



# 5. előadás

## Függvények ábrázolása

Dr. Szörényi Miklós,  
Dr. Kallós Gábor

2013–2014





## Tartalom

- Egyszerű XY diagramok készítése
  - Az elkészítés lépései, áttekintés
  - Példa: egy ismert matematikai függvény és integráljának ábrázolása
  - Technikai megvalósítás
    - Értéktáblázat, diagram beszúrása, hangolás
  - Új adatsor felvétele a diagramra
- Nevezetes pontok
  - Meghatározás
  - Felvitel a diagramra
- Paraméteresen adott XY diagramok készítése
- Kétváltozós függvények ábrázolása
- Logaritmikus skálázás





## Egyszerű XY diagramok készítése

### Áttekintés

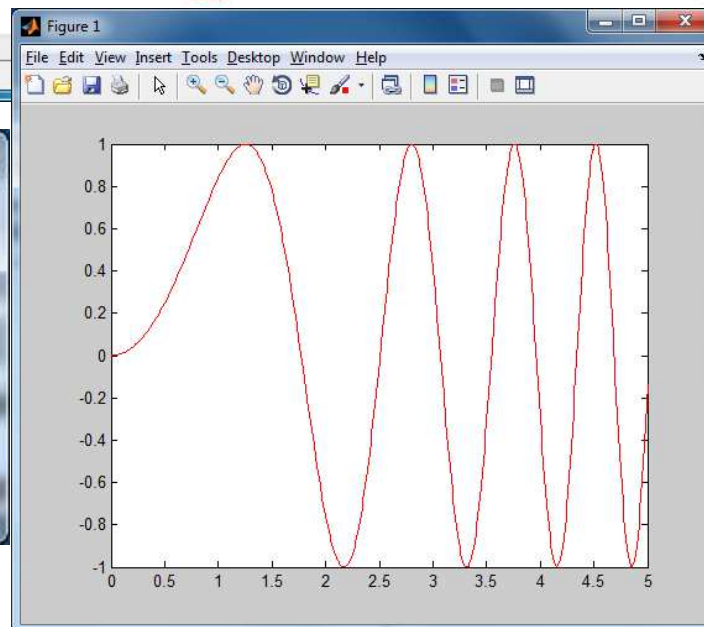
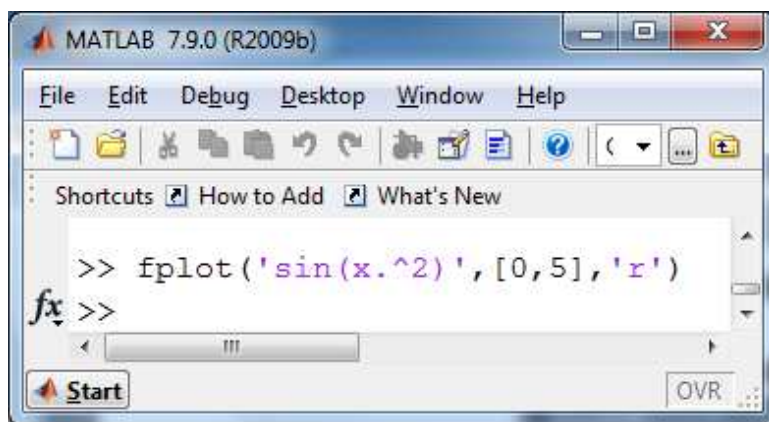
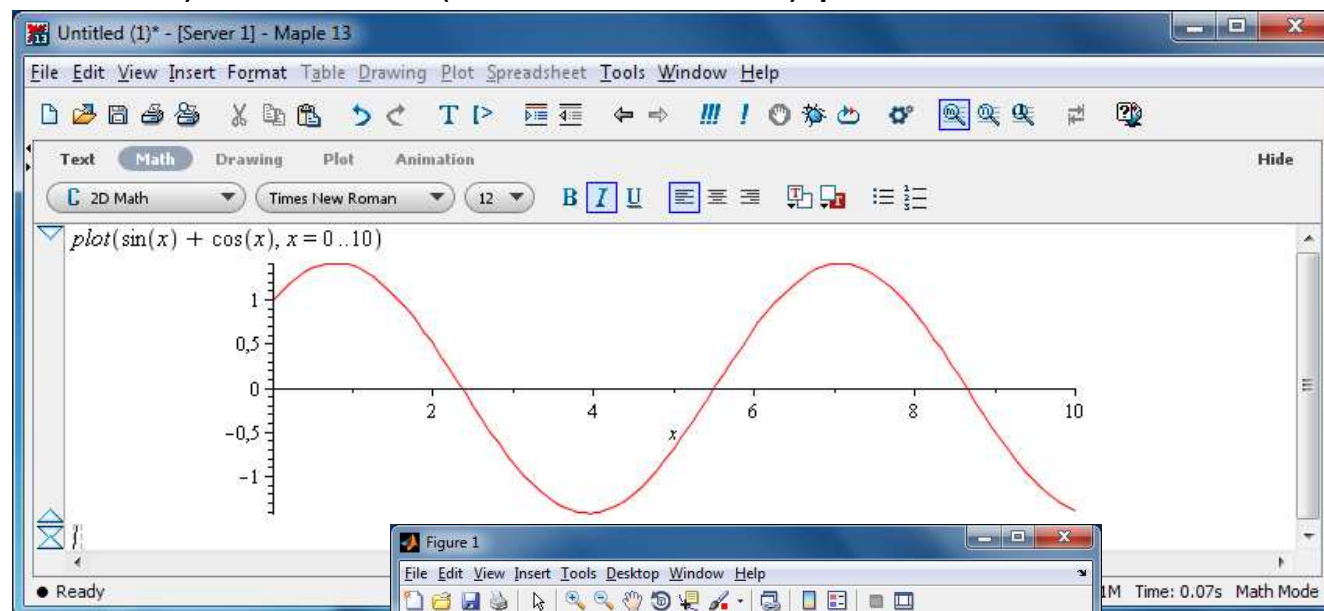
- Excelben értéktáblázat szükséges, ezt kell először elkészíteni
  - Más megoldás: szimbolikusan vagy függvénydefiníció alapján is lehetne (példák: Maple és Matlab)
- Az értéktáblázat jellemzői
  - Célszerűen fejléces
  - A beosztást (értelmezési tartomány) megfelelően sűrűre kell venni
    - Ne legyen „szaggatott” a függvény, de ne legyen áttekinthetetlen se a táblázat
    - Az értelmezési tartomány szakadásait fel kell ismernünk – bizonyos matematikai tudás kell (!)
  - Egyszerű esetben 2 adatoszlop, de több is lehet
- Ennek kijelölése után indítjuk a varázslót (Beszúrás/Diagramok)
- Pont alaptípus választás görbített vonalakkal, jelölők nélkül
  - Vigyázzunk, más kézenfekvőnek tűnő választások nem alkalmasak erre a célra!
  - Hibák felismerése: szintén kell bizonyos matematikai tudás
- Nyers grafikon, tengelyek, adatsorok hangolása
  - Általában szükséges, sajnos az Excel több mindent nem megfelelően állít be
- Ha szükséges: a forrásadatok bővítése új adatsorral
  - További adatsorhoz másodlagos tengely rendelése, hangolása





