



12. előadás

Matlab 6.

(Lineáris algebrai alkalmazások)

Dr. Szörényi Miklós,
Dr. Kallós Gábor

2014–2015





Tartalom

- Matematikai alapok
- Transzformációs mátrixok
 - Swap mátrixok
 - Forgatómátrixok
 - Titkosítás
- Vektoralgebra
 - Vektorok skaláris szorzata, hajlásszöge
 - Vektorok vektoriális szorzata
 - Vektorok vegyes-szorzata, függetlensége
- Lineáris egyenletrendszerek
 - Áttekintés
 - Alapeset
 - Szöveges feladatok
 - Túlhatározott rendszerek
 - Összefüggő rendszerek
 - Időmérés
- Normák, kondíciószám
- Sajátérték, sajátvektor



Matematikai alapok (lineáris algebra)

Vektortér, bázis, lineáris transzformációk

Gyors elméleti összefoglaló a mátrixokhoz
(bizonyítások nélkül)

Lineáris tér: az a halmaz, melynek elemein (vektoroknak nevezzük) értelmezve van a "nyújtás" és "összeadás" művelete (lineáris műveletek) és ezek nem vezetnek ki a halmazból

Lineáris tér bázisa: a tér vektorainak egy legszűkebb (minimális elemszámú) részhalmaza, melynek elemeiből a tér többi eleme összeadásokkal és nyújtásokkal (lineáris kombináció) elérhető. Egy bázis elemei lineárisan függetlenek, azaz semelyikük sem állítható elő a többi elem lineáris kombinációjaként. Egy bázis elemeinek száma a tér dimenziója.

Vektor koordinátái: bármely vektor bázisvektoros előállításában szereplő nyújtási együtthatókat az adott bázisra vonatkozó koordinátáknak nevezzük.

Lineáris transzformáció: a lineáris tér elemein értelmezett olyan leképezés, mely a lineáris műveletekkel sorrendben felcserélhető, azaz teljesen mindegy, hogy például előbb transzformálok és azután nyújtok, vagy fordítva

Mátrix: egy lineáris térbeli A lineáris transzformációt A számtáblázat reprezentálja, melynek oszlopaiba a bázisvektorok transzformáltjainak koordinátái kerülnek. Minden mátrixelem pozícióját a sor ill. oszlopbeli elhelyezkedése (sorindex, oszlopindex) jellemzi

Oszlopvektor: a tér egy vektorának koordinátáit egyoszlopos mátrixba írjuk

A : z tengely körüli β szögű forgatás

β_1 60 fok

$A = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,86603 & 0 \\ 0,866025 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

β_2 -15 fok

$B = \begin{bmatrix} 0,965926 & 0,258819 & 0 \\ -0,25882 & 0,965926 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



Matematikai alapok (transzform. mátrixok)

■ Lineáris transzformációk, transzformációs mátrixok* (forrás: Kiss Emil, ELTE)

Lineáris transzformációk.

Definíció

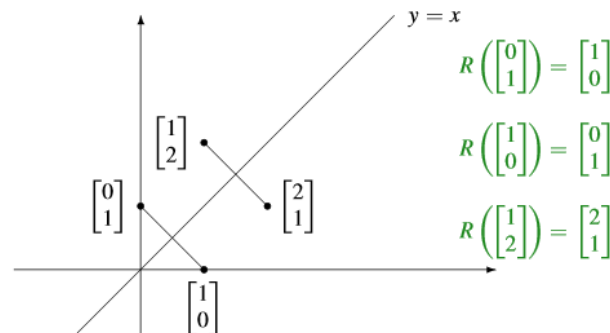
T test. Az $A : T^n \rightarrow T^n$ függvény *lineáris transzformáció*, ha tetszőleges $v, w \in T^n$ vektorra és λ skalárra teljesül, hogy

$$A(v + w) = A(v) + A(w) \text{ és } A(\lambda v) = \lambda A(v).$$

Vagyis A *összegtartó* és *skalárszoros-tartó*.

Példa

Legyen R az $y = x$ egyenesre való tükrözés.



Vektor képe általános transzformációnál.

Kérdés

Legyen $A : T^2 \rightarrow T^2$ lineáris transzformáció.

Ha $A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ és $A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, akkor $A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = ?$

$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right) + A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right),$$

hiszen A *összegtartó*. A *skalárszoros-tartás* miatt ez

$$\begin{aligned} A\left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + A\left(y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= xA\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + yA\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= x \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ bx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cy \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát minden vektor képét ki tudjuk számolni, ha ismerjük a, b, c, d értékét.

Definíció

A fenti A mátrixa $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. (Az oszlopok $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ képei.)

Definíció

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix} \text{ (mátrix és vektor szorzata).}$$

Következmény: Vektor képének kiszámítása: $A(v) = [A]v$.

A forgatás képlete.

Példa

Az origó körüli α szögű forgatás mátrixa $[F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$.

Példa kompozícióra.

Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözzük az $y = x$ egyenesre, majd forgatunk az origó körül 90° -kal? Ez a két transzformáció *kompozíciója* (egyén utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Mivel $[F] = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ezért $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ képe

$$F\left(\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0y + (-1)x \\ 1y + 0x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}.$$

Az eredmény az y -tengelyre való tükrözés (**Házi Feladat**).

A kompozíció mátrixa.

Definíció

Ha $A, B : T^2 \rightarrow T^2$ transzformációk, akkor *kompozíciójuk* $(A \circ B)(v) = A(B(v))$ tetszőleges $v \in T^n$ esetén. *Összetett függvény:* először B -t, utána A -t alkalmazzuk.

Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Transzformációs mátrixok

- Adott egy $n \times n$ -es transzformációs \mathbf{A} mátrix, és egy megfelelő ($n \times 1$ -es) \mathbf{x} vektor
 - A transzformációs mátrix oszlopai a bázis egységvektorok képeit tartalmazzák (lásd: Swap)
- Az \mathbf{x} vektorra alkalmazzuk az \mathbf{A} transzformációt.
Ekkor az eredményvektort $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ módon számolhatjuk.
 - Megj.: Egyszerre több vektorra is alkalmazhatjuk a transzformációt
- Példa: Swap (csere) mátrix (eml.: gyak.; ábra most: Excel; Mszorzat függvénnyel)
 - Mit kapunk, ha a transzformációt még egyszer elvégezzük?
 - Nézzük meg ugyanezt az SW13 = [0 0 1; 0 1 0; 1 0 0] és az SW23 = [1 0 0; 0 0 1; 0 1 0] mátrixokkal is!
- Az egységmátrix is transzformációs mátrix
 - Mi a megvalósított művelet?
- Alkalmazás: Projektormátrix (korábbi ea.)

