



Matlab 2–3. előadás

Mátrixok, hivatkozások, műveletek

Dr. Szörényi Miklós,
Dr. Kallós Gábor

2017–2018





Tartalom

- Példa: mágikus mátrix
- Mátrixok létrehozása
 - Elemenkénti megadás, Variable editor használata
 - Összeállítás már létező mátrixokból
 - Beolvasás fájlból
- Mátrixok elemhivatkozásai
 - Egyetlen elem, több elem, összefüggő tartomány
- Műveletek mátrixokkal
 - Skalárműveletek
 - Összeadás, kivonás, szorzás, hatványozás
 - Osztás, mátrix inverze
 - Pszeudoinverz, bal- és jobbinverz
 - Logikai műveletek mátrixokkal
- Speciális/nevezetes mátrixok
- Mátrixmanipulációs függvények
 - Tükrözés, forgatás, átméretezés
 - Keresés, rendezés
- Scriptek, m-fájlok

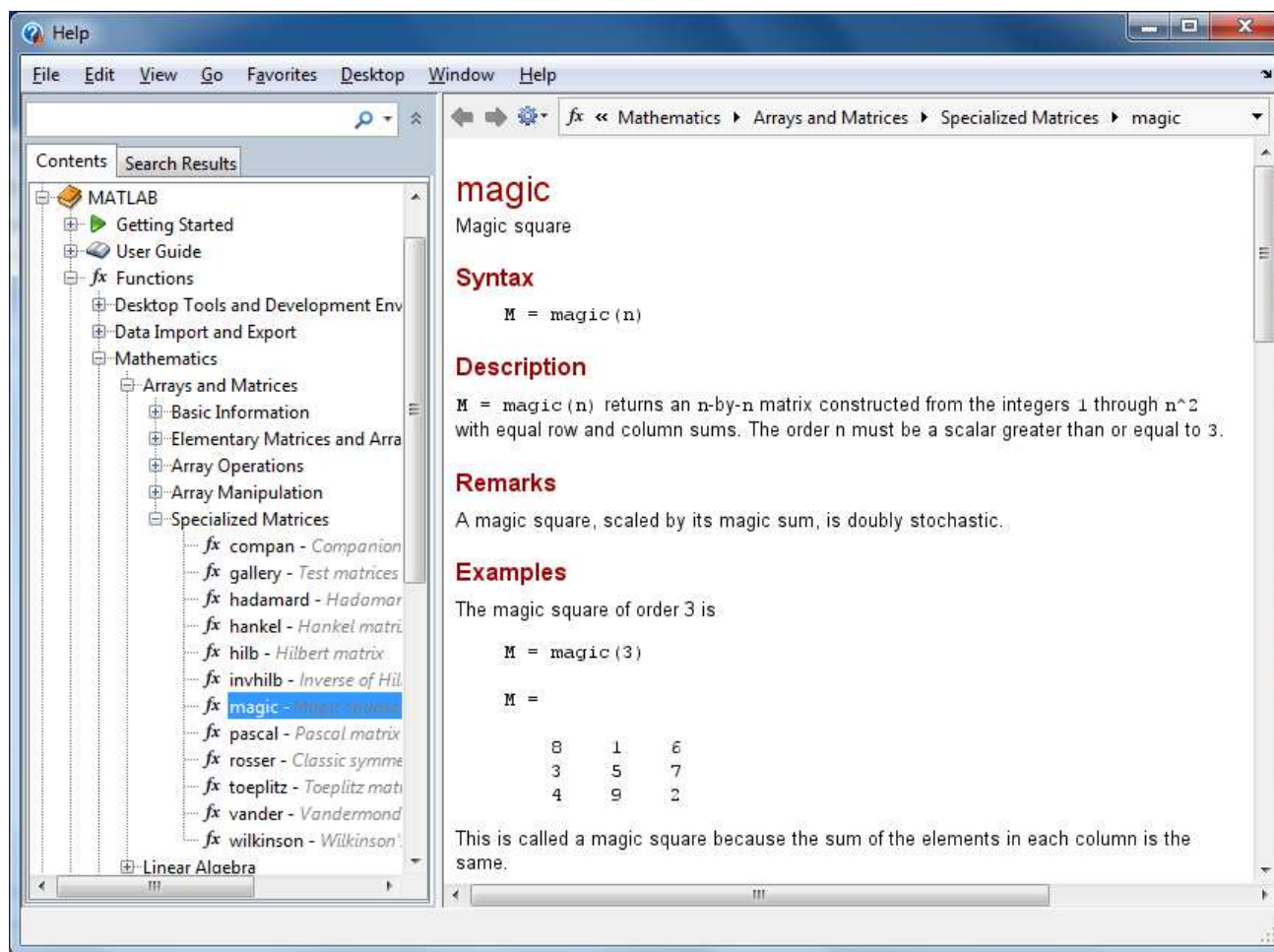


Mátrixok – bevezető

- Egy speciális $n \times n$ -es mátrix: a mágikus mátrix (beépített függvénnyel)
 - Poz. egész számokból épül fel (1-től n^2 -ig)
 - Elemeinek összege egy soron és egy oszlopon belül ugyanaz, és az átlókban is

- Példa

```
>> A = magic(4)
>> sum(A,1)
% oszlopok
összege
>> sum(A,2)
% sorok összege
>> sum(diag(A))
% főátló
>> sum(diag ...
(flipud(A)))
% antiátló
>> sum(1:16)
% magyarázat:
mágikus összeg
```



Mátrixok – bevezető*

- A 4×4-es mágikus mátrix Dürer rézkarcán (Melankólia)

```
>> load durer % lehet: whos
>> image(X)
% előtte lehet: load detail
>> colormap(map)
% beállítja a colormap
hozzárendelést (indexelt
képhez; lásd később)
>> axis image
```

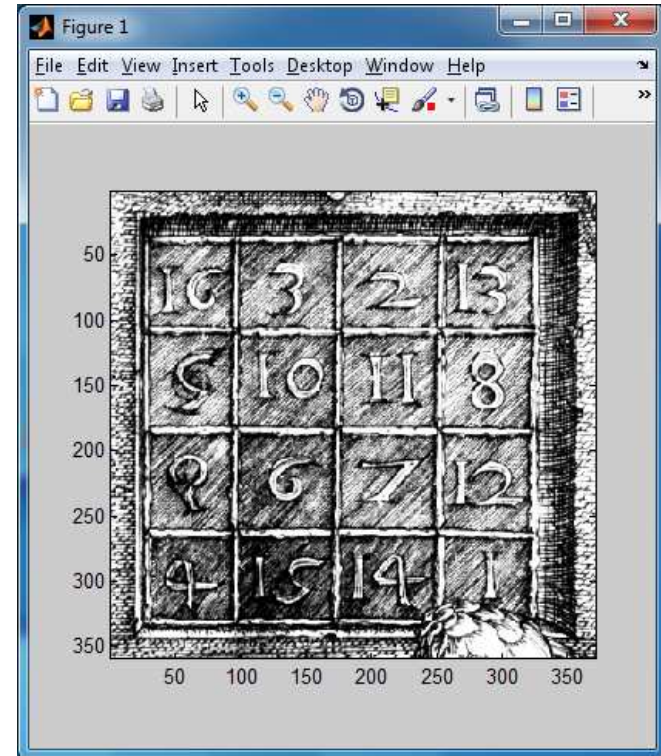
- Dürer mátrixa a Matlab mátrixából a középső két oszlop felcserélésével áll elő

```
>> A = A(:, [1 3 2 4])
% ez általában megváltoztatja az
átlók összegét!
```

- Feladat: Hány db különböző 3×3-as mágikus mátrix létezik? (Forgatások, tükrözések)
Állítsuk elő őket!

```
>> B = magic(3)
>> for k = 0:3
    rot90(B, k)
    rot90(B', k)
end
```

- *Feladat: Állítsuk elő az összes 4×4-es mágikus mátrixot (880 db)





Mátrixok létrehozása

Elemenkénti megadás

- Felsoroljuk az összes elemet
 - $n \times m$ -es mátrixok mellett sorvektorok és oszlopvektorok is ugyanígy megadhatók (transzponálás is használható)
 - Üres mátrix is képezhető
 - Az elemek szabállyal is leírhatók, így pl. a „:” operátor is használható
- Példák

