

## NYOLCADIK GYAKORLAT

# TERMELÉSI ÉS OPTIMALIZÁLÁSI FELADATOK

A feladat megoldása során az Excel 2010 használata a javasolt.

A feladat elvégzése során a következőket fogjuk gyakorolni:

- Termelési és optimalizálási feladatok megoldása.
- Mátrixműveletek alkalmazása.
- Solver használata.

## MEGNYITÁS

A **Fájl/Megnyitás** parancs segítségével nyissuk meg a **Nyers.xlsx** nevű fájlt Excel 2010-ben. Soha ne dupla kattintással nyissuk meg a táblázatokat, ha olyan környezetben dolgozunk, ahol nem tudjuk, milyen program van az adott kiterjesztésű fájlhoz rendelve.

## VEGYÉSZET

Egy vegyészeti termékeket gyártó vállalatnál növényvédő szereket is készítenek, amelyek poralakban kerülnek forgalomba. A vállalat ötfajta növényvédő szert állít elő. Ezek a következők: BCM, Fundasol SOWP, Chinofurgin, Fundasol 25EC és Furoxon. A termékek előállítása (az alap- és segédanyagokból) ugyanazon a keverőgépen történik. A fajlagos időnorma termékenként a keverőgépen 2,5; 1,5; 3; 4; 4 óra/tonna. A keverőgép kapacitása 1000 óra. A termékek előállításához tízféle ható- és segédanyag szükséges. Ezekből négy anyag (A, B, C, D) felhasználása korlátozott. A növényvédőszerek fajlagos igénye ezekből az anyagokból (kg/tonnában) valamint a rendelkezésre álló mennyiségek (tonnában) a következő táblázatban találhatók:

Anyagok	Növényvédő szerek					Felhasználható/korlátozás
	BCM	FSOWP	CHF	F25EC	FX	
A	500	0	0	0	0	65000
B	0	0	50	500	500	60000
C	50	25	0	50	50	12000
D	0	25	5	50	0	6000

Az egyes növényvédő szerek tonnánkénti nyeresége rendre: 6000, 2000, 2500, 4000, illetve 3500 Ft. Hány tonnát állítson elő az egyes növényvédő szerekből a vegyészeti termékeket gyártó vállalat, ha a maximális nyereség a cél?

A **Növény** füzetlapon találjuk az előkészített táblaszerkezetet, ahol a Gyártás sorban fog megjelenni az egyes növényvédő szerekből gyártandó mennyiség ( $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ) tonnában!

A feladat matematikai modellje:

$$500x_1 \leq 65000$$

$$50x_3 + 500x_4 + 500x_5 \leq 60000$$

$$50x_1 + 25x_2 + 50x_4 + 50x_5 \leq 12000$$

$$25x_2 + 5x_3 + 50x_4 \leq 6000$$

$$2,5x_1 + 1,5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 \leq 1000$$

$$6000x_1 + 2000x_2 + 2500x_3 + 4000x_4 + 3500x_5 \rightarrow \max$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Az időnorma és nyereség sorokat értelemszerűen kell a megadott adatokkal kitölteni. A gyártás sorba kerülnek a megoldás ( $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ) értékei. Ezt a sort töltjük ki valamilyen induló adatokkal, pl. csupa 1-gyel.

A Korlátozás oszlopot a fenti táblázat szerint töltjük ki és írjuk ide még a időkorlátot is (1000 óra). A Tényleges oszlopba az A, B, C, D, időnorma, nyereség sorok 6x5-os mátrixának és a x-eket tartalmazó sorvektor transzponáltjának mátrixszorzata kerül! (**Kuleszlépés!!!**)

NÉGYZETŐ... <span>✕</span> <span>✓</span> <span><i>f<sub>x</sub></i></span> =MSZORZAT(C5:G10;TRANSZPONÁLÁS(C11:G11))										
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2										
3		Anyagok	Növényvédő szerek					Felhasználható /korlátozás	Felhasznált /tényleges	
4			BCM	FSOWP	CHF	F25EC	FX			
5		A	500	0	0	0	0	65000	=MSZORZAT(C	
6		B	0	0	50	500	500	60000	1050	
7		C	50	25	0	50	50	12000	175	
8		D	0	25	5	50	0	6000	80	
9		időnorma	2,5	1,5	3	4	4	1000	15	
10		nyereség	6000	2000	2500	4000	3500	Gépkapacitás	18000	max.
11		Gyártás	1	1	1	1	1		Célfüggvény:	
12										
13										

Most már nekifoghatunk a Solverrel történő megoldásnak.