Swap-mátrix - Microsoft Excel

Fájl Kezdőlap Beszúrás Lap elrendezése Képletek Adatok Korrektúra Nézet Fejlesztőeszközök

K3 $\{=MSZORZAT(B3:D5;G3:H5)\}$

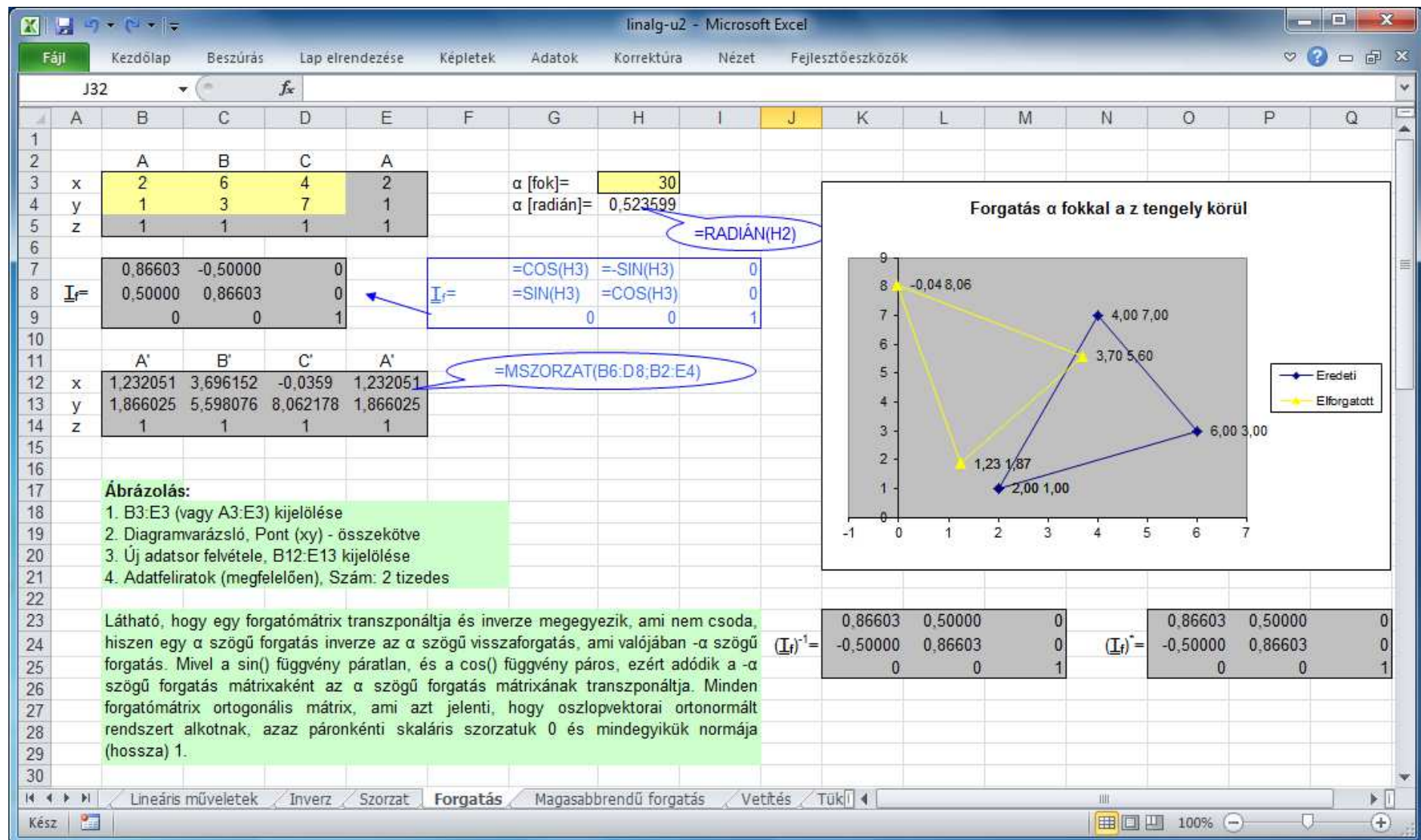
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2													
3		0	1	0			1	3			2	2	
4	SW12	1	0	0		Pontok	2	2		Eredmény	1	3	
5		0	0	1			3	1			3	1	
6													

Munka1 Munka2 Munka3

Kész 110%

Transzformációs mátrixok

■ Alkalmazás: Forgatómátrixok (2D, 3D; gyak. is)





Transzformációs mátrixok

Alkalmazás: Titkosítás

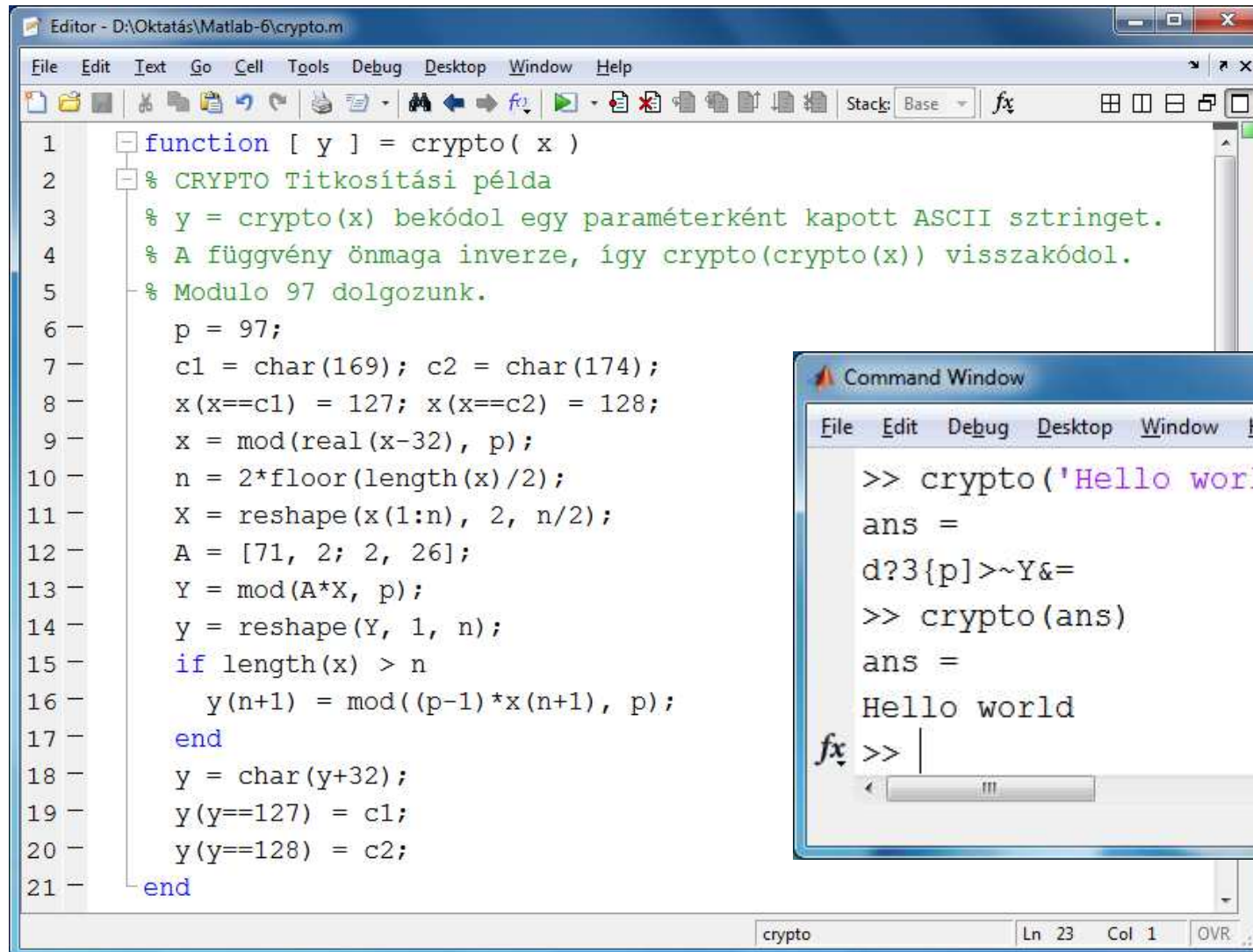
- A (be)kódolás (encoding) $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \bmod p$ módon történik, ahol p alkalmas prím, \mathbf{A} pedig olyan speciális mátrix, amelynek inverze önmaga mod p (visszakódoláshoz, decoding)
 - Azaz \mathbf{A} négyzete az egységmátrix
- Kódolandó karakterek: 32-től 127-ig (95 db nyomtatható jel, az utolsó a DEL)
`>> x = reshape(32:127, 32, 3)', c = char(x)`
- Legyen $p = 97$, kódolható karakterek: $0:p-1$ tartományban (+ 2 extra jel lehet)
- Jó \mathbf{A} mátrix: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 71 & 2 \\ 2 & 26 \end{bmatrix}$
 - Ellenőrzés
`>> E = mod(A*A, p)`
- Kódolható: egy (vagy több) 2×1 -es \mathbf{x} vektor, pl.
`>> x = 'TV', x', x = x'+0-32`
- Kódolás (eredm.: '1U')
`>> A*x, y = mod(A*x, p), char(y+32)`
$$\begin{pmatrix} 71 & 2 \\ 2 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 52 \\ 54 \end{pmatrix} \bmod 97 = \begin{pmatrix} 17 \\ 53 \end{pmatrix}$$
- Visszakódolás (eredm.: 'TV')
`>> A*y, z = mod(A*y, p), char(z+32)`