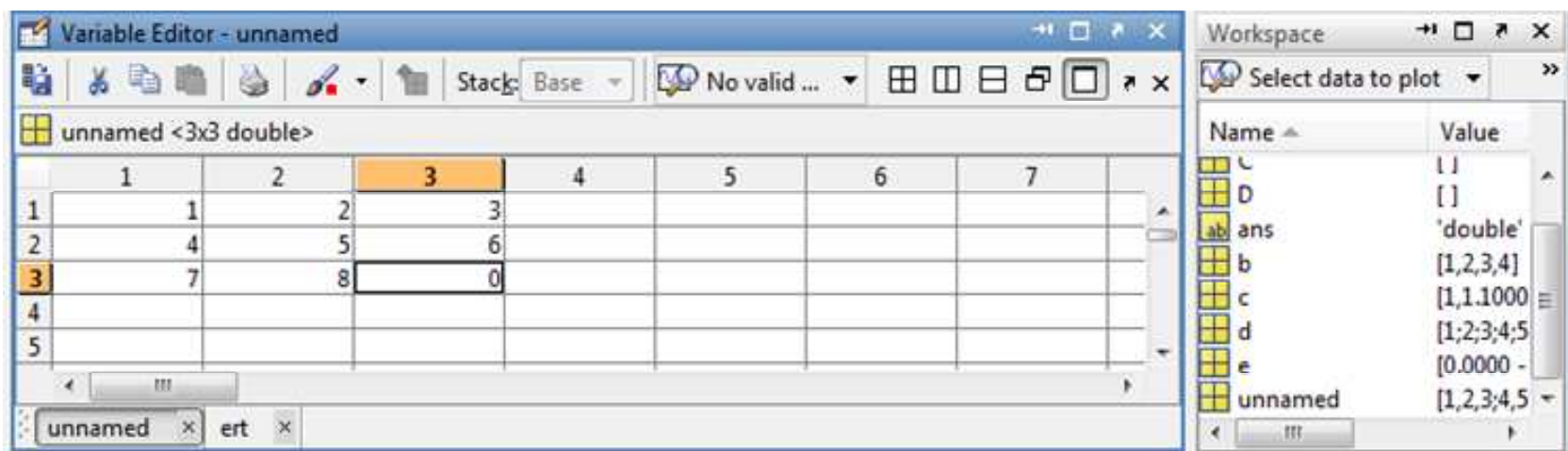
```
>> A = [1, 2; 3, 4], B = [1 2; 3 4 5]
% a méretmegadásnak konzekvensnek kell lenni
>> b = [1 2 3 4], c = [1 : 0.1 : 1.4], d = [1:0]
% sorvektorok, üres is lehet!
... d = 1×0 empty double row vector
>> d = [1; 2; 3; 4; 5], e = [1*i, -2*i, 3+i, 4-i, 5]'
% oszlopvektorok
>> C = [], d = [6:3]'
% üres mátrixok (0 sor, 0 oszlop, ill. 0 sor 1 oszlop)
```
- Típus- és méretjellemzők
 - Mátrix/vektor típusa az elemeinek a típusa (*class* fv.)
 - Mátrix/vektor méretei lekérdezhetők (*size* fv., *length* fv.)
- Kérdés:
 - Mi a fenti A mátrix típusa? Mi az eredmény, ha $A = [1, \text{uint8}(2); 3, 4]$?



Mátrixok létrehozása

Feltöltés a Variable Editor segítségével

- Workspace ablakban új objektum (Ctrl-N)
 - Egy „unnamed” mátrix keletkezik, kezdetben 0 számértékű és 1×1-es
 - Célszerűen: az unnamed mátrix átnevezendő
(Már elkészült mátrixok, vektorok is módosíthatók a Variable editorral)
- Variable editor megnyitás (dupla katt.)
- Adatok begépelése (módosítása)
 - Excel táblázat-szerű környezet
 - Egyszerű, barátságos kezelőfelület, szerény formázási támogatás is elérhető
- Mentés (ha szükséges)
 - .mat fájl keletkezik (kódolt formátum)





Mátrixok létrehozása

Összeállítás már létező mátrixokból

- „Építkezés” összeillesztéssel, figyelniük kell a megfelelő méretekre (!)

- Példa

```
>> A = [1, 2; 3, 4], B = [2.5 ; 4.5]
```

```
>> C = [A B]
```

```
% C mátrixra átöröklődik B megjelenítése
```

- Kérdés:

- Mit kapnánk a $C = [A; B]$ összeillesztésre?
 - Hogyan módosítsuk B-t, hogy helyes legyen az előző parancs?

- Létrehozás bővítéssel (mint fent)

- Példa

```
>> F = [A [10; 20]] % merge: oszlopokkal bővítés
```

```
>> G = [A; [10, 20]] % append: sorokkal bővítés
```

- Még nem létező indexű elemre vonatkozó értékadás is bővíti a mátrixot

```
>> A(3, 3) = 7 % Nézzük meg az új A mátrixot!
```

- Ugyanígy teljesen új mátrix is létrehozható

```
>> H(3:4, 5) = [11; 22]
```

```
% ha egy elem nem kap értéket, automatikusan 0 lesz
```

- Felépítés darabolással

```
>> D = A(1:2,1) % vagy: D = A(:,1), teljes részhev.
```





Mátrixok létrehozása (beolvasás)

Beolvasás ...

- ... szöveges fájlból (csv, txt, ...)
 - Példa (lineáris egyenletrendszer megoldása)

```
>> load Ab.csv, Ab
% az egyenletrendszer teljes 3x4-es táblázata
>> A = Ab(:, 1:3), b = Ab(:, 4)
% kiemeljük/létrehozzuk az A és b mátrixokat
>> x = A\b, A*x
% megoldjuk az egyenletrendszert, ellenőrzés
```
- ... Excel munkafüzetből (xlsread)
 - Az első lapról olvasunk, ill. a munkafüzetnek egyetlen lapja van
 - A bal felső sarokban találhatóak az adatok:

```
>> A = xlsread('adatok.xls')
```
 - A munkafüzetnek több lapja van, és résztartományból olvasunk
 - A 2. füzetlapról olvasunk:

```
>> A = xlsread('minta_kész1.xls', 2, 'B3:E6')
```
 - Nevesített füzetlapról olvasunk:

```
>> b = xlsread('minta_kész1.xls', '2.feladat', 'G3:G6')
```





Mátrixok elemhivatkozásai

■ Egyetlen elem

- Szintaktika: $A(s_ind, o_ind)$, ill. $A(sorszám)$ (oszlopfolyt.); vektorokra hasonlóan
- Példa 1.

```
>> A = ones(4), A(2, 3) = 8  
% csak a 2. sor 3. eleme változik, A(10) = 8 is jó lenne  
(bármely elem változásakor a rdsz. kiírja a teljes mátrixot)  
>> A(5, 2) = 10  
% mint korábban, az 5. sorral bővül, minden nem definiált  
elem 0 lesz
```
- Példa 2. (sorvektor)

```
>> a(1) = []  
% első elem fizikai törlése, a vektor mérete eggyel csökken!
```

■ Több elem, összefüggő tartomány

- Sorvektor

```
>> a = [4, 7, 2, 1, 8, 3], a(2:4) = 0  
% több elemre értékadás egyetlen értékkel -> mind ez lesz  
>> a([5, 6]) = [10, 20]  
% több elemre több értékkel, az elemszámoknak egyezni kell!  
■ Kérdés: mi történne, ha három különböző értéket adnánk meg az utolsó példában?
```





Mátrixok elemhivatkozásai

- Több elem, összefüggő tartomány (folyt.)
 - Oszlopvektor

```
>> a = [4; 7; 2; 1; 8; 3], a(2:4) = 0, a(5:6) = [10, 20]
```

```
% oszlopvektor esetén nem kell ' jelet használni (de lehet)!
```
 - Összefüggő tartomány (részmátrix), szintaktika:
Teljes sor // `A(s_ind, :)`
Teljes oszlop // `A(:, o_ind)`
Részmátrix // `A(s_ind_1:s_ind_2, o_ind_1:o_ind_2)`

```
>> P = pascal(6)
```

```
>> P(1:2, [5:6]) = zeros(2)
```

```
% a jobb felső sarok (2x2-es rész) nullázódik
```

```
% itt a P([1:2], 5:6) hivatkozás is jó! (a többi változat is)
```
 - Részek másolása, felülírása

```
>> P(:, 3:7) = P(:, 2:6)
```

```
% 2-6 oszlopok eltolása a 3-7 oszlopokba (sorokra ugyanígy)
```

```
(nem veszünk értéket, a mátrix mérete nő)
```
 - Részek törlése – mátrixból fizikailag csak teljes sor vagy oszlop törölhető!

```
>> P(:, 2) = 0
```

```
% 2. oszlop nullázása
```

```
>> P(2, :) = []
```

```
% 2. sor fizikai törlése
```





