



5. előadás

Függvények ábrázolása

Dr. Szörényi Miklós,
Dr. Kallós Gábor

2014–2015





Tartalom

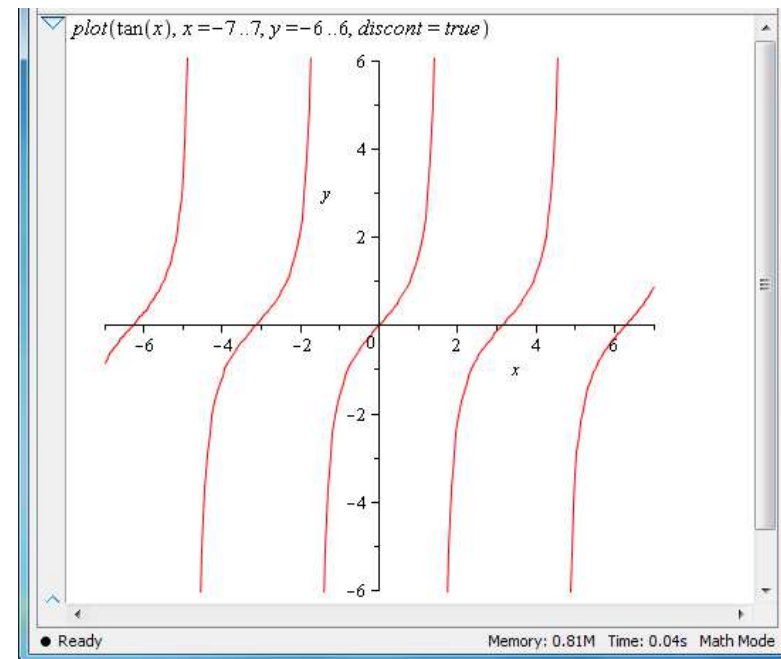
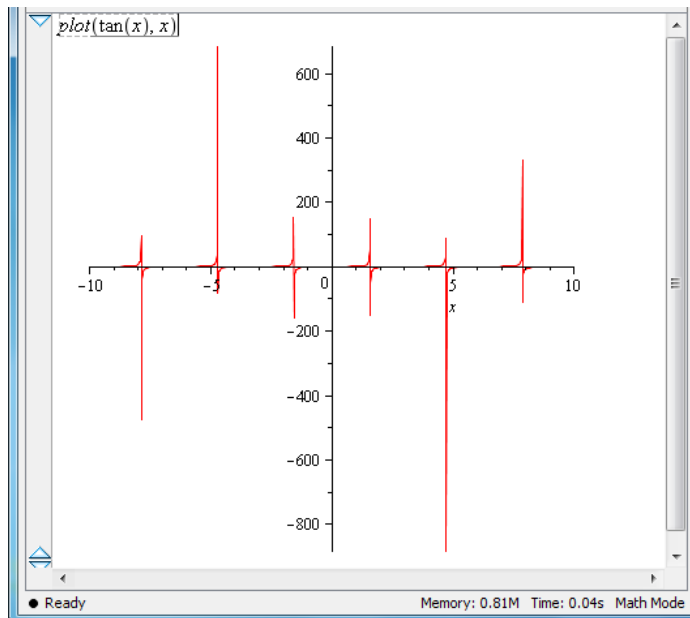
- Matematikai alapok
- Egyszerű XY diagramok készítése
 - Az elkészítés lépései, áttekintés
 - Példa: egy ismert matematikai függvény és integráljának ábrázolása
 - Technikai megvalósítás
 - Értéktáblázat, diagram beszúrása, hangolás
 - Új adatsor felvétele a diagramra
- Nevezetes pontok
 - Meghatározás
 - Felvitel a diagramra
- Alapfüggvények megvalósítása Excelben
- Paraméteresen adott XY diagramok készítése
- Kétváltozós függvények ábrázolása
- Logaritmikus skálázás





Matematikai alapok

- Függvény definíciója
 - (Reláció, rendezett párok, ...)
- Értelmezési tartomány, értékkészlet, leképezés
 - Képhalmaz, őskép
- Alapfüggvények diagramja
 - Parabola, négyzetgyökfüggvény, polinomfüggvények, gyökfüggvények
 - Trigonometrikus függvények
 - Exponenciális és logaritmus függvények
- Függvényvizsgálat
 - Szakadási helyek, határértékek
 - Monotonitás, szélsőértékek
 - Konvexitás, inflexiós pontok





Egyszerű XY diagramok készítése

Áttekintés

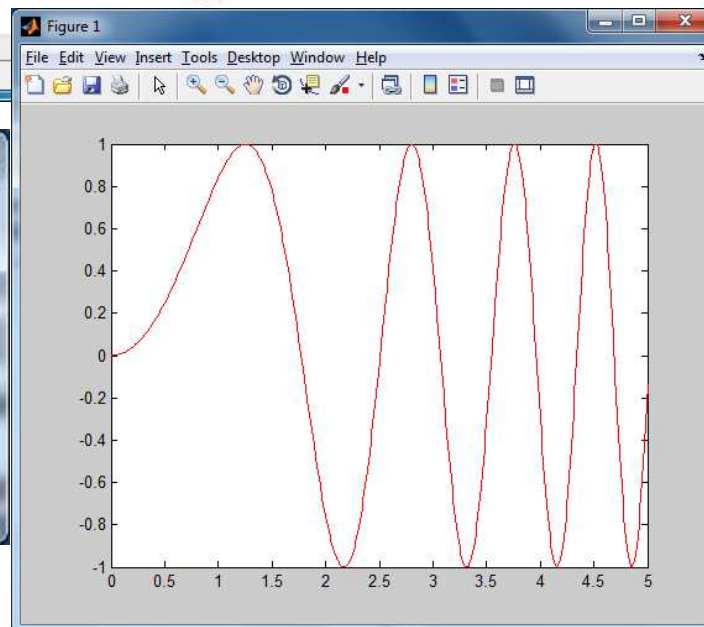
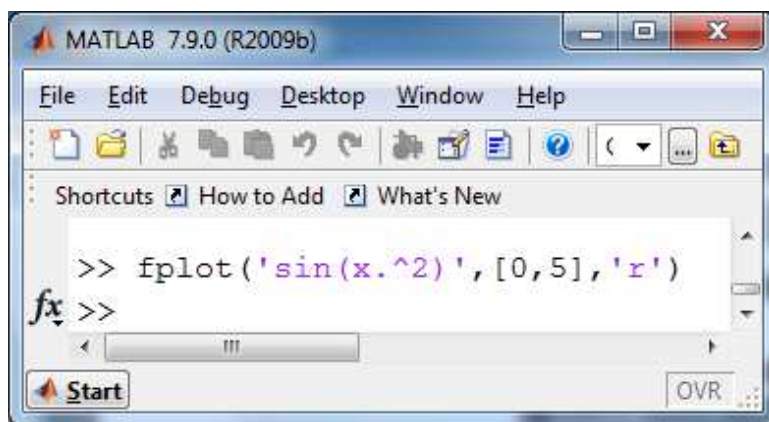
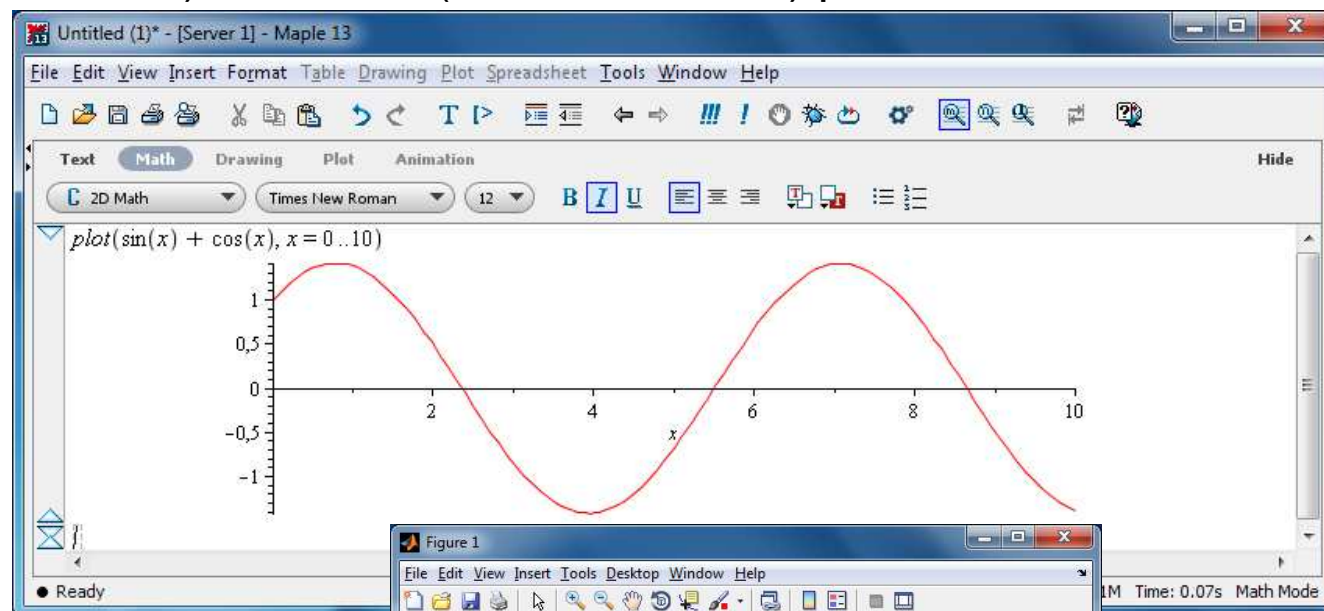
- Excelben értéktáblázat szükséges, ezt kell először elkészíteni
 - Más megoldás: szimbolikusan vagy függvénydefiníció alapján is lehetne (példák: Maple és Matlab)
- Az értéktáblázat jellemzői
 - Célszerűen fejléces
 - A beosztást (értelmezési tartomány) megfelelően sűrűre kell venni
 - Ne legyen „szagattott” a függvény, de ne legyen áttekinthetetlen se a táblázat
 - Az értelmezési tartomány szakadásait fel kell ismernünk – bizonyos matematikai tudás kell (!)
 - Egyszerű esetben 2 adatoszlop, de több is lehet
- Ennek kijelölése után indítjuk a varázslót (Beszúrás/Diagramok)
- Pont alaptípus választás görbített vonalakkal, jelölők nélkül
 - Vigyázzunk, más kézenfekvőnek tűnő választások nem alkalmasak erre a célra!
 - Hibák felismerése: szintén kell bizonyos matematikai tudás
- Nyers grafikon, tengelyek, adatsorok hangolása
 - Általában szükséges, sajnos az Excel több mindent nem megfelelően állít be
- Ha szükséges: a forrásadatok bővítése új adatsorral
 - További adatsorhoz másodlagos tengely rendelése, hangolása