## Egyszerű XY diagramok készítése

Maple (komputer algebra rdsz.) és Matlab (numerikus rdsz.) példák



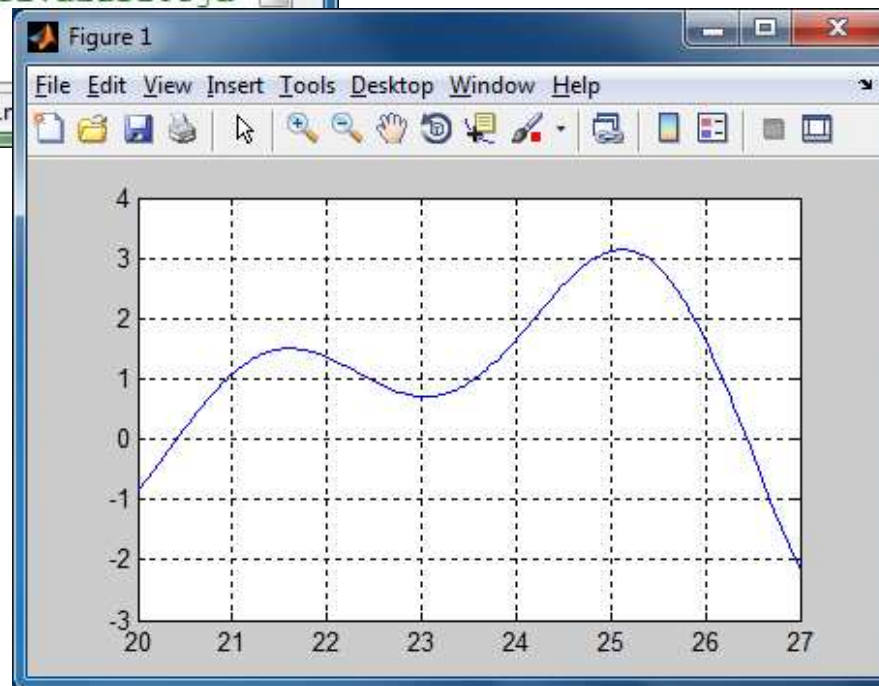


## Egyszerű XY diagramok készítése

Matlab (numerikus rdsz.) példák (folyt.)

```
1 function [ y ] = f( x )
2 % File\New\Function menüben szerkesztettük
3 y = 12*cos(0.07*x).*sin(1.2*x)+1;
4 % a két trig. függvény között .* szorzás!
5 % tizedespont az egészrész és törtrész elválasztója
6 end
```

```
>> fplot('f',[20 27]), grid on
```





## Egyszerű XY diagramok készítése

- Célunk: egy ismert matematikai függvény és integráljának ábrázolása

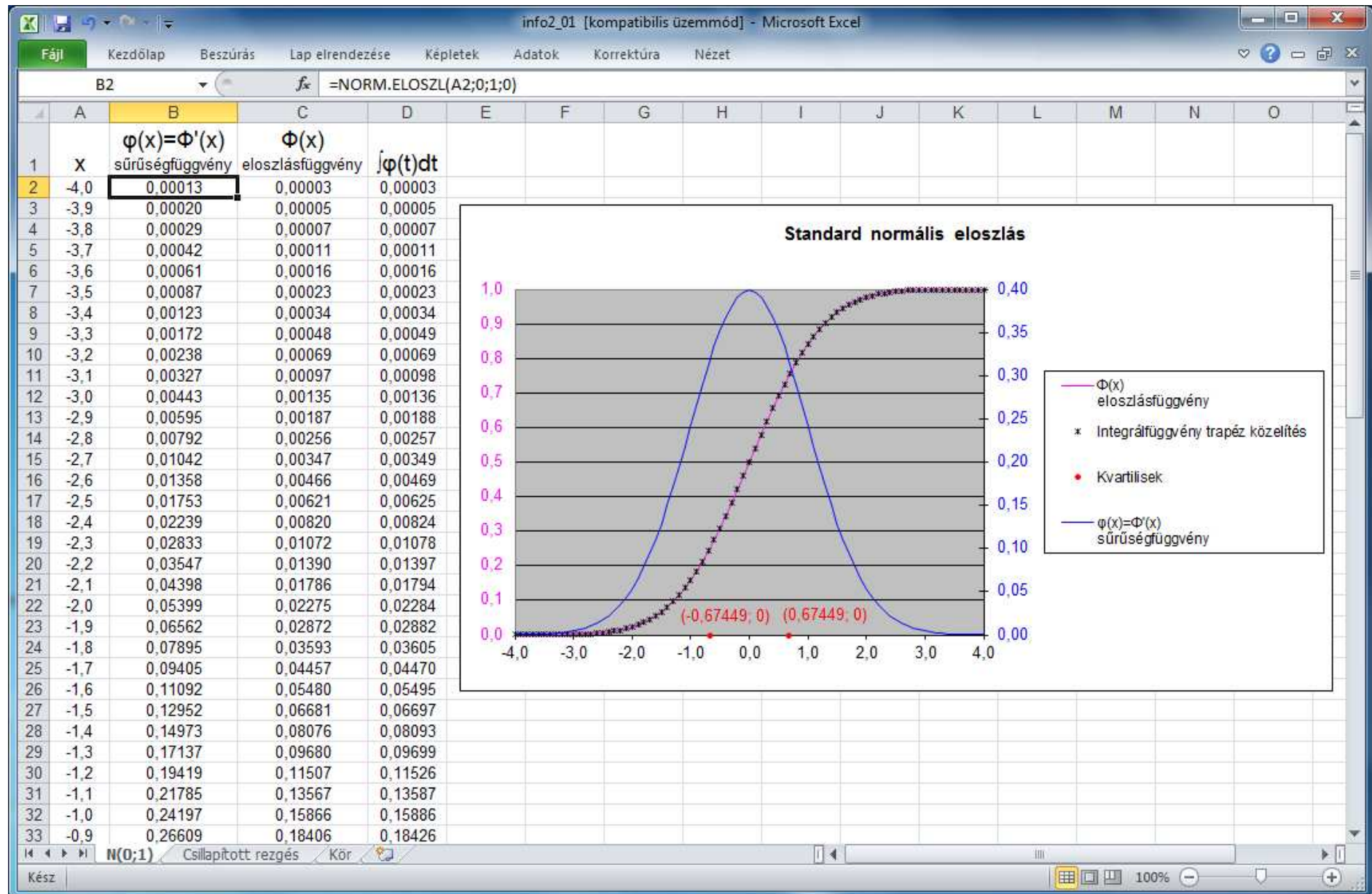
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

- \*Ez a standard normális eloszlású valószínűségi változót jellemző eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény
- A függvények az Excelben elérhetők a Norm.eloszlás(*x*; *m*; *σ*; *kapcsoló*) függvényhívással (Excel 2007-ig: Norm.eloszl)
  - Ha mégis mi akarnánk megírni (csak első fv.): Kitevő függvény kell (lásd gyak.)!
- A Norm.eloszlás függvény paraméterei
  - *x* az aktuális argumentum
  - *m* (várható érték), standard (normalizált) esetben: 0
  - *σ* (szórás), standard esetben: 1
  - *kapcsoló*: 0 esetén  $\varphi$ -t számol, 1 esetén  $\Phi$ -t számol





# Egyszerű XY diagramok készítése



## Egyszerű XY diagramok készítése

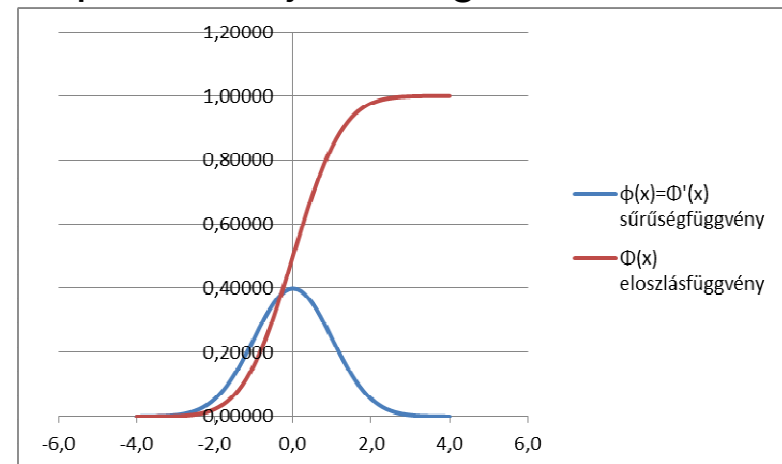
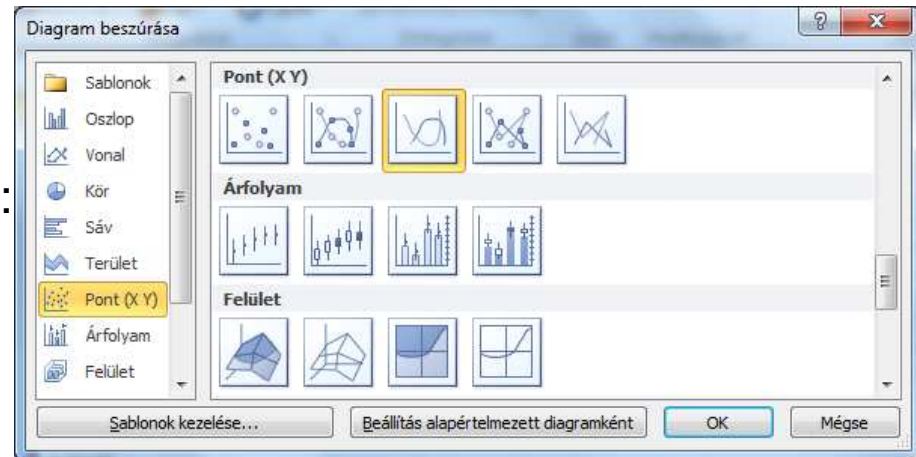
### Technikai megvalósítás