Mátrixok elemhivatkozásai

- Komplex vektorok/mátrixok is ugyanígy kezelhetők

- Példa 1.: komplex sorvektor létrehozása és több lépéses bővítése

```
>> z = 5*exp(i*[0:pi/4:pi]')
```

```
% 45 fokoskénti komplex számok (lépésköz)
```

```
>> z = [z z*exp(i*pi)]
```

```
% merge, 180 fokkal elforgatottakkal bővítés
```

```
>> z = [z; z]
```

```
% append, saját  
magával való bővítés
```

- Példa 2.: komplex
oszlopvektor létrehozása
egész vektorokból

```
>> a = uint8([1;2;3;4]);
```

```
b = uint8([2;2;7;7]);
```

```
z = complex(a, b)
```

```
% complex parancs:  
konverzió
```

```
Command Window

>> z = 5*exp(i*[0:pi/4:pi]')
z =
    5.0000
    3.5355 + 3.5355i
    0.0000 + 5.0000i
   -3.5355 + 3.5355i
   -5.0000 + 0.0000i
>> z = [z z*exp(i*pi)]
z =
    5.0000           -5.0000 + 0.0000i
    3.5355 + 3.5355i   -3.5355 - 3.5355i
    0.0000 + 5.0000i   -0.0000 - 5.0000i
   -3.5355 + 3.5355i    3.5355 - 3.5355i
   -5.0000 + 0.0000i    5.0000 - 0.0000i
fx >> |
```





Műveletek mátrixokkal (operátorok)

Skalárműveletek

- A mátrix minden elemén (elemenként) végrehajthatódnak
 - Kivéve: mátrix hatványozása, ld. lent
- Összeadás, kivonás

```
>> A = [1, 2; 3, 4]
>> A + 2
```

 - $A + s = s + A$ érvényes
- Skalárral való szorzás

```
>> A*0.5
```

 - A művelet pontozott változata is végrehajtható (ugyanaz)
 - $A*s = s*A$ érvényes
- Skalárral való osztás
 - Mint a szorzás
- Hatványozás
 - Négyzetes mátrix esetén – esetleg ismételt – mátrixszorzás hajtható végre (ott nézzük meg; pl. A^3)
 - A művelet pontozott változata is végrehajtható (elemenként hatványoz), nem kell, hogy négyzetes legyen a mátrix

```
>> A.^2
```

```
Command Window
>> x=0:0.2:1
x =
    0    0.2000    0.4000    0.6000    0.8000    1.0000
>> y=x.*x
y =
    0    0.0400    0.1600    0.3600    0.6400    1.0000
>> y=x.^2
y =
    0    0.0400    0.1600    0.3600    0.6400    1.0000
fx >>
```





Műveletek mátrixokkal

Összeadás, kivonás

- Csak azonos méretű mátrixok/vektorok adhatók össze, vagy vonhatók ki!
 - Méreteltérésnél: hibaüzenet
- $A +$ illetve $-$ művelet elempáronként hajtódik végre!
 - Nincs pontozott művelet, azaz $.+$ vagy $.-$ nem írható! (hibát kapunk)
- Példa

```
>> A = ones(2,3), A2 = A + A, A1 = A2 - A
>> B = [1 2 3 4] + [5, 6, 7, 8]
```

Transzponálás

- A *transzponálás* főátlóra tükröz és komplex esetben konjugál is
 - Azaz tdk.: az oszlopok és a sorok felcserélődnek
 - Tudjuk: oszlopvektor transzponáltja sorvektor és fordítva

```
>> x = [0:0.1:1]'
```
 - Jelölés: A' vagy A^*
- Pontozott formában csak transzponál, konjugálás nincs

```
>> T = exp(i*[0:pi/3:pi]')
>> T1 = T'
>> T2 = T1.'
```





Műveletek mátrixokkal

Szorzás

- Mikor végezhető el a művelet?
 - Rajzoljunk... (gondoljuk végig)
 - Méretszabályok: $[m; n] \times [p; q] \rightarrow [m; q]$ és $n = p$ (első méret: sorok száma)
- (A mátrixok szorzása „nagyon nem kommutatív” művelet)
 - Előfordulhat, hogy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ végrehajtható, de $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ nem; lehet az is, hogy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- Matlabban: „sima” * operátor
 - Méreteltérésnél: hibaüzenet
- Példa

```
>> ones(2,3)*ones(3,4)      % összeszorozható, méret 2x4 lesz
>> ones(3,2)*ones(4,3)      % hibaüzenet jön:
??? Error using ==> mtimes
Inner matrix dimensions must agree.
```
- Pontozott szorzás: azonos méretű mátrixok megfelelő elempárjai szorzódnak

```
>> S = 2*ones(2,3), R = [1:3; 4:6], Q = S.*R
```

Hatványozás

- Csak négyzetes mátrixokra, a pontozott változat is használható; példa:

```
>> A = [1 2; 2 1], A_2 = A^2, A_3 = A^3, A3 = A.^3
>> E = eye(3), n = [0.6 0.8 0], P = E - n'*n
% projektormátrix (vetítés)
>> P^2, P^7 % projektormátrix akárhányadik hatványa is P
```





Műveletek mátrixokkal

Osztás, mátrix inverze

- Inverz mátrix (csak *négyzetes mátrixokra*)
 - Az a mátrix, amelyet az eredetivel összeszorozva egységmátrixot kapunk
 - Jelölés: $\mathbf{A}^{-1}$
 - Érvényes: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$
 - Egységmátrix: a főátlóban csupa 1-es, más helyeken 0-ák
 - Jelölés: $\mathbf{E}$ vagy $\mathbf{I}$
 - Az egységmátrixra teljesül: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$; $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}$
 - Előállításuk Matlabban: *inv*, ill. *eye* parancs
 - Elmélet: Inverz akkor létezik, ha a *determináns nem 0*, illetve a mátrix rangja megegyezik a sorainak (oszlopainak) számával
- Mátrixszal való osztás: tdk. inverzzel történő szorzás
 - Elm.: Az egyenletrendszer $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ alakban adott, és ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$, azaz $\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$
- Ha a determináns 0, vagy a mátrix nem négyzetes, akkor csak a Moore–Penrose-féle pszeudoinverz határozható meg egyértelműen
 - (Ez valamilyen értelemben optimális tulajdonságú)



Műveletek mátrixokkal

Osztás, mátrix inverze (folyt.)*

- A Moore–Penrose-féle kváziinverz előállításának bemutatása
 - Ha több (n) sor van mint (m) oszlop ($n > m$), akkor a kváziinverz:

$$(A' \cdot A)^{-1} \cdot A'$$
 - Ennek mérete $m \cdot n$, azaz A' méretével egyezik meg
 - Excelben:
`{=Mszorzat(Inverz.mátrix(Mszorzat(Transzponálás(A); A)); Transzponálás(A))}`
 - Ha kevesebb (n) sor van mint (m) oszlop ($n < m$), akkor a kváziinverz:

$$A' \cdot (A \cdot A')^{-1}$$
 - Ennek mérete is $m \cdot n$, azaz A' méretével egyezik meg
 - Excelben:
`{=Mszorzat(Transzponálás(A); Inverz.mátrix(Mszorzat(A; Transzponálás(A))))}`
- Példa Excelben
 - Most négyzetes a mátrixunk, és a valódi inverz is létezik
- A Matlab is elő tudja állítani a kváziinverz mátrixot (*pinv* parancs, lásd lent)

Microsoft Excel screenshot showing matrix calculations for a 3x3 matrix A.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			A		b		A ⁻¹			
2										
3		2	2	0	6		-0,25	-0,5	1	
4		1	1	2	9		0,75	0,5	-1	
5		2	1	1	7		-0,25	0,5	0	
6										
7		det(A)		4		ellenőrzés				
8										
9		x = A ⁻¹ b		1		Ax		6		
10				2				9		
11				3				7		
12										
13										
14	A*	2	1	2		AA*	8	4	6	
15		2	1	1			4	6	5	
16		0	2	1			6	5	6	
17										
18	(AA*) ⁻¹	0,6875	0,375	-1		A*(AA*) ⁻¹	-0,25	-0,5	1	
19		0,375	0,75	-1			0,75	0,5	-1	
20		-1	-1	2			-0,25	0,5	0	
21										



Műveletek mátrixokkal

Osztás, mátrix inverze (folyt.)

- A Matlabban van balosztó \ és jobbosztó / művelet is
 - Tehát megoldhatók megfelelő mátrixegyenletek, és meghatározható egy/a bal- és jobbinverz (ha léteznek)
 - Magyarázat →

■ A Matlabban ...