Egyszerű XY diagramok készítése

Maple (komputer algebra rdsz.) és Matlab (numerikus rdsz.) példák



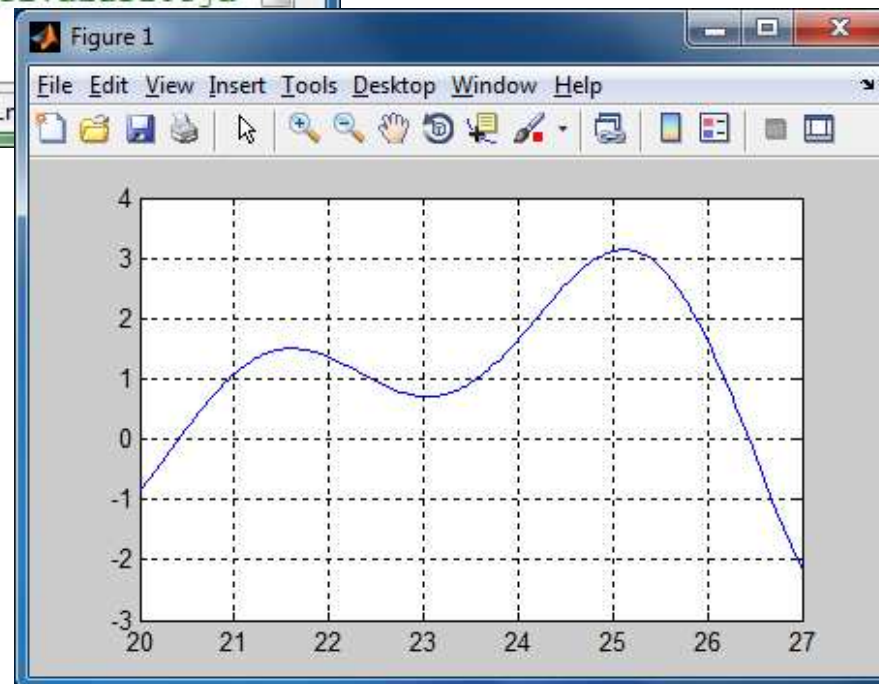


Egyszerű XY diagramok készítése

Matlab (numerikus rdsz.) példák (folyt.)

```
Editor - D:\Oktatás\Info-évek-szerint\C100-infos_anyagok_2012-13\Informatika II. (NGB_SZ00...  
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help  
- 1.0 + ÷ 1.1 × % %  
1 function [ y ] = f( x )  
2 % File\New\Function menüben szerkesztettük  
3 y = 12*cos(0.07*x).*sin(1.2*x)+1;  
4 % a két trig. függvény között .* szorzás!  
5 % tizedespont az egészrész és törtrész elválasztója  
6 end  
7  
f
```

```
MATLAB 7.9.0 (R2009b)  
File Edit Debug Desktop Window Help  
Shortcuts How to Add What's New  
>> fplot('f',[20 27]), grid on  
fx >> |  
Start OVR
```





Egyszerű XY diagramok készítése

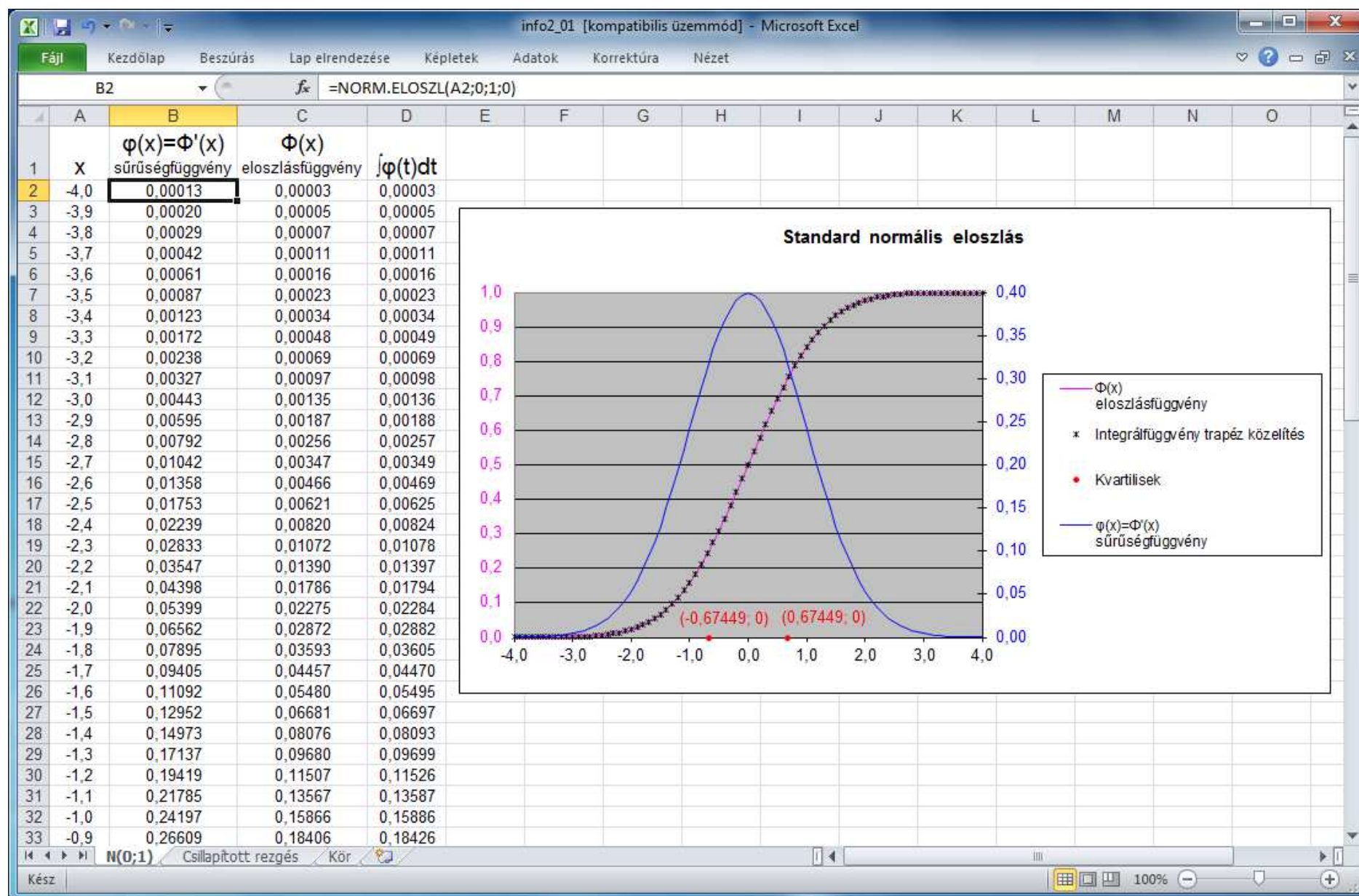
- Célunk: egy ismert matematikai függvény és integráljának ábrázolása

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

- *Ez a standard normális eloszlású valószínűségi változót jellemző eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény
- A függvények az Excelben elérhetők a Norm.eloszlás(*x*; *m*; *σ*; *kapcsoló*) függvényhívással (E 03: Norm.eloszl)
 - Ha mégis mi akarnánk megírni (csak első fv.): Kitevő függvény kell (lásd gyak.)!
- A Norm.eloszlás függvény paraméterei
 - *x* az aktuális argumentum
 - *m* (várható érték), standard (normalizált) esetben: 0
 - *σ* (szórás), standard esetben: 1
 - *kapcsoló*: 0 esetén φ -t számol, 1 esetén Φ -t számol