#### ■ Adattábla létrehozása

- Fejlécek begépelése, görög betűk: szimbólumként beszúrhatók
- x oszlopbeli értékek bevitele
  - Most: -4-től +4-től 0,1-es lépésközzel
- Első függvényértékek bevitele a B és C oszlopokba, majd másolás
  - Esetünkben: =Norm.eloszlás(A2;0;1;0) és =Norm.eloszlás(A2;0;1;1)

#### ■ Diagram beszúrása

- Forrásadatok kijelölése – x,  $\phi(x)$ ,  $\Phi(x)$  oszlopok –, majd a Diagram varázsló (Beszúrás/Diagramok) indítása és típusválasztás
  - Pont görbített vonalakkal
- Megkapjuk a nyers grafikont
  - (Nem szép, még hangolni kell)
  - Megj.: a 2003-as Excelben ez a pont több lépés volt

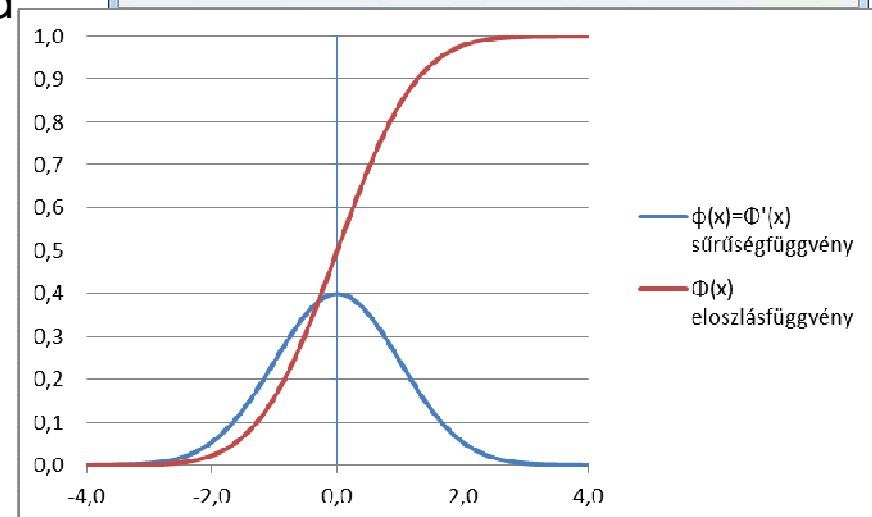




## Egyszerű XY diagramok készítése

### Technikai megvalósítás (folyt.)

- Általános problémák a beszúrt diagramokkal (Excel 2010)
  - A skálák nem szép megjelenítésűek (pozíció, értékek)
  - A függvénygörbék színe tompa
  - A vonalak csúnya vastagok
    - Kérdés: Milyen vastag valójában egy függvény (mint matematikai objektum) grafikonja?
- Diagram hangolása
  - A skálák rendbetétele (kijelölés, majd jobb gomb: Tengely formázása)
    - x tengely: csak -4-től +4-től kérjük
    - y tengely: skála 0-tól 1-ig  
tengelyfeliratok alul (osztásfeliratok minimumnál)  
(a betűszín pirosra állítható)

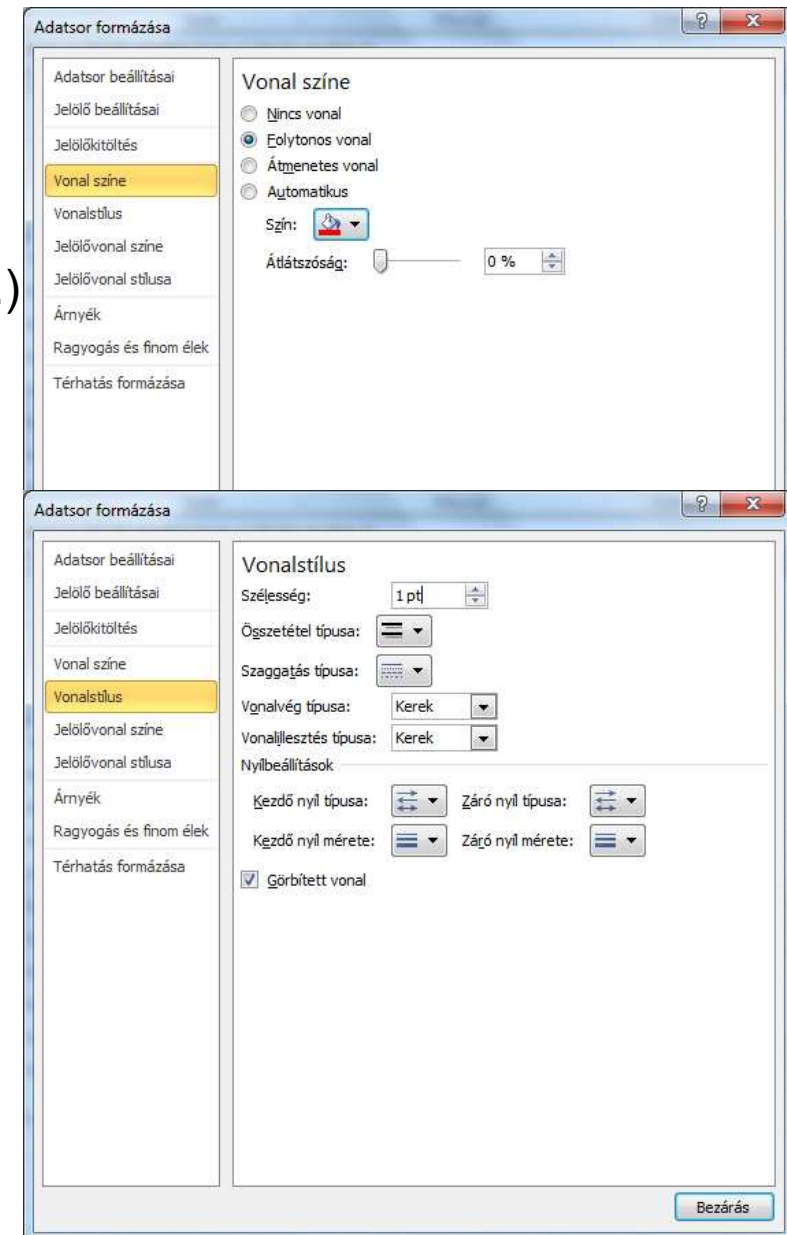
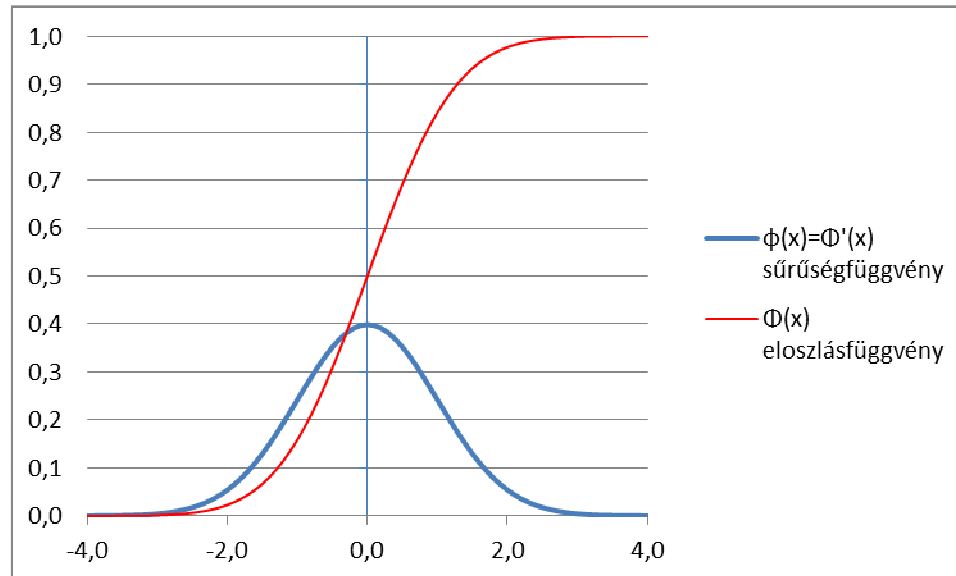


## Egyszerű XY diagramok készítése

Technikai megvalósítás (folyt.)