- ... $A \backslash B$ eredménye egy olyan X , amelyre $AX = B$ (ha $B = E$, akkor $A \backslash E$) ...
 - (A és B sorainak száma ekkor kötelezően azonos)
- ... A/B eredménye egy olyan Y , amelyre $YB = A$ (ha $A = E$, akkor E/B) ...
 - (A és B oszlopainak száma ekkor kötelezően azonos)
- ... és érvényes $B/A = (A \backslash B)'$ (ha léteznek)

■ Példa 1.

```
>> A = [1 2; 3 4], B = [5 4; 3 2], C = A \ B
>> A * C % ellenőrzés, ez valóban B
>> C * A % ez viszont már nem B-t adja
```

■ Példa 2.

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6] % 3x2-es, rangja 2
>> J = A \ eye(2) % jobbinverz létezik
>> B = eye(3) / A % balinverz nem létezik!
```

■ Példa 3.

Ha egy mátrixnak egyszerre létezik bal- és jobbinverze, akkor azok megegyeznek, és a mátrix ilyenkor négyzetes (lásd gyakorlat)

Nem négyzetes mátrixok [szerkesztés | forrásszöveg szerkesztése]

A nem négyzetes mátrixok nem invertálhatóak, de létezhet bal- vagy jobbinverzük. Ha az A $n \times m$ -es mátrix rangja n , akkor létezik egy B mátrix, hogy $BA = I$. Ez a B mátrix A balinverze. Hasonlóan, ha az A $n \times m$ -es mátrix rangja m , akkor létezik egy B mátrix, hogy $AB = I$. Ez a B mátrix A jobbinverze.

A Moore-Penrose pszeudoinverz értelmezhető nem négyzetes mátrixokra és nem teljes rangú esetre is. Ennek néhány tulajdonsága megegyezik az inverz tulajdonságaival, és nem szinguláris négyzetes mátrix pszeudoinverze a mátrix inverze.



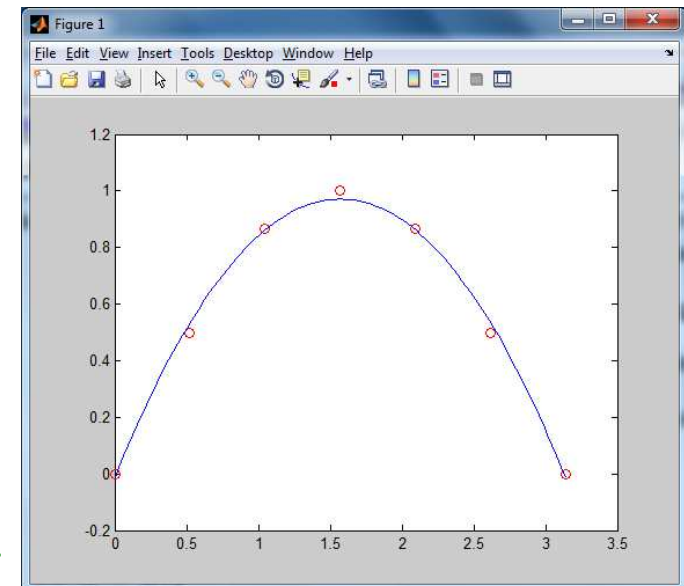
Műveletek mátrixokkal

Osztás, mátrix inverze (folyt.) – alkalmazási példa*

- Gyakori feladat, hogy olyan egyenletrendszert kell megoldani, ahol több az egyenletek száma, mint az ismeretleneké
 - Például a polinomiális regressziónál több síkbeli pont közé legjobban illeszkedő alacsonyabb fokszámú polinomot kell illeszteni
 - Ekkor a megoldandó túlhatározott egyenletrendszer együtthatómátrixa egy Vandermonde mátrix (ld. később) utolsó pár oszlopa

- Pl. illesszünk a sin fv. első félperiódusának 30 fokenkénti pontjaihoz parabolát (másodfokú függvényt)!

```
>> x = 0:pi/6:pi, y = sin(x)
% a 7 darab pont a sin függvénnnyel
>> A = vander(x), A(:, [1:4]) = []
% Vandermonde mátrix utolsó 3 oszlopa
>> c = A\y'
% a másodfokú regressziós polinom együtthatói
>> w = 0:pi/100:pi; f = polyval(c, w);
% polinom pontsorozata (kiértékelés)
>> plot(x,y, 'or', w,f, '-') % rajzolás
```





Műveletek mátrixokkal

Logikai műveletek mátrixokra

- Függvénnnyel mindig, de általában operátorral is megvalósíthatók (1-2 kivétel)
- Az $A = [5 \ -2; \ 4 \ 3]$ és $B = [2 \ 4; \ 4 \ -2]$ mátrixokra megnézzük a műveletek eredményét →
- Példa: *any* és *all*
 $\gg A = [5 \ 2 \ 1; \ 2 \ 6 \ 0; \ 1 \ 0 \ 4],$
 $a1 = all(A),$
 $an = any(A)$

	$all(A)$	hasnolón működik, mint az $any()$ értékelés művelete: mind nem 0?	1 1
--	----------	--	-----

Logikai operátor	Függvénnnyel	Jelentés	Eredmény
$==$	$eq(A,B)$	egyenlő	0 0 1 0
$<$	$lt(A,B)$	kisebb	0 1 0 0
$>$	$gt(A,B)$	nagyobb	1 0 0 1
$<=$	$le(A,B)$	kisebb, vagy egyenlő	0 1 1 0
$>=$	$ge(A,B)$	nagyobb, vagy egyenlő	1 0 1 1
$\sim$	$ne(A,B)$	nem egyenlő	1 1 0 1
$\&$	$and(A,B)$	elemenkénti logikai ÉS	1 1 1 1
$ $	$or(A,B)$	elemenkénti logikai VAGY	1 1 1 1
$\sim$	$not(A)$	elemenkénti logikai tagadás	0 0 0 0
	$xor(A,B)$	logikai kizáró VAGY	0 0 0 0
	$any(A)$	vektorra: van-e benne nem 0? mátrixra: oszlopokon értékeli ugyanazt, sorvektort ad	1 1





Műveletek mátrixokkal

Logikai műveletek mátrixokra (folyt.)

- Speciális eset: logikai műveletek skalárookra (részben már tanultuk)
- A *true* és *false* előre definiált (védett) változók; értékük 1 ill. 0
 - De: felüldefiniálhatók! (Törlés: `clear`; tudjuk)

Logikai operátor	Jelentés
<code>~</code>	numerikus érték logikai tagadása
<code>&&</code>	logikai ÉS (skalárookra)
<code> </code>	logikai VAGY (skalárookra)

- Érdekesebb példák

```
>> ~2018, ~0
```

% nem 0 érték tagadása: 0, a 0 tagadása: 1

```
>> 2018 && 1526, 2018 && false, 0 || 2018
```

% Szerepük: vezérlő szerkezetekben (*if*, *while*, ...)

- A *find* függvénnyel (paranccsal) később foglalkozunk

```
Command Window
>> 2014 && 1526, 2014 && false, 0 || 2014
ans =
     1
ans =
     0
ans =
     1
fx >> |
```





Speciális mátrixok

Beépített parancsok speciális mátrixokra (vektorokra)

■ Alapmátrixok

- $n \times n$ -es ($n \times m$ -es) egységmátrix: `eye(n)`, ill. `eye(n, m)` vagy `eye(méret, típus)`
- ... csupa egyes mátrix: `ones(n)`, ill. `ones(n, m)` [típussal is]
- ... csupa nulla mátrix: uaz, csak `zeros` paranccsal
- ... csupa igaz és hamis mátrix: `true(n)`, ill. `true(n, m)` [false is]

■ Sorozatok

- Lineáris sorozat, sorvektor: `linspace(mettől, meddig, mennyi)`
 - Transzponálással oszlopvektor
- 10-es alapú logaritmikus léptékezésű sorozat (dekádok): `logspace`

■ Nevezetes mátrixok

- Pascal-háromszög (négyzetes elrendezés, Pascal-mátrix): `pascal(n)`
- Hilbert-mátrix: `hilb(n)`
- Vandermonde-mátrix: `vander(vektor)`
- Mágikus mátrix: `magic(n)`
- Gallery mátrixai: `gallery('mátrixnév', paraméterek)`

■ Egyéb csoportok

- Véletlenszámok: `rand(méretek)`, `randi(határok, méretek)`, `randn(méretek)`
- Diagonálmátrixok: `diag(v)`, `diag(v, k)`, `diag(X)`, `diag(X, k)`
 - Vektorral és mátrixszal is dolgozhatunk





Speciális mátrixok

Példák

■ Alapmátrixok

```
>> eye(2), eye(2, 3), eye(size(A), 'int16')  
% itt A mérete: 3x3  
>> zeros(2), zeros(2, 3), zeros(size(A))  
>> ones(2), ones(2, 3), ones(size(A))  
>> true(3, 2), false(2, 3)
```

■ Sorozatok