Egyszerű XY diagramok készítése



Egyszerű XY diagramok készítése

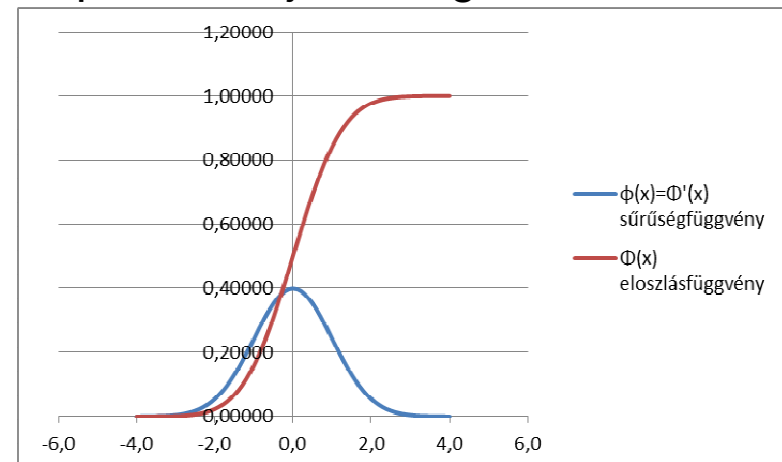
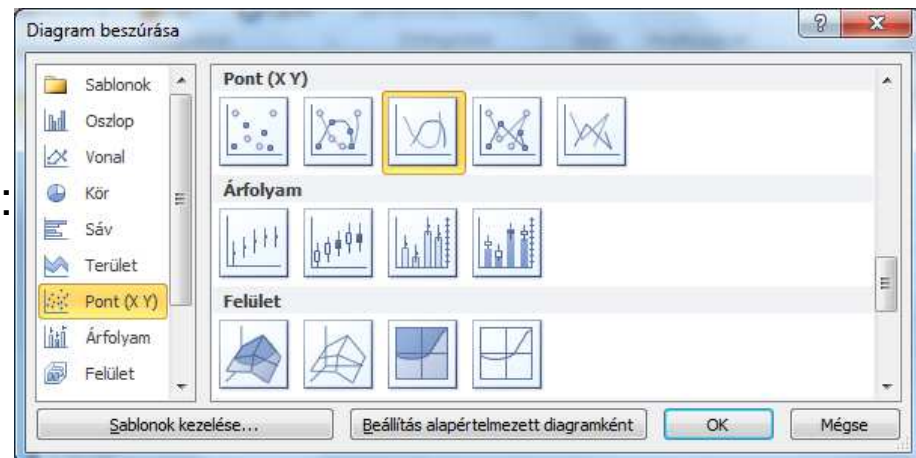
Technikai megvalósítás

■ Adattábla létrehozása

- Fejlécek begépelése, görög betűk: szimbólumként beszúrhatók
- x oszlopbeli értékek bevitele
 - Most: -4-től +4-ig 0,1-es lépésközzel
- Első függvényértékek bevitele a B és C oszlopokba, majd másolás
 - Esetünkben: =Norm.eloszlás(A2;0;1;0) és =Norm.eloszlás(A2;0;1;1)

■ Diagram beszúrása

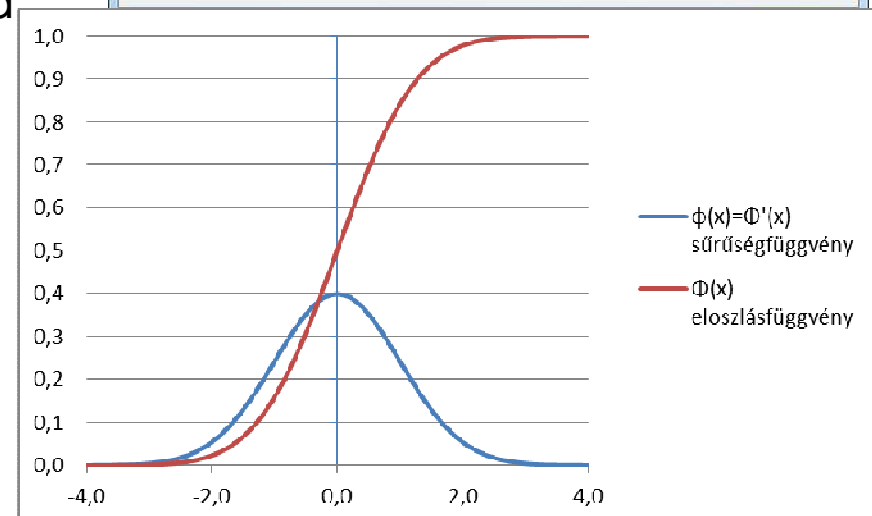
- Forrásadatok kijelölése – x, $\phi(x)$, $\Phi(x)$ oszlopok –, majd a Diagram varázsló (Beszúrás/Diagramok) indítása és típusválasztás
 - Pont görbített vonalakkal
- Megkapjuk a nyers grafikont
 - (Nem szép, még hangolni kell)
 - Megj.: a 2003-as Excelben ez a pont több lépés volt



Egyszerű XY diagramok készítése

Technikai megvalósítás (folyt.)

- Általános problémák a beszúrt diagramokkal (Excel 2010)
 - A skálák nem szép megjelenítésűek (pozíció, értékek)
 - A függvénygörbék színe tompa
 - A vonalak csúnya vastagok
 - Kérdés: Milyen vastag valójában egy függvény (mint matematikai objektum) grafikonja?
- Diagram hangolása
 - A skálák rendbetétele (kijelölés, majd jobb gomb: Tengely formázása)
 - x tengely: csak -4-től +4-ig kérjük
 - y tengely: skála 0-tól 1-ig (kijelzés: egy tizedes) tengelyfeliratok alul (osztásfeliratok minimumnál) (a betűszín pirosra állítható)

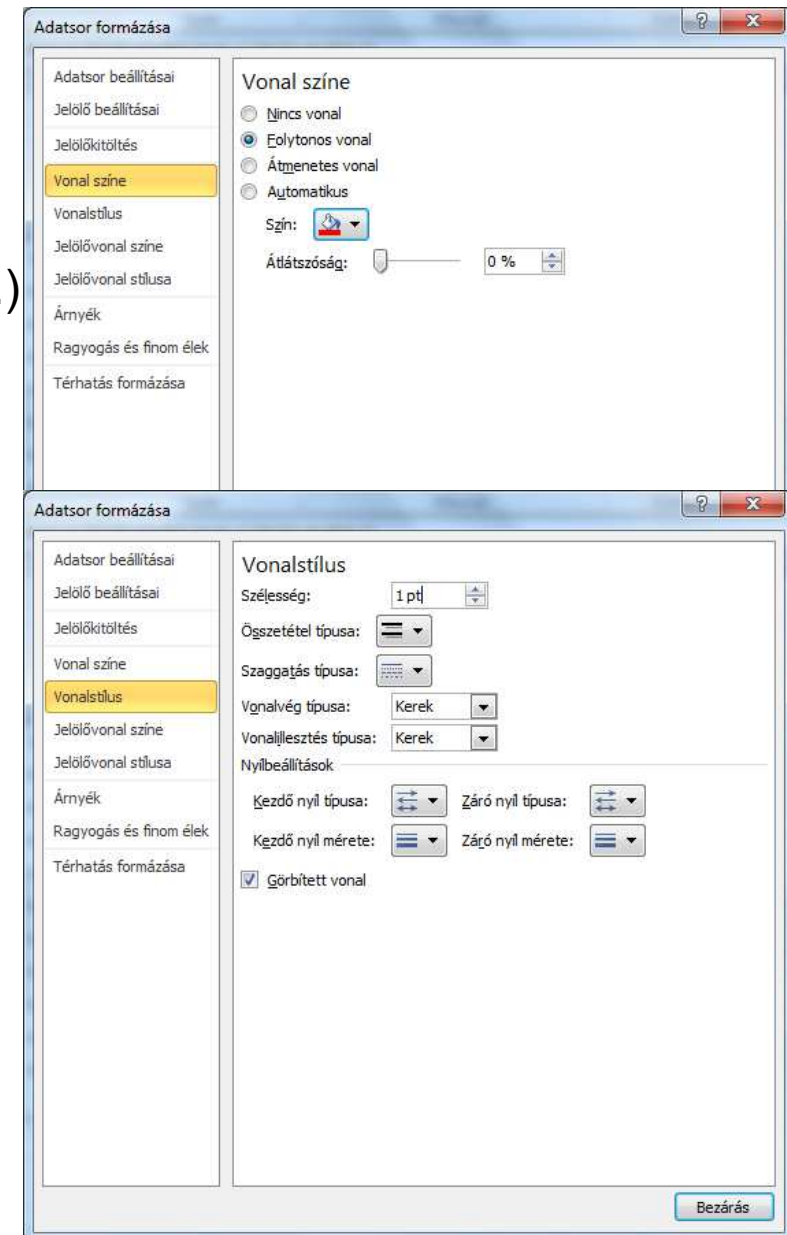
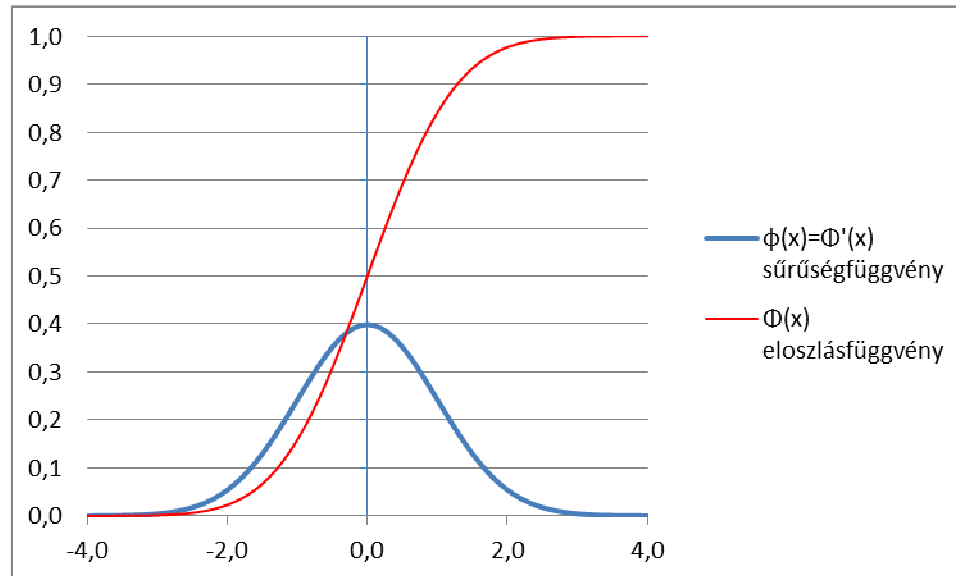


