

12. előadás

Egyenletrendszerek, mátrixok

Dr. Szörényi Miklós,
Dr. Kallós Gábor

2015–2016



Tartalom

- Matematikai alapok
- Vektorok és mátrixok megadása
 - Tömbkonstansok
- Lineáris műveletek
- Mátrixok szorzása
- Inverz mátrix, determináns
 - Egységmátrix
- Transzponált mátrix
- Lineáris egyenletrendszerek
 - Egyértelmű megoldás
 - Összefüggő és ellentmondásos esetek
 - *Kváziinverz



Matematikai alapok

- Lineáris tér
 - Halmaz, ennek elemein (vektorok) értelmezve van az összeadás a nyújtás művelet, és ezekre a halmaz zárt
- Vektorok, lineáris műveletek (összeadás, nyújtás, lineáris kombináció)
- Függetlenség és összefüggőség
- Lineáris tér bázisa, dimenzió
- Lineáris transzformáció
 - Mátrix, mint a lineáris transzformáció számtáblázat reprezentációja
- Oszlopvektor, sorvektor
- Mátrix transzponáltja
- Mátrixok szorzása
- Determináns, inverz mátrix, egységmátrix
 - Egy (négyzetes) mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det \neq 0$
- Vektor norma (hossz általánosítása, ld. Pitagorasz-tétel)



Vektorok és mátrixok megadása

- Begépeléssel, hivatkozással
 - Figyeljünk a méretekre (sor, oszlop struktúra; a tartomány téglalap alakú)
 - Üres cellát ne hagyjunk
- Tömbkonstansként (tömbállandóként)
 - Sorok zárása pontosvesszővel, elemek elválasztása \ ill. pont jellel (Excel 10 és 03)
 - Példa: {1\2\3;4\5\6} (Excel 2010) ill. {1.2.3;4.5.6} (Excel 2003)
 - Gondos kijelölés és kitöltés (gyakran: vágólap, akár külső fájlból), befejezés: Ctrl + Shift + Enter
 - (A sikeres bevitelt a szerkesztőlécen is ellenőrizhetjük)
 - Tömbrészt nem módosítható!
- Elnevezés
 - Célszerű (figyeljünk a védett nevekre)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		1	2	3				
3		4	5	6				
4		7	8	9				
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								

a kijelölt blokkra = {1\2\3;4\5\6;7\8\9} és Ctrl+Shift+Enter

Egyszerű (lineáris) műveletek

- Megvalósításuk Excelben kézenfekvő
 - Összeadás, kivonás (+, −)
 - Konstanssal történő szorzás (*)
 - Lineáris kombináció meghatározása (pl. lin. összefüggőség vizsgálata)
 - Elnevezés használható
- A műveletek végrehajthatók elemenként és blokkművelettel is

linalg [kompatibilis üzemmód] - Microsoft Excel

Fájl Kezdőlap Beszúrás Lap elrendezése Képletek Adatok Korrektúra Nézet

A18 fx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		2	4	1			0	1	0				
2	A =	0	5	3		B =	1	-1	5				
3		1	1	2			2	3	4				
4													
5		2	5	1			2	3	1			Összevonás	
6	A + B =	1	4	8		A - B =	-1	6	-2				
7		3	4	6			-1	-2	-2				
8													
9		6	12	3			6	12	3			Nyújtás	
10	3A =	0	15	9		3A =	0	15	9				
11		3	3	6			3	3	6				
12													
13													
14		elemenkénti				blokkművelettel							
15		végrehajtás				1 eredménytömb kijelölése							
16						2 képlet begépelés							
17						3 Ctrl + Shift + Enter							

Mátrix (elméleti összefoglaló) Lineáris művelet

Kész 110%

Mátrixok szorzása

- Mikor végezhető el a művelet?
 - Rajzoljunk...
 - Méretszabályok: $[m; n] \times [p; q] \rightarrow [m; q]$ és $n = p$ (első méret: sorok száma)
 - Mindig gondoljuk végig, hogy a művelet elvégezhető-e, és pontosan jelöljük ki az eredménymátrix területét!
- (A mátrixok szorzása „nagyon nem kommutatív” művelet
 - Előfordulhat, hogy $A \cdot B$ végrehajtható, de $B \cdot A$ nem; lehet az is, hogy $A \cdot B \neq B \cdot A$)
- Megvalósítás Excelben: Mszorzat függvény
 - Argumentumok: az összeszorozandó mátrixok
 - Nem összeszorozható méretek esetén: hibaérték (#ÉRTÉK!, #HIÁNYZIK!)
 - Beszúrás: (csak) tömbfüggvényként!