```
>> fi = linspace(0 , 2*pi , 181); kor = exp(i*fi);  
plot(kor), axis square  
>> x = logspace(1, 2, 51), y = log10(x), w =  
exp(log(10)*y)  
% mérnököknek frekvenciaátmenethez
```

```
Command Window  
>> A = ones(3,8)  
A =  
     1     1     1     1     1     1     1     1  
     1     1     1     1     1     1     1     1  
     1     1     1     1     1     1     1     1  
>> B = false(2,5)  
B =  
     0     0     0     0     0  
     0     0     0     0     0  
fx >> |
```





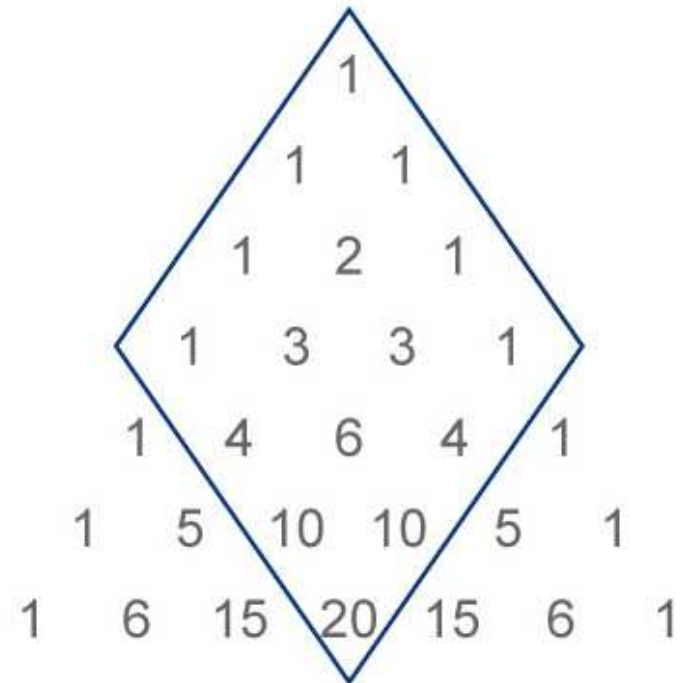
Speciális mátrixok

Példák (folyt.)

- Nevezetes mátrixok

- Példák

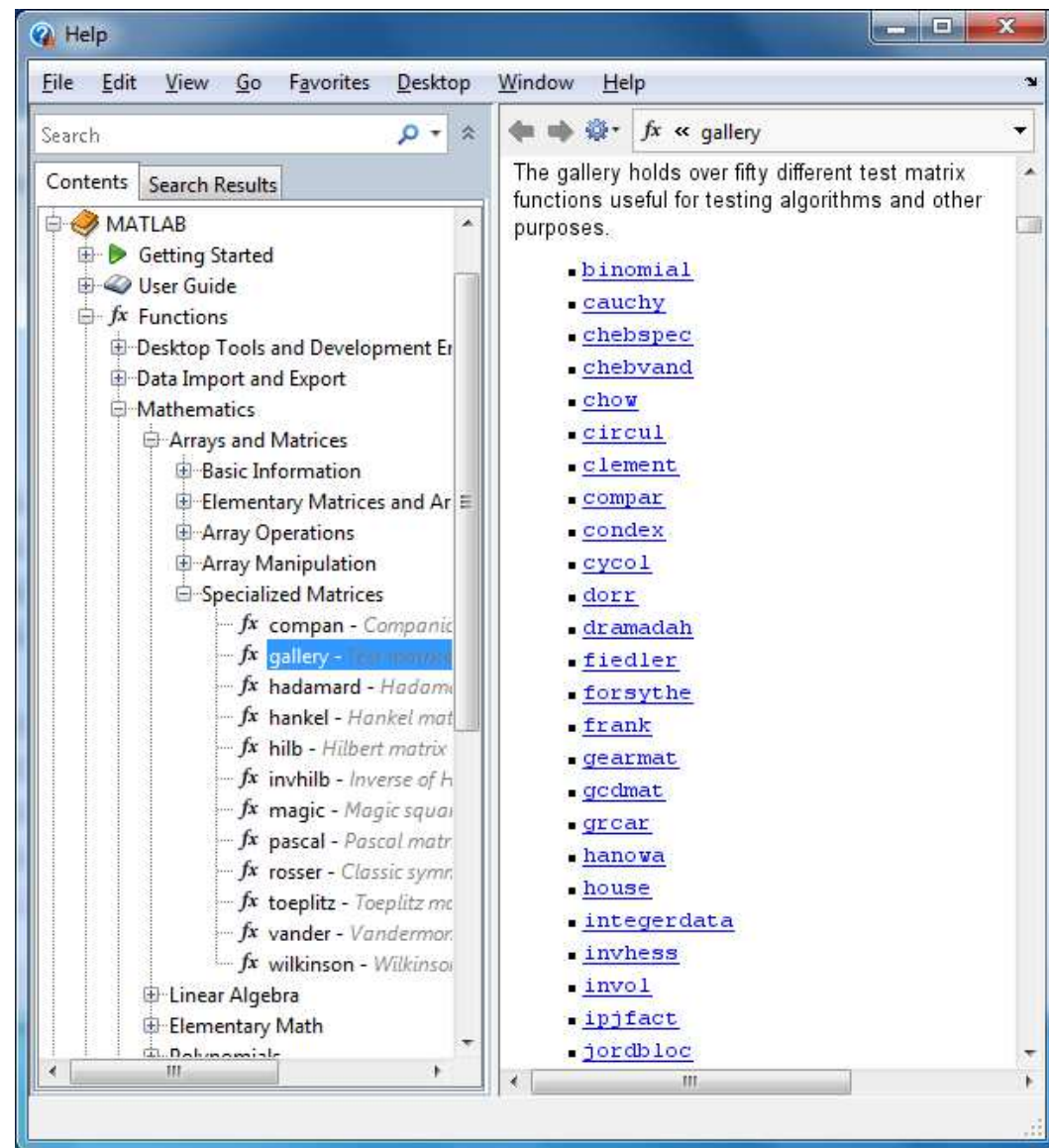
```
>> P6 = pascal(6)
% balról jobbra felfelé menő átlókban a bin. eh-ók
>> P6L = sym(pascal(6,1))
% a Cholesky-felbontás alsó háromszög mátrixa*
>> P6U = P6L', P6L*P6U % előáll a Pascal-mátrix
>> inv_P6 = inv(P6U)*inv(P6L), inv_P6*P6
>> det(P6), det(inv_P6)
% az eredeti és az inverz
determinánsa egyaránt 1
>> vander(1:0.5:3)
% oszlopokban a vektor
pontosított hatványai
>> H = hilb(5), rats(H),
invhilb(5), invhilb(5)*H
% H(i,j) = 1/(i+j-1)
% Hilbert-mátrix és inverze
```



Speciális mátrixok

Példák (folyt.)

- Nevezetes mátrixok/2.
`>> M4 = magic(4),
sum(M4), sum(M4'),
sum(diag(M4)),
sum(diag(flipud(M4))))`
 % sor- és
 oszlopösszegek,
 főátló-összeg,
 antiátló-összeg
 egyeznek
`>> n = 4, A =
gallery('binomial',n),
A*A/(2^(n-1)),
B = A*2^((1-n)/2), B*B`
 % B egy involutórius
 mátrix (inverze saját
 maga)*

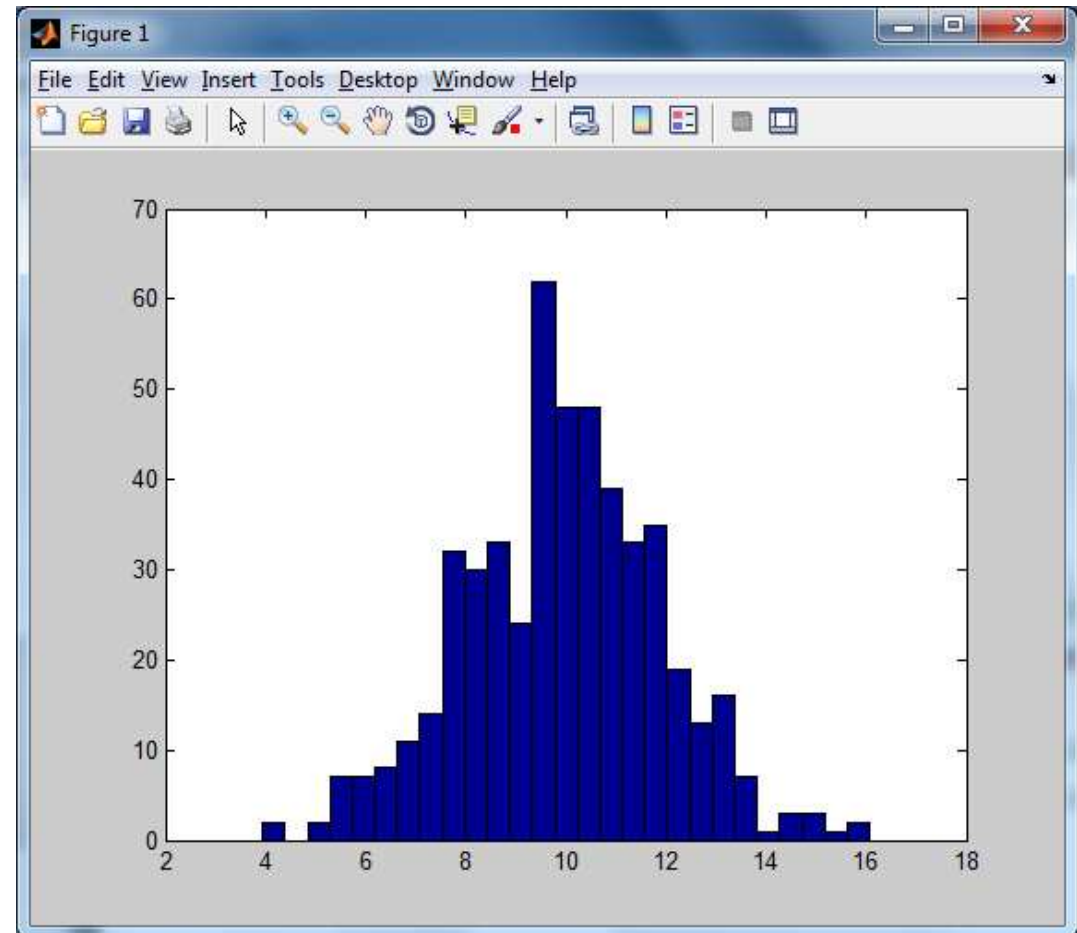




Speciális mátrixok

Példák (folyt.)

- Egyéb csoportok (véletlenszámok)
>> uniform = rand(1,6)
% [0..1)-beli hatelemű sorvektor
>> lotto =
randi([1,90], 1, 5)
% lottószámok (de:
azonosak is lehetnek
köztük)
>> norm = 10.0 +
2.0*randn(1,500),
mean(norm), std(norm),
hist(norm, 27)
% 500 elemű normális
eloszlású sorvektor,
% 10.0 várható értékkel
és 2.0 szórással
% hisztogram 27
részintervallummal





Speciális mátrixok

Példák (folyt.)

- Egyéb csoportok (folyt.)

Diagonálmátrixok: $\text{diag}(v)$, $\text{diag}(v, k)$, $\text{diag}(X)$, $\text{diag}(X, k)$