### ■ Diagram hangolása (folyt.)

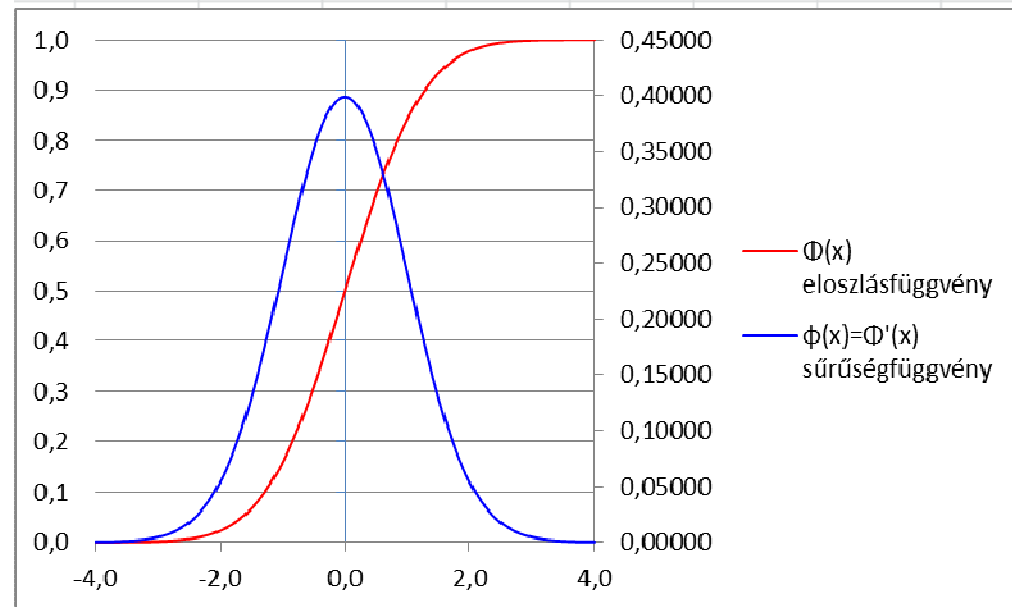
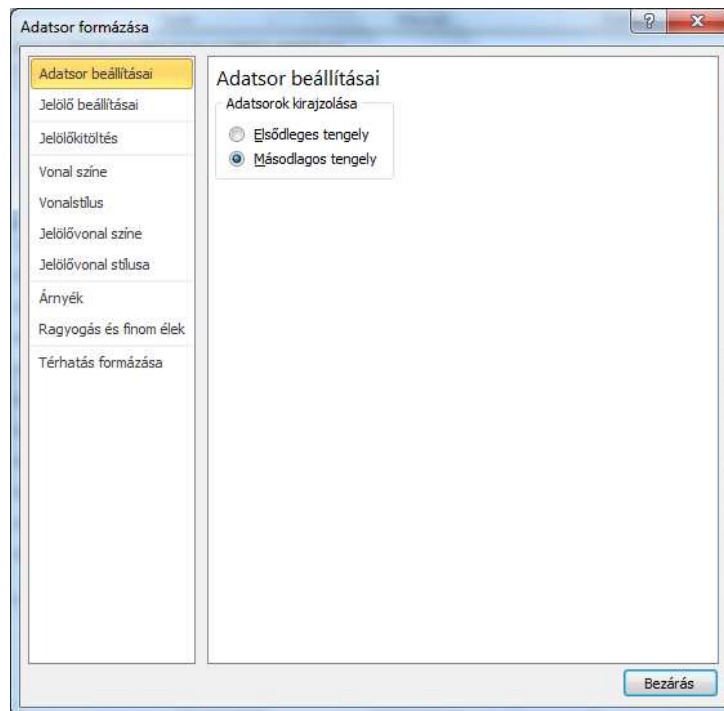
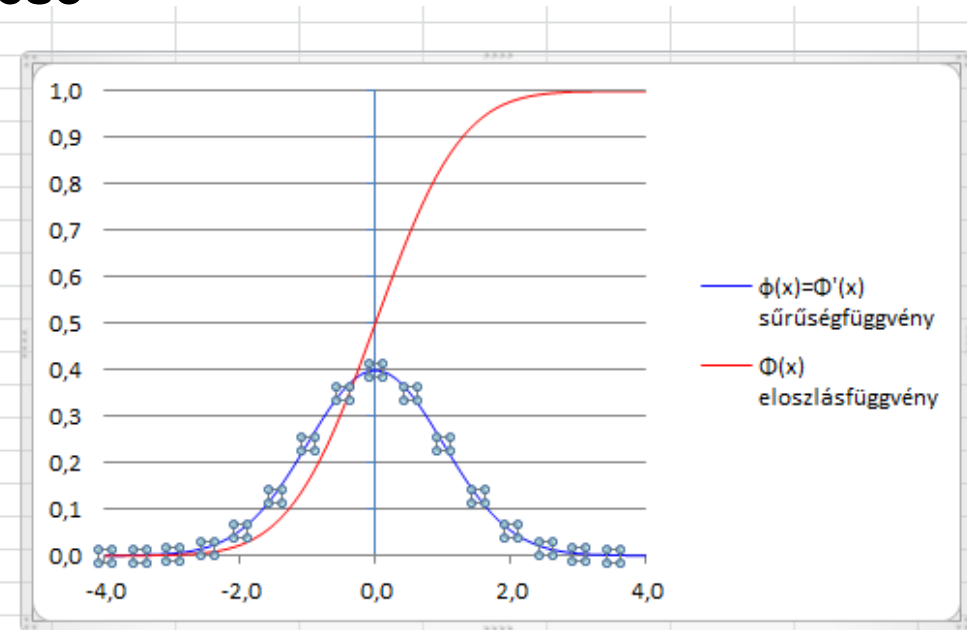
- A függvénygörbék rendbetétele (rákatt., majd jobb gomb: Adatsorok formázása...)
  - Élénkpiros szín (eloszlásfv.)
  - 1-es vagy 0,75-ös vonalvastagság
  - Hasonlóan a másik görbe is (élénk kék)



## Egyszerű XY diagramok készítése

Technikai megvalósítás (folyt.)

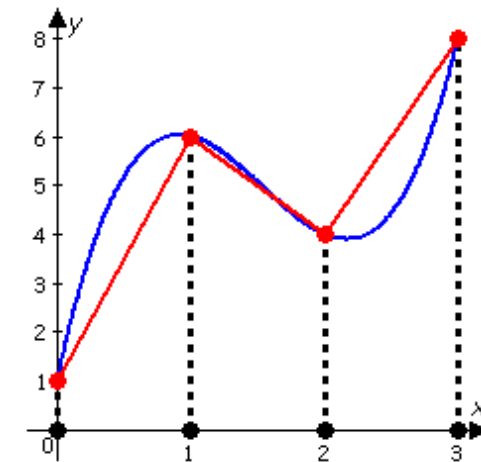
- Diagram hangolása (folyt.)
  - Másodlagos tengely felvétele a sűrűségfüggvényhez
    - Másodlagos tengely, majd hangolás (mint előbb)
- Diagramcím (tudjuk)