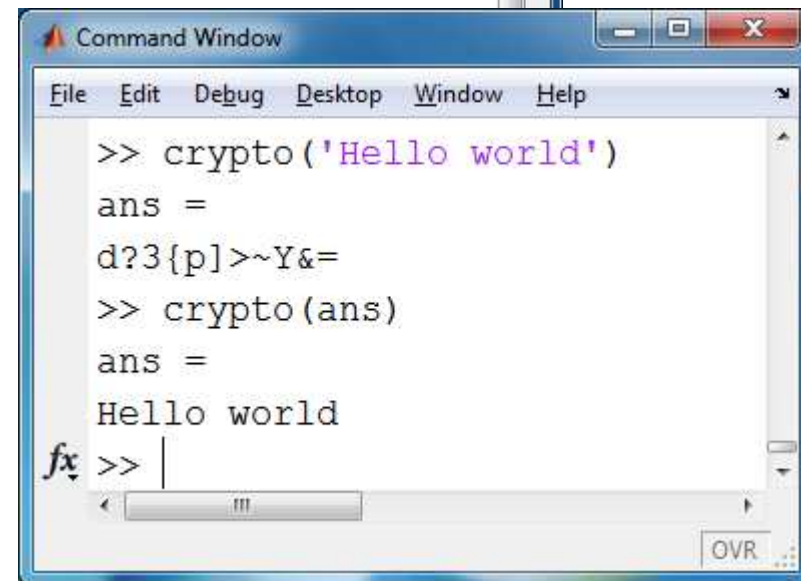
Transzformációs mátrixok

Titkosítás (folyt.)

- Script, és futtatása



```
1 function [ y ] = crypto( x )
2 % CRYPTO Titkosítási példa
3 % y = crypto(x) bekódol egy paraméterként kapott ASCII sztringet.
4 % A függvény önmaga inverze, így crypto(crypto(x)) visszakódol.
5 % Modulo 97 dolgozunk.
6 p = 97;
7 c1 = char(169); c2 = char(174);
8 x(x==c1) = 127; x(x==c2) = 128;
9 x = mod(real(x-32), p);
10 n = 2*floor(length(x)/2);
11 X = reshape(x(1:n), 2, n/2);
12 A = [71, 2; 2, 26];
13 Y = mod(A*X, p);
14 y = reshape(Y, 1, n);
15 if length(x) > n
16     y(n+1) = mod((p-1)*x(n+1), p);
17 end
18 y = char(y+32);
19 y(y==127) = c1;
20 y(y==128) = c2;
21 end
```



```
>> crypto('Hello world')
ans =
d?3{p}>~Y&=
>> crypto(ans)
ans =
Hello world
fx >> |
```




Vektoralgebra

- Megj.: valós koordinátájú sor- és oszlopvektorokkal dolgozunk
- Skaláris szorzat
 - Euklideszi skalárszorzat (szorzatösszeg), ahol x és y azonos méretű vektorok (nem csak a geometriai vektorok terében!)
 - Megvalósítás a Matlabban: **dot(x, y)** vagy **sum(x.*y)**
 - Példa
`>> a = [3,4,0], b = [-4,3,0], dot(a, b) % merőlegesek`
- Vektoriális szorzat
 - Vektoriális-szorzat, ahol a és b pontosan 3-elemű vektorok, eredmény az $S(a,b)$ síkra merőleges vektor lesz
 - Megvalósítás a Matlabban: **cross(a, b)**
 - Példa
`>> a = [1 0 0], b = [0 1 0], cross(a, b)`

```
Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> a = [1 0 0], b = [0 1 0], cross(a,b)
a =
     1     0     0
b =
     0     1     0
ans =
     0     0     1
fx >> |
```





Vektoralgebra

■ Vegyesszorzat

- Három térbeli vektor vegyesszorzata; a három vektor által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata

- Ha ez 0, akkor a vektorok összefüggők

- Megvalósítás a Matlabban:

`dot(cross(a, b), c)` vagy **`det([a; b; c])`** ill. **`det([a, b, c])`**

- Példa

```
>> a = rand(1, 3), b = rand(1, 3), c = rand(1, 3),  
dot(cross(a, b), c), det([a; b; c])
```

■ Vektorok hajlásszöge

- Matlabban a **`subspace(x, y)`** paranccsal határozható meg, az eredmény a két **oszlopvektor** „szöge” radiánban (magasabb dimenzióban is!)

- Sorvektorokra nem kapunk helyes eredményt

- Példa

```
>> subspace(a', b'), subspace(a, b)
```

- Használhatjuk ehelyett az **`acos(dot(x, y)/(norm(x)*norm(y)))`** kifejezést, ahol a **`norm(x) = sqrt(dot(x, x))`** kifejezés az euklideszi norma, azaz az x vektor „hossza”, ez sorvektorokra is működik





Lineáris egyenletrendszerek

Áttekintés

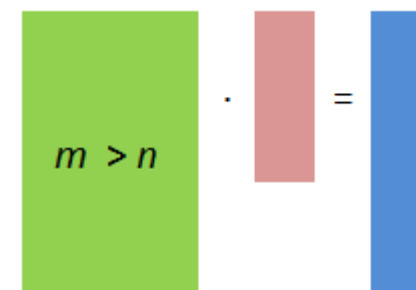
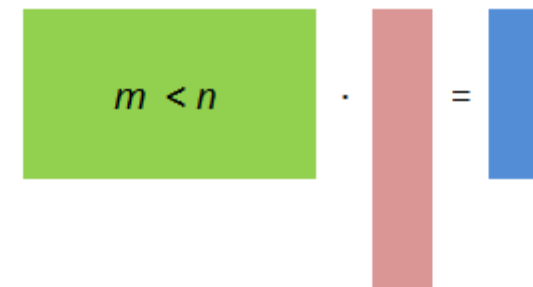
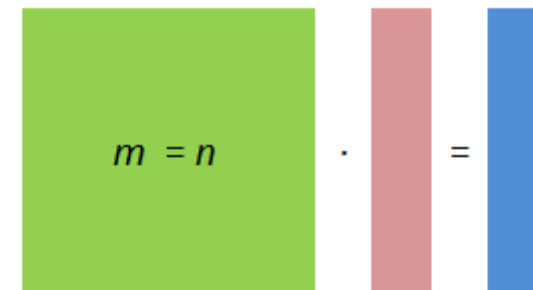
- Gyakori feladat, sokszor „előbukkan”
 - Nagyon jó Matlab támogatás, kiválóan illeszkedik eddigi tanulmányainkhoz
- Rövid felírás: $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{b}$
 - n db ismeretlen, m db egyenlet
 - Együtthatómátrix, ismeretlenek vektora, konstansvektor
- Klasszikus osztályozás
 - Négyzetes rendszer
 - A megoldások száma \mathbf{A} -tól függ (Lehet 1, végtelen sok vagy 0)
 - Alulhatározott eset
 - Kevesebb egyenlet, mint ismeretlen
 - Végtelen sok megoldás
 - Túlhatározott eset
 - Több egyenlet, mint ismeretlen
 - Általában nincs megoldás
 - Leggyakrabban minimális $\mathbf{A}^* \mathbf{x} - \mathbf{b}$ hibavektort keresünk \Rightarrow norma fogalma (vektorokra, mátrixokra)

$$a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \dots + a_{1n} * x_n = b_1$$

$$a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + \dots + a_{2n} * x_n = b_2$$