- A célfüggvény értékét a maximalizálandó **\$I\$10** célcella tartalmazza.
- Módosuló cellák a tényleges termelést leíró  $\underline{x}$  vektor elemei, azaz a **\$C\$11:\$G\$11** cél-lák.
- Korlátozás:
  - Az  $\underline{x}$  vektor elemei nem negatívok: **\$C\$11:\$G\$11  $\geq 0$**
  - A tényleges adatok zöld háttérű tartalmai nem haladhatják meg a korlátozás oszlop lila háttérű tartalmait: **\$I\$5:\$I\$9  $\leq$  \$H\$5:\$H\$9**

- A megoldási módszernek lineáris problémánál a **Szimplex LP**-t kell választani.

Anyagok	BCM	FSOWP	CHF	F25EC	FX	Felhasználható /korlátozás	Felhasznált /tényleges
A	500	0	0	0	0	65000	65000
B	0	0	50	500	500	60000	6451612903
C	50	25	0	50	50	12000	12000
D	0	25	5	50	0	6000	6000
időnorma	2,5	1,5	3	4	4	1000	1000
nyereség	6000	2000	2500	4000	3500	Gépkapacitás	1505564,516
Gyártás	130	217,0968	114,5161	0	1,451613		Célfüggvény:

A gyártás sorába a termelési adatok x oszlopvektorának transzponáltja kerül (induláskor legyen)

A feladat matematikai modellje:

$$\begin{aligned}
 &500x_1 \leq 65000 \\
 &50x_3 + 500x_4 + 500x_5 \leq 60000 \\
 &50x_1 + 25x_2 + 50x_4 + 50x_5 \leq 12000 \\
 &25x_2 + 5x_3 + 50x_4 \leq 6000 \\
 &2,5x_1 + 1,5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 \leq 1000 \\
 &6000x_1 + 2000x_2 + 2500x_3 + 4000x_4 + 3500x_5 \rightarrow \max \\
 &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

Vigyázat!  
\$C\$11:\$G\$11 – egész érték korlátozó feltétel bevitelle a Solverbe:  
\$C\$11:\$G\$11 int egész módon történik

A Solver paraméterei

Célérték beállítása: **\$F\$10**

Cél: ☒ Max ☐ Min ☐ Érték: 0

Változócellák módosításával: **\$C\$11:\$G\$11**

Vonatkozó korlátozások:

\$C\$11:\$G\$11 >= 0  
\$I\$5:\$I\$9 <= \$H\$5:\$H\$9

☐ Nem korlátozott változók nemnegatív tétele

Válasszon egy megoldási módszert: **Szimplex LP**

Megoldási módszer  
A sima nemlineáris Solver-problémához válassza a nemlineáris ÁRG motort. Lineáris Solver-problémákhoz válassza az LP szimplex motort, a nem sima Solver-problémákhoz pedig az evolútív motort.

Súgó Megoldás Bezáras

Így már találtunk megoldást, de a csomagolás miatt ésszerű megkötés lehet az is, hogy csak egész terméket lehet gyártani, ezért ezt is vegyük fel a korlátozó feltételek közé. Az egész feltételt az **int** kulcsszó segítségével tudjuk beállítani.

Korlátozó feltétel felvétele

Cellahivatkozás: **\$C\$11:\$G\$11**

Korlátozó feltétel: **int**

**OK** **Hozzáadás** **Mégse**

A két eredményt összehasonlítva láthatjuk, hogy a második esetben a nyereség valamivel kisebb és a gépek kapacitását sem tudtuk teljesen kihasználni.