## Egyszerű XY diagramok készítése

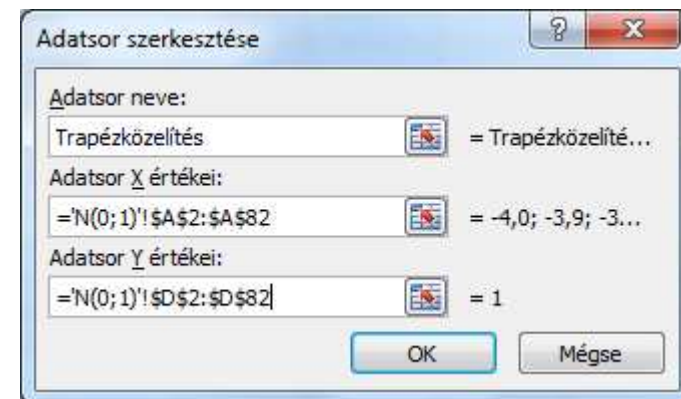
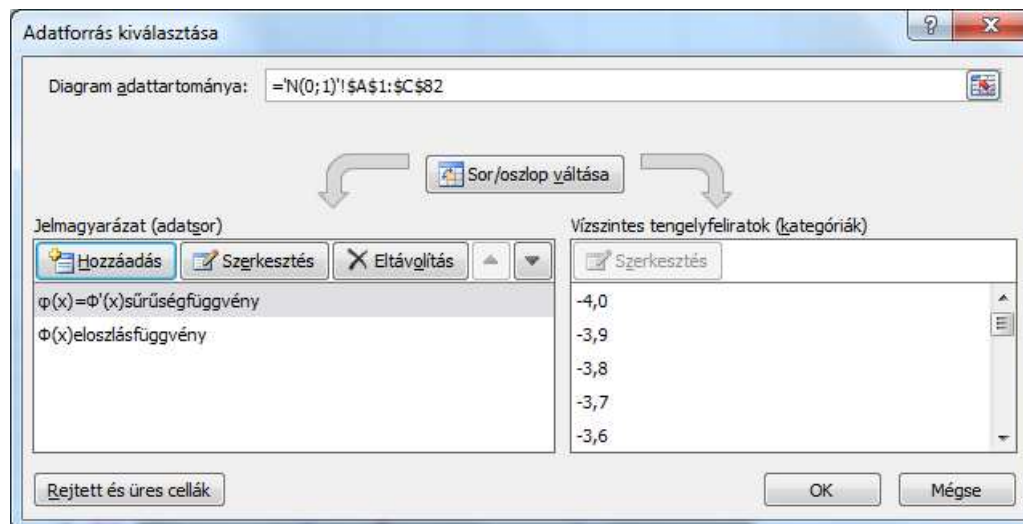
### ■ Új adatsor készítése

- Numerikus integrálással kiszámoljuk az integrál közelítő értékét, és fel szeretnénk rakni a diagramra
- A D oszlopba a trapézszabály szerinti integrálközelítő értékek kerülnek, azaz az aktuális elem: az előző érték (összeg) plusz az akt. trapézocska területe
  - Pl. a D6 cellába így  $=D5+(A6-A5)*(B6+B5)/2$  kerül
- A képletet másoljuk az oszlop minden adatcellájába, kivéve az elsőt, ahová az induló =C2 érték kerül



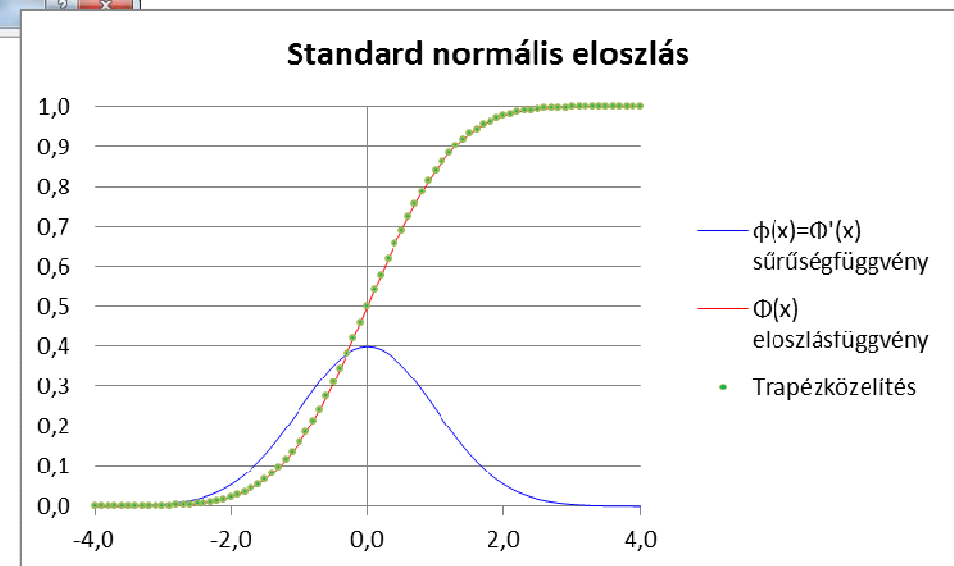
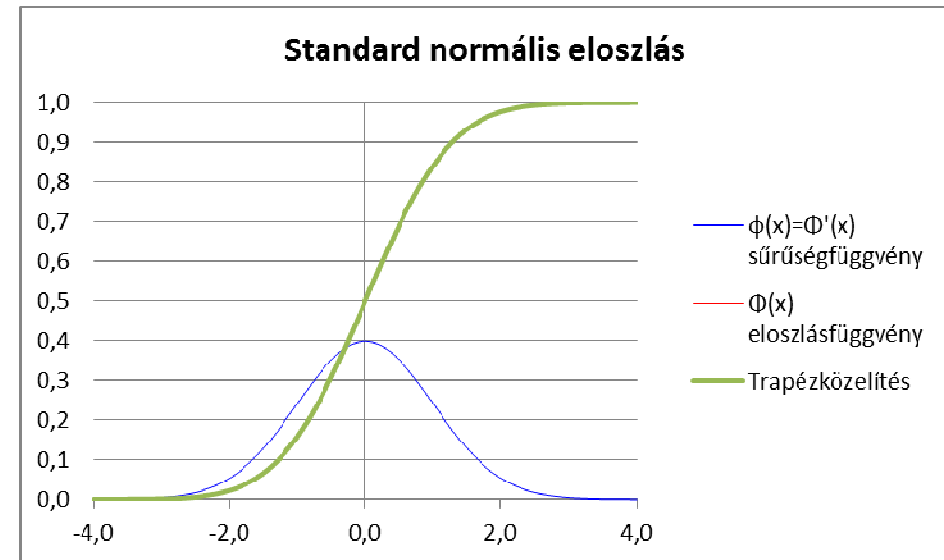
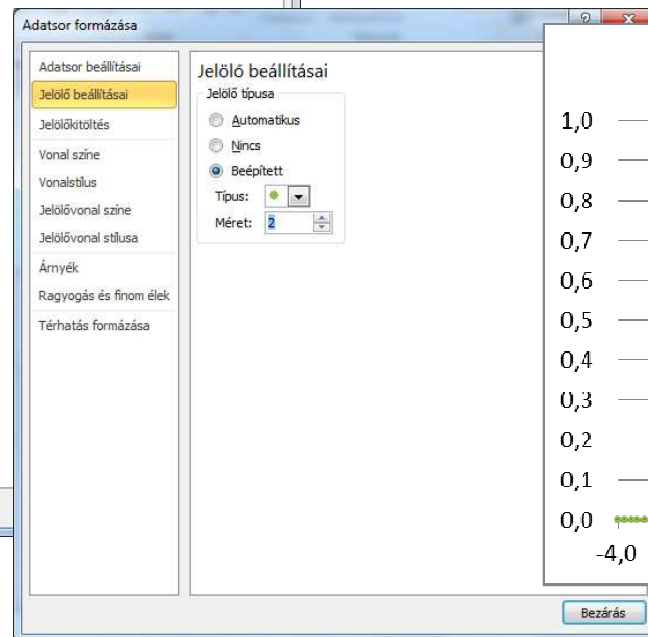
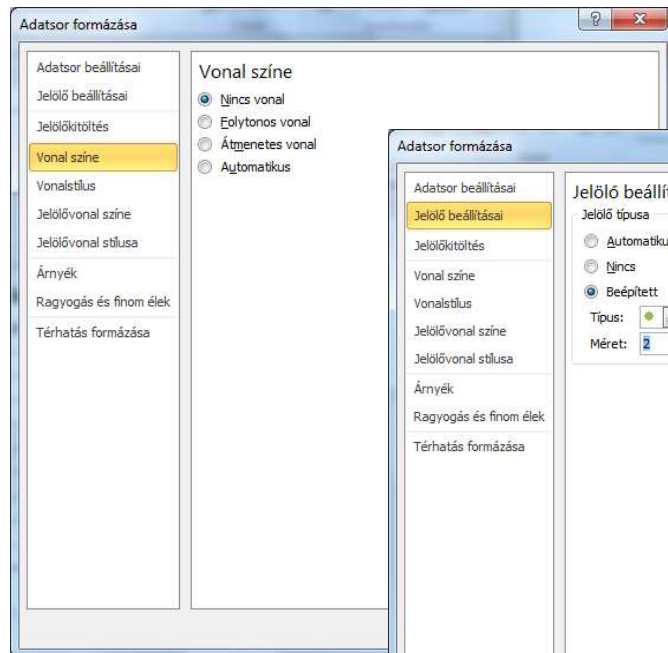
### ■ Az új adatsor felvétele

- Rákatt., majd jobb gomb: Adatok kijelölése...
- Megadjuk a D oszlop adatait



## Egyszerű XY diagramok készítése

- Az új adatsor formázása
  - Újabb gond: az új adatsor elfedi a régit
  - Javítás: az új görbénken a vonalat kikapcsoljuk, a jelölőt beállítjuk (a színét is – zöldre)





## Egyszerű XY diagramok készítése

- Nevezetes pontok elhelyezése a diagramon
- Határozzuk meg és tegyük fel a diagramra a kvartiliseket, azaz azokat a pontokat, amelyekre:  $\Phi(x) = 0,25$  illetve  $\Phi(x) = 0,75$
- A megoldáshoz a célérték-keresést használjuk (amelyet a Solverbe építettek be)
  - Kimásoljuk a megfelelő hármaszt (a középsőt nem használjuk)

Microsoft Excel ...