...

$$a_{m1} * x_1 + a_{m2} * x_2 + \dots + a_{mn} * x_n = b_m$$

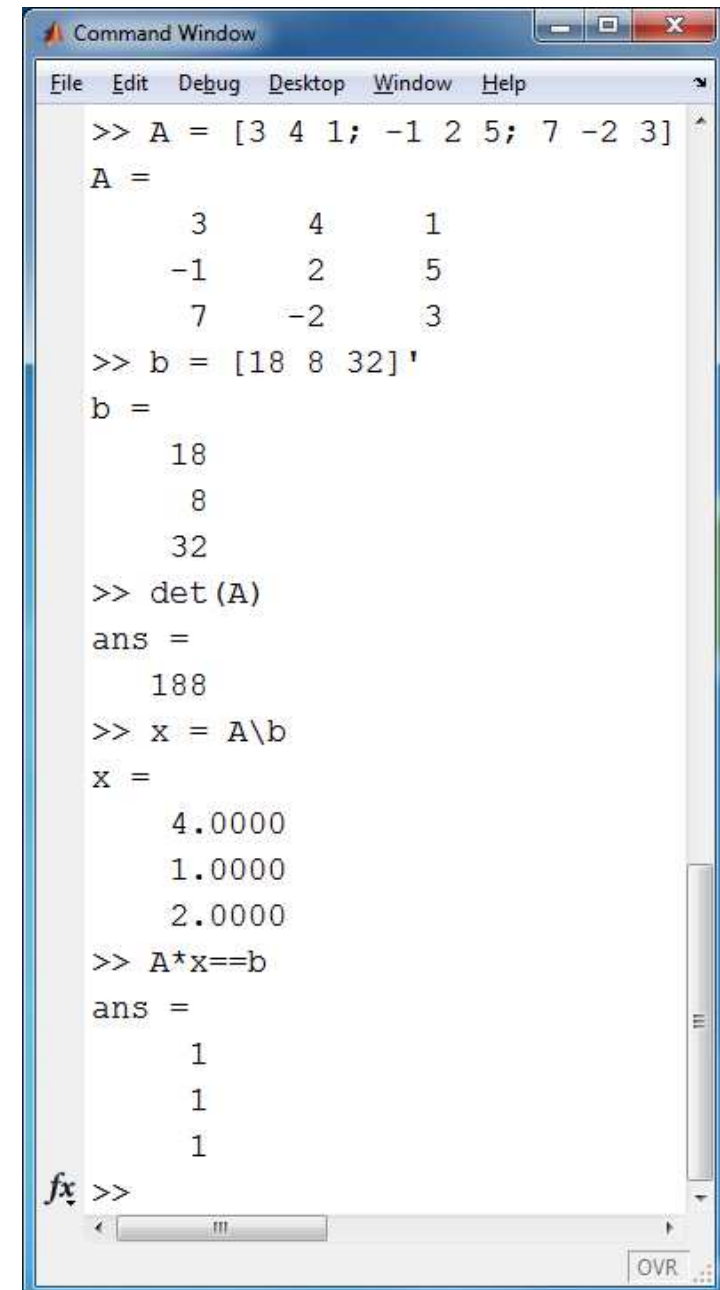


Lineáris egyenletrendszerek

Alapeset

- A független egyenletek (sorok/oszlopok) száma megegyezik az ismeretlenek számával, azaz $\det(A) \neq 0$ vagy $\text{rank}(A) == \text{length}(A)$
 - Eml.: a megoldás ekkor *egyértelmű*; Excelből már tanultuk
- Ekkor $x = A \backslash b$ vagy $x = \text{inv}(A) * b$ vagy $x = \text{pinv}(A) * b$
- Példa

```
>> A = [3 4 1; -1 2 5; 7 -2 3],
b = [18 8 32]', rang = rank(A),
x = A\b, A*x == b
```
- Az $A \backslash b$ megoldási módszer gyorsabb
 - Lásd: gyakorlat
 - Itt Gauss-elimináció hajtódik végre részleges főelem-kiválasztással, *sőt ha A szimmetrikus és pozitív definit, akkor a Cholesky-felbontás kerül alkalmazásra (lásd még: súgó)



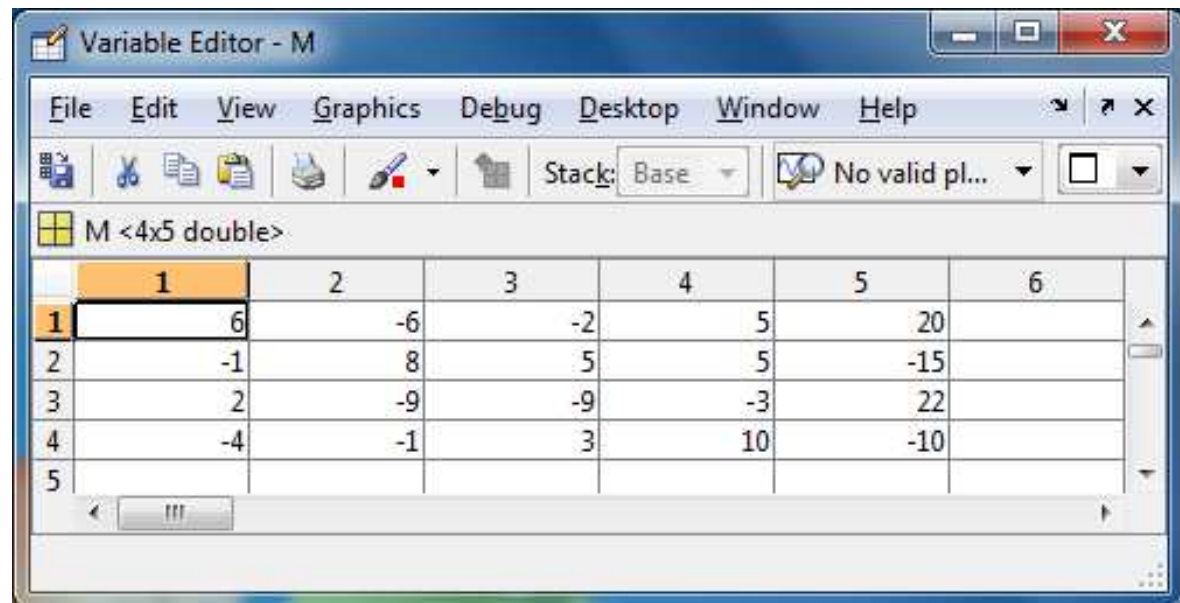
```
Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> A = [3 4 1; -1 2 5; 7 -2 3]
A =
     3     4     1
    -1     2     5
     7    -2     3
>> b = [18 8 32]'
b =
    18
     8
    32
>> det(A)
ans =
    188
>> x = A\b
x =
    4.0000
    1.0000
    2.0000
>> A*x==b
ans =
     1
     1
     1
fx >>
```



Lineáris egyenletrendszerek

Alapeset (folyt.)