Az Excelbe beépített megoldók (lineáris és nemlineáris módszerek) beállításától függően más és más optimumot adhatnak ilyen típusú (elég bonyolult) feladatok megoldása során. A gyakorlat anyagánál kipróbáltuk a különböző beállításokat és azt a megoldást javasoljuk, amikor a legjobb eredmény áll elő.

## DARABOLÁS

1000 darab 7 méteres gerendából 1,5 és 2,5 méteres oszlopokat vágunk. Legalább négyszer anynyi 1,5 méteres oszlopra van szükségünk, mint 2,5 méteresre. Hogyan vágjuk fel az 1000 darab 7 méteres gerendát, hogy a hulladékképződés minimális legyen? (Nyilvánvaló, hogy egy 7 méteres gerenda feldarabolásakor legfeljebb 1 m hosszú hulladék keletkezhet.)

A feladat megoldásához a **Gerenda** munkalapot használjuk.

A megoldáshoz a következőket kell végiggondolni:

A felvágás az alábbi módszerekkel történhet.

	Oszlop hossza		hulladék
	2,5 m	1,5 m	
1. módszer	2	1	0,5
2. módszer	1	3	0
3. módszer	0	4	1

Az egyes módszerek alkalmazásainak darabszámát  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  jelöli.

Így a feladat matematikai modellje:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$$

$$4x_1 + x_2 + 0x_3 - (x_1 + 3x_2 + 4x_3) \leq 0$$

$$0,5x_1 + 0x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

Ha a fenti táblázatot jobbról kiegészítjük az  $\underline{x}$  vektorral és (alulról) a keletkezett darabok számával (2,5 méteres, 1,5 méteres, hulladék), akkor a Solver könnyedén paraméterezhető lesz.

Az  $\underline{x}$  vektor kiinduló értékeinek töltjük fel egyesekkel az „alkalmazás száma” oszlopot. Majd számoljuk ki az „összesen” sort az =SZORZATÖSSZEG(C4:C6;\$F\$4:\$F\$6) másolható függvénnyel.

Az alkalmazások oszlopban az =SZUM(F4:F6) függvénnyel kapjuk meg az összes alkalmazás számát.

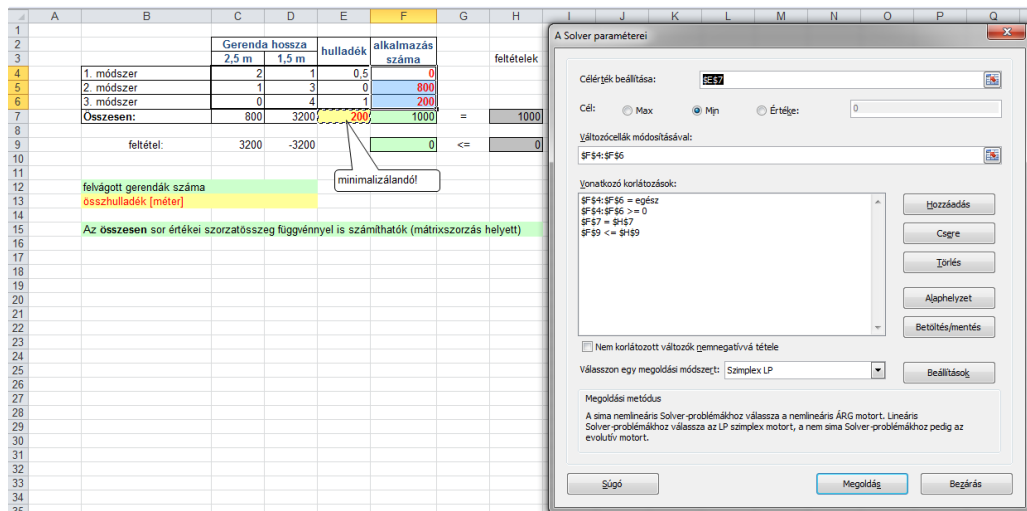
BAL							
=SZORZATÖSSZEG(C4:C6;\$F\$4:\$F\$6)							
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			Gerenda hossza				
3			2,5 m	1,5 m	hulladék	alkalmazás száma	
4		1.módszer	2	1	0,5	1	
5		2.módszer	1	3	0	1	
6		3.módszer	0	4	1	1	
7		összesen:	=SZORZATÖSSZEG(C4:C6;\$F\$4:\$F\$6)				
8			SZORZATÖSSZEG(tömb1; [tömb2]; [tömb3]; [tömb4]; ...)				