- ```
>> X = diag(lotto), X_2 = diag(lotto, -2),
Y = rand(4), v = diag(Y)', v1 = diag(Y, 1)'
```

  
% v - sorvektor, X - mátrix, k - mellékátló sorszám  
(negatív is lehet!)

```
Command Window
>> X = diag(lotto), X_2 = diag(lotto, -2), Y = rand(4); v = diag(Y)', v1 = diag(Y, 1)'
X =
 26 0 0 0 0
 0 50 0 0 0
 0 0 87 0 0
 0 0 0 87 0
 0 0 0 0 15
X_2 =
 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0
 26 0 0 0 0 0 0
 0 50 0 0 0 0 0
 0 0 87 0 0 0 0
 0 0 0 87 0 0 0
 0 0 0 0 15 0 0
v =
 0.3947 0.3309 0.4299 0.8085
v1 =
 0.0196 0.8217 0.3968
fx >>
```



## Mátrixmanipulációs függvények

- Mátrix tükrözése (függőlegesen, vízszintesen):  
*flipdim*(mátrix, dimenzió), *flipud*(A), *fliplr*(A)
  - Példák

```
>> A = [1:4; 5:8; 9:12; 13:16], flipdim(A, 1),
flipdim(A, 2), flipud(A), fliplr(A)
% A parancsok párosával ekvivalensek
% Itt: l, r, u, d irányok
```
- Mátrix forgatása 90 fokonként balra: *rot90*(mátrix, hányszor)
  - Példák

```
>> rot90(A), rot90(A, 2), eredeti = rot90(A, 4)
% végül körbeérünk
```
- Mátrix körkörös shiftelése: *circshift*(mátrix, mennyivel)
  - Példák

```
>> A = [11:15; 21:25; 31:35; 41:45; 51:55]
>> circshift(A, 1), circshift(A, -2)
% függőleges shiftelés
>> circshift(A, [0 1]), circshift(A, [0 -2])
% vízszintes shiftelés
```





## Mátrixmanipulációs függvények

### ■ Átméretezés

- Adott sor/oszlopvektor ( $n \times m$  elem) a Matlab rendszerben  $n \times m$ -es (ill.  $m \times n$ -es) mátrixszá alakítható át (*reshape*)
- Példa

```
>> v = [1 2 3 4 5 6]
>> A = reshape(v, 3, 2)
>> A = reshape(v, 2, 3) % Figyeljük a méreteket!
```
- Feladat: próbáljuk ki ezt úgy is, hogy v oszlopvektor! Mi változik?

### ■ Rendezések

- Vektor rendezése: *sort(v)*, *sort(v, 'descend')*  
% itt v sor, vagy oszlopvektor

```
>> v = randi([10 99], [1 6]),
[rendezett, index] = sort(v, 'descend'), v(index)
% rendezett == v(index) !!
```
- Mátrix oszlopainak rendezése: *sort(X)*, *sort(X, 'descend')*

```
>> X = rand(3), sort(X)
```
- Feladat: mátrix sorainak rendezése





## Mátrixmanipulációs függvények

### Keresés

- A *find* (logikai) paranccsal kereshetünk adott értékű elemeket (és indexeiket)
  - Nem nulla elemek (*alapértelmezés!*), példa

```
>> A = [1 0 2; 0 1 1; 0 0 4]
>> k = find(A), A(k) % indexek és elemek, ~A-val nullák
```
  - Adott értékű elemek (relációval)

```
>> M = magic(4)
>> k = find(M<10, 6) % első 6 jó elem (csak indexek)
```
  - Valós értékeknél tolerancia szükséges

```
>> x = 0:0.1:1;
>> k = find(x==0.3) % így nem találja meg!
>> k = find(abs(x-0.3) < 0.001) % így már OK
>> x(4)==0.3 % ellenőrzés
```
  - Logikai és kapcsolat megvalósítása

```
>> [row,col] = find(M>4 & M<10, 3)
% a jó elemek indexei
>> M(row(1),col(1)) % az első jó elem
```





## Mátrixmanipulációs függvények

### Keresési feladat (M. D.)

#### ■ Feladat

- Adott egy vektor és két határ. Logikai indexelés és a *find* parancs segítségével határozzuk meg a határok közé eső vektorértékeket és indexeiket.

#### ■ Megoldás

- ```
>> x = [0.5 0.8 0.9 1.1 5 10.2];  
>> also = 0.7; felso = 1.2;  
% megadás, vektor és határok  
>> indexek1 = (x > also) & (x < felso)  
% a jó elemek indexei (2-4) logikai vektorban  
>> indexek2 = find(indexek1)  
% a jó elemek indexei számvektorban  
>> ertekek1 = x(indexek1)  
% értékek kiírása (logikai indexelés, log. vektorból)  
>> ertekek2 = x(indexek2)  
% értékek kiírása (konkrét indexekkel)
```
- Figyeljük meg a logikai indexelést!



Mátrixmanipulációs függvények

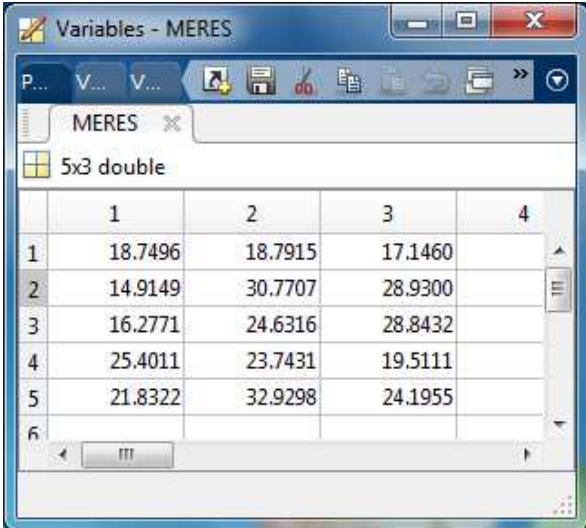
Mérési feladat (M. D.)

■ Feladat

- Adott egy mátrix, amely 5 db hőmérs.szenzor mérési eredményeit tartalmazza °C-ban (3 mérés, nálunk vél.számok).
A szenzorok 15 és 30°C közötti tartományra vannak kalibrálva, ezért az ezen kívüli értékeket hibásnak tekintjük.
- Adjuk meg minden egyes szenzorra, hogy a 3 mérésből hány volt hibás! Melyek azok a szenzorok, amelyek legalább kétszer jó értéket mértek?

■ Megoldás