- Tipikus alkalmazás: az együtthatómátrixot külső fájlból olvassuk be, gyakran oly módon, hogy az A mátrix és b vektor közös táblázatban adott; ennek mérete: $n \times (n + 1)$
 - Ekkor a tényleges megoldás előtt szétdarabolás is szükséges, a már ismert módon
- Lehetőség több egyenletrendszer közös megoldására:
Ha az A eh.mátrixú egyenletrendszert több különböző b vektor esetén akarjuk megoldani, akkor ezeket egy B mátrixba foglalhatjuk:
 $AX = B \Rightarrow X = A \backslash B$,
ahol a megoldásokat tartalmazó X mátrixnak ugyanannyi oszlopvektora van, mint a B-nek
- Megj.: a fenti esetek persze úgy is alkalmazhatók, hogy nem egyértelmű a mo. (lásd lent)



Variable Editor - M

File Edit View Graphics Debug Desktop Window Help

Stack: Base No valid pl...

M <4x5 double>

	1	2	3	4	5	6
1	6	-6	-2	5	20	
2	-1	8	5	5	-15	
3	2	-9	-9	-3	22	
4	-4	-1	3	10	-10	
5						



Lineáris egyenletrendszerek

Alapeset – szöveges feladatok

- Eml.: Excel számítások rész, keverési feladatok
- A megoldás Matlabbal is lényegében ugyanúgy történik
 - Infók kihámozása, egyenletrendszer megadása, megoldás

lin prog - Microsoft Excel

Fájl Kezdőlap Beszúrás Lap elrendezése Képletek Adatok Korrektúra Nézet

B7 $\{=TRANSZPONÁLÁS(MSZORZAT(INVERZ.MÁTRIX($

	A	B	C	D	E	F
1		Pók	Hernyó	Sárkány	Eladólány	Készlet
2	Fej	1	1	7	1	201
3	Láb	8	12	4	2	1880
4	Szem	2	1	14	3	281
5	Haj	0	5	20	333	1361
6						
7	Eredm	48	123	4	2	
8						
9	Det	-17536				

Terv1 Terv2 Bolt

Kész 130%

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> A = [1 1 7 1; 8 12 4 2; 2 1 14 3; 0 5 20 333] ^
A =
     1     1     7     1
     8    12     4     2
     2     1    14     3
     0     5    20    333
>> det(A)
ans =
    -17536
>> b = [201 1880 281 1361]';
>> x = A\b
x =
    48.0000
   123.0000
    4.0000
    2.0000
>> A*x
ans =
    1.0e+003 *
    0.2010
    1.8800
    0.2810
    1.3610
fx >>
  
```

**Lineáris egyenletrendszerek**

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0,1 & 6 \\ 0 & 2,5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6,1 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Alapeset – a megoldás részletei

- A Gauss-eliminációról általában
- Példa: a megoldandó rendszer
 - $A = [10 \ -7 \ 0; -3 \ 2 \ 6; 5 \ -1 \ 5]$, $b = [7; 4; 6]$
- 1. lépés – $0,3x_1$, ill. $0,5x_1$ első egyenl. +/-
- 2.a) lépés – egyenletcsere (pivotálás)
- 2.b) lépés – $0,04x_1$ második egyenl. +
- 3. lépés – ismeretlenek meghatározása

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2,5 & 5 \\ 0 & -0,1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2,5 \\ 6,1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2,5 & 5 \\ 0 & 0 & 6,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2,5 \\ 6,2 \end{pmatrix}$$

$$2,5x_2 + 5 \cdot 1 = 2,5 \quad x_2 = -1 \quad 10x_1 + (-7)(-1) = 7 \quad x_1 = 0 \quad x_3 = 1 \quad \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- 4. lépés – ellenőrzés

- Bevezethetők

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ -0,3 & -0,04 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2,5 & 5 \\ 0 & 0 & 6,2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Szorzók (L), végső együtthatók (U), pivotálás v. permutációk (P)

- Itt érvényes $L \cdot U = P \cdot A \quad L \cdot y = P \cdot b, \quad U \cdot x = y$

- Sőt, ha $P = E$, akkor $x = U \setminus (L \setminus b)$

- Ellenőrzés

```
>> [L, U, P] = lu(A), L*U
```

```
% Az lu eredetileg a LAPACK csomag része (lásd súgó)
```





Lineáris egyenletrendszerek

A megoldás részletei – *numerikus hibák hatása

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Példánkban: nincs pivotálás, ill. rosszul csináljuk

- Tfh. olyan gépen dolgozunk, amely 5 decimális jegy pontosan számol

- Az eredeti és az új rendszer

- A megoldás mindkét esetben $x = [0; -1; 1]$

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2,099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3,901 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- 1. lépés – $0,3x$, ill. $0,5x$ első egyenl. +

- 2. lépés – $2500x$ második egyenl. +

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0,001 & 6 \\ 0 & 2,5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6,001 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

- 3. lépés – ismeretlenek meghatározása

- Kerekítési hibák

$6,001 \cdot 2500 = 1,50025 \cdot 10^4$, kerekítve: $1,5002 \cdot 10^4$, + 2,5 helyett 2

- Így az egyenletünk

$$(5 + 2500 \cdot 6)x_3 = 2,5 + 2500 \cdot 6,001$$

- Ebből (x_3)

- Visszahelyettesítés

$$(5 + 1,5 \cdot 10^4)x_3 = 2 + 1,5002 \cdot 10^4$$

$$x_3 = \frac{1,5004 \cdot 10^4}{1,5005 \cdot 10^4} = 0,99993$$

- Ebből (x_2)

- Végül az első egyenletből

$$-0,001x_2 = 6 \cdot 0,99993 = 6,001$$

- Ebből (x_1)

$$x_2 = \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{-1 \cdot 10^{-3}} = -1,5$$

- Végül a $[-0,35; -1,5; 0,99993]$ rossz megoldást kapjuk

$$10x_1 + (-7) \cdot (-1,5) = 7$$

$$x_1 = -0,35$$





Lineáris egyenletrendszerek

Szinguláris esetek

- Ilyenkor tipikusan kevesebb független egyenletünk van, mint ismeretlen, azaz $\det(A) == 0$ és $\text{rank}(A) < \text{length}(A)$
- Két eset különböztethető meg
 - A b vektorral bővített A mátrix rangja nagyobb, mint az A mátrix rangja, azaz b nincs az A mátrix oszlopvektorai által meghatározott lineáris térben. Ekkor a szinguláris együttható-mátrixú egyenletrendszer **ellentmondásos**, és nincs megoldás.
 - Az A , ill. $[A \ b]$ mátrixok rangja megegyezik, de kevesebb az ismeretlenek számánál. Ilyenkor az egyenletrendszer **összefüggő**, és ennek végtelen sok megoldása van.
 - Azaz: egy vagy több ismeretlen szabadon megválasztható
- Mit lehet tenni? (megoldási lehetőségek)
 - Pontos megoldást nem kaphatunk, de törekszünk arra, hogy $\|Ax - b\|$ a lehető legközelebb legyen 0-hoz.
Megvalósítás Matlabban: $x = \text{pinv}(A)*b$ vagy $x = A \backslash b$
 - A végtelen sok megoldás közül egy speciálisat meghatározunk. Azt a mo.vektort szoktuk ilyenkor megadni, amelyik a legrövidebb vektorhosszú.
Megvalósítás Matlabban: $x = \text{pinv}(A)*b$ ($x = A \backslash b$ is ad mo-t, de nem a „legjobbat”)



Lineáris egyenletrendszerek

Szinguláris esetek (folyt.)

- Az esetek szétválasztása technikailag:
rank(A), rank([A b])

- Példa

