$ műveleteket és magyarázzuk meg az eredményt!

(Segítség: a második eredmény nyilvánvaló, az elsőnél azt kell meggondolni, hogy x az 10 elemű sorvektor, a $\text{pinv}(x)$ pedig 10 elemű oszlopvektor.)

LINEÁRIS ALGEBRAI MŰVELETEK

Az összeadás és kivonás művelettel – egyszerűségük miatt – csak egy példában foglalkozunk.

Feladat

Legyen $A = [1 \ 2 \ 3; 4 \ 5 \ 6]$. Adjuk meg a B csupa egyes mátrixot (a ones függvénnyel) úgy, hogy $A + B'$ elvégezhető legyen!

Szorzás művelet

Két mátrix csak akkor szorozható össze, ha az első oszlopainak száma a második tényező sorainak számával egyezik meg.

Eml.: a $\text{size}(A)$ függvényhívás az A mátrix sorainak és oszlopainak számát adja vissza.

Például $A = \text{ones}(4, 5)$; $\text{size}(A)$ eredménye $[4 \ 5]$.

A $\text{size}(A, \text{melyiket})$ függvényhívás csak a lekérdezett dimenzió szerinti méretet adja vissza, azaz $\text{size}(A, 1) = 4$ és $\text{size}(A, 2) = 5$ lesz.

Így az A és B mátrixok összeszorozhatósága eldönthető a következő hasonlítással:

```
>> size(A,2) == size(B,1)      % belső indexek azonosak-e?
```

Ha ez teljesül, akkor a $C = A*B$ mátrix mérete

```
[size(A,1) size(B,2)]      % külső indexek
```

Feladat

Az $A = \text{ones}(3, 2)$ és a $B = \text{magic}(4)$ mátrixokat szeretnénk $A*B$ módon összeszorozni. Az A mátrix melyik méretét és mennyire kellene változtatni, hogy ez sikerülhessen?

Ha a szorzás mindkét irányban elvégezhető, általában akkor sem kommutatív művelet, azaz $A*B$ és $B*A$ többnyire nem azonosak.

Feladat

Legyen $A = [1:3; 4:6; 7:9]$, $B = \text{ones}(3)$. Ellenőrizzük, hogy egyenlő-e az $A*B$ és $B*A$ szorzat.

Hajtsuk végre ugyanezt a

$P = [1 \ 1 \ 1 \ 1; 1 \ 2 \ 3 \ 4; 1 \ 3 \ 6 \ 10; 1 \ 4 \ 10 \ 20]$ és az

$IP = [4 \ -6 \ 4 \ -1; -6 \ 14 \ -11 \ 3; 4 \ -11 \ 10 \ -3; -1 \ 3 \ -3 \ 1]$ mátrixokkal is.

Speciális mátrixokra a szorzatmátrix is lehet speciális tulajdonságú.

Feladat

Legyen $X = \text{randi}([1 \ 19], 3)$ % véletlen mátrix generálása: ([határok], méret)
 $SW12 = [0 \ 1 \ 0; 1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1]$, $SW13 = [0 \ 0 \ 1; 0 \ 1 \ 0; 1 \ 0 \ 0]$, $SW23 = [1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1; 0 \ 1 \ 0]$
Az $SW12 \cdot X$ szorzat felcseréli az X mátrix 1. és 2. sorát. (swap: felcserélés)
Nézzük meg a többi swap mátrixszal balról történő szorzást is!
Mi lesz az SW mátrixok páros kitevős hatványa és mi lesz az SW mátrixok páratlan kitevős hatványa?
Mi történik, ha az SW mátrixokkal jobbról szorozzuk az X mátrixot?

Osztás művelet

Matlab a mátrixszal való osztást valamilyen inverzzel való szorzással hajtja végre.
Tudjuk, hogy *valódi inverz* (inv parancs) akkor létezik, ha a – négyzetes – mátrix determinánsa nem 0, ill. ha a mátrix rangja megegyezik a sorainak (oszlopainak) számával.