linalg [kompatibilis üzemmód] - Microsoft Excel

Fájl Kezdőlap Beszúrás Lap elrendezése Képletek Adatok Korrektúra Nézet

A8 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2																
3			2	0	-1			2	-1	2		0	-3	6		
4		A=	3	6	2		B=	-2	0	4		2	-1	26		
5			0	3	4			4	1	-2		10	4	4		
6																

Inverz Szorzat Vektoriális szorzat Forgatás Forgatás adott tengeli

Kész 110%

Inverz mátrix, determináns

- Determináns (eml.): *négyzetes* mátrixokhoz tartozó mennyiség, amely a lin. függetlenséget/összefüggőséget jellemzi (n -dimenziós térfogat)
- Meghatározás Excelben: Mdeterm függvény
 - Ez nem tömbfüggvény
 - (Ha nem négyzetes mátrixra hívjuk: #ÉRTÉK! hiba)
- Inverz mátrix (csak négyzetes mátrixokra)
 - Az a mátrix, amelyet az eredetivel összeszorozva egységmátrixot kapunk
 - Jelölés: $\mathbf{A}^{-1}$
 - Érvényes: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$
 - Egységmátrix: a főátlóban csupa 1-es, más helyeken 0-ák
 - Jelölés: $\mathbf{E}$ vagy $\mathbf{I}$
 - Az egységmátrixra teljesül: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$; $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}$
 - Inverz akkor létezik, ha a *determináns nem 0*
 - Ezt mindig ellenőrizni kell (!)
- Megvalósítás Excelben: Inverz.mátrix függvény
 - Beszúrás: (csak) tömbfüggvényként!
 - (Ha 0 det-ú mátrixra hívjuk: #SZÁM! hiba)
 - Pontos értékek megjelenítése: valóditört-formátum, a determináns jegyeinek a száma alapján

Inverz mátrix, determináns

linalg [kompatibilis üzemmód] - Microsoft Excel

Fájl Kezdőlap Beszúrás Lap elrendezése Képletek Adatok Korrektúra Nézet

K26 fx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		2	4	1			0	1	0					
2	<u>A</u> =	0	5	3		<u>B</u> =	1	-1	5					
3		1	1	2			1	0	5					
4														
5														
6	det <u>A</u> =	21				det <u>B</u> =	0				Determináns			
7														
8	<u>A</u> · <u>B</u> =	5	-2	25		det(<u>A</u> · <u>B</u>)=	0							
9		8	-5	40										
10		3	0	15										
11														
12	<u>A</u> ⁻¹ =	0,33	-0,33	0,33		<u>A</u> ⁻¹ · <u>A</u> =	1	3E-16	0					
13		0,14	0,14	-0,29			0	1	0					
14		-0,24	0,10	0,48			0	0	1					
15														
16														
17						<u>B</u> ⁻¹ =	#SZÁM!	#SZÁM!	#SZÁM!					
18	det <u>A</u> ⁻¹ =	0,0476					#SZÁM!	#SZÁM!	#SZÁM!					
19							#SZÁM!	#SZÁM!	#SZÁM!					
20							#SZÁM!	#SZÁM!	#SZÁM!					
21	det <u>A</u> ⁻¹ ·det <u>A</u> =	1												
22														
23														

Ha az egyik tényező determinánsa 0, akkor az eredményé is az.

Inverz

Gépi epsilon nagyságrendje, gyakorlatilag 0
Ilyen cella célszerű egyéni számformátuma:
[<-1e-14]-Normál;[> 1e-14]Normál;0

Ha egy négyzetes mátrix determinánsa 0, akkor az inverze nem létezik!