```
>> A = [3 4 1; -1 2 5; 2 6 6], b = [18 8 8]', rank(A), rank([A b])
```

- Másik lehetőség: az eltolt rendszer vizsgálata; pl. 3x3-as eset:
rank([A(:,2:3) b]) vagy det([A(:,2:3) b])

- Összefüggő esetben az eltolt det == 0,
ellentmondásos esetben nem

- Ez a technika – determináns vizsgálattal – Excelben is jól alkalmazható, és persze nemcsak az első oszlop elhagyásával

- Esetszétválasztás példa és megoldás Excelben →

kész_új [kompatibilis üzemmód] - Microsoft Excel

F6: =NÉGYZETÖSSZEG(H2:H5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1								x	
2		2	-2	4	1	5		1	
3		2	2	-2	4	8		1	
4		4	1	2	-4	7		1	
5		8	1	4	1	20		1	
6								4	
7									
8	det(A)=	-1,06581E-14							
9									
10	det([A(:,2:4) b])=	0							
11									

kész_új [kompatibilis üzemmód] - Microsoft Excel

F6: =NÉGYZETÖSSZEG(H2:H5)

	G	H	I	J	K
1		x		Ax - b	
2		2,136678		-8,88178E-16	
3		0,726644		0	
4		0,358131		-2,66454E-15	
5		0,747405		-3,55271E-15	
6		5,780277			
7					



Lineáris egyenletrendszerek

Szinguláris esetek (folyt.)

- A megoldás vizsgálata az összefüggő esetben

```
>> A = [3 4 1; -1 2 5; 2 6 6], b = [18 8 26]', rank(A),  
rank([A b])  
>> w = A\b, A*w, norm(w)  
% balosztóval van eredmény, de figyelmeztetéssel (warning)  
>> y = pinv(A)*b, A*y, y_norma = norm(y)  
% a kváziinverzszel kapott megoldás (a leg)rövidebb  
vektorhosszú, nincs warning
```

- A független egyenletek számának lecsökkentése a rangig

```
>> A(3,:)=[], b(3)=[], rank(A), rank([A b])  
% töröljük az utolsó egyenletet  
>> z = A\b, A*z, z_norma = norm(z)  
% a balosztó is ad megoldást, a normája nem minimális  
>> x = pinv(A)*b, A*x, x_norma = norm(x)  
% a kváziinverzes megoldás a fent számolttal egyezik,  
normája minimális  
>> v = A'/(A*A')*b  
% ekkor a kváziinverzes megoldás így is számítható
```





Lineáris egyenletrendszerek

Túlhatározott eset

- (Logikailag tekinthetjük az ellentmondásos esethez tartozónak)
- Ilyenkor tipikusan több egyenletünk van, mint ismeretlen
 - (Pl. polinomiális interpoláció helyett alacsonyabb fokú regressziót kérünk)
- Az A mátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával, a kibővített $[A \ b]$ mátrix rangja pedig eggyel nagyobb
- Ekkor is azt a „megoldást” keressük, amelyre az $\|Ax - b\|$ normában mért eltérés minimális
- Megvalósítás Matlabban: $x = \text{pinv}(A)*b$ vagy $x = A \backslash b$
 - Ekkor valójában a Moore-Penrose kváziinverz (pseudoinverz) kiszámítása történik
 - Érdekes, hogy ekkor a balosztó a kváziinverzet adja!

Példa

```
>> A = [3 4 1; -1 2 5; 7 -2 3; 3 5 1], b = [18 8 32 6]'  
>> rank(A), rank([A b])  
>> x = A\b, pinv(A)*b, (A'*A)\A'*b  
% az utolsó a pseudoinverz (lásd korábban)  
>> [A*x b], tavolsag = norm(A*x-b)
```





Lineáris egyenletrendszerek

Nagyméretű lineáris egyenletrendszerek megoldási ideje – összehasonlítás

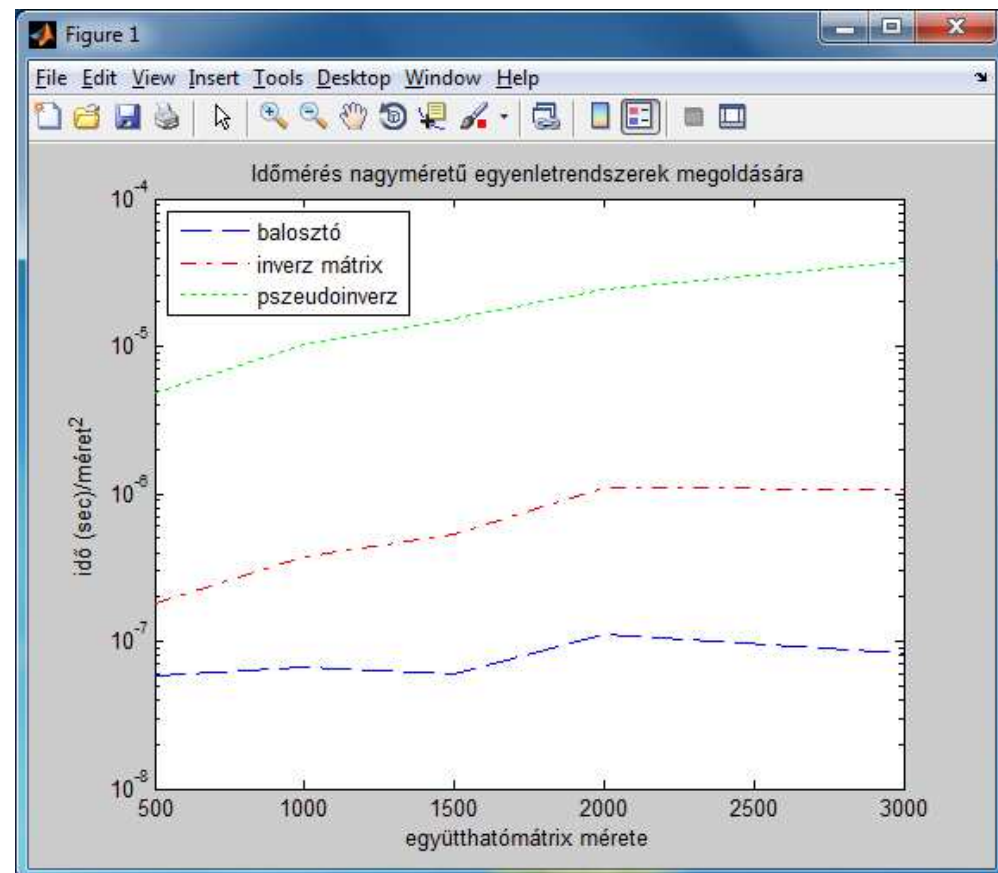
■ Időmérési példa

- Táblázat, ábra
- Teszteléshez:
Töplitz-mátrixok
- Időmérés az ismert módon
- Adatok most Excelből (vessző ...)

■ „Kulturált” (szép) ábra

- Különböző színek
- Különböző vonalstílusok (!)
- Az időadatok osztva n^2 -tel
- Fél-logaritmikus skálázás
- Jelmagyarázat
- Tengelyfeliratok

Méret/Végrehajtási idő (mp)	$A \setminus b$	$\text{inv}(A) * b$	$\text{pinv}(A) * b$
500×500	0,014702	0,044624	1,214775
1000×1000	0,066429	0,372239	10,342868
1500×1500	0,134975	1,185211	34,722225
2000×2000	0,449540	4,347214	96,005524
3000×3000	0,735710	9,694462	339,125561





Normák, kondíciósám

- A gyakorlatban a lineáris egyenletrendszer mátrixa és a jobb oldali konstansvektor általában nem pontosan ismert
 - Mérési (esetleg: leolvasási) hibák, kerekítési pontatlanságok stb.
- Fontos kérdés: a megoldás érzékenységének vizsgálata
 - Mennyire befolyásolja a megoldást, ha (kisebb mértékben) megváltoznak \mathbf{A} és \mathbf{b} elemei?
- Egyszerű megfontolás: az érzékenység erősen függ a konkrét rendszertől (!)
 - Ha \mathbf{A} szinguláris, akkor egyes \mathbf{b} vektorokra nincs megoldás, másokra végtelen sok lesz
 - Ilyenkor kis változás is nagyon jelentősen módosítja az eredményt
 - Másrészt, ha \mathbf{A} közel egységmátrix, akkor \mathbf{b} és \mathbf{x} is közel ugyanaz
 - Ilyenkor kis változások az eredményben is csak kis változást okoznak
 - A pivotálás hatásán is érdemes elgondolkodni...
- Rajzos példa: kis változásra nem érzékeny (jól kondicionált) és kis változásra nagyon érzékeny (rosszul kondicionált) lineáris egyenletrendszer kétdimenzióban





Normák, kondíciószám

- Egzakt mérőszám az érzékenységre: vektor- és mátrixnorma (kondíciószám)
- Definíció: a norma egy $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés, amely minden vektorra (mátrixra), ill. vektorpárra (mátrixpárra) teljesíti a következő tulajdonságokat
 - Definit(ség): nemnegatív, és csak akkor 0, ha a vektor nullvektor $\|x\| > 0$, ha $x \neq 0$ és $\|0\| = 0$,
 - Homogenitás: skalárszoros normája egyenlő a vektor normájával, \times a skalár abszolút értékével $\|c \cdot x\| = |c| \cdot \|x\|$, minden c skalárra,
 - Háromszög-egyenlőtlenség $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- Ezt a definíciót a vektorok, ill. mátrixok vektorterében többféle módon lehet teljesíteni
 - A bevezetett többféle norma azonban konvergens vektor- ill. mátrixsorozatokra ekvivalens (0-hoz tartó eltéréssorozat)
- Leggyakrabban használt vektor- ill. mátrixnormák (itt: vektorokra nézzük)
 - 1-es norma (Manhattan-norma)
 - 2-es norma (euklideszi távolság)
 - Hasonlóan: p-es (p-edik) norma
 - Végtelen norma (Csebisev-norma)
- Normák a Matlabban