Feladat

a./ Legyen $E = [1 \ 2; 3 \ a]$. Válasszuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a mátrix rangja

- 1 legyen;
- 2 legyen!

Az utóbbi esetben határozzuk meg az inverzet, és szorzással ellenőrizzük, hogy valóban az inverz mátrixot kaptuk meg!

Mit kapunk, ha az 1 rangú esetben próbálunk inverz mátrixot számoltatni az inv paranccsal?

b./ Mi az SW mátrixok inverze? Magyarázzuk meg az eredményt!

A valódi inverznél általánosabban értelmezett a bal- és a jobbinverz, ill. a pszeudo inverz.
Előbbiek az egység mátrix felhasználásával határozhatók meg, utóbbi előállítására pedig a Matlab beépített parancsot biztosít.

Feladat

Előkészítésként nézzük meg a súgóban (doc) a \ és a / (mldivide és mrdivide) műveletek leírását!

Legyen $A = [1 \ 2; 3 \ 4]$ és $B = [10 \ 7; 22 \ 15]$.

Határozzuk meg azt az X mátrixot, amelyre $A \cdot X = B$.

Határozzuk meg azt az Y mátrixot, amelyre $Y \cdot B = A$.

Határozzuk meg azt az Z mátrixot, amelyre $Z \cdot A = B$.

Példa

Előkészítésként nézzük meg a súgóban a pinv parancs leírását!

Generáljunk egy 4×4 -es mátrixot egyjegyű számokkal a randi függvény segítségével.

```
>> P = randi([1 9], 4), rank(P)
```

Ha a rang 4 (általában ez teljesül), akkor először határozzuk meg az inverzet külön (inv(P)), és jelenítsük meg tört formátumban is (rats parancs).

Ezután ellenőrizzük, hogy az inverz különféle számításával kapott eredmények mennyire egyeznek a valódi inverzzel!

```
>> P^-1 - inv(P)           % -1. hatvány
>> P\eye(4) - inv(P)       % jobbinverz (P az egységm. balosztója)
>> eye(4)/P - inv(P)       % balinverz (P az egységm. jobbosztója)
>> pinv(P) - inv(P)        % pszedoinverz
```

(Ha az eredménymátrix minden eleme 0, akkor a két számítási mód teljesen azonos eredményt szolgáltatott.)

Feladat

Legyen $X = [8 \ 5 \ 2 \ 2; 6 \ 4 \ 1 \ 4; 3 \ 0 \ 1 \ 0]$.

Nem négyzetes mátrixnak nincs inverze, csak pszeudoinverze. Ellenőrizzük, hogy olyan esetben, mint most (az X mátrixnak kevesebb sora van, mint oszlopa) a pszeudoinverz egy jobbinverz, azaz $X \cdot \text{pinv}(X)$ lesz az egységmátrix. (Nézzük meg, hogy az $X \backslash \text{eye}(3)$ módon számolt jobbinverz ettől eltér-e!)

Határozzuk meg az X transzponáltjának a pszeudoinverzét is! Ez balinverz?

NEVEZETES MÁTRIXOK, MÁTRIXFÜGGVÉNYEK

Véletlen számok

rand(méret) – egyenletes eloszlású (0, 1) intervallumbeli valósak (álvéletlenek)

randi(határok, méret) – egyenletes eloszlású egészek

```
>> rand(5)                  % 5x5 méretű mátrix
>> rand(1,5), rand(5,1)    % sorvektor, oszlopvektor
>> A = ones(10,4); rand(size(A)) % 10x4-es véletlen mátrix
>> randi([1 90], size(1:5))
% egy lottóhúzás eredménye lehet, az ismétlődés esélye kicsi
```

randn(méret) – standard normális eloszlású véletlenszámok

```
>> x = 2*randn(400,1) + 10; hist(x)
% 400 darab 10 várható értékű és 2 szórású szám, hisztogram
>> x = rand(400,1); hist(x)
% egyenletes eloszlás illusztrációja hisztogramon
```

Feladat

Ellenőrizzük, hogy sok (itt 192 darab) egyenletes eloszlású véletlen szám összege már más eloszlású lesz!