	G	H
27		
28	x	$\Phi(x)$
29	-0,70000	0,24196
30	0,70000	0,75804

Microsoft Excel...

	G	H
27		
28	x	$\Phi(x)$
29	-0,67449	0,25000
30	0,67449	0,75000

N(0;1)

A Solver paraméterei

Célérték beállítása:

Cél: ☐ Max ☐ Min ☒ Érték:

Változócellák módosításával:

Vonatkozó korlátozások:

☐ Nem korlátozott változók nemnegatívvá tétele

Válasszon egy megoldási módszert: Nemlineáris ÁRG

Megoldási módszer

A sima nemlineáris Solver-problémához válassza a nemlineáris ÁRG motort. Lineáris Solver-problémához válassza az LP szimplex motort, a nem sima Solver-problémához pedig az evolutív motort.

Súgó Megoldás Beállítások

A Solver eredményei

A Solver megoldást talált. Az összes korlátozó és optimalizálási feltétel teljesült.

☒ A Solver megoldásának megtartása

☐ Eredeti értékek visszaállítása

☐ Vissza A Solver paraméterei párbeszédpanelre

☐ Jelentésnyomat

OK Mégse

A Solver megoldást talált. Az összes korlátozó és optimalizálási feltétel teljesült.

Az ÁRG motor használata esetén ez azt jelenti, hogy a Solver legalább egy globális optimalis megoldást talált. A szimplex LP motor használata esetén ez azt jelenti, hogy a Solver egy globális optimalis megoldást talált.

Beállítások

Minden módszer | Nemlineáris ÁRG | Evolutív

Korlátozó feltétel pontossága:

☒ Automatikus léptékváltás

☐ Közvetítő lépések eredményének megjelenítése

Megoldás egész korlátozásokkal

☐ Egész korlátozások figyelmen kívül hagyása

Egészoptimalitás (%):

Megoldási korlátok

Maximális idő (másodperc):

Közvetítő lépések:

Evolutív motor és egész korlátozások

Részproblémák maximális száma:

Megfelelő megoldások maximális száma:

OK Mégse

## Egyszerű XY diagramok készítése

- Nevezetes pontok elhelyezése a diagramon (kvartilisek, folyt.)
  - (Megj.: a Solver számolási pontosságát 1E-10 és 1E-15 közötti értékre célszerű beállítani)
  - A szokásos módon felvesszük a két pontot az adatsorra
    - De ekkor még nem látunk semmit a diagramon, csak a jelmagyarázatban
  - Hangolási gond: nem tudunk (egykönnyen) rákattintani a pontra!
  - Mo.: Elrendezés menüszalag, diagramelemek (kiválasztása)

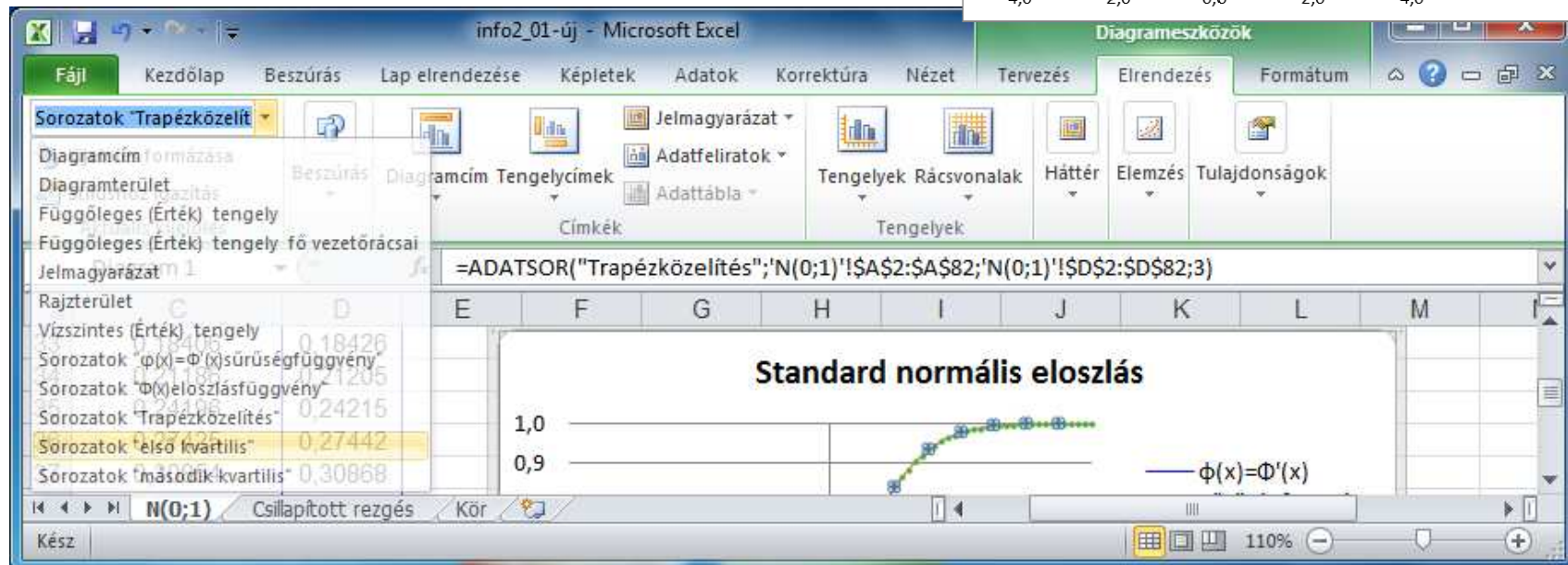
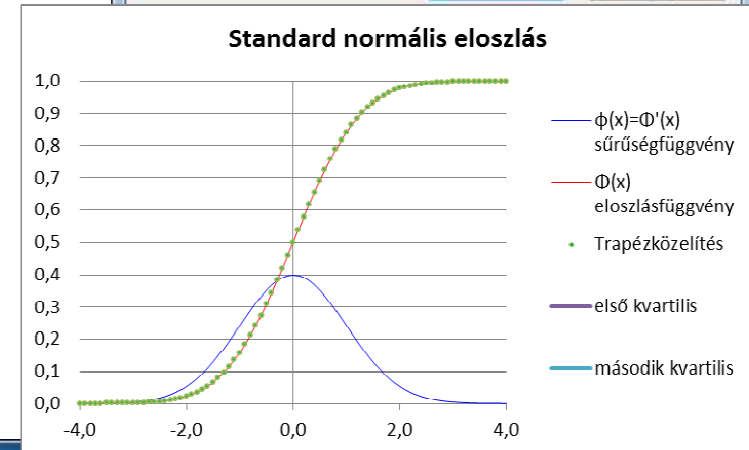
Adatsor szerkesztése