```
>> x = (1:4)/5, norm1 = norm(x,1)
>> norm2 = norm(x), norminf = norm(x,inf)
```

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$





Normák, kondíciósám

- Ha egy x vektort megszorozunk egy A mátrixszal, akkor az új Ax vektor normája nagyon eltérhet x -től. Ez a változás mutatja azt az érzékenységet, amit keresünk

- A max és min itt minden $x \neq 0$ vektorra előállítandó

- Ha A szinguláris, akkor $m = 0$

$$M = \max \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad m = \min \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

- Az M/m hányadost nevezzük A kondíciósámának (szemléletes jelentés: kb. ennyiszeres hibát okozhat a zavar)

- A pontos érték (persze) függ a használt vektornormától, de elsősorban a nagyságrend fontos

- Mivel $M \geq m$, ezért nyilvánvaló, hogy $\kappa(A) \geq 1$

- Speciális mátrixok kondíciósáma

- $\kappa(E) = 1$, $\kappa(cA) = \kappa(A)$

- Diagonális mátrixokra: a $|\max|$ és $|\min|$ elemek hányadosa

$$\kappa(A) = \frac{\max \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\min \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

- A kondíciósám mátrixnormával is bevezethető

- Ekkor

- Azaz

$$\|A\| = \max \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad \|A^{-1}\| = \frac{1}{m}$$

- A Matlab beépített függvényei a számolás elvégzésére

- `cond(A) == cond(A, 2)`

- `cond(A, 1)`, `cond(A, inf)`, `rcond(A)` (becslés $1/\text{cond}(A, 1)$ -re)

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

- Példa

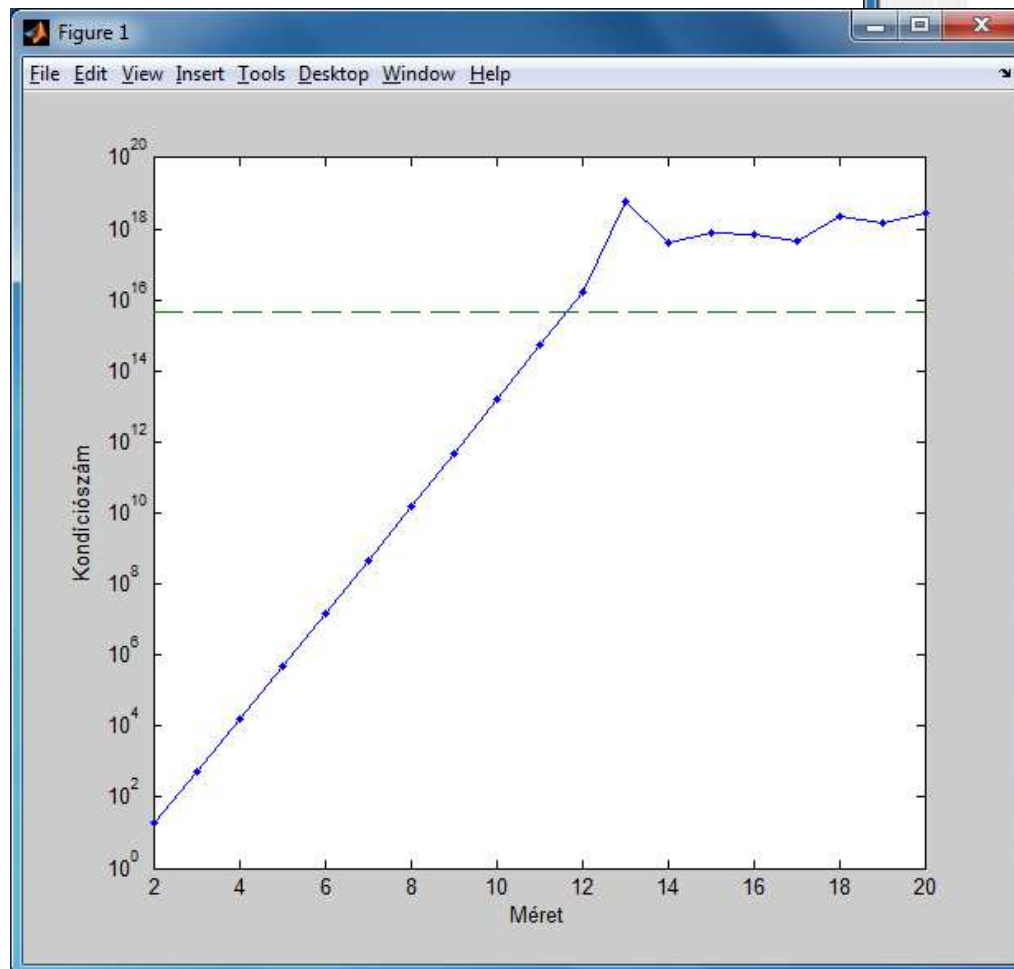
```
>> A=[4 5 6; 5 6 8; 1 7 7], norm(A)*norm(inv(A)), cond(A)
```