Mátrix (elméleti összefoglaló) Lineáris műveletek Inverz Szorzat

Kész

Transzponált

- Transzponált mátrix: a mátrixot tükrözzük a főátlóra (tdk.: felcseréljük a sorokat és az oszlopokat)
 - Így pl. sorvektorból oszlopvektor lesz
- Jelölés: A^*
- Megvalósítás Excelben: Transzponálás (tömb)fv.
 - Itt is ki kell jelölni a beszúrás előtt a tartományt

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2																
3			2	0	-1			2	-1	2			0	-3	6	
4		A=	3	6	2		B=	-2	0	4		A·B=	2	-1	26	
5			0	3	4			4	1	-2			10	4	4	
6																
7																
8			0,667	-0,111	0,222			0,167	0,000	0,167		(A·B) ⁻¹ =	0,167	-0,056	0,111	
9		A ⁻¹ =	-0,444	0,296	-0,259		B ⁻¹ =	-0,500	0,500	0,500			-0,389	0,093	-0,019	
10			0,333	-0,222	0,444			0,083	0,250	0,083			-0,028	0,046	-0,009	
11																
12																
13																
14												B ⁻¹ ·A ⁻¹ =	0,167	-0,056	0,111	
15													-0,389	0,093	-0,019	
16													-0,028	0,046	-0,009	
17																
18			2	3	0			2	-2	4		(A·B) [*] =	0	2	10	
19		A [*] =	0	6	3		B [*] =	-1	0	1			-3	-1	4	
20			-1	2	4			2	4	-2			6	26	4	
21																
22																
23																
24		Szorzat inverze =										B [*] ·A [*] =	0	2	10	
25													-3	-1	4	
26													6	26	4	
27		Szorzat transzponáltja =														
28																



Lineáris egyenletrendszerek

- Az egyenletrendszer $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ alakban adott
 - Együtthatómátrix, ismeretlen vektor, konstans vektor
- Ha a feladatot nekünk (kézzel) kell megoldani, pl. a Gauss-eliminációt használhatjuk
- Géppel két (numerikus) megoldási módot is követhetünk
- Először az inverz mátrixos módszert tanuljuk meg
- Átalakítás:
Ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor
 $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$, azaz $\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$
- Így megkapjuk az egyenletrendszer *egyértelmű* (!) megoldását
- Ez pontosan akkor teljesül, ha ugyanannyi egyenlet van, ahány ismeretlen
 - Továbbá az egyenletrendszer lineárisan független (és ellentmondásmentes)
- Megvalósítás Excelben: a fentieknek megfelelően haladunk végig a lépéseken (már ismert apparátus)
 - A determináns ellenőrzése kulcslépés!
 - Végül célszerűen végezzünk ellenőrzést! (Biztosan jó eredményt kaptunk-e?)
 - $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, ill. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}$ hibavektor kiszámolása



Lineáris egyenletrendszerek

Egyértelmű megoldás

linalg [kompatibilis üzemmód] - Microsoft Excel											
F25 fx											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	$2x+3y-z = -1$		2	3	-1		x		-1		$A \cdot u = b$
2	$x-y+z = 0$		1	-1	1	.	y	=	0		
3	$7x-9y-5z = 16$		7	-9	-5		z		16		$u = A^{-1} \cdot b$
4	$x=?$			A		.	u	=	b		
5	$y=?$										
6	$z=?$										
7											
8											
9	1.	$\det A =$		66							Nem 0, tehát az A mátrix invertálható
10											
11			0,212121	0,363636	0,0303						
12	2.	$A^{-1} =$	0,181818	-0,04545	-0,04545						Együtthatómátrix inverze
13			-0,0303	0,590909	-0,07576						
14											
15			0,272727								
16	3.	$u = A^{-1} \cdot b =$	-0,90909								Megoldásvektor
17			-1,18182								
18											
19											
20	4.	$b = A \cdot u =$	-1								Ellenőrzés visszahelyettesítéssel
21			2,22E-16								
22			16								
Tükrözés Tükrözés több dimenzióban Lineáris egyenletren											
Kész 110%											

Lineáris egyenletrendszerek

- Megoldás a Solver bővítménnyel (2. megoldási lehetőség)
- A lépések:
 - Felveszünk egy induló x oszlopvektort (pl. {1;1;1;1})
 - Kiszámítjuk az $Ax - b$ behelyettesítés eredményét
- Solver segítségével megváltoztatjuk az x vektort úgy, hogy az $Ax - b = 0$ feltétel teljesüljön (megfelelő pontossággal)
 - Megoldási módszer: Szimplex LP

kész_új [kompatibilis üzemmód] - Microsoft Excel

Fájl Kezdőlap Beszúrás Lap elrendezése Képletek Adatok Korrektúra Nézet

J2 {=MSZORZAT(B2:E5;H2:H5)-F2:F5}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				A		b		x		Ax-b
2		2	-2	4	1	5		1		0
3		2	2	-2	4	8		1		-2
4		4	1	2	-4	7		1		-4
5		-2						1		5
6										

A Solver eredményei

A Solver megoldást talált. Az összes korlátozó és optimalizálási feltétel teljesült.

