

I. feladatsor

- (1) Legyen $\mathbf{a}(-3; 2; 5)$, $\mathbf{b}(1; 4; 0)$, $\mathbf{c}(2; -2; 7)$ és $\mathbf{d}(11; 6; -3)$. Határozd meg az alábbiakat:
- | | | |
|--|--|--|
| (a) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$ | (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{d}$ | (c) $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - \mathbf{d}$ |
| (d) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ | (e) $\langle \mathbf{d}, \mathbf{c} \rangle$ | (f) $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}, 2\mathbf{c} - \mathbf{d} \rangle$ |
| (g) $\langle \mathbf{b} - 2\mathbf{d}, \mathbf{a} + 3\mathbf{b} \rangle$ | (h) $\langle \mathbf{b} - 2\mathbf{a}, -4\mathbf{d} \rangle$ | (i) $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$ |
| (j) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ | (k) $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ | (l) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times \mathbf{d}$ |
| (m) $(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \times \mathbf{c}$ | (n) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$ | (o) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ |
| (p) $\mathbf{abc}$ | (q) $\mathbf{cba}$ | (r) $\mathbf{bca}$ |
| (s) $\mathbf{abd}$ | (t) $\mathbf{cbd}$ | (u) $\mathbf{dbb}$ |
- (2) A fenti vektorokat használva válaszold meg az alábbiakat! Legyen továbbá $\mathbf{e}(1; -2; x)$!
- Mekkora szöget zár be $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$?
 - Mekkora szöget zár be $\mathbf{a}$ és $\mathbf{d}$?
 - Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{d}$ vektorok által közrezárt szög koszinusza?
 - Bontsd fel a $\mathbf{d}$ vektort $\mathbf{a}$ -val párhuzamos és merőleges összetevőkre!
 - Bontsd fel a $\mathbf{d}$ vektort $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos és merőleges összetevőkre!
 - Bontsd fel a $\mathbf{d}$ vektort $\mathbf{c}$ -vel párhuzamos és merőleges összetevőkre!
 - Milyen x érték esetén lesz $\mathbf{e}$ merőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorokra? (külön-külön!)
 - Milyen x értékek esetén fog $\mathbf{e}$ és $\mathbf{a}$ tompaszöget bezárni?
 - Milyen x értékek esetén fog $\mathbf{e}$ és $\mathbf{b}$ tompaszöget bezárni?
 - Milyen x értékek esetén fog $\mathbf{e}$ és $\mathbf{c}$ hegyesszöget bezárni?
 - Milyen x értékek esetén fog $\mathbf{e}$ és $\mathbf{d}$ hegyesszöget bezárni?
 - Határozd meg az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorok irányába mutató egységvektorokat!
- (3) Van-e olyan vektor, mely az x, y, z koordinátatengelyek pozitív irányával rendre 45° , 60° , 120° szöget zár be?
- (4) Egy szabályos hatszög középpontja $K(4; 1; 4)$, két szomszédos csúcsa $A(3; 1; 5)$ és $B(3; 2; 4)$. Adjuk meg a többi négy csúcs koordinátáját! Igazoljuk, hogy a hatszög szabályos!
- (5) Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a}(-2; 3; 6)$, $\mathbf{b}(6; -2; 3)$ és $\mathbf{c}(3; 6; -2)$ vektorok kockát feszítenek ki!
- (6) Az ABC háromszög csúcsai $A(2; 3; 1)$, $B(-2; 1; 2)$ és $C(-1; 0; 3)$. Mekkora a háromszög kerülete, területe és az C csúcshoz tartozó magassága?
- (7) Az ABCD tetraéder térfogata 5 egység. Mik a D csúcs koordinátái, ha a D csúcs az y tengelyen van, és a többi csúcs koordinátái: $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; 1; 3)$?
- (8) Mekkora az $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$ csúcsú háromszög magasságvonalaibanak háromszögbe eső részeinek hossza?
- (9) Egy tetraéder csúcsai: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Mekkora a D -hez tartozó magasság?
- (10) Paralelepipedon egy csúcsából kiinduló élvektorok: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Fejezzük ki ezek segítségével a lapátlóvektorokat és a testátlóvektorokat!
- (11) Legyen $ABCD$ egy paralelogramma, O egy tetszőleges pont. Bizonyítsd be, hogy ekkor: $OA + OC = OB + OD$.
- (12) Legyen az ABC szabályos háromszög oldala 2 egység hosszú. Mennyi $\langle AB, AC \rangle$?
- (13) Egy kockát kifeszítő 3 vektor közül kettő $\mathbf{a}(6; 2; -3)$ és $\mathbf{b}(-3; 6; -2)$. Határozzuk meg a harmadik vektort!
- (14) Mekkora az $\mathbf{a}(-9; 0; 9)$ és $\mathbf{b}(7; 2; -5)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?