Egyszerű XY diagramok készítése

Technikai megvalósítás (folyt.)

■ Diagram hangolása (folyt.)

- A függvénygörbék rendbetétele (rákatt., majd jobb gomb: Adatsorok formázása...)
 - Élénkpiros szín (eloszlásfv.)
 - 1-es vagy 0,75-ös vonalvastagság
 - Hasonlóan a másik görbe is (élénk kék)

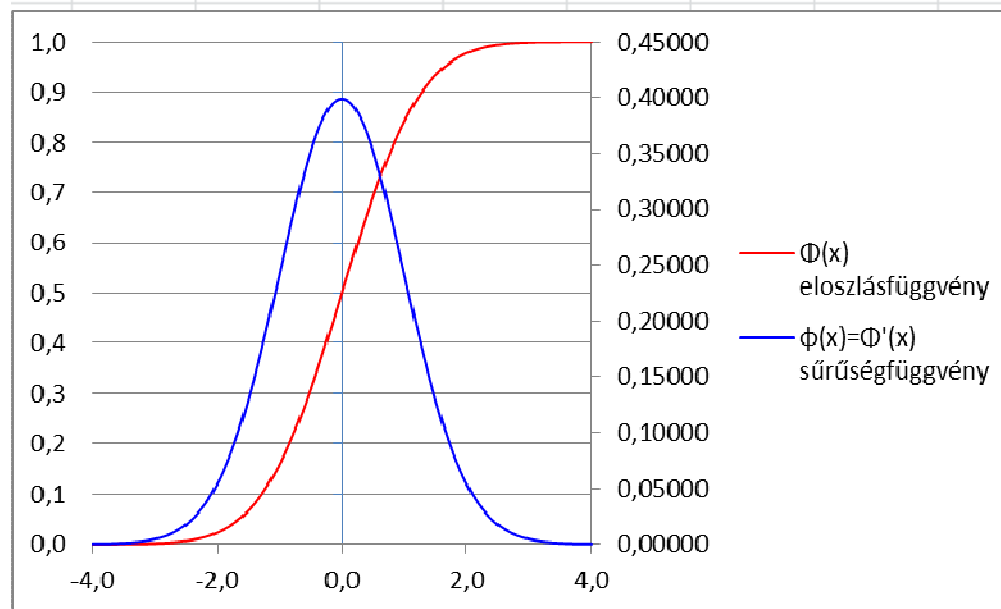
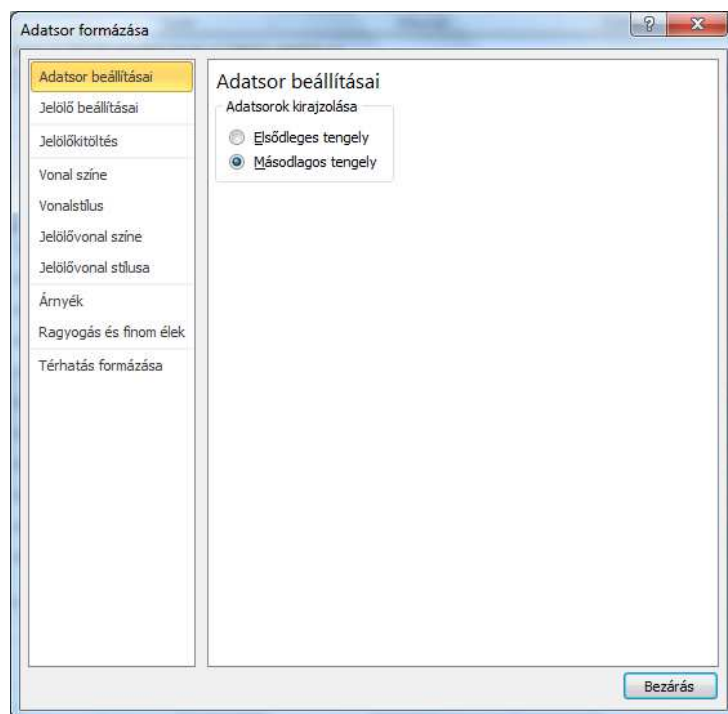
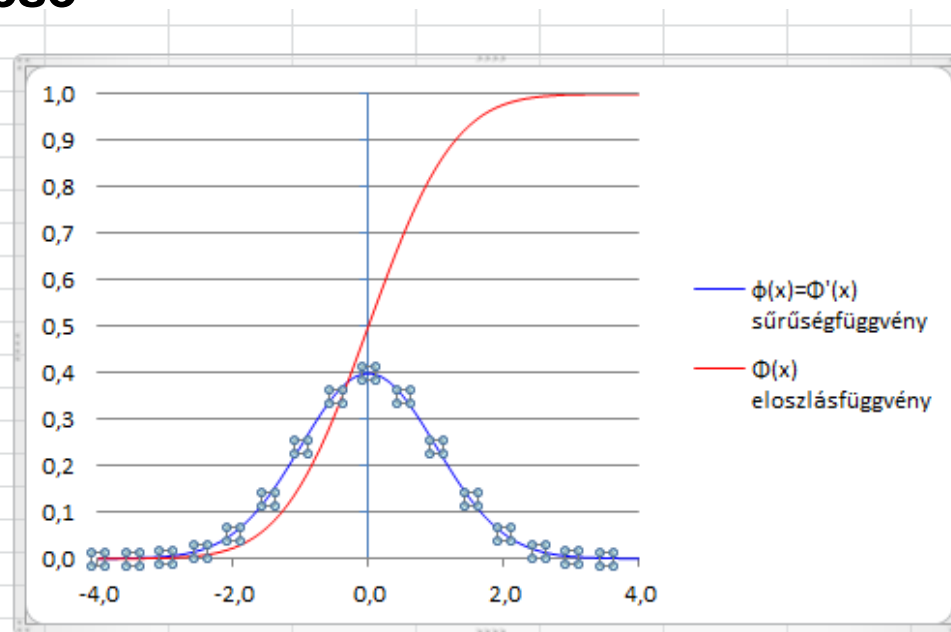




Egyszerű XY diagramok készítése

Technikai megvalósítás (folyt.)