☒ A Solver megoldásának megtartása
☐ Eredeti értékek visszaállítása

☐ Vissza A Solver paramétereire párbeszédpanelre
☐ Jelentésszámlátok

OK Mégse Eget mentése...

A Solver megoldást talált. Az összes korlátozó és optimalizálási feltétel teljesült.

Az ÁRG motor használata esetén ez azt jelenti, hogy a Solver legalább egy lokális optimális megoldást talált. A szimplex LP motor használata esetén ez azt jelenti, hogy a Solver egy globális optimális megoldást talált.

A Solver paramétere

Céltértek beállítása:

Cél: ☐ Max ☐ Min ☐ Értéke: 0

Változócellák módosításával:

\$H\$2:\$H\$5

Vonatkozó korlátozások:

\$J\$2:\$J\$5 = 0

☐ Nem korlátozott változók nemnegatív tétele

Válasszon egy megoldási módszert: Szimplex LP

Megoldási módszer

A sima nemlineáris Solver-problémákhoz válassza a nemlineáris ÁRG motort. Lineáris Solver-problémákhoz válassza az LP szimplex motort, a nem sima Solver-problémákhoz pedig az evolútív motort.

Súgó Megoldás Bezárás

kész_új [kompat...]

Fájl Kez Bes Lap Kép Ad: Kor

I9 {=MSZORZAT(H2:I5;J2:J5)-K2:K5}

	G	H	I	J	K
1		x		Ax-b	
2		1		8,88178E-16	
3		3		0	
4		2		0	
5		1		1,77636E-15	
6					



Lineáris egyenletrendszerek

- Ha 0 a determináns, akkor inverz mátrix nem számolható (!)
- Ilyenkor két eset lehetséges
 - Az egyenletrendszer összefüggő (egy vagy több ismeretlen szabadon megválasztható, végtelen sok megoldás)
 - Kevesebb független egyenlet, mint ahány ismeretlen
 - Az egyenletrendszer ellentmondásos
 - Több független egyenlet, mint ahány ismeretlen
- (Ezekbe sorolandók azok az esetek is, amikor az **A** mátrix nem négyzetes, azaz determinánst sem tudunk számolni – lásd még később is)
- Megoldási lehetőségek (csak Solverrel)
 - A végtelen sok megoldás közül egy speciálisat meghatározunk
 - Pontos megoldást nem kaphatunk, de törekszünk arra, hogy $Ax = b$ a lehető legközelebb legyen 0-hoz (vektorhossz)
- Az esetek szétválasztása: megvizsgáljuk az eltolt rendszer determinánsát!
Jelölés lehet: $\det([A(:,2:3) \ b])$
 - Ha az eltolt $\det = 0$, akkor a rendszer összefüggő, különben pedig ellentmondásos
 - *Magyarázat: a második esetben a konstans oszlop bevitelével a rendszer rangja nő, azaz az eddigiekből nem „kikeverhető” újabb egyenletet kaptunk
 - Rang: lin. független vektorok darabszáma
- A Solverrel végrehajtandó lépések nagyon hasonlóak a korábbiakhoz
 - Eltérés: ezek a problémák nemlineárisak, az alkalmazandó módszer így a nemlin. ÁRG



Lineáris egyenletrendszerek

- Összefüggő egyenletrendszer
 - A meghatározandó speciális megoldás: a legrövidebb vektorhosszú

kész_új [kompatibilis üzemmód] - Microsoft Excel

Fájl Kezdőlap Beszúrás Lap elrendezése Képletek Adatok Korrektúra Nézet

H6 f_x =NÉGYZETÖSSZEG(H2:H5)

	A	B	C	D	E	F	G
1			A			b	
2		2	-2	4	1	5	
3		2	2	-2	4	8	
4		4	1	2	-4	7	
5		8	1	4	1	20	
6							
7							
8	det(A)=	-1,06581E-14					
9							
10	det([A(:,2:4) b])=	0					
11							