Adatsor neve: első kvartilis = első kvartilis

Adatsor X értékei:  $=N(0;1)!\$G\$29$  = -0,67449

Adatsor Y értékei:  $=N(0;1)!\$H\$29$  = 0,25000

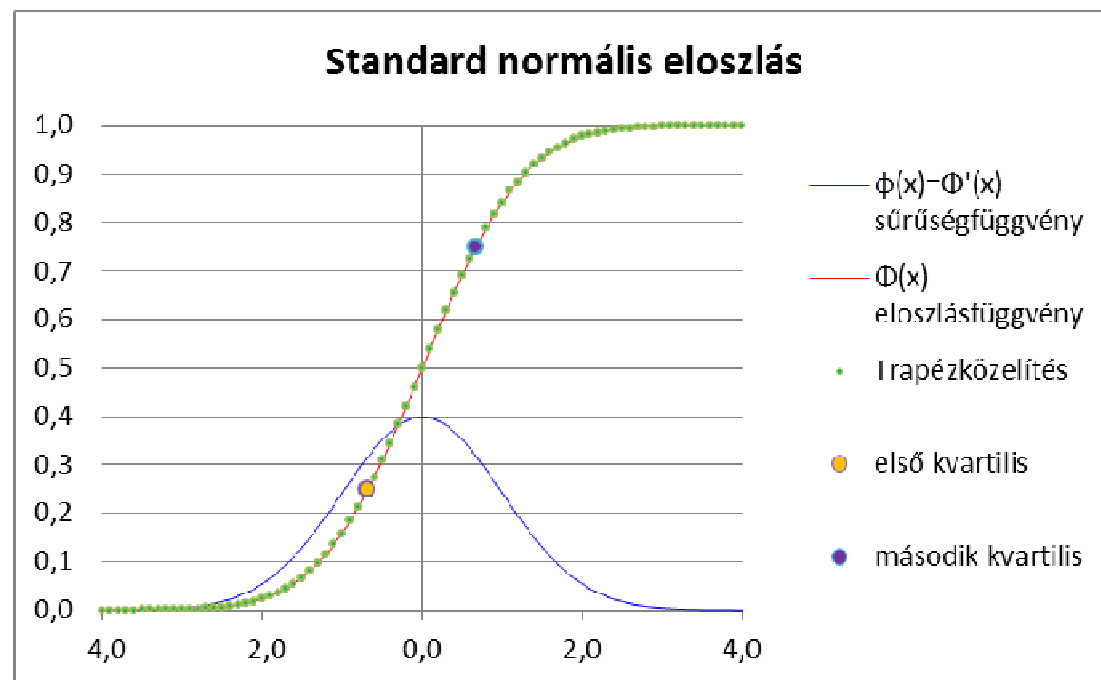
OK Mégse





## Egyszerű XY diagramok készítése

- Nevezetes pontok elhelyezése a diagramon (kvartilisek, folyt.)
  - A kiválasztás után: kijelölés formázása
  - A már ismert módon: nincs vonal (!), beépített jelölő, szín stb.
    - Egyes esetekben az Excel be is húzza a vonalat, ez persze hiba
  - Ugyanígy a 2. kvartilis is
    - A két kvartilis együtt is felvehető
- Célérték kereséssel megoldható még: függvények metszéspontja (a különbség = 0), szélsőérték pontok meghatározása
  - Utóbbinál min/max., ill. derivált = 0 is választható



## Paraméteresen adott XY diagramok készítése

Példánk: epiciklois

- \*Ha egy nagyobb  $q$  sugarú körön a síkban végiggördítünk egy kisebb  $r$  sugarú kört, akkor a kisebbik kör egy megfigyelt pontjának a pályája egy ún. epicikloist ír le
  - (Hasonló görbéket matematikai zsebkönyvekben találhatunk)
- A képlet adott, nekünk az ábrázolás a feladatunk

$$x = (q+r) \cos(\alpha) - r \cos\left(\frac{q+r}{r} \alpha\right) \quad y = (q+r) \sin(\alpha) - r \sin\left(\frac{q+r}{r} \alpha\right)$$

- Nálunk legyen most  $q = 9$  és  $r = 3$
- Elnevezett cellákat használunk
  - Az  $r$  név foglalt a 2010-es Excelben (helyette:  $\_r$ )
- A szöveget felvesszük fokban (teljes kör), majd radiánban
- A diagram beszúrásakor az értéktáblázatot az xE és yE tartományból vesszük
  - (Az alfát nem vesszük bele)

	A	B	C	D	E
1	<b>q= 9</b>		<b>r= 3</b>		
2	<b>epiciklois</b>				
3	$\alpha$ [fok]	$\alpha$	xE	yE	
4	0	0,0000	9,0000	0,0000	
5	1	0,0175	9,0055	0,0002	
6	2	0,0349	9,0219	0,0013	
7	3	0,0524	9,0491	0,0043	
8	4	0,0698	9,0870	0,0102	

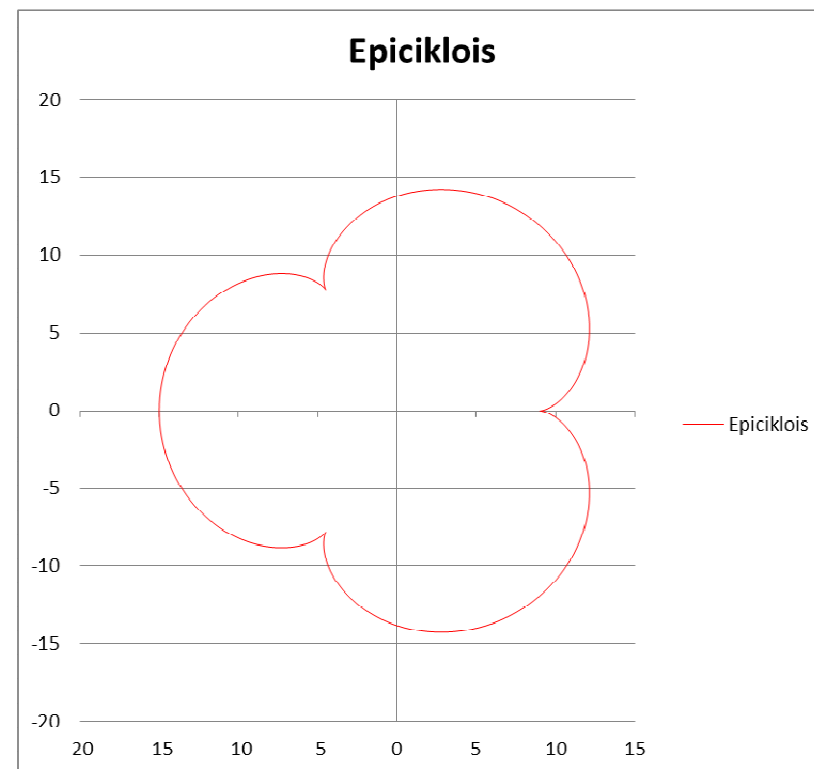
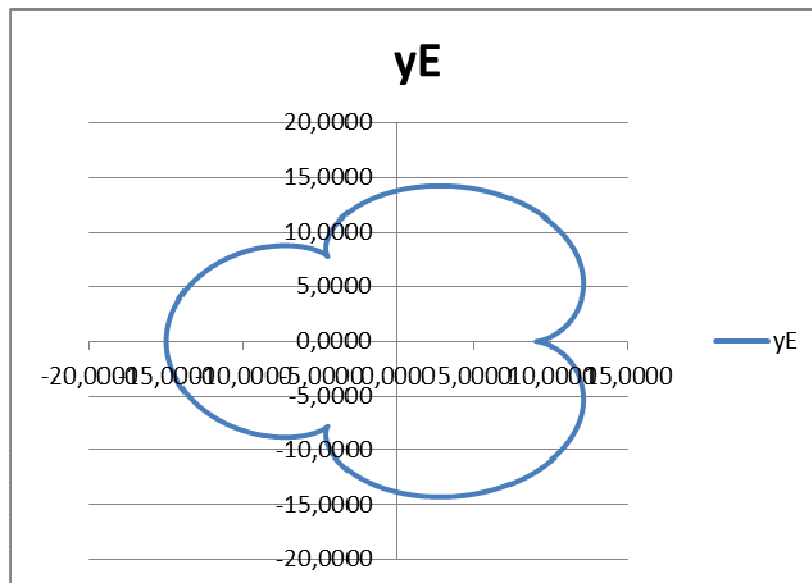




## Paraméteresen adott XY diagramok készítése

Epiciklois (folyt.)

- A nyers diagramot itt is megfelelően hangolni kell (tengelyek, skálák, szín, vonal, diagramcím)
- Próbáljuk ki, hogyan változik a görbe, ha  $q$  és  $r$  értékét módosítjuk!
  - Mely esetekben záródik a görbe egy cikluson belül, ill. \*véges sok cikluson belül?