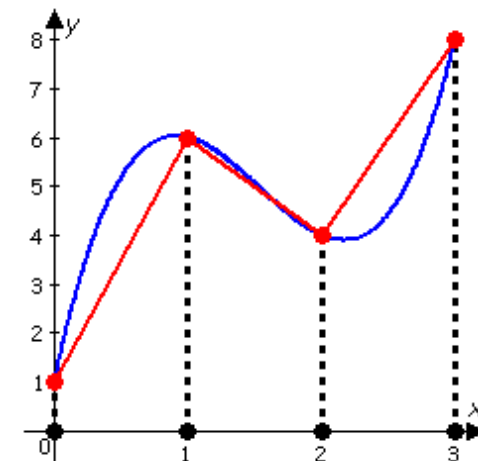
- Diagram hangolása (folyt.)
 - Másodlagos tengely felvétele a sűrűségfüggvényhez
 - Másodlagos tengely, majd hangolás (mint előbb)
- Diagramcím (tudjuk)



Egyszerű XY diagramok készítése

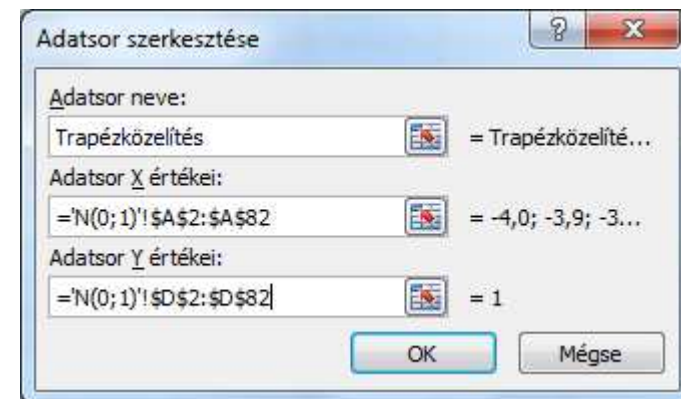
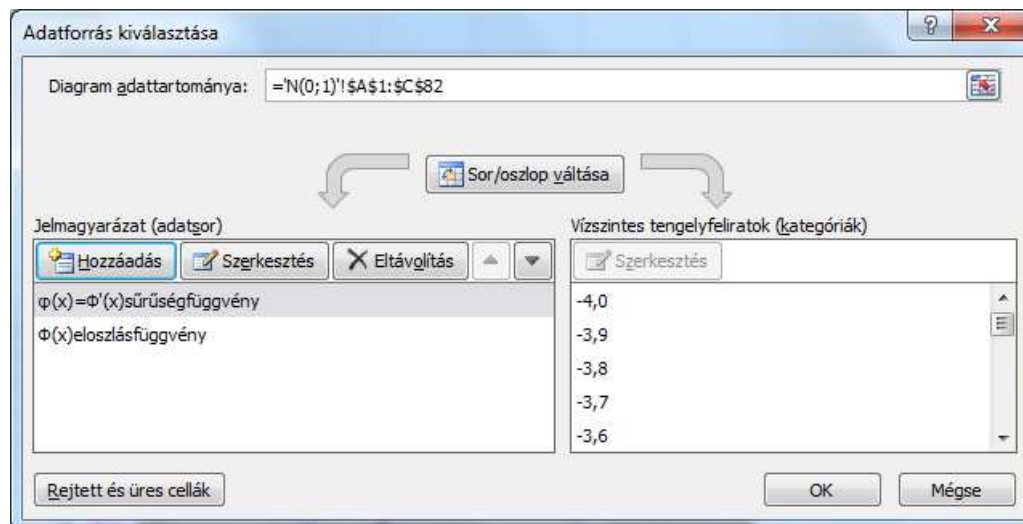
■ Új adatsor készítése

- Numerikus integrálással kiszámoljuk az integrál közelítő értékét, és fel szeretnénk rakni a diagramra
- A D oszlopba a trapézszabály szerinti integrálközelítő értékek kerülnek, azaz az aktuális elem: az előző érték (összeg) plusz az akt. trapézocska területe
 - Pl. a D6 cellába így $=D5+(A6-A5)*(B6+B5)/2$ kerül
- A képletet másoljuk az oszlop minden adatcellájába, kivéve az elsőt, ahová az induló =C2 érték kerül



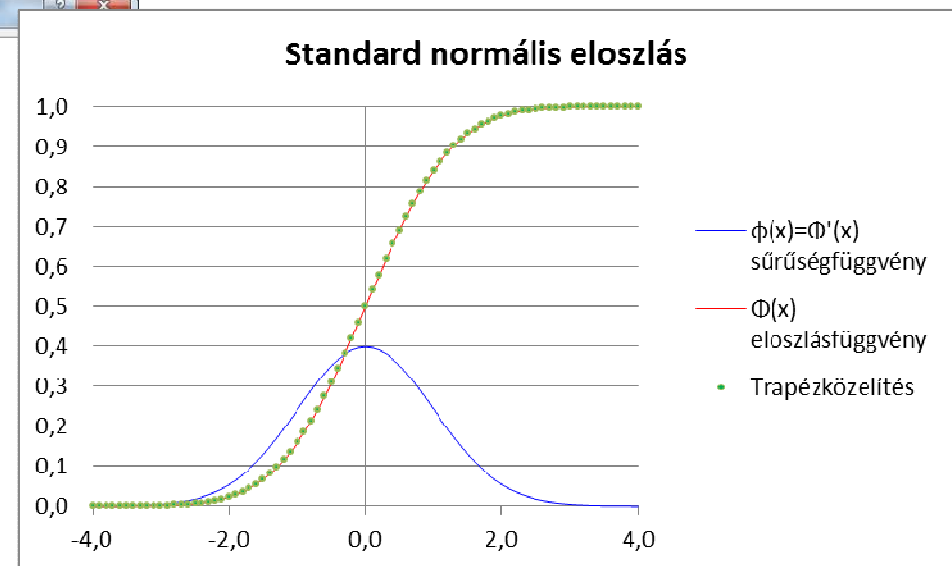
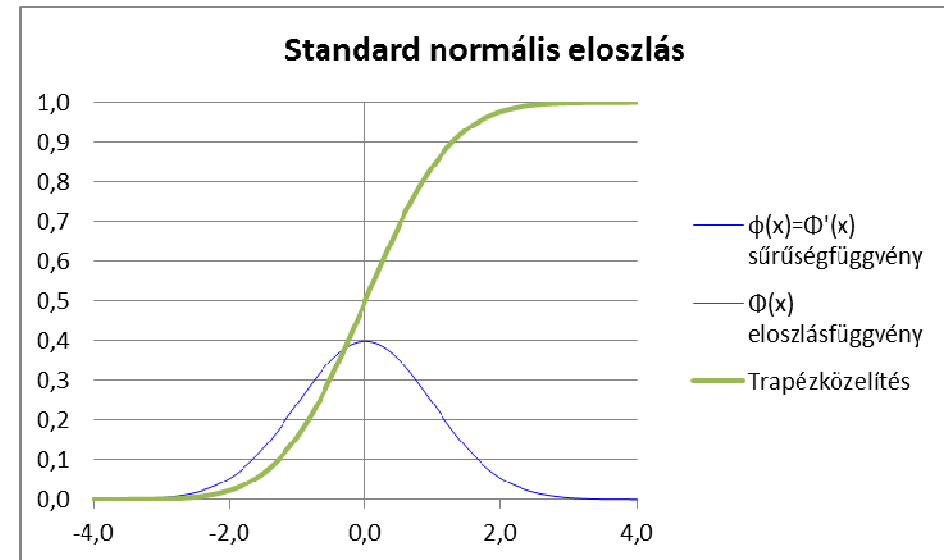
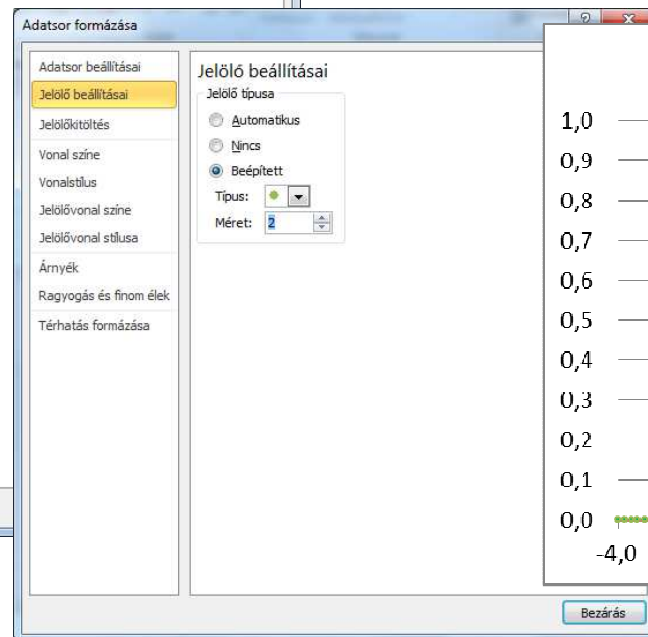
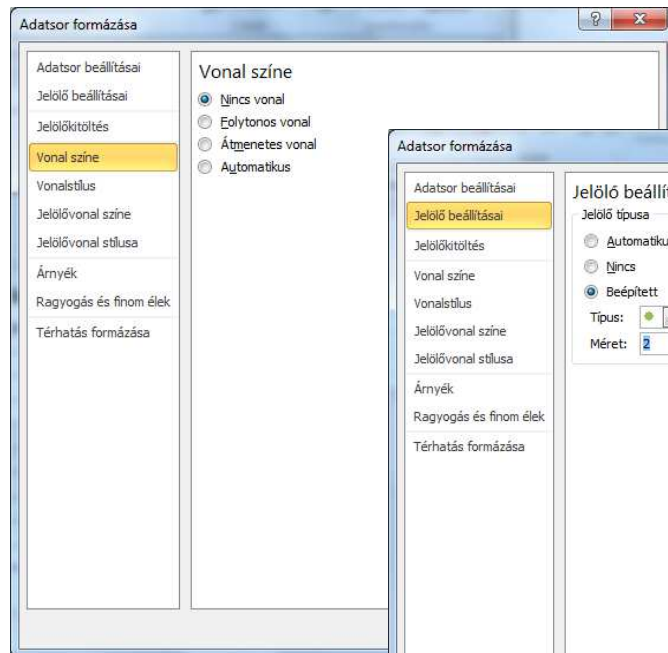
■ Az új adatsor felvétele

- Rákatt., majd jobb gomb: Adatok kijelölése...
- Megadjuk a D oszlop adatait



Egyszerű XY diagramok készítése

- Az új adatsor formázása
 - Újabb gond: az új adatsor elfedi a régit
 - Javítás: az új görbénken a vonalat kikapcsoljuk, a jelölőt beállítjuk (a színét is – zöldre)



Egyszerű XY diagramok készítése

- Nevezetes pontok elhelyezése a diagramon
- Határozzuk meg és tegyük fel a diagramra a kvartiliseket, azaz azokat a pontokat, amelyekre: $\Phi(x) = 0,25$ illetve $\Phi(x) = 0,75$
- A megoldáshoz a célérték-keresést használjuk (amelyet a Solverbe építettek be)
 - Kimásoljuk a megfelelő hármaszt (a középsőt nem használjuk)

Microsoft Excel ...