Céltértek beállítása:

Cél: ☐ Max ☒ Min ☐ Értéke:

Változócellák módosításával:

Vonatkozó korlátozások:

$\$J\$2:\$J\$5 = 0$

☐ Nem korlátozott változók nemnegatívva tétele

Válasszon egy megoldási módszert: Nemlineáris ÁRG

Hozzáadás Csere Törölés Alaphelyzet Betöltés/mentés Beállítások

	x	Ax - b
1	1	0
2	1	-2
3	1	-4
4	1	-6
5	4	

A Solver eredményei

A Solver közelítéssel a jelenlegi megoldáshoz jutott. Az összes korlátozó feltétel teljesült.

Jelentések

☒ A Solver megoldásának megtartása

☐ Eredeti értékek visszaállítása

☐ Vissza a Solver paramétereinek párbeszédpanelre ☐ Jelentésszámlátok

OK Mégse Eset mentése...

A Solver közelítéssel a jelenlegi megoldáshoz jutott. Az összes korlátozó feltétel teljesült.

A Solver 5 közelítést végzett, amelyeknél a célérték nem változott jelentősen. Próbálkozzon kisebb konvergencia-beállítással vagy más kiindulóponttal.

kész_új [kompatibi...]

Fájl Kez Bes Lap Kép Ad: Kor N

I9 f_x

	G	H	I	J	K
1		x		Ax - b	
2		2,136678		-8,88178E-16	
3		0,726644		0	
4		0,358131		-2,66454E-15	
5		0,747405		-3,55271E-15	
6		5,780277			
7					

Kész 110%

Lineáris egyenletrendszerek

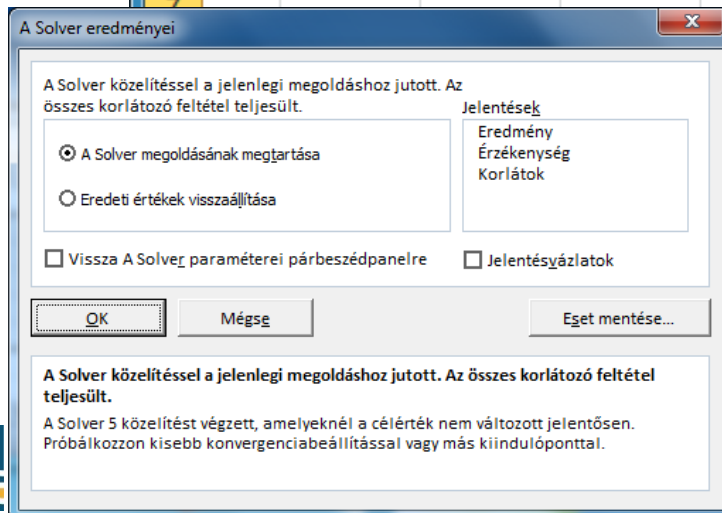
- Ellentmondásos (túlhatározott) egyenletrendszer
 - Cél: kerüljünk a „lehető legközelebb” a megoldáshoz
- Példánkban ellenőrizhető, hogy az utolsó egyenlet bal oldala az előzőek összege, a konstans tagra viszont ez nem áll fent (ellentmondás)

kész_új [kompatibilis üzemmód] - Microsoft Excel

Fájl Kezdőlap Beszúrás Lap elrendezése Képletek Adatok Korrektúra Nézet

J7 fx =NÉGYZETÖSSZEG(J2:J6)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				A		b		x		Ax - b	
2		2	-2	4	1	5		1,000000		0,000000	
3		2	2	-2	4	8		1,000000		-2,000000	
4		4	1	2	-4	7		1,000000		-4,000000	
5		-2	-4	3	4	-4		1,000000		5,000000	
6		6	-3	7	5	15				0,000000	
7										45,000000	



kész_új [ko...]