## Kétváltozós függvények ábrázolása

- Hasonlóan dolgozunk, mint az egyváltozós esetben (értéktáblázat)
- A térbeliség érzékeltetésére az Excel színezést, rácsvonalakat és árnyékolást használ
- Példánk:  $f(x) = x^2 + y^2$

Munkafüzet1 - Microsoft Excel

Fájl Kezdőlap Beszúrás Lap elrendezése Képletek Adatok Korrektúra Nézet

C3  $f_x$  =B3\*\$B3+C\$2\*\$C\$2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1																				
2		xly	-2,0	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1,0	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
3		-2,0	8,00	7,24	6,56	5,96	5,44	5,00	4,64	4,36	4,16	4,04	4,00	4,04	4,16	4,36	4,64	5,00	5,44	5,96
4		-1,8	7,24	6,48	5,80	5,20	4,68	4,24	3,88	3,60	3,40	3,28	3,24	3,28	3,40	3,60	3,88	4,24	4,68	5,20
5		-1,6	6,56	5,80	5,12	4,52	4,00	3,56	3,20	2,92	2,72	2,60	2,56	2,60	2,72	2,92	3,20	3,56	4,00	4,52
6		-1,4	5,96	5,20	4,52	3,92	3,40	2,96	2,60	2,32	2,12	2,00	1,96	2,00	2,12	2,32	2,60	2,96	3,40	3,92
7		-1,2	5,44	4,68	4,00	3,40	2,88	2,44	2,08	1,80	1,60	1,48	1,44	1,48	1,60	1,80	2,08	2,44	2,88	3,40
8		-1,0	5,00	4,24	3,56	2,96	2,44	2,00	1,64	1,36	1,16	1,04	1,00	1,04	1,16	1,36	1,64	2,00	2,44	2,96
9		-0,8	4,64	3,88	3,20	2,60	2,08	1,64	1,28	1,00	0,80	0,68	0,64	0,68	0,80	1,00	1,28	1,64	2,08	2,60
10		-0,6	4,36	3,60	2,92	2,32	1,80	1,36	1,00	0,72	0,52	0,40	0,36	0,40	0,52	0,72	1,00	1,36	1,80	2,32
11		-0,4	4,16	3,40	2,72	2,12	1,60	1,16	0,80	0,52	0,32	0,20	0,16	0,20	0,32	0,52	0,80	1,16	1,60	2,12
12		-0,2	4,04	3,28	2,60	2,00	1,48	1,04	0,68	0,40	0,20	0,08	0,04	0,08	0,20	0,40	0,68	1,04	1,48	2,00
13		0,0	4,00	3,24	2,56	1,96	1,44	1,00	0,64	0,36	0,16	0,04	0,00	0,04	0,16	0,36	0,64	1,00	1,44	1,96
14		0,2	4,04	3,28	2,60	2,00	1,48	1,04	0,68	0,40	0,20	0,08	0,04	0,08	0,20	0,40	0,68	1,04	1,48	2,00
15		0,4	4,16	3,40	2,72	2,12	1,60	1,16	0,80	0,52	0,32	0,20	0,16	0,20	0,32	0,52	0,80	1,16	1,60	2,12
16		0,6	4,36	3,60	2,92	2,32	1,80	1,36	1,00	0,72	0,52	0,40	0,36	0,40	0,52	0,72	1,00	1,36	1,80	2,32

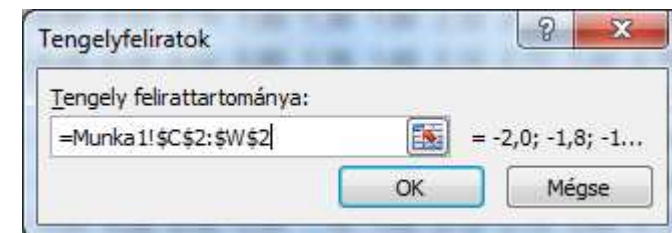
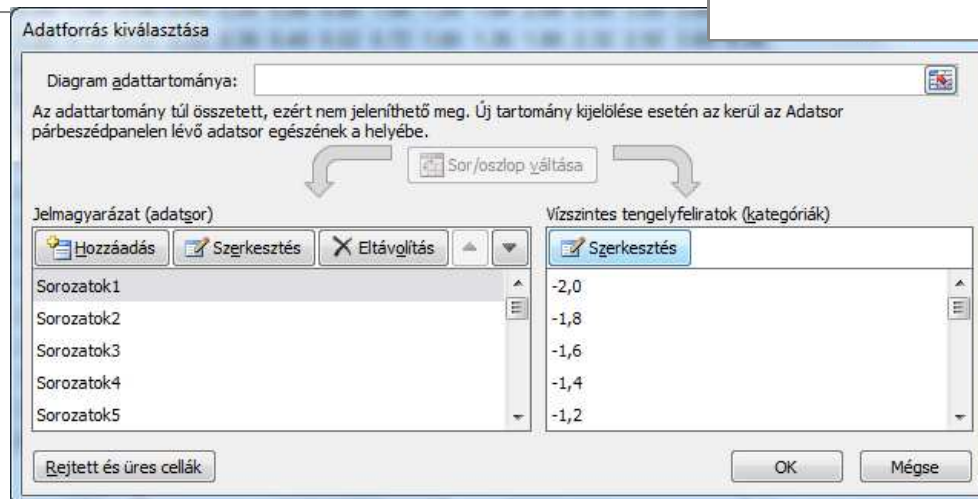
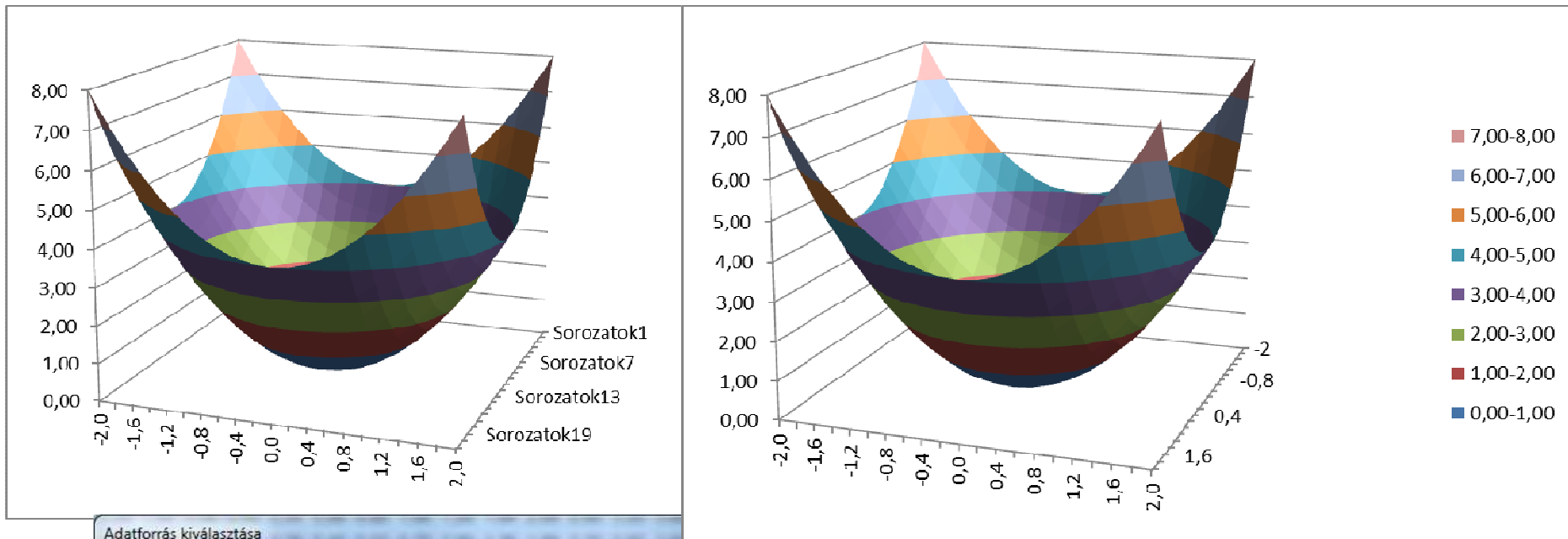
Munka1 Munka2 Munka3

Kész 100%



## Kétváltozós függvények ábrázolása

- A beszúrt nyers diagram tengelyskálázása hibás, ezt hangolni kell



## További érdekességek

- Logaritmikus skálázás
  - Nagyobb számítási feladatoknál
- Példánk: a prímek száma adott  $n$ -ig, és ennek becslése

Munkafüzet2 - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F
1						
2		$x$	$\pi(x)$	$x/\ln x$	$\pi(x)/(x/\ln x)$	
3		2	1	2,885	0,347	
4		10	4	4,343	0,921	
5		100	25	21,71	1,152	
6		1000	168	144,8	1,160	
7		10000	1229	1086	1,132	
8		100000	9592	8680	1,105	
9		1000000	78498	72400	1,084	
10		10000000	664579	620000	1,072	
11		100000000	5761000	5430000	1,061	
12		1000000000	50840000	48300000	1,053	