II. feladatsor

- (1) Legyen $A(1, 2, -1)$, $B(2, 4, 5)$, továbbá legyen $e : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}$, $z = -1$ egyenes, és

$$f : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 7 + t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- (a) Határozzuk meg az A -n és B átmenő egyenes mindkét(!) egyenletét!
(b) Határozzuk meg az A -n átmenő $v(1, 0, 1)$ irányvektorú egyenest!
(c) Rajta van-e A vagy B e -n vagy f -en?
(d) Határozzuk meg e paraméteres és f paraméter nélküli egyenletét, egy-egy pontját, és irányvektorát!
(e) Határozzuk meg az A -n átmenő e -re és f -re merőleg egyenest!
(f) Határozzuk meg a B -n átmenő e -vel párhuzamos egyenest!
(g) Van-e közös pontja e -nek és f -nek?
- (2) Legyen továbbá $C(-1, 2, 0)$, $S_1 : 2x + y - 4z = 1$.
(a) Határozzuk meg az A -n átmenő $n(-2, 1, 0)$ normálvektorú sík egyenletét!
(b) Határozzuk meg az A, B, C pontokat tartalmazó síkot! Legyen ez S_2 !
(c) Határozzuk meg az A -t, B -t és e -t tartalmazó síkot!
(d) Határozzuk meg az A -n átmenő e -vel és f -el párhuzamos síkot!
(e) Hol dőfi e az S_1 síkot?
- (3) Mi S_1 és $S_2 : x + z = 1$ metszésvonala?
(4) Mi S_2 és az YZ sík metszésvonala?
(5) Milyen messze van A e -től?
(6) Milyen messze van B e -től?
(7) Milyen messze van C f -től?
(8) Milyen messze van A S_1 -től?
(9) Milyen messze van B S_1 -től?
(10) Milyen messze van e S_1 -től?
(11) Milyen messze van e f -től?
(12) Milyen messze van az XY síktól az f ?
(13) Milyen messze van $6x + 3y - 12z = 9$ S_1 -től?
(14) Milyen messze van az XY sík és $z = 4$ -től?
- (15) Milyen messze van az XY síktól és $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 + 6t \\ z = 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ egyenes?
- (16) Milyen messze van S_1 -től $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 9 \\ z = 6 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}?$
- (17) Milyen messze van f -től $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 7 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}?$
- (18) Mekkora szöget zár be f és $\begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = 7 + 3t \\ z = 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}?$
- (19) Mekkora szöget zár be e és $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}?$
- (20) Mekkora szöget zár be e és S_1 ?
(21) Mekkora szöget zár be az XY sík és S_1 ?
(22) Mekkora szöget zár be $x + y - z = 3$ és YZ ?

III. feladatsor

(1) Töltse ki az alábbi táblázatot:

Komplex szám	Valós rész	Képzetes rész	Konjugált	Abszolútérték
$4 + 2i$				
$-3 + 4i$				
$5i - 1$				
$-6i$				
	-3	5		
			$3 - 2i$	
			$7i$	

(2) Adottak az alábbi komplex számok: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 2i$. Határozza meg az alábbiakat:

- (a) $z_1 + z_2$ (b) $\overline{z_1 + z_2}$ (c) $\overline{z_1} + \overline{z_2}$ (d) $z_1 - z_2$
 (e) $|z_1 + z_2|$ (f) $|z_1| + |z_2|$ (g) $z_1 \cdot z_2$ (h) $\overline{z_1} \cdot z_2$
 (i) $z_3 \cdot z_2$ (j) $\overline{z_1 \cdot z_2}$ (k) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ (l) $|z_1 \cdot z_2|$
 (m) $|z_1| \cdot |z_2|$ (n) $\frac{z_1}{z_2}$ (o) $\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$ (p) $\frac{z_1}{z_3}$
 (q) $\frac{1}{z_3}$ (r) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ (s) $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (t) $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$
 (u) $\left|\frac{z_1^2 + z_3}{z_2}\right|$

(3) Legyen $z_1 = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ valamint $z_2 = 12(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$. Határozza meg az alábbiakat:

- (a) $|z_1|$ (b) $|z_2|$ (c) $z_1 \cdot z_2$ (d) $\frac{z_1}{z_2}$
 (e) z_1^3 (f) $\sqrt[3]{z_1}$ (g) $\sqrt[4]{z_2}$ (h) $\sqrt[2]{z_1 \cdot z_2}$

(4) Töltse ki az alábbi táblázatot:

Algebrai alak	Trigonometrikus alak
$1 + i$	
$1 - \sqrt{3}i$	
	$\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$
2	
i	

(5) Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

- (a) $(2 + 3i)z + 4 = 5 + 2i$
 (b) $z^2 - 2z + 10 = 0$
 (c) $z^2 - 2iz = 3 + 2\sqrt{3}i$
 (d) $z^2 = 9$
 (e) $z^2 = -16$
 (f) $z^3 - i + 1 = 0$
 (g) $(1 + i)z^6 = -2 + 4i$
 (h) $z^6 + 2iz^3 + 3 = 0$
 (i) $z^8 - z^4(1 + 2i) - 1 + i = 0$
 (j) $z^6 - (2 + 4i)z^3 + 4i - 4 = 0$

(6) Végezze el a kijelölt műveleteket:

- (a) $\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) + (4 - 3i)i$
 (b) $\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}i}$
 (c) $\frac{3 + 3i}{2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)}$
 (d) $\frac{i^3 - i^7}{4 - i} \cdot \overline{(2 - i)} + 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$
 (e) $\frac{i^{2009} - i^{2010}}{3 - 2i}$

(7) Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

(a) $i \cdot \bar{z} - 3 + 2i^3 = 4$

(b) $(2i - 3)z - 5 + i^5 = 2$

(c) $3z + 4\bar{z} = 2 + i$

(d) $z - 2i\bar{z} - i^3 = 3 + 2i$

(e) $z^2 + i\bar{z} = 0$

(f) $\bar{z}^2 - z = 0$

(g)
$$\begin{cases} (2 + i)z_1 + (i + 1)z_2 &= i \\ (2 - i)z_1 - (3 - i)z_2 &= 2 + 5i \end{cases}$$

(h)
$$\begin{cases} z_1 - iz_2 &= -3i \\ (1 + 2i)z_1 + (1 + 3i)z_2 &= 8 + 6i \end{cases}$$

(8) Határozza meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját:

(a) $z = \sqrt{2}(\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ)$

(b) $z = 2(\sin 135^\circ + i \cos 135^\circ)$

(c) $z = 4(\cos 300^\circ + i \sin 150^\circ)$

(d) $z = 4(\cos 330^\circ + i \sin 150^\circ)$

(e) $z = i \cos 30^\circ - \cos 120^\circ$

IV. feladatsor

(1) Töltse ki az alábbi táblázatot:

$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$g(f(x))$	$f(f(x))$
$\sin(x)$	x^3			
$\sin(x) + x + 1$	$\sqrt{x}$			
$\frac{1}{x+2}$	$3^x + 1$			
		$\cos(x^4)$		
			$2^{\sin(x)}$	
		$\lg(x^3 + 2x - 1)$		
			$\sqrt{\arcsin(x)}$	
$\ln(x)$	e^x			
$\ln(x)$	x^2			
$\ln(x)$	$\ln(x)$			

(2) Határozza meg a valós számok legbővebb részhalmazát, ahol az alábbi függvények értelmesek:

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{(x+1)(x-5)}}{x+4}$

(b) $f(x) = \frac{\arcsin(\frac{x}{2})}{\lg(2x+4)}$

(c) $f(x) = 2^{\frac{x+1}{x-3}}$

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}$

(e) $f(x) = \lg\left(\frac{x-2}{x+11}\right)$

(f) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+2}\right)$

(g) $f(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{\ln(2x+36)}$

(h) $f(x) = \frac{\arccos(x+2)}{\ln(x+4)}$

(3) Ábrázolja az alábbi függvényeket:

(a) $f(x) = -2(2x-4)^2 - 5$

(b) $f(x) = 3 \arcsin(2x-1) + \pi$

(c) $f(x) = -\ln\left(\frac{x}{2} + 3\right) - 4$

(d) $f(x) = 3e^{1-x} + 2$

(e) $f(x) = -\sqrt{3x+4} - 2$

(4) Határozza meg az alábbi függvények inverz függvényét, ha létezik. Ha nem létezik akkor határozza meg a valós számok legbővebb részhalmazát, ahol az inverz létezik és határozza is meg azt!

(a) $f(x) = 4x - 6$

(b) $f(x) = \sqrt{2x + 6}$

(c) $f(x) = \frac{3}{x+5} - 6$

(d) $f(x) = 2^{x-7} + 3$

(e) $f(x) = \log_5(2x - 10) + 6$

(f) $f(x) = (x - 4)^2 + 3$

(g) $f(x) = \frac{2}{x-4} + 3$

(h) $f(x) = 2 \arcsin\left(\frac{3x-1}{2}\right) + \pi$

(i) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{4}\right) - \frac{\pi}{4}$

(j) $f(x) = \cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right) - 3$

(5) Páros, páratlan vagy egyik sem az alábbi függvény:

(a) $f(x) = e^{-x}x^2$

(b) $f(x) = e^{-x^2} \sin x$

(c) $f(x) = x^2 + \cos x + 2$

V. feladatsor

- (1) Adja meg az $a_n = \frac{5n-1}{2n+1}$ sorozat következő elemeit: $a_1, a_2, a_{n+1}, a_{n-3}$.
- (2) Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából:
 (a) $a_n = \frac{1}{n+4}$ (b) $a_n = \frac{n+2}{n+3}$ (c) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (d) $a_n = \frac{4n+2}{3n-7}$
- (3) Adottak az alábbi konvergens sorozatok. Adja meg a határértéket, és azt a küszöbindexet, amelynél nagyobb indexű tagjai a sorozatnak $\varepsilon = \frac{1}{100}$ -nál kisebb hibával közelítik a határértéket!
 (a) $a_n = \frac{4n+1}{n}$ (b) $a_n = \frac{1-3n}{n+4}$ (c) $a_n = \frac{2-3n}{1-4n}$ (d) $a_n = \frac{4n+2}{3n-7}$
- (4) Határozza meg az alábbi nevezetes sorozatok határértéket:
 (a) $a_n = 3$ (b) $a_n = \frac{1}{n}$ (c) $a_n = 2^n$
 (d) $a_n = n^2$ (e) $a_n = 2^{\frac{1}{n}}$ (f) $a_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$
 (g) $a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$ (h) $a_n = n^{\frac{1}{2}}$ (i) $a_n = n^{-\frac{1}{2}}$
 (j) $a_n = \sqrt[n]{n}$ (k) $a_n = \frac{2^n}{n!}$ (l) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$
- (5) A nevezetes sorozathatárértékek ismeretével és a műveletekre vonatkozó tételek segítségével határozza meg mely sorozatok konvergensnek és mi a határértékük!
 (a) $a_n = 2n^2 - 3n + 1$ (b) $a_n = 7n^3 - 5n^2$
 (c) $a_n = 4n^4 - 12n^3 + 1$ (d) $a_n = -6n^5 + 20n^4 + 100$
- (6) Határozza meg a következő sorozatok határértékét:
 (a) $a_n = \frac{-5n+1}{7n-2}$ (b) $a_n = \frac{3n^2+n+1}{5n^2-7n}$
 (c) $a_n = \frac{1+5n^3-7n^4}{9n^4-4n^2+3n}$ (d) $a_n = \frac{2n+1}{n^2-n+2}$
 (e) $a_n = \frac{-5n^2+2n+1}{1-n-7n^4}$ (f) $a_n = \frac{1-2n^2}{n^3-7n+1}$
 (g) $a_n = \frac{1-n-7n^4}{-5n^2+2n+1}$ (h) $a_n = \frac{1-2n^2}{-2n+7n^2}$
 (i) $a_n = \frac{1+4n}{2n+\sqrt{2n+1}}$ (j) $a_n = \frac{-2n+7n^2}{3n^2+n+\sqrt{n^3+3}}$
 (k) $a_n = \frac{5-n}{4n-2+\sqrt{9n^2+n+3}}$ (l) $a_n = \frac{4-3n^2}{2n^2+\sqrt{n^4+n^3+1}}$
- (7) Határozza meg a következő sorozatok határértékét:
 (a) $a_n = \frac{(2n+1)^2}{\sqrt[3]{5n^6+4n}}$ (b) $a_n = \frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2+1}{6n-1}$
 (c) $a_n = \frac{2n^2+1}{4n-7} - \frac{4n^2+1}{8n+1}$ (d) $a_n = \sqrt{3n+7} - \sqrt{3n+10}$
 (e) $a_n = \sqrt{4n+7} - \sqrt{3n+10}$ (f) $a_n = \sqrt{n^2+7n-1} - \sqrt{n^2+n}$
 (g) $a_n = \frac{\sqrt{4n^2+2n+1}}{\sqrt{5n^2+n+10}}$ (h) $a_n = \frac{n^2+\sqrt{n^3+1}}{3n^2-n+4}$
- (8) Határozza meg a következő sorozatok határértékét:
 (a) $a_n = \frac{2^{n+1}-3^{n-1}}{1+3^n}$ (b) $a_n = \frac{2^{3n+1}-3^{n+1}}{2^n+8^{n+1}}$
 (c) $a_n = \frac{5^{2n-1}-2^n}{3+3^{2n}}$ (d) $a_n = \frac{4^{2n+1}-2^{n+3}}{5+17^{n+2}}$
 (e) $a_n = \frac{3^{2n+1}-4^{3n-1}}{1+2^n}$ (f) $a_n = \frac{4^{3n+1}-2^{3n+1}}{5^{3n-3}+8^{n+1}}$
 (g) $a_n = \frac{2^{4n-1}-5^{n-3}}{4^{2n+2}+5^{2n}}$ (h) $a_n = \frac{4^{2n-4}-3^{2n+3}}{5+2^{n+2}}$

VI. feladatsor

(1) Határozza meg az alábbi függvényhatárértékeket a függvény grafikonjának ismeretében:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}, \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x, \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x, \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \lg x, \lim_{x \rightarrow 0^+} \lg x, \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg x$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\frac{1}{2}} x, \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x, \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$

(j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x$

(k) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \arcsin x, \lim_{x \rightarrow 1} \arcsin x, \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x$

(l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x, \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x$

(m) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \arccos x, \lim_{x \rightarrow 1} \arccos x$

(n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x, \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x$

(o)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{ha } x \geq 1 \\ 4^x & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

(p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{ha } x < 2 \\ \sqrt{x} & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

(q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x \frac{1}{3} & \text{ha } x \geq -1 \\ -\frac{1}{x} & \text{ha } x < -1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 10} f(x)$

(2) Határozza meg az alábbi függvények x_0 -beli határértékét:

(a) $f(x) = -x^5 + 3x^4 + x^3 + 1, x_0 = -\infty, +\infty$

(b) $f(x) = x^3 - 10x^2 + x + 20, x_0 = -\infty, +\infty$

(c) $f(x) = \frac{-3x^2 - 5x + 1}{4x^2 + 7x + 3}, x_0 = -\infty, +\infty$

(d) $f(x) = \frac{7x^3 + 5x^2 + 1}{-2x^3 - x^2 + 10}, x_0 = -\infty, +\infty$

(e) $f(x) = \frac{-x^3 + x + 2}{x^4 + x^2 + 10}, x_0 = -\infty, +\infty$

(f) $f(x) = \frac{-2x^3 + 4x^2 - 2}{-x^2 + 3x + 7}, x_0 = -\infty, +\infty$

(g) $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 3}, x_0 = -\infty, +\infty, -3, 0, 1$

$$(h) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{-x^3 + 6x^2 - 8x}, x_0 = -\infty, +\infty, 0, 1, 2, 4$$

$$(i) f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 9}, x_0 = 0, 1, 2, 3$$

$$(j) f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}, x_0 = -1, 2$$

$$(k) f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 5x + 6}, x_0 = -3, 0$$

$$(l) f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 - 2x - 8}, x_0 = -\infty, +\infty$$

$$(m) f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, x_0 = 0, +\infty$$

$$(n) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}, x_0 = -\infty, +\infty$$