A 9. sorba előre beírtuk az oszlopok arányaira vonatkozó feltételt.

Most már nekifoghatunk a Solverrel történő megoldásnak.

- A célfüggvény értékét a minimalizálandó **\$E\$7** célcella tartalmazza.
- Módosuló cellák az alkalmazás számai,  $\underline{x}$  vektor elemei, azaz a **\$F\$4:\$F\$6** cellák.
- Korlátozás:
  - Az  $\underline{x}$  vektor elemei nem negatív egész számok lehetnek: **\$F\$4:\$F\$6  $\geq$  0**
  - \$F\$4:\$F\$6 = egész**

- Összesen ezer gerendát kell feldarabolni:  $\$F\$7 = \$H\$7$
- Legalább négyszer annyi 1,5 méteres gerendát kell feldarabolni, mint 2,5 méteres:  $\$F\$9 \leq \$H\$9$
- A megoldási módszernek a **Szimplex LP**-t kell választani.
- A korlátozó feltétel pontosságának **1E-10**-et állítsunk.



## VIZSGA

A vizsgaidőszakban egy diáknak csak 500 óra ideje van a készülésre, de maximális kreditpontot szeretne elérni. Hogyan kell választania, ha a lehetőségei a következők: Matematikából 100 óra tanulással 6 kredit szerezhető, angolból 20 órával 1 pont. Informatikából 140 óra gyakorlással garantálható a 7 kreditpont, míg az 50 óra közgáz 2 pontot ad. Opkutból 50 óra tanulással 2, 150 óra német gyakorlással 5, és végül 150 óra edzéssel a tesi 4 kreditpontot eredményez.

	A	C	D
	Projekt	Erőforrás igény (óra)	Haszon (kreditpont)
1			
2	Matek	100	6
3	Angol	20	1
4	Infó	140	7
5	Közgáz	50	2
6	Opkut	50	2
7	Német	150	5
8	Tesi	150	4

Az egyes tárgyak választását a 0 és 1 értékeket felvehető  $x_1, x_2, \dots, x_7$  változó jelöli.

A feladat matematikai modellje:

$$100x_1 + 20x_2 + 140x_3 + 50x_4 + 50x_5 + 150x_6 + 150x_7 \leq 500$$

$$6x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 5x_6 + 4x_7 \rightarrow \max$$

Oldjuk meg a feladatot a **VIZSGA** munkalapon.

Az  $x$  vektor kiinduló értékeinek töltsük fel egyesekkel a „Változó” oszlopot. Majd számoljuk ki az összesen sort a **=SZORZATÖSSZEG(\$B\$2:\$B\$8;C2:C8)** függvény segítségével.

BAL					
=SZORZATÖSSZEG(\$B\$2:\$B\$8;C2:C8)					
	A	B	C	D	E
1	Projekt	Változó	Erőforrás igény (óra)	Haszon (kreditpont)	
2	Matek	1	100	6	
3	Angol	1	20	1	
4	Infó	1	140	7	
5	Közgáz	1	50	2	
6	Opkut	1	50	2	
7	Német	1	150	5	
8	Tesi	1	150	4	
9	Összesen:	=SZORZATÖSSZEG(\$B\$2:\$B\$8;C2:C8)			
10		SZORZATÖSSZEG(tömb1; [tömb2]; [tömb3]; [tömb4]; ...)			

Most már nekifoghatunk a Solverrel történő megoldásnak.

