

## 6. GYAKORLAT

**LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK,  
LINEÁRIS ALGEBRAI ALKALMAZÁSOK**

## SPECIÁLIS VEKTORSZORZATOK

**Feladat**

Hány fokos szöget zárnak be az  $a = [1 \ 0]$  és  $b = [1 \ 1]$  vektorok?

Tipp: Használjuk a subspace függvényt. Vigyázzunk arra, hogy ez csak oszlopvektorokra működik helyesen, és a visszatérési értéket radiánban kapjuk meg.

**Feladat**

Határozzuk meg az  $a = [1, 3, 2]$ ,  $b = [-1, 5, 2]$  vektorokra merőleges olyan  $c$  vektort, amelynek a hossza éppen 2!

Tipp: Az  $a \times b$  vektor nyilván merőleges  $a$ -ra és  $b$ -re (cross fv.). Azt kell még biztosítani, hogy a szorzatvektor hossza 2 legyen. Ehhez használjuk a (kettes, euklideszi) normát.

## LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK – ALAPESET

**Feladat**

Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert:

$$6x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 20$$

$$-x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 5x_4 = -15$$

$$2x_1 - 9x_2 - 9x_3 - 3x_4 = 22$$

$$-4x_1 - x_2 + 3x_3 + 10x_4 = -10$$

Tipp: Először az inverz mátrixos módszerrel dolgozunk. Kövessük az alábbi lépéseket!

Az  $Ax = b$  lineáris egyenletrendszer teljes táblázatát az M.dat fájlból tölthetjük be (M mátrix).

```
>> load M.dat M % vagy: load M.dat
```

Az M mátrix első 4 oszlopát töltjük az A mátrixba, utolsó oszlopát a b vektorba!

Számítsuk ki az A mátrix determinánsát, rangját! (Ellenőrizzük, hogy a mátrix valóban invertálható.)

Számítsuk ki az A mátrix inverzét!

Határozzuk meg az  $x = \text{inv}(A) * b$  megoldásvektort!

A megoldás ellenőrzéseként számítsuk ki az  $Ax - b$  eltérést!

Ezután alkalmazzuk a balosztós módszert. Eszerint  $x = A \backslash b$ . Itt is végezzünk ellenőrzést. (Megj.: A pszeudoinverzes számolás is jó eredményt ad.)

## SZÖVEGES FELADATOK

**Feladat**

Határozzuk meg a Matlab segítségével a következő probléma megoldását!

A Szigorlatra Igyekvő Diákok Szalonjában (SZIDSZ) négyféle, egyenként 100-100 grammos arcpakolás van. A Gizi-pakolás 12 g tojást, 27 g fürjfület, 50 g gélt és 11 g sódert tartalmaz. A Béla-pakolás 34 g tojást, 8 g fürjfület és 58 g sódert vegyít. A Maris-pakk 65 g fürjfület, 21 g gélt és 14 g sódert tartalmaz. A Dove-kence 53 g tojás, 30 g fürjfület és 17 g sóder bedarált elegye. A raktárban 532 g tojás, 987 g fürjfület, 689 g gél és 792 g sóder várja, hogy felhasználják. Melyik pakolásból hányat készíthetünk, ha minden nyersanyagot el akarunk használni? Mennyi lesz a bevételünk, ha pakolások rendre 1100, 1200, 1300, 1400 forintba kerülnek? (A feladat eredete: Sotepedia, op.kut minták)

**Tipp:**

Az adatok bevitele után ellenőrizzük, hogy a feladat megoldása valóban egyértelmű!

Most az inverz mátrixos és a balosztós módszer egyaránt használható.

Az egyenletrendszer Excel környezetben történő megoldását mutatja a következő ábra.

|    | A         | B        | C        | D        | E        | F     | G       | H |
|----|-----------|----------|----------|----------|----------|-------|---------|---|
| 1  |           | Gizi     | Béla     | Maris    | Dove     |       | Készlet |   |
| 2  | Tojás     | 12       | 34       | 0        | 53       |       | 532     |   |
| 3  | Fürjfület | 27       | 8        | 65       | 30       |       | 987     |   |
| 4  | Gél       | 50       | 0        | 21       | 0        |       | 689     |   |
| 5  | Sóder     | 11       | 58       | 14       | 17       |       | 792     |   |
| 6  |           |          |          |          |          |       |         |   |
| 7  | Eár       | 1100     | 1200     | 1300     | 1400     |       |         |   |
| 8  |           |          |          |          |          |       |         |   |
| 9  |           | Inverz   |          |          |          |       | Mo.     |   |
| 10 |           | 0,00456  | -0,0071  | 0,02311  | -0,0017  |       | 10      |   |
| 11 |           | -0,00427 | -0,00395 | -0,00131 | 0,02029  |       | 9       |   |
| 12 |           | -0,01087 | 0,01691  | -0,00741 | 0,00404  |       | 9       |   |
| 13 |           | 0,02058  | 0,00414  | -0,0044  | -0,01263 |       | 2       |   |
| 14 |           |          |          |          |          |       |         |   |
| 15 | Haszon    | 11000    | 10800    | 11700    | 2800     | 36300 |         |   |

**Feladat**

Határozzuk meg a Matlab segítségével a következő probléma megoldását!