(3) Határozza meg az alábbi határértékeket:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{3-2x} - \sqrt{3+2x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x} \quad (f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{4x}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{7x} \quad (h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin(3x)}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \quad (j) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right)$$

VII. feladatsor

- (1) Adja meg az x_0 helyhez tartozó differenciálhányados függvényt, a differenciálhányados értékét a definíció alapján:
- (a) $f(x) = 5, x_0 = 2, x_0 = -3$
 - (b) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 2, x_0 = -3$
 - (c) $f(x) = \sqrt{x} + x, x_0 = -3, x_0 = 2, x_0 = 4$
- (2) Adja meg az alábbi függvények szelő egyenesének egyenletét, valamint az érintő egyenesének egyenletét:
- (a) $f(x) = 4x^2 + 1, P_1(0, 1), P_2(-1, 5)$
 - (b) $f(x) = \frac{1}{x}, P_1(2, \frac{1}{2}), P_2(-3, -\frac{1}{3})$
- (3) Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit:
- (a) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - 1$
 - (b) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 \sin x$
 - (c) $f(x) = 2x^3 + \sqrt{\pi} + \log_3 x$
 - (d) $f(x) = 3x^4 - \cos x + \frac{5}{x}$
 - (e) $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$
 - (f) $f(x) = e^x \cdot \ln x$
 - (g) $f(x) = \lg x \cdot \arcsin x$
 - (h) $f(x) = \sqrt{x} \lg x$
 - (i) $f(x) = 4x^5 \cdot \operatorname{arctg} x$
 - (j) $f(x) = \ln x \sin x$
 - (k) $f(x) = \operatorname{tg} x$
 - (l) $f(x) = \operatorname{ctg} x$
 - (m) $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$
 - (n) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln x}$
 - (o) $f(x) = \frac{2^x - x^4}{x + 2}$
 - (p) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 15}{3 \sin x}$
 - (q) $f(x) = \frac{\operatorname{cgt} x}{e^x + 4}$
 - (r) $f(x) = \sin(x^3)$
 - (s) $f(x) = (\sin x)^3$
 - (t) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$
 - (u) $f(x) = e^{x^2 - \frac{1}{x} + 3}$
 - (v) $f(x) = e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln(x^2 + \cos x)}$
 - (w) $f(x) = x^x$
 - (x) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$
 - (y) $f(x) = \sin\left(\frac{\sqrt{x+3}}{2^x + x^2}\right)$
 - (z) $f(x) = (x^3 + 3)^{\operatorname{arctg} x}$
 - (aa) $r(\varphi) = 4^\varphi \cdot \ln \varphi + 2$
 - (ab) $V(t) = t^6 \cdot \cos(3t)$
 - (ac) $h(t) = t \cdot p^5 - p^7 + t, p$ valós paraméter
 - (ad) $h(p) = t \cdot p^5 - p^7 + t, t$ valós paraméter
 - (aa) $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot (\sqrt{x} + 3^x)^{x+4}$

(4) Határozza meg az alábbi határértékeket:

$$\begin{array}{llll}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(5x)}{3x} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2 + x + 11} & \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot \ln(x)) & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x & \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) \\
 \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{x-1}{x-x^2}} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \frac{x}{2}}{x-2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^2} & \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt[3]{x}} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{\ln x} & \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} & \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln(x^2 + 1)) & \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \operatorname{tg} x
 \end{array}$$

(5) Írja fel az alábbi $f(x)$ függvények m meredekségű érintőjének egyenletét:

(a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 18x + 20$, $m = 6$

(b) $f(x) = -\frac{1}{x+2} + x$, $m = 10$

(c) $f(x) = \frac{1}{2} \arctg(2x+3)$, $m = \frac{1}{26}$

(6) Hol növekvő, hol csökkenő, hol van lokális szélsőértéke és milyen a szélsőérték jellege az $f(x)$ függvénynek, ha a derivált függvénye az alábbi:

(a) $f'(x) = (x+4)(x-3)^2$

(b) $f'(x) = \frac{(x+5)^2(x-1)}{x-3}$

(c) $f'(x) = \ln x \cdot \frac{(x-2)^2(x-5)}{(x+3)(x-4)}$

(7) Hol konvex, hol konkáv, hol van inflexiós pontja az $f(x)$ függvénynek, ha a második derivált függvénye az alábbi:

(a) $f''(x) = (x+4)(x-3)^2$

(b) $f''(x) = \frac{(x+4)^3(x-2)^2}{x+1}$

(c) $f''(x) = \frac{\sqrt{x}(x-4)}{(x-1)^2(x-2)} \cdot 2^x$

(8) Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken:

(a) $f(x) = 3x - x^3$

(b) $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(c) $h(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$

(d) $i(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

(e) $j(x) = x^2 e^{-x}$

(f) $k(x) = x \lg x$

(g) $l(x) = \ln(x^2+4)$

(h) $m(x) = \ln(x^2-1)$

(9) Határozza meg az alábbi függvények x_0 körüli n -ed fokú Taylor polimontját!

(a) $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 3$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $n = 4$

(b) $f(x) = e^{1-2x}$, $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$, $n = 3$, $n = 4$

(c) $f(x) = \ln(x+2)$, $x_0 = 0$, $x_0 = -1$, $n = 3$

(10) Oldja meg a következő szöveges feladatokat!

(a) Egy felül nyitott, négyzet alapú doboz készítéséhez $2m^2$ területű lemezt használhatunk fel. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy a térfogata a legnagyobb legyen, és mekkora ez a legnagyobb térfogat?

- (b) Egy folyó két partján van két város, a képen látható elrendezés szerint. Szeretnénk kábelt fektetni a két város között. A kábelfektetés költsége 1000 peták méterenként a szárazföldön, 2000 peták méterenként a víz alatt. Milyen útvonal(ak) esetén minimális a költség?
- (c) Egy felül nyitott henger alakú, $1/2$ l térfogatú mérőedényt szeretnénk készíteni. Hogyan válasszuk az edény alapsugarát és magasságát, hogy minél kevesebb lemezt használjunk fel, és mennyi felhasznált lemezmenyiség?
- (d) Legfeljebb mekkora téglalap alakú területet lehet körbekeríteni 400 méter kerítéssel?
- (e) Legalább mennyi kerítés kell egy 25 m^2 alapterületű téglalap alakú telek körbekerítéséhez?

VIII. feladatsor

- (1) Az alapfüggvények integrálja segítségével határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = x^4 \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + 2 & \text{(b)} f(x) = \frac{3x^4 - 2}{x^5} \\ \text{(c)} f(x) = e^x - 4 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} & \text{(d)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - 4x^2}} \\ \text{(e)} f(x) = \frac{2}{3 + 3x^2} + 4 & \text{(f)} f(x) = 5^x - 3x^5 + \frac{2}{x} + 3 \\ \text{(g)} f(x) = 4 \cos x - \frac{3}{\sin^2 x} & \text{(h)} f(x) = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} - 3\sqrt{3} \end{array}$$

- (2) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = (1 - 7x)^2 & \text{(b)} f(x) = \frac{3}{2x + 3} \\ \text{(c)} f(x) = e^{2-4x} & \text{(d)} f(x) = \sin(5 - 3x) \\ \text{(e)} f(x) = \frac{1}{\sin^2(4x + 1)} & \text{(f)} f(x) = \frac{2}{1 + (4x + 3)^2} \\ \text{(g)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (5x + 2)^2}} & \text{(h)} f(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{5x + 3}} \end{array}$$