K28

	G	H
27		
28	x	$\Phi(x)$
29	-0,70000	0,24196
30	0,70000	0,75804

Microsoft Excel...

K30

	G	H
27		
28	x	$\Phi(x)$
29	-0,67449	0,25000
30	0,67449	0,75000
31		

N(0;1)

A Solver paraméterei

Célérték beállítása: \$I\$29

Cél: ☐ Max ☐ Min ☒ Érték: 0,25

Változócellák módosításával: \$G\$29

Vonatkozó korlátozások:

☐ Nem korlátozott változók nemnegatívvá tétele

Válasszon egy megoldási módszert: Nemlineáris ÁRG

Megoldási módszer
A sima nemlineáris Solver-problémákhoz válassza a nemlineáris ÁRG motort. Lineáris Solver-problémákhoz válassza az LP szimplex motort, a nem sima Solver-problémákhoz pedig az evolutív motort.

Súgó Megoldás Beállítások

A Solver eredményei

A Solver megoldást talált. Az összes korlátozó és optimalizálási feltétel teljesült.

☒ A Solver megoldásának megtartása
☐ Eredeti értékek visszaállítása

☐ Vissza A Solver paraméterei párbeszédpanelre ☐ Jelentésvázlatok

OK Mégse

A Solver megoldást talált. Az összes korlátozó és optimalizálási feltétel teljesült.

Az ÁRG motor használata esetén ez azt jelenti, hogy a Solver legalább egy globális optimalis megoldást talált. A szimplex LP motor használata esetén ez azt jelenti, hogy a Solver egy globális optimalis megoldást talált.

Beállítások

Minden módszer | Nemlineáris ÁRG | Evolutív

Korlátozó feltétel pontossága: 0,000000000001

☒ Automatikus léptékváltás
☐ Közvetítő lépések eredményének megjelenítése

Megoldás egész korlátozásokkal
☐ Egész korlátozások figyelmen kívül hagyása

Egészoptimalitás (%): 1

Megoldási korlátok

Maximális idő (másodperc):
Közvetítő lépések:
Evolutív motor és egész korlátozások:
Részproblémák maximális száma:
Megfelelő megoldások maximális száma:

OK Mégse

Egyszerű XY diagramok készítése

- Nevezetes pontok elhelyezése a diagramon (kvartilisek, folyt.)
 - (Megj.: a Solver számolási pontosságát 1E-10 és 1E-15 közötti értékre célszerű beállítani)
 - A szokásos módon felvesszük a két pontot az adatsorra
 - De ekkor még nem látunk semmit a diagramon, csak a jelmagyarázatban
 - Hangolási gond: nem tudunk (egykönnyen) rákattintani a pontra!
 - Mo.: Elrendezés menüszalag, diagramelemek (kiválasztása)

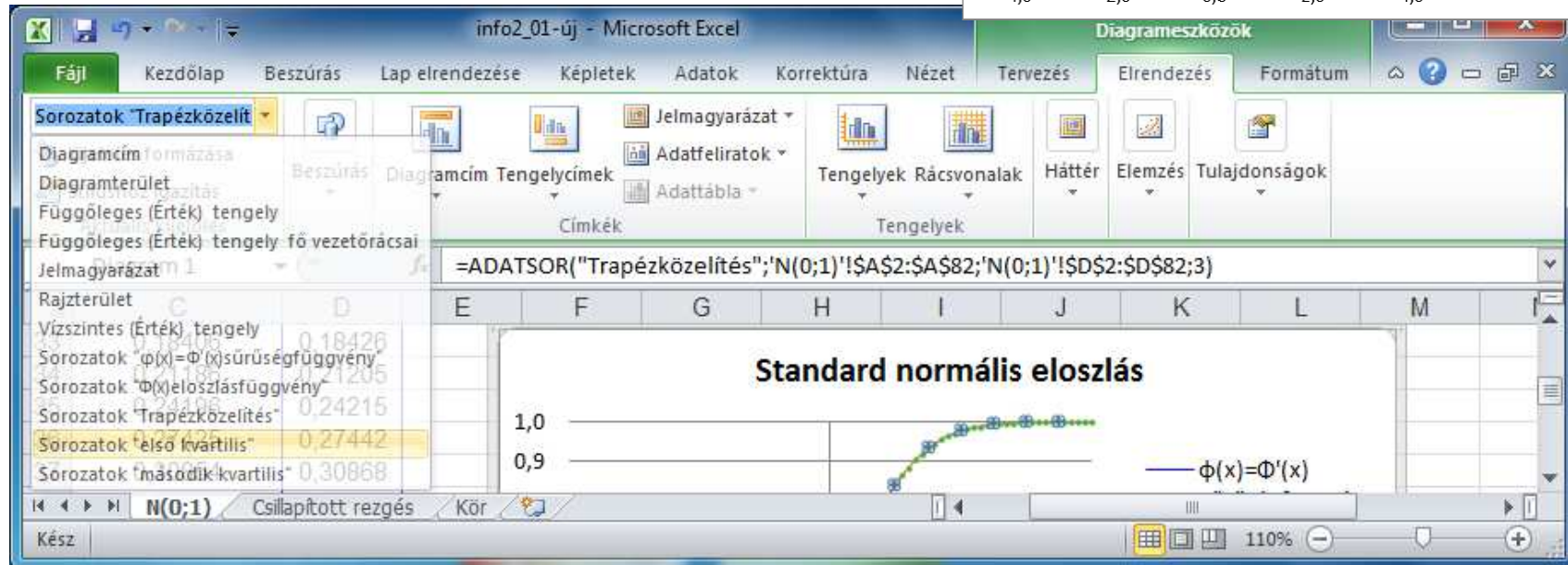
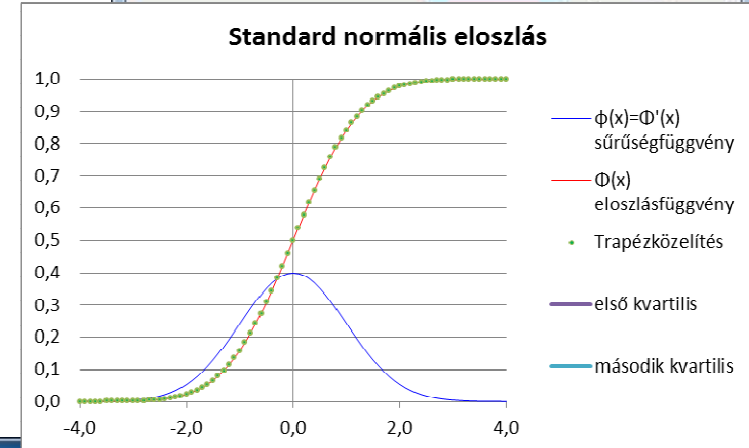
Adatsor szerkesztése