- ```
>> MERES = 10+25*rand(5,3)
>> also_hibah = 15; felso_hibah = 30;
% megadás és határok, alap: 0 és 25 közötti vél. számok
>> MERES((MERES < also_hibah) | (MERES > felso_hibah)) = 0
% hibás értékek 0-ra felülírva, vagy kapcsolat
>> szenzor_hibaszam = sum(MERES == 0 , 2)
% hibás mérések száma szenzoronként (soronkénti szum)
>> jo_szenzorok = find(szenzor_hibaszam < 2)
% legalább két jó méréssel rendelkező szenzorok
```



|   | 1       | 2       | 3       | 4 |
|---|---------|---------|---------|---|
| 1 | 18.7496 | 18.7915 | 17.1460 |   |
| 2 | 14.9149 | 30.7707 | 28.9300 |   |
| 3 | 16.2771 | 24.6316 | 28.8432 |   |
| 4 | 25.4011 | 23.7431 | 19.5111 |   |
| 5 | 21.8322 | 32.9298 | 24.1955 |   |
| 6 |         |         |         |   |





## Mátrixmanipulációs függvények

Fontosabb egyszerű függvények (kiértékelés, feldolgozás)

- (Megj.: *később is* tanulunk még róluk)
- Összegzés (*sum*), már ismerjük
  - Soronként, oszloponként (eml.: mágikus mátrix)
- Aritmetika: *diff*, *mod*, *rem*, *round*, *floor*
  - Példa

```
>> x = [0.5 0.8 0.9 1.1 5 10.2];
>> round(x), floor(x)
```
- Statisztika: *min*, *max*, *bounds*, *mean*, *median*, *std* stb.
  - Példa

```
>> [S L] = bounds(x) % alsó és felső
>> min(magic(2)) % oszloponként
>> min(min(magic(2)))
```
- Elemi matematika (trigonom., hatvány és logaritmus)
  - Példa

```
>> x=0:0.1:1.6
>> sin(x) % radián
>> sind(x) % fok!
```





## Parancsok mentése, m-fájlok

### Diary és Command History

- A Matlabnak szóló és végrehajtott parancsainkat szöveges fájlba menthetjük
  - Kiterjesztésük célszerűen .m vagy .txt
- Naplófájl használata
  - diary on – bekapcsolja a parancsablakbeli kommunikáció rögzítését
  - diary off – lezárja a kommunikáció rögzítését
  - *Az elkészült fájl szövegszerkesztővel szerkeszthető, majd menthető*
- Command History
  - Az ablakban a rögzített parancsokból *kijelölhetjük a mentendőket* (Ctrl + egér klikk)...
  - ... majd a helyzetérzékeny menüben a *Create M-file (Create Script)* választással menthetjük is (pl. parancsok.m névvel)
    - Ezzel már egy script keletkezik
  - Példa →

```
Editor - Untitled3*
E... P... V...
1 load durer
2 image(X)
3 colormap(map)
4 axis image
script Ln 1 Col 1
```





## Parancsok mentése, m-fájlok

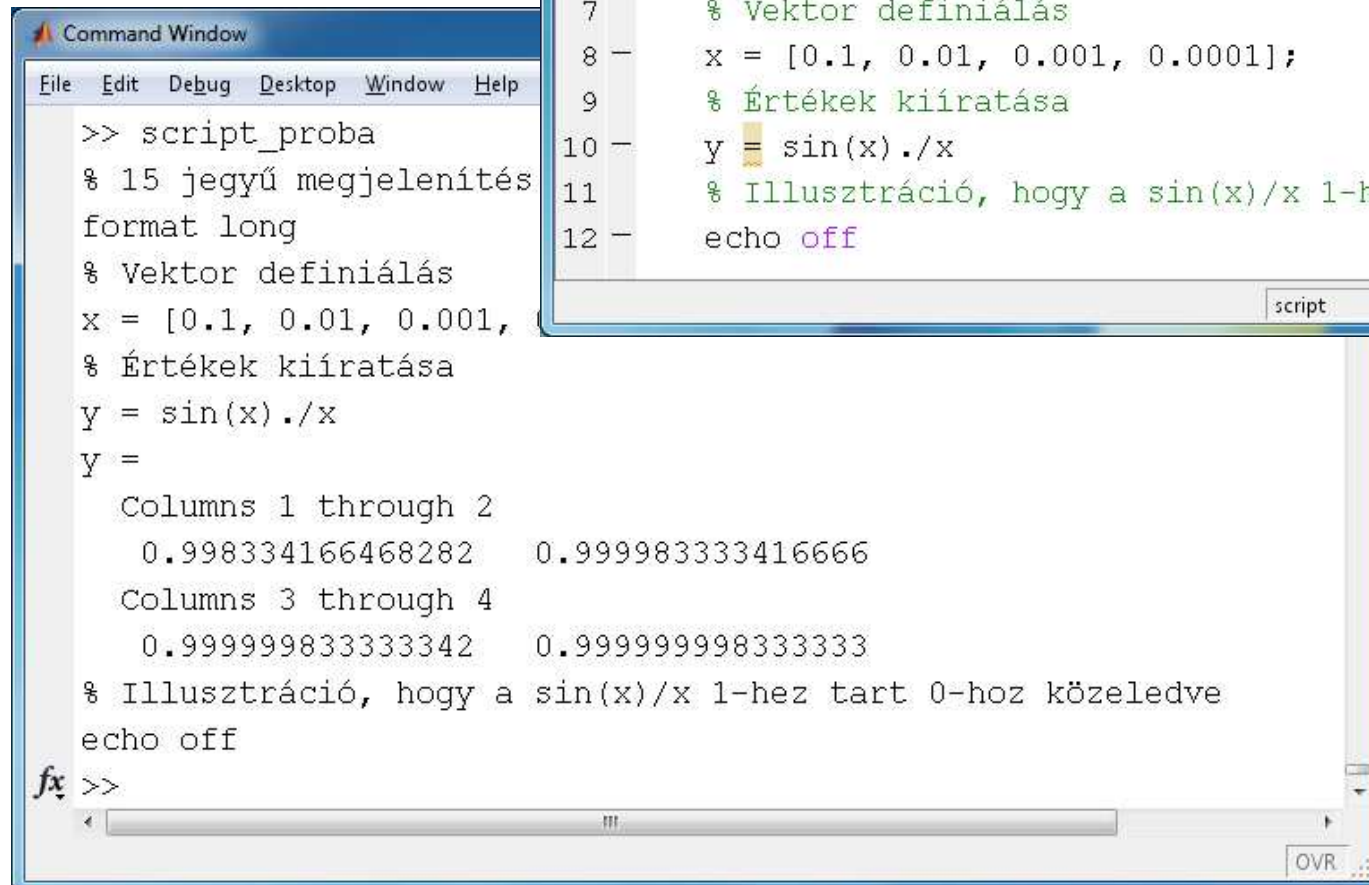
### Scriptek és felhasználói függvények (m-fájlok)

- Script: parancsok szekvenciális sorozata
  - A scriptnek nincs kimenő paramétere (v.ö.: function m-fájl)
    - Bemenő lehet
  - Javasolt az Editor ablakban szerkeszteni (File/New/Script v. Blank m-file)
  - Neve ne kezdődjön számmal, kerülendő a „-” (kötőjel) és a „ ” (szóköz); kiterjesztése .m
  - Kommentek írhatók bele a „%” után
  - Újabb Matlab verziók (2013-tól): formázási lehetőségek, section, paragraph stb., live scriptek
- Function m-fájl (felhasználói függvény): mint a script, csak bemenő és kimenő paraméterrel (több is lehet)
  - Híváskor szükséges a paraméterek helyes megadása és az eredmények megnevezése (!)
  - Később tanuljuk
- Az aktuális könyvtárban lévő *m-fájl a vezetéknévének begépelésével lefuttatható*



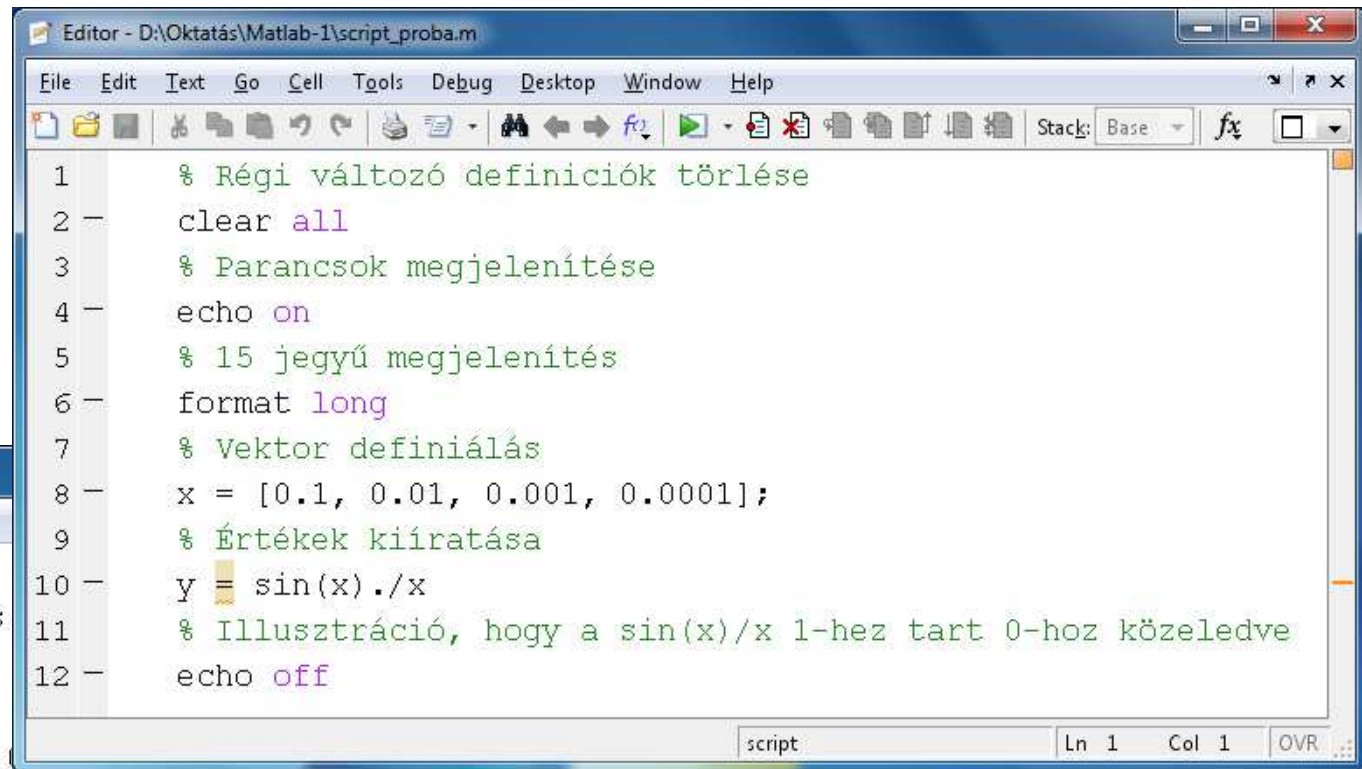
## Scriptek

- Egyszerű script példa, kiírással
  - File/Save (mentés)



The screenshot shows the MATLAB Command Window with the following output:

```
>> script_proba
% 15 jegyű megjelenítés
format long
% Vektor definiálás
x = [0.1, 0.01, 0.001, 0.0001];
% Értékek kiíratása
y = sin(x)./x
y =
Columns 1 through 2
 0.998334166468282 0.999983333416666
Columns 3 through 4
 0.999999833333342 0.999999998333333
% Illusztráció, hogy a sin(x)/x 1-hez tart 0-hoz közeledve
echo off
fx >>
```



The screenshot shows the MATLAB Editor window with the following source code:

```
1 % Régi változó definíciók törlése
2 clear all
3 % Parancsok megjelenítése
4 echo on
5 % 15 jegyű megjelenítés
6 format long
7 % Vektor definiálás
8 x = [0.1, 0.01, 0.001, 0.0001];
9 % Értékek kiíratása
10 y = sin(x)./x
11 % Illusztráció, hogy a sin(x)/x 1-hez tart 0-hoz közeledve
12 echo off
```

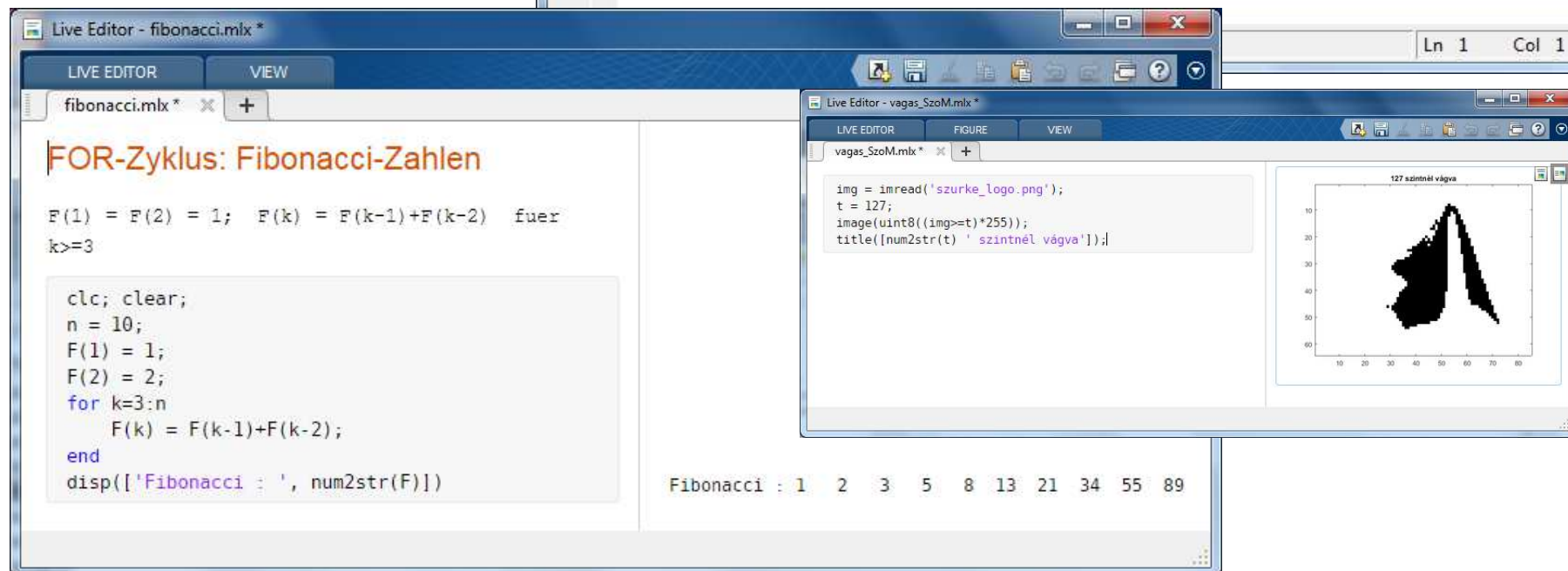
## Scriptek

- Live scriptek
  - Az eredmény bemutatásával
  - A kiírásra általánosan a *disp* használható; pl. *disp(3)*
  - Kül. típusú adatok együttes kezelésére szövegtípust (akár konverzióval, pl. *num2str*) kell alkalmazni

```

1 %% FOR-Zyklus: Fibonacci-Zahlen
2 % F(1) = F(2) = 1; F(k) = F(k-1)+F(k-2) fuer k>=3
3 clc; clear;
4 n = 10;
5 F(1) = 1;
6 F(2) = 2;
7 for k=3:n
8 F(k) = F(k-1)+F(k-2);
9 end
10 disp(['Fibonacci : ', num2str(F)])

```





## Ajánlott irodalom

- Könyvek magyarul
  - Stoyan Gisbert szerk.: Matlab (frissített kiadás), Typotex, Budapest, 2008.
  - Kallós – Pusztai – Szörényi: Számítási módszerek, Universitas-Győr Kft, Győr, 2016.
- Könyvek angolul
  - Hunt – Lipsman – Rosenberg: A Guide to Matlab, Cambridge University Press, 2001.
  - Cleve B. Moler: Numerical Computing with Matlab, SIAM, 2004.
- Internetes anyagok
  - Mathworks oldal, Cleve B. Moler oldala
  - Tantárgy weboldala
  - Más Matlab kurzusok oldalai (pl. PPKE, Mészéna D.)