- (3) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = 4 \sin x \cdot \cos^5 x & \text{(b)} f(x) = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{3 + 2x^3}} \\ \text{(c)} f(x) = \frac{2x}{\sqrt[4]{x^2 + 2}} & \text{(d)} f(x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{2 \cos^2 x} \\ \text{(e)} f(x) = \sqrt[5]{x^3 - 2} \cdot x^2 & \text{(f)} f(x) = \frac{\sqrt[3]{\arctg^2 x}}{1 + x^2} \\ \text{(g)} f(x) = \frac{3 \ln^4 x}{x} & \text{(h)} f(x) = \frac{4}{(\arccos^2(x)) \cdot \sqrt{1 - x^2}} \\ \text{(i)} f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x} & \text{(j)} f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x)^4} \end{array}$$

- (4) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = \frac{2}{4x + 1} & \text{(b)} f(x) = \frac{7}{4 - 3x} \\ \text{(c)} f(x) = \frac{-5x}{1 + x^2} & \text{(d)} f(x) = \frac{4 \cos x}{1 + 3 \sin x} \\ \text{(e)} f(x) = \frac{4e^{-x}}{5 + 3e^{-x}} & \text{(f)} f(x) = \frac{2}{(1 + x^2) \arctg(x)} \end{array}$$

- (5) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = e^{1+\sin x} \cos x & \text{(b)} f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{4x^2} \\ \text{(c)} f(x) = \frac{\cos(5\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & \text{(d)} f(x) = \frac{4}{x^3} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{array}$$

- (6) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját parciális integrálással:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = (2x - 5) \cos x & \text{(b)} f(x) = (x^2 - 1) \sin x \\ \text{(c)} f(x) = (4x + 3)e^{2x} & \text{(d)} f(x) = 4xe^{1-2x} \\ \text{(e)} f(x) = \sin(2x)e^{1-x} & \text{(f)} f(x) = \arcsin x \\ \text{(g)} f(x) = (x^2 - 2x + 1) \ln x & \text{(h)} f(x) = \ln x \\ \text{(i)} f(x) = \arctg x & \text{(j)} f(x) = 2x \arctg x \\ \text{(k)} f(x) = \cos(2x + 2)e^{3x-4} & \text{(l)} f(x) = \ln^2(x) \cdot (x^2 + x + 2) \end{array}$$

(7) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

$$(a) f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{9x^2 + 1}$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{16x^2 + 25}$$

$$(d) f(x) = \frac{2}{5x^2 + 3}$$

$$(e) f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$$

$$(f) f(x) = \frac{3}{x^2 - 6x + 13}$$

$$(g) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$(h) f(x) = \frac{1}{\sqrt{6x - 9x^2}}$$

$$(i) f(x) = \frac{1}{\sqrt{-4x^2 - 12x - 8}}$$

$$(j) f(x) = \frac{1}{\sqrt{12x - 9x^2 - 3}}$$

IX. feladatsor

(1) Határozza meg az alábbi határozott integrálok értékét:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx & \text{(b)} \int_2^7 \sqrt{x+2} dx & \text{(c)} \int_{2\sqrt{2}}^3 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ \text{(d)} \int_1^e \ln x dx & \text{(e)} \int_{-4}^{-2} \frac{1}{x^2+8x+20} dx & \text{(f)} \int_0^\pi \sin x dx \end{array}$$

(2) Határozza meg a területeket, ha:

(a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, és $x \in [-6; -3]$

(b) $f(x) = xe^{2x}$, és $x \in [0; 1]$

(c) $f(x) = \sqrt{x+3}$, és $x \in [-3; 1]$

(3) Határozza meg a két görbe által közrezárt területet!

(a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x+2$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{3}$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$

(4) Határozza meg az $f(x)$ és az x tengely által közbezárt területet!

(a) $f(x) = x^2 - 5x$

(b) $f(x) = -x^2 - 5x$

(c) $f(x) = (x-2) \ln x$

(5) Határozza meg az alábbi függvények x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogatát!

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $x \in [0; 1]$

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ $x \in [-2; 0]$

(c) $f(x) = \frac{2}{4-x}$, $x \in [0; 2]$

(d) $f(x) = e^x + 1$, $x \in [0; 1]$

(e) $f(x) = x\sqrt{\ln x}$, $x \in [1; e]$

(f) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4x^2+4x+10}}$, $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$