Adatsor neve: első kvartilis = első kvartilis

Adatsor X értékei: $=N(0;1)!\$G\29 = -0,67449

Adatsor Y értékei: $=N(0;1)!\$H\29 = 0,25000

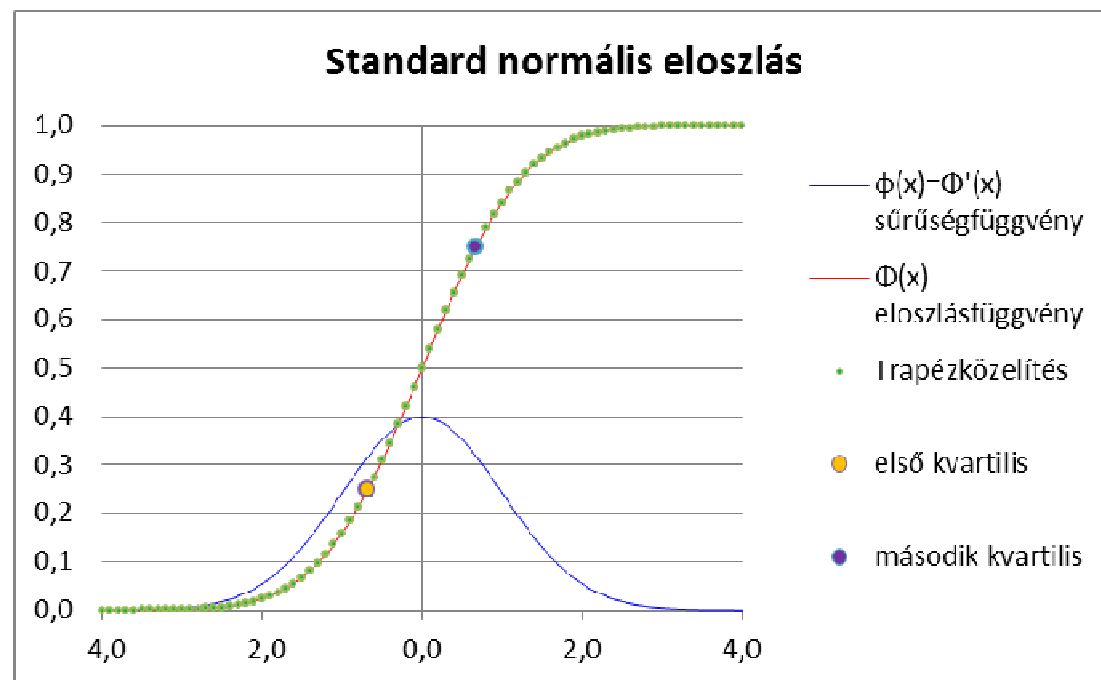
OK Mégse





Egyszerű XY diagramok készítése

- Nevezetes pontok elhelyezése a diagramon (kvartilisek, folyt.)
 - A kiválasztás után: kijelölés formázása
 - A már ismert módon: nincs vonal (!), beépített jelölő, szín stb.
 - Egyes esetekben az Excel be is húzza a vonalat, ez persze hiba
 - Ugyanígy a 2. kvartilis is
 - A két kvartilis együtt is felvehető
- Célérték kereséssel megoldható még: függvények metszéspontja (a különbség = 0), szélsőérték pontok meghatározása (lásd: gyak.)
 - Utóbbinál min/max., ill. derivált = 0 is választható





Egyszerű XY diagramok készítése

Alapfüggvények megvalósítása Excelben

- Polinomfüggvények
 - A megfelelő műveletekből összerakva: +, -, *, /, ^; zárójelekkel
- Gyökfüggvények
 - Négyzetgyök (Gyök(x) függvény), ill. $x^{(1/n)}$
 - Példák: Gyök(2), $3^{(1/3)}$
- Trigonometrikus függvények
 - Szinusz, koszinusz, tangens, kotangens és inverzeik (hiperbolikus fv-ek is)
 - Példák: Sin(Pi()), Cos(Pi()/4), Arcsin(Gyök(2)/2), Arccos(0)
- Exponenciális függvények
 - E-ad alapú (Kitevő(x) függvény), ill. a^x
 - Példák: Kitevő(1), 2^5
- Logaritmikus függvények
 - Természetes alapú (Ln függvény), 10-es alapú (Log10 függvény), ill. adott alapú (Log függvény)
 - Példák: Ln(2,718), Log10(100), Log(8;2)



Paraméteresen adott XY diagramok készítése

Példánk: epiciklois

- *Ha egy nagyobb q sugarú körön a síkban végiggördítünk egy kisebb r sugarú kört, akkor a kisebbik kör egy megfigyelt pontjának a pályája egy ún. epicikloist ír le
 - (Hasonló görbéket matematikai zsebkönyvekben találhatunk)
- A képlet adott, nekünk az ábrázolás a feladatunk

$$x = (q+r) \cos(\alpha) - r \cos\left(\frac{q+r}{r} \alpha\right) \quad y = (q+r) \sin(\alpha) - r \sin\left(\frac{q+r}{r} \alpha\right)$$

- Nálunk legyen most $q = 9$ és $r = 3$
- Elnevezett cellákat használunk
 - Az r név foglalt a 2010-es Excelben (helyette: $_r$)
 - További védett nevek: c , s , o
- A szöveget felvesszük fokban (teljes kör), majd radiánban
- A diagram beszúrásakor az értéktáblázatot az xE és yE tartományból vesszük
 - (Az alfát nem vesszük bele)

	A	B	C	D	E
1	q= 9		r= 3		
2	epiciklois				
3	α [fok]	α	xE	yE	
4	0	0,0000	9,0000	0,0000	
5	1	0,0175	9,0055	0,0002	
6	2	0,0349	9,0219	0,0013	
7	3	0,0524	9,0491	0,0043	
8	4	0,0698	9,0870	0,0102	

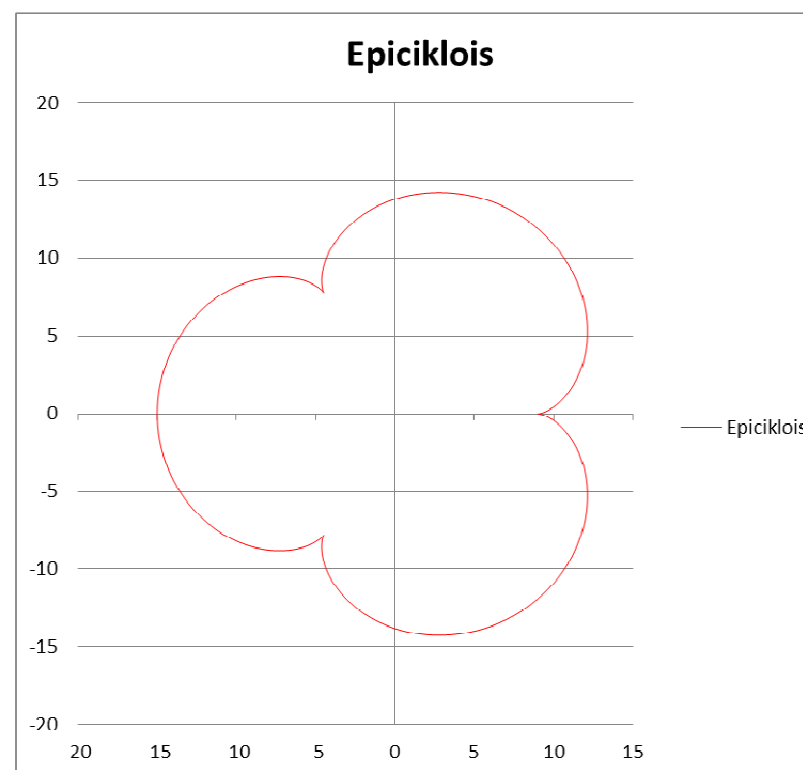
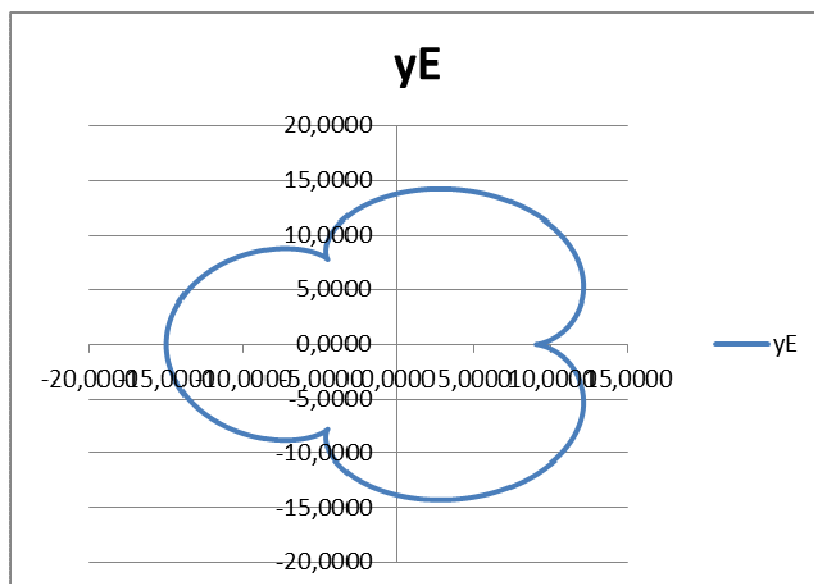




Paraméteresen adott XY diagramok készítése

Epiciklois (folyt.)

- A nyers diagramot itt is megfelelően hangolni kell (tengelyek, skálák, szín, vonal, diagramcím)
- Próbáljuk ki, hogyan változik a görbe, ha q és r értékét módosítjuk!
 - Mely esetekben záródik a görbe egy cikluson belül, ill. *véges sok cikluson belül?