Fájl Kez Bes Lap Kép Ad: ? - + X

H10 fx

	G	H	I	J	K
1		x		Ax - b	
2		0,663574		-0,200568	
3		3,539616		-0,200024	
4		2,378470		-0,199685	
5		1,037634		-0,199662	
6				0,200061	
7				0,200001	
8					

Kész 110%

Lineáris egyenletrendszerek*

- Mit tudunk tenni általánosan abban az esetben, ha az **A** mátrix nem négyzetes?
 - Tudunk-e (Solver nélkül/det. vizsgálat nélkül) valamilyen direkt módszerrel eredményt számolni?
- Vá.: *Igen, erre használható a Moore–Penrose-féle kváziinverz
 - Ha több (n) sor van mint (m) oszlop ($n > m$), akkor a kváziinverz:
 $(\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T})^{-1} \cdot \mathbf{T}^*$
 - Ennek mérete $m \cdot n$, azaz $\mathbf{T}^*$ méretével egyezik meg
 - Excelben:
{=Mszorzat(Inverz.mátrix(Mszorzat(Transzponálás(t); t)); Transzponálás(t))}
 - Ha kevesebb (n) sor van mint (m) oszlop ($n < m$), akkor a kváziinverz:
 $\mathbf{T}^* \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^*)^{-1}$
 - Ennek mérete is $m \cdot n$, azaz $\mathbf{T}^*$ méretével egyezik meg
 - Excelben:
{=Mszorzat(Transzponálás(t); Inverz.mátrix(Mszorzat(t; Transzponálás(t))))}
- A kváziinverz segítségével x meghatározható a már ismert módon

Lineáris egyenletrendszerek*

- *A kváziinverz előállításának bemutatása
 - Most négyzetes a mátrixunk, és a valódi inverz is létezik

kész [kompatibilis üzemmód] - Microsoft Excel

Fájl Kezdőlap Beszúrás Lap elrendezése Képletek Adatok Korrektúra Nézet

G18 $\{=MSZORZAT(B14:D16;B18:D20)\}$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			A		b		A⁻¹			
2										
3		2	2	0	6		-0,25	-0,5	1	
4		1	1	2	9		0,75	0,5	-1	
5		2	1	1	7		-0,25	0,5	0	
6										
7		det(A)	4			ellenőrzés				
8										
9			1			6				
10		x = A⁻¹b	2		Ax	9				
11			3			7				
12										
13										
14	A*	2	1	2		AA*	8	4	6	
15		2	1	1			4	6	5	
16		0	2	1			6	5	6	
17										
18	(AA*)⁻¹	0,6875	0,375	-1		A*(AA*)⁻¹	-0,25	-0,5	1	
19		0,375	0,75	-1			0,75	0,5	-1	
20		-1	-1	2			-0,25	0,5	0	
21										

Átlag: 0,083333333 Cellák száma: 9 Összeg: 0,75 110%

Lineáris egyenletrendszerek*

- *A kváziinverz előállításának bemutatása (Matlab program, pinv parancs)

Command Window

```
>> format compact
>> A=[2, -2, 4, 1; 2, 2, -2, 4; 4, 1, 2, -4; -2, -4, 3, 4; 6, -3, 7, 5]
A =
     2     -2     4     1
     2     2    -2     4
     4     1     2    -4
    -2    -4     3     4
     6    -3     7     5

>> b = [5; 8; 7; -4; 15]
b =
     5
     8
     7
    -4
    15

>> ki=pinv(A)
ki =
   -1.7667    0.1143    1.0429    0.9476    0.3381
    3.4000   -0.0286   -1.8857   -2.0286   -0.5429
    2.6667   -0.1429   -1.4286   -1.4762   -0.3810
    0.4667    0.0857   -0.3429   -0.2476   -0.0381
```

Workspace

Name	Value	Min
A	<5x4 double>	-4
b	[5;8;7;-4;15]	-4
ell	[-0.2000;-0.2000;-0.2000;-0.2000;0.2000]	-0.2000
ki	<4x5 double>	-2.0286
x	[0.6619;3.5429;2.3810;-1.0381;0.2000]	0.6619

Command History

```
...ki=pinv(A)
...x=ki*b, ell=A*x-b
...format compact
...A=[2, -2, 4, 1; 2, 2, -2, 4; 4, 1, 2, -4; -2, -4, 3, 4; 6, -3, 7, 5]
...b = [5; 8; 7; -4; 15]
...ki=pinv(A)
...x=ki*b
...ell=A*x-b
```

Inset Command Window

```
>> x=ki*b
x =
     0.6619
     3.5429
     2.3810
     1.0381

>> ell=A*x-b
ell =
   -0.2000
   -0.2000
   -0.2000
   -0.2000
    0.2000
```