```
>> 1/(norm(A,1)*norm(inv(A),1)), rcond(A)
```



Kondíciósám

- Eml.: A Hilbert-mátrixok gyengén kondicionáltak (nagy cond értékek)
- Hilbert-mátrixok sorozatát vizsgáljuk (2-től 20-ig)
 - 12 felett pontatlan az eredmény



```
Editor - D:\Oktatás\Matlab-6\hilbert_kond.m

File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help

1  nmax = 20; invecs(1:nmax) = 1/eps;
2  H = hilb(nmax);
3  for n = 2:nmax
4      cond_h(n) = cond(H(1:n, 1:n));
5  end
6  semilogy(2:n, cond_h(2:n), '.-', ...
7           2:n, invecs(2:n), '--')
8  xlabel('Méret')
9  ylabel('Kondíciósám')
10
```



Sajátérték, sajátvektor

- Egy λ konstans és egy $x \neq 0$ vektort az **A** négyzetes mátrixhoz tartozó sajátértéknek (eigenvalue) és sajátvektornak (eigenvector) nevezzük, ha kielégítik az $A \cdot x = \lambda \cdot x$ egyenletet
 - (Ebben az esetben A csak nyújt)
 - Pontosán n db sajátérték van, és mindegyikhez legalább egy sajátvektor tartozik
- *Egy σ konstans és az $u, v \neq 0$ vektort az **A** négyzetes mátrixhoz tartozó szinguláris értéknek és szinguláris vektoroknak nevezünk, ha kielégítik az $A \cdot v = \sigma \cdot u$, és $A' \cdot u = \sigma \cdot v$ egyenleteket
 - Itt A' a szokásos konjugált-transzponált
- Megvalósítás Matlabban: eig (sajátérték), ill. svd (szing. érték) parancs
- *A kondíciószám felírható a legnagyobb és a legkisebb szinguláris érték hányadosaként is, és a szinguláris értékek pont $A' \cdot A$ sajátértékei
 - Példa

```
>> cond(A)
>> sqrt(max(abs(eig(A'*A))))/sqrt(min(abs(eig(A'*A))))
>> max(svd(A))/min(svd(A))
```
- A sajátérték/sajátvektor sok gyakorlati mérnöki feladat megoldásánál fontos szerepet játszik
 - Pl.: híd terheléspróbája, megnyúlások alapján rezonancia-frekvenciák számítása





Sajátérték, sajátvektor

- Egy A négyzetes mátrix sajátértékeit a karakterisztikus polinomjának a zérushelyei adják
 - Ezek a $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ megoldásával kaphatók meg
 - A sajátérték-egyenlet: $(A - \lambda \cdot E) \cdot x = 0$, $x \neq 0$
 - Komplex értékeket is kaphatunk (valós szimmetrikus esetben nem)
- A Matlabban a megoldásra egyszerűen a `poly`, ill. a `roots` parancs is használható
 - A `poly(A)` hívás egy sorvektort eredményez, elemei a karakterisztikus polinom együtthatói
 - A `roots` hívás a gyököket szolgáltatja
- Példa

```
>> A = [4 5 6; 5 6 8; 1 7 7], a = poly(A)
>> lambda = roots(a), poly(lambda)
```
- A megoldásra beépített „kincstári” függvény az `eig`
- Az `[U Lambda] = eig(A)` hívásnál az U mátrix oszlopvektorai az 1-re normált sajátvektorokat adják, a Λ mátrix főátlóbeli elemei pedig a sajátértékeket
- Példa

```
>> [U Lambda] = eig(A)
>> A*U, U*Lambda
>> U*Lambda*inv(U) % A-t kapjuk (sajátérték-felbontás)
% Nem szinguláris szimmetrikus mátrixra U*Lambda*U' is A-t adja
```





Sajátérték, sajátvektor

- Sajátérték-felbontás (eigenvalue decomposition)
 - Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ az A mátrix sajátértékei, legyenek x_1, x_2, \dots, x_n hozzájuk tartozó sajátvektorok
 - Helyezzük el a sajátértékeket az adott sorrendben egy Λ mátrix főátlójában, a sajátvektorokat pedig egy X mátrixban (a j -edik oszlopban legyen x_j)
 - Ekkor $A \cdot X = X \cdot \Lambda$
 - Ha a sajátvektorok független rendszert alkotnak (ez nem mindig igaz), akkor létezik X^{-1} , azaz $A = X \cdot \Lambda \cdot X^{-1}$
 - Ha a sajátérték-felbontás létezik, akkor A sok tulajdonsága Λ segítségével vizsgálható, pl. $A^n = X \cdot \Lambda^n \cdot X^{-1}$ teljesül
- *Szinguláris felbontás (singular value decomposition, SVD)
 - Mint az előbb, írjuk mátrixokba a szinguláris értékeket (Σ – csak a főátlóban vannak nem 0 elemek), és a megfelelő szinguláris vektorokat (U és V)
 - Ekkor $A \cdot V = U \cdot \Sigma$ és $A' \cdot U = V \cdot \Sigma'$
 - Itt U és V teljesíti: $U' \cdot U = E$, $V' \cdot V = E$ (ortogonálisak)
 - Egy mátrix ortogonális, ha az inverze megegyezik a transzponáltjával (lásd: linalg. öf.)
 - Ebből $A = U \cdot \Sigma \cdot V'$
 - A szinguláris felbontás nemcsak négyzetes A mátrixokra értelmezhető
- Megvalósítás a Matlabban a már ismert eig és svd parancsokkal



Sajátérték, sajátvektor

Példa (kis négyzetes mátrixra)

- Legyen $A = \text{gallery}(3)$
- Ekkor $\det(A - \lambda \cdot E) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$
- Így tehát a sajátértékek: 1, 2, 3


```
>> A = gallery(3)
>> a = poly(A), lambda = roots(a) % karakt. polinommal
>> B = sym(A), syms l, det(B-l*eye(3)) % szimbolikusan
```
- Sajátvektorok


```
>> [U L] = eig(A)
```
- U módosítható úgy, hogy (1,1) és (3,2) eleme 1 legyen, (3,3) eleme 9 legyen
 - Így egész koordinátájú sajátvektorok, $\det(U) = 1$
- Ekkor U inverze is egész elemeket tartalmaz, és $A = U \cdot L \cdot U^{-1}$

```
>> inv(U), U*L*inv(U)
```
- Szinguláris felbontás


```
>> [X, S, V] = svd(A)
>> X*S*V' % A szinguláris értékek között nagy a különbség!
```

```

>> A = gallery(3)
A =
    -149    -50   -154
     537    180    546
     -27     -9    -25
fx >>
  
```

```

>> U
U =
    1.0000   -4.0000   -7.0000
   -3.0000    9.0000   49.0000
   -0.0000    1.0000   -9.0000
fx >>
  
```



Sajátérték, sajátvektor

*Érzékenységi elemzés

- A sajátértékek érzékenysége a sajátvektor mátrix kondíciós számával becsülhető

■ Példa 1.

```
>> A = gallery(3)
>> [U L] = eig(A), cond(U)
% Itt még pontos választ kapunk
```

■ Példa 2.

```
>> A = gallery(5)
>> B = sym(A), det(B-lambda*eye(5))
% Ebből lambda_i = 0, pontos szimbolikus eredmény
>> [U L] = eig(A)
% Numerikus hibával terhelt eredmény
>> cond(U) % gyengén kondicionált
>> e = eig(A)
>> plot(real(e), imag(e), 'r*', 0, 0, 'ko')
>> axis(0.1*[-1 1 -1 1]), axis square
% az ötszög alakzat hiba
```