- A célfüggvény értékét a maximalizálandó kreditpont (összesen), a **\$D\$9** célcella tartalmazza.
- A módosuló cellák az alkalmazás számai,  $x$  vektor elemei, azaz a **\$B\$2:\$B\$8** cellák.
- Korlátozás:
  - Az  $x$  vektor elemei csak a nulla és egy értékeket vehetik fel, azaz csak bináris számok lehetnek: **\$B\$2:\$B\$8 = bináris**
  - Maximum 500 óra áll rendelkezésre: **\$C\$9 ≤ \$C\$11**
- A megoldási módszernek a **Szimplex LP**-t kell választani.

**A Solver paramétereit**

Célérték beállítása: **\$D\$9**

Cél: ☒ Max ☐ Min ☐ Értéke: 0

Változócellák módosításával: **\$B\$2:\$B\$8**

Vonatkozó korlátozások:

- \$B\$2:\$B\$8 = bináris
- \$C\$9 <= \$C\$11

☐ Nem korlátozott változók nemnegatív tétele

Válasszon egy megoldási módszert: **Simplex LP**

Megoldási módszer

A sima nemlineáris Solver-problémákhoz válassza a nemlineáris ÁRG motort. Lineáris Solver-problémákhoz válassza az LP szimplex motort, a nem sima Solver-problémákhoz pedig az evolútív motort.

**Súgó** **Megoldás** **Bezárás**

Az előző feladatot bővítjük ki!

Egy másik diák a tanuláshoz magántanár segítségét is igénybe veszi. Matekból 20000, angolból 5000, közgázból 10000, opkutból 12000, németből 15000 Ft a fizetendő végösszeg, amely – a megszerzett tudást tekintve – garantálja számára a vizsga sikeres teljesítését. Ez összesen 62000 Ft, de a diáknak csak 40000 Ft-ja van. Hogyan kell ez esetben tárgyakat választania a maximális kreditpont eléréséhez (azaz: nem tanul többet 500 óránál és nem fizet többet 40000-nél)?

Bővítjük ki a táblázatot a következő ábra szerint.

	A	B	C	D	E
1	Projekt	Változó	Erőforrás igény (óra)	Haszon (kreditpont)	Magántanár
2	Matek	1	100	6	20000
3	Angol	0	20	1	5000
4	Infó	1	140	7	0
5	Közgáz	1	50	2	10000
6	Opkut	1	50	2	12000
7	Német	1	150	5	15000
8	Tesi	0	150	4	0
9	<b>Összesen:</b>		<b>490</b>	<b>22</b>	<b>57000</b>
10			<=		<=
11			<b>500</b>		<b>40000</b>

Vegyük fel Solverbe az új feltételt és oldjuk meg a feladatot.

	A	B	C	D	E
	Projekt	Változó	Erőforrás igény (óra)	Haszon (kreditpont)	Magántanár
2	Matek	1	100	6	20000
3	Angol	1	20	1	5000
4	Infó	1	140	7	0
5	Közgaz	1	50	2	10000
6	Opkut	0	50	2	12000
7	Német	0	150	5	15000
8	Tesi	1	150	4	0
9	<b>Összesen:</b>		<b>460</b>	<b>20</b>	<b>35000</b>
10			<=		<=
11			500		40000

A Solver paramétereit

Céltérkép beállítás: **\$D\$9**

Cél: ☒ Max ☐ Min ☐ Érték: 0

Változócellák módosításával: **\$B\$2:\$B\$8**

Vonatkozó korlátozások:

\$B\$2:\$B\$8 = bináris  
 \$C\$9 <= \$C\$11  
 \$E\$9 <= \$E\$11

☐ Nem korlátozott változók nemnegatívvá tétele

Válasszon egy megoldási módszert: **Simplex LP**

Megoldási módszer

A sima nemlineáris Solver-problémákhoz válassza a nemlineáris ARG motort. Lineáris Solver-problémákhoz válassza az LP simplex motort, a nem sima Solver-problémákhoz pedig az evolútív motort.