Tipp: a `sum(A)` művelet az A mátrix oszlopainak összegét képezi egyetlen sorvektorba. Erre kérjünk hisztogramot.

Megoldás: `A = rand(192, 400); x = sum(A); hist(x)`

Egységmátrix, csupa egyes és csupa nulla mátrix

A nevezetes mátrixok ezen csoportja könnyen megjegyezhető, mert az angol nevük alapján a tartalmuk egyértelmű és a méretmegadás azonos konvenciót követ (ones, zeros, eye).

Paraméterezésük: méret, típus. Itt a típus elmaradhat, a méret egyetlen, vagy több numerikus adat, amelyeknek az egész része számít.

Példák

```
>> ones(3)           % 3×3 méretű csupa egyesekből álló mátrix
>> ones(3.9, 4)      % 3×4 méretű csupa egyesekből álló mátrix
                        (figyelmeztetéssel)
>> zeros(3, 'int8')  % 3×3 méretű 1 bájtton tárolt 0 adatok
>> eye(3, 5)         % 3×5-ös egységmátrix, csak a bal felső
                        saroktól induló átlóban vannak egyesek, a többi elem nulla
>> A = [1:3; 4:6; 7:9], E = eye(size(A)) % értelmezzük!
```

Feladatok

a./ Tördeljük fel 3×3-as mátrixra (reshape művelet) a következő sorvektort! Milyen mátrixot kaptunk?

```
>> A = [ones(1) zeros(1, 3) ones(1) zeros(1, 3) ones(1)]
```

b./ Legyen A = 1. Hajtsuk többször végre a következő értékadást (mátrixbővítést). Magyarázzuk meg az eredményt!

```
>> A = [A zeros(size(A, 1), 1); zeros(1, size(A, 2)) 1]
```

Tipp: rajzoljuk le a keletkező új mátrixokat!

c./ Eml.: tudjuk, hogy a 0-val való osztás problémás művelet.

Mik lesznek az eye(3)./zeros(3) hányados elemei?

OTTHONI MUNKA**Feladat**

Az A 2×2 méretű mátrixszal műveleteket végeztünk, és a következőket kaptuk:

```
>> B = diag(A+A')
```

B =

10

8

```
>> C = A^2
```

C =

41 18

72 32

Mi volt az A mátrix?

(Segítség: az A + A' mátrix szimmetrikus és így főátlójában az A diagonálisának dupla értékei szerepelnek. Az A mátrix hiányzó értékeit jelöljük p-vel és q-val, majd ezek felhasználásával

írjuk fel a C mátrixot. A konkrét értékekkel való összehasonlításból (papír-ceruza módszer) megkapjuk a keresett adatokat.)

Feladat (speciális szorzatmátrixok)

Legyen L egy valós elemű alsó háromszögmátrix. Ellenőrizzük, hogy az $L^* L'$ szimmetrikus-e? (Jobbaknak: igaz-e ez mindig?)

Feladat (nevezetes mátrixok)

Legyen $A = 1$. Hajtsuk többször végre a következő értékadásokat (mátrixbővítést).

Magyarázzuk meg az eredményt! Egy indexhivatkozásban az **end** szó az index maximális értékét jelenti, ld. `size(A, 1)` illetve `size(A, 2)`.

```
>> A(end+1, :)=0, A(:, end+1)=0, A(end, end)=1
```

Vektorból származtatott mátrixok

vander(x) – az x vektorból előállított Vandermonde mátrix oszlopaiban az x oszlopvektorra alakítottjának a v vektornak pontozott egész hatványai vannak:

$v(i, j) = x(i)^{(n-j)}$, ahol $n = \text{length}(v)$.

Egy Vandermonde mátrix determinánsa az x vektor elemeiből előállított csökkenő indexű összes különbségpár szorzata. Tehát ha minden x elem különböző, akkor a determináns nem lehet 0.

Példa

```
>> x = 1:4, v = vander(x), d = det(v)
```

Feladat

Számítsuk ki a fenti V mátrix determinánsát az adott $(4-3)*(4-2)* \dots *(2-1)$ módon!