Adél három almát, 12 banánt és egy sárgadinnyét vesz 2 Euro 36 centért. Béla 12 almát és két sárgadinnyét vesz 5 Euro 26 centért. Cecília két banánt és három sárgadinnyét vesz 2 Euro 77 centért. Mennyibe kerül egy-egy darab gyümölcs?

## LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK – SZINGULÁRIS ESETEK

**Feladat**

Oldjuk meg a következő mátrixokkal megadott egyenletrendszereket!

1. A.dat b.dat – egyértelműen megoldható
2. As.dat bs.dat – As ugyan négyzetes, de szinguláris
3. At.dat bt.dat – túlhatározott (több egyenlet, mint ismeretlen)

As:

$$\begin{aligned}x_1 + 5x_2 + 13x_3 + x_4 + 4x_5 &= 19 \\2x_1 + 3x_2 + 12x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= 4 \\-4x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 &= -35 \\3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 &= 14 \\2x_1 + 16x_2 + 32x_3 - 6x_4 + 4x_5 &= 2\end{aligned}$$

At:

$$\begin{aligned}x_1 + 5x_2 + 13x_3 &= 6 \\2x_1 + 3x_2 + 12x_3 &= 5 \\-4x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 3 \\3x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \\-2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 2\end{aligned}$$

Tipp: Az első egyenletrendszert megoldását már ismerjük.

A másodikonál azonnal látjuk, hogy a rang csak 4, ill. a determináns 0, *inverz tehát nem létezik* (az As mátrix összefüggő). Azt is tudjuk ellenőrizni, hogy az [As bs] rendszer rangja is 4, ill. hogy az eltolt rendszer determinánsa is 0 (és annak a rangja is 4):

```
>> rank([As bs])  
>> As2= [As(:,2:5), bs], det(As2), rank(As2)
```

Ebből látjuk, hogy a teljes rendszer is összefüggő (ellenőrizhető, hogy esetünkben az utolsó egyenlet az első négy összege). Mint tudjuk, ekkor végtelen sok megoldás létezik.

A megoldásnál a balasztós eljárás itt is alkalmazható, és a pszeudoinverzrel is dolgozhatunk (pinv parancs). Ellenőrizzük, hogy mindkét módszer jó megoldást ad! (*De ezek nem azonosak!*) A pinv parancssal kapott megoldás optimális abban a tekintetben, hogy minimális vektorhosszú. (Lásd norm parancs.)

A túlhatározott egyenletrendszer ugyanabba a kategóriába sorolható, mint a négyzetes, ellentmondásos rendszer.

Ellenőrizhetjük, hogy az együtthatómátrix rangja kisebb a konstansoszloppal bővített rendszer rangjánál.

```
>> rank(At), rank([At bt])
```

(Ha a rendszerünk négyzetes, akkor ellentmondásos esetben az eredeti rendszer determinánsa 0, az eltolt rendszeré ugyanakkor nem 0 – persze nálunk most determináns nem számolható).

Ilyenkor nem létezik megoldás, csak arra van reményünk, hogy az  $Ax - b = 0$  esethez „közel kerülünk”. Célunk tehát olyan  $x$  vektor előállítása, amelyre  $\|Ax - b\|$  minimális. Most is használható a balasztós módszer és a pszeudoinverzes módszer is. (Mindkét esetben ugyanazt a „megoldást” kapjuk.) Ellenőrizzük az eredményt visszaszorzással! Számoljuk ki az  $\|Ax - b\|$  vektornormát is!

```
>> norm(A*t - b)
```

## HATÉKONYSÁGI ELEMZÉS

### Mintafeladat

Most összehasonlítjuk a balasztós és az inverz mátrixos megoldás hatékonyságát. Megoldjuk a  $Tx = b$  egyenletrendszert, ahol  $T$  egy  $3000 \times 3000$  méretű speciális mátrix (Töplitz-mátrix):

```
>> n=3000; T = toeplitz(n:-1:1); b = linspace(1,2,n)';  
>> tic; x = T\b; toc
```

Majd másképp:

```
>> tic; x = inv(T)*b; toc
```

Melyik megoldási metodika a gyorsabb?

## LU FELBONTÁS (GAUSS-ELIMINÁCIÓ)

### Részben kidolgozott mintafeladat

Legyen  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  és  $b = [6; 2; 0]$ . Ekkor az  $Ax = b$  egyenletrendszer egyértelműen megoldható, és a megoldás  $x = [1; 2; 3]$ .

Tudjuk, hogy a Matlab beépített `lu` parancsa előállítja az eredeti  $A$  mátrix olyan felbontását, amelyre  $L*U = A$ , és  $U$  tartalmazza a Gauss-elimináció során kapott végső együtthatókat,  $L$  pedig a megoldás során alkalmazott szorzókat.