Súgó Megoldás Bezárás

## LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER, EGY MEGOLDÁS

Oldjuk meg az **Egyenlet** munkalapon a következő egyenletrendszert az inverz mátrixos módszer segítségével!

$$2a - 2b + 4c + d = 12$$

$$-3a + 3b - 2c + 8d = -48$$

$$a + 5b + 2c - 4d = 18$$

$$-2a - 4b + 3c + 19d = -72$$

Lépések:

Legyen az együtthatómátrix  $\underline{\underline{A}}$ , a jobboldal oszlopvektora  $\underline{b}$  !

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 8 \\ 1 & 5 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 3 & 19 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -48 \\ 18 \\ -72 \end{bmatrix}$$

Először ellenőrizzük le, hogy a  $\underline{\underline{A}}$  determinánsa nulla-e (MDETERM függvény). Ha nem nulla, akkor folytathatjuk tovább a számítást az  $\underline{\underline{A}}$  ( $4 \times 4$ -es méretű) inverz mátrixának a kiszámításával (INVERZ.MÁTRIX függvény). A megoldásvektort az  $\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{b}$  egyenlettel lehet kiszámítani.



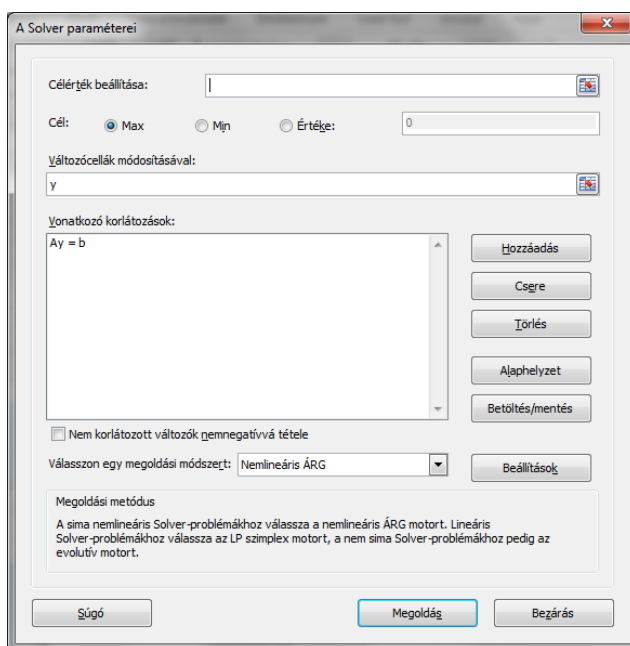
tani (MSZORZAT függvény). A megoldásvektor egy  $4 \times 1$ -es méretű mátrix (4 dimenziós vektor) lesz.

Az inverz mátrix megjelenési formátumát állítsuk be a determináns számjegyeinek megfelelően.

Végezetül az egyenletbe való visszahelyettesítéssel ellenőrizzük le a megoldást. Ha  $\underline{b} = \underline{A} \cdot \underline{x}$  akkor a megoldás helyes. Az ellenőrzés során a megoldás visszahelyettesítése után számítsuk ki az oszlopvektorok különbségét is. A különbségvektor számformátuma tudományos legyen 5 tizedesjeggyel!

Ezután számoljuk ki a megoldásvektort a Solver segítségével is. A továbbiakban a Solverrel készített vektort  $\underline{y}$ -ként fogjuk jelölni. Első lépésként a megoldásvektor összes elemét állítsuk be egyre, majd számítsuk ki  $\underline{A} \cdot \underline{y}$  vektort.

Majd állítsuk be a Solvert a következő ábra szerint. Figyeljünk arra, hogy célértéket nem kell beállítani és vegyük fel az  $\underline{A} \cdot \underline{y} = \underline{b}$  korlátozó feltételt. A Solver számítási pontosságát állítsuk át 1E-15-re.



Határozzuk meg az  $\underline{A} \cdot \underline{y} - \underline{b}$  vektort és hasonlítsuk össze az  $\underline{A} \cdot \underline{x} - \underline{b}$  vektorral. A Solverrel sokkal pontosabb eredményt kaptunk, mint az inverz mátrixszal.

Gratulálunk! Ezzel elérkeztünk a példa végéhez.