Kétváltozós függvények ábrázolása

- Hasonlóan dolgozunk, mint az egyváltozós esetben (értéktáblázat)
- A térbeliség érzékeltetésére az Excel színezést, rácsvonalakat és árnyékolást használ
- Példánk: $f(x) = x^2 + y^2$

Munkafüzet1 - Microsoft Excel

Fájl Kezdőlap Beszúrás Lap elrendezése Képletek Adatok Korrektúra Nézet

C3 f_x =B3*B3+C\$2*C\$2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1																				
2		xly	-2,0	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1,0	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
3		-2,0	8,00	7,24	6,56	5,96	5,44	5,00	4,64	4,36	4,16	4,04	4,00	4,04	4,16	4,36	4,64	5,00	5,44	5,96
4		-1,8	7,24	6,48	5,80	5,20	4,68	4,24	3,88	3,60	3,40	3,28	3,24	3,28	3,40	3,60	3,88	4,24	4,68	5,20
5		-1,6	6,56	5,80	5,12	4,52	4,00	3,56	3,20	2,92	2,72	2,60	2,56	2,60	2,72	2,92	3,20	3,56	4,00	4,52
6		-1,4	5,96	5,20	4,52	3,92	3,40	2,96	2,60	2,32	2,12	2,00	1,96	2,00	2,12	2,32	2,60	2,96	3,40	3,92
7		-1,2	5,44	4,68	4,00	3,40	2,88	2,44	2,08	1,80	1,60	1,48	1,44	1,48	1,60	1,80	2,08	2,44	2,88	3,40
8		-1,0	5,00	4,24	3,56	2,96	2,44	2,00	1,64	1,36	1,16	1,04	1,00	1,04	1,16	1,36	1,64	2,00	2,44	2,96
9		-0,8	4,64	3,88	3,20	2,60	2,08	1,64	1,28	1,00	0,80	0,68	0,64	0,68	0,80	1,00	1,28	1,64	2,08	2,60
10		-0,6	4,36	3,60	2,92	2,32	1,80	1,36	1,00	0,72	0,52	0,40	0,36	0,40	0,52	0,72	1,00	1,36	1,80	2,32
11		-0,4	4,16	3,40	2,72	2,12	1,60	1,16	0,80	0,52	0,32	0,20	0,16	0,20	0,32	0,52	0,80	1,16	1,60	2,12
12		-0,2	4,04	3,28	2,60	2,00	1,48	1,04	0,68	0,40	0,20	0,08	0,04	0,08	0,20	0,40	0,68	1,04	1,48	2,00
13		0,0	4,00	3,24	2,56	1,96	1,44	1,00	0,64	0,36	0,16	0,04	0,00	0,04	0,16	0,36	0,64	1,00	1,44	1,96
14		0,2	4,04	3,28	2,60	2,00	1,48	1,04	0,68	0,40	0,20	0,08	0,04	0,08	0,20	0,40	0,68	1,04	1,48	2,00
15		0,4	4,16	3,40	2,72	2,12	1,60	1,16	0,80	0,52	0,32	0,20	0,16	0,20	0,32	0,52	0,80	1,16	1,60	2,12
16		0,6	4,36	3,60	2,92	2,32	1,80	1,36	1,00	0,72	0,52	0,40	0,36	0,40	0,52	0,72	1,00	1,36	1,80	2,32

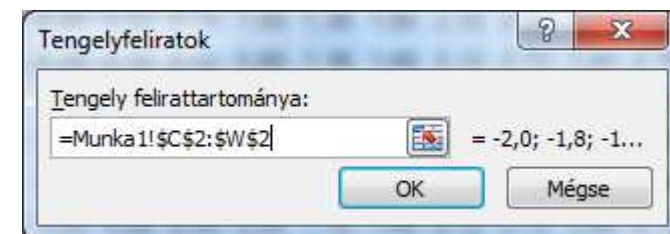
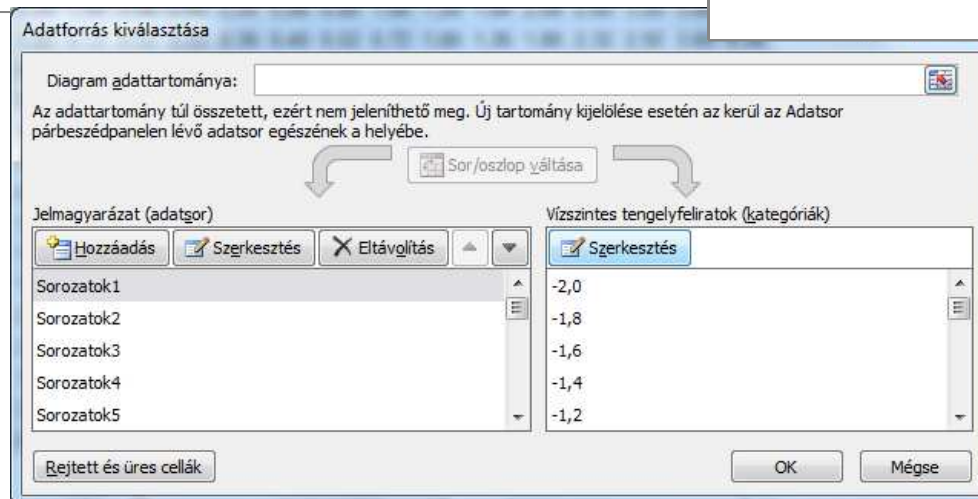
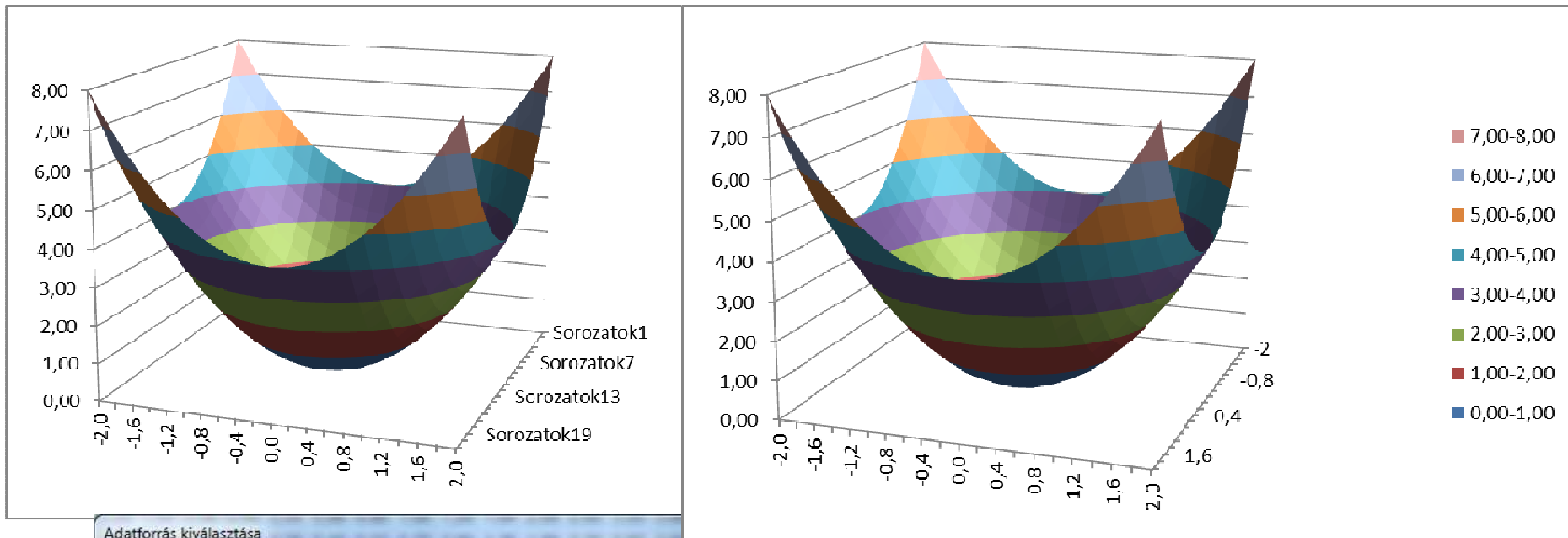
Munka1 Munka2 Munka3

Kész



Kétváltozós függvények ábrázolása

- A beszúrt nyers diagram tengelyskálázása hibás, ezt hangolni kell



További érdekességek

- Logaritmikus skálázás
 - Nagyobb számítási feladatoknál
- Példánk: a prímek száma adott n -ig, és ennek becslése

Munkafüzet2 - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F
1						
2		x	$\pi(x)$	$x/\ln x$	$\pi(x)/(x/\ln x)$	
3		2	1	2,885	0,347	
4		10	4	4,343	0,921	
5		100	25	21,71	1,152	
6		1000	168	144,8	1,160	
7		10000	1229	1086	1,132	
8		100000	9592	8680	1,105	
9		1000000	78498	72400	1,084	
10		10000000	664579	620000	1,072	
11		100000000	5761000	5430000	1,061	
12		1000000000	50840000	48300000	1,053	

Tengely formázása

Tengely beállításai

Szám

Kitöltés

Vonal színe

Vonalstílus

Árnyék

Ragyogás és finom élek

Tengely beállításai

Minimum: ☒ Automatikusan ☐ Rögzített: 0,1

Maximum: ☒ Automatikusan ☐ Rögzített: 1,5E9

Fő lépték: ☒ Automatikusan ☐ Rögzített: 5,0E8

Kis lépték: ☒ Automatikusan ☐ Rögzített: 1,0E8

☐ Értékek fordított sorrendben

☒ Logaritmikus skála Alap: 10