Ellenőrizzük a Matlab segítségével, hogy akkor is ugyanezek az együtthatók és szorzók jönnek ki, ha mi oldjuk meg az egyenletrendszert.

```
>> [L, U] = lu(A), L*U % LU felbontás  
>> A_uj = A; A_uj(2,:) = A_uj(2,)-A_uj(1,);  
>> b_uj = b; b_uj(2,:) = b_uj(2,)-b_uj(1,); % 2. sor  
% Hasonlóan a 3. sorra ...
```

## NORMÁK, KONDÍCIÓSZÁM

### Feladat

Készítsünk egy  $x$  sorvektort, amely 0-tól 1-ig lépdél 0,1-es lépésközzel. Határozzuk meg  $x$  egyes, kettes és végtelen normáját. A képletek alapján (előadás) ellenőrizzük – ha kell, megfelelő számolással –, hogy valóban a várt eredményt kaptuk.

**Feladat**

Ellenőrizzük az  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  és a  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$  mátrixok felhasználásával a következő mátrixnorma tulajdonságokat (az 1-es norma az oszlopösszegnorma, a végtelen norma a sorösszegnorma), ill. még a háromszög-egyenlőtlenséget is:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\|$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

**Feladat**

Legyen  $A = \text{eye}(10) * 0.01$ , majd készítsünk egy olyan B mátrixot, amelynek főátlójában az 1..10 sorozat szerepel. Mennyi A és B determinánsa, rangja?

Mekkora a kondíciós számuk?

Hogyan készítenénk ez alapján olyan mátrixot, amelynek nagy a kondíciószáma (azaz gyengén kondicionált)?

**Feladat**

A Hilbert mátrixok gyengén kondicionált mátrixok. Tekintsük a következő egyenletrendszert:  $H \cdot x = b$ , ahol  $H = \text{hilb}(4)$ ,  $b = [13/6, 7/6, 49/60, 19/30]'$ .

Ennek elméletileg pontos megoldása, amiről behelyettesítéssel meg is győződhetünk:

$x = [2, -1, 2, 0]'$ .

Módosítsuk a H mátrixot úgy, hogy a 2. sor 1. elemét 1 ezrelékkal megnöveljük. Mennyi lesz a megoldásvektor elemeinek abszolút-értékbeli változása? (Mennyi a legnagyobb változás?)

Tipp: Az egyenletrendszerek megoldását a  $H \backslash b$  formula segítségével állítsuk elő!

**SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR****Mintafeladat**

Határozzuk meg az  $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$  szimmetrikus mátrix sajátvektorait és sajátértékeit! Ellenőrizzük a sajátértékegyenlet teljesülését is!

```
>> [U L] = eig(A), ellenorzes = A*U - U*L
```

Határozzuk meg az A mátrix karakterisztikus polinomját! Helyettesítsük be a sajátértékeket a karakterisztikus polinomba, és így ellenőrizzük, hogy ezek valóban kielégítik a karakterisztikus egyenletet!

Tipp: A polyval parancs polinom kiértékelésére szolgál, adott helyen/helyeken.

```
>> p = poly(A), l = eig(A), polyval(p, l)
```

**Feladat**

Legyen  $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ . Valósak-e a B mátrix sajátértékei?

Tipp: Használjuk a megoldáshoz a poly és a roots párost, ill. az eig parancsot!

Az eig parancs segítségével készítsük el a mátrixhoz az U és Lambda mátrixokat úgy, hogy U oszlopvektorai az 1-re normált sajátvektorokat adják, a Lambda mátrix főátlóbeli elemei pedig a sajátértékeket. Ellenőrizzük, hogy ekkor  $U \cdot \text{Lambda} \cdot \text{inv}(U)$  az eredeti mátrixot adja!

## OTTHONI MUNKA

### Feladat

Az  $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$  mátrixszal mutassuk be azt a tulajdonságot, hogy egy  $3 \times 3$ -as mátrix determinánsa megegyezik a három oszlopvektorának (sorvektorának) vegyesszorzatával!

Tipp: Használjuk a dot és a cross függvényeket (lásd előadás).

### Feladat

A fenti túlhatározott egyenletrendszerre próbáljuk ki, hogy a „megoldás” az  $A \backslash \text{eye}(\text{sorok száma})$  paranccsal is meghatározható.

A fenti szinguláris egyenletrendszert úgy is oldjuk meg, hogy vegyünk fel egy olyan egyenletrendszert, amely eggyel kevesebb egyenletből áll ( $A_{s2}$  mátrix), majd az  $A_{s2}' / (A_{s2} * A_{s2})$  képlettel számított kváziinverz segítségével dolgozzunk!

### Feladat

Végezzünk a fentihez hasonló hatékonysági elemzést alkalmasan megválasztott, különböző méretű tesztmátrixokkal. Mérjük le a végrehajtási időket, és ábrázoljuk az eredményt szép ábrán (lásd előadás)!

