III. feladatsor

(1) Töltse ki az alábbi táblázatot:

Komplex szám	Valós rész	Képzetes rész	Konjugált	Abszolútérték
$4+2i$	4	2	$4-2i$	$\sqrt{20}$
$-3+4i$	-3	4	$-3-4i$	5
$5i-1$	-1	5	$-5i-1$	$\sqrt{26}$
$-6i$	0	-6	$6i$	6
$-3+5i$	-3	5	$-3-5i$	$\sqrt{34}$
$3+2i$	3	2	$3-2i$	$\sqrt{13}$
$-7i$	0	-7	$7i$	7

(2) Adottak az alábbi komplex számok: $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = 2i$. Határozza meg az alábbiakat:

(a) $3+2i$ (b) $3-2i$ (c) $3-2i$ (d) $1+4i$

(e) $\sqrt{13}$ (f) $\sqrt{13}+\sqrt{2}$ (g) $5+i$ (h) $-1-5i$

(i) $2+2i$ (j) $5-i$ (k) $5-i$ (l) $\sqrt{26}$

(m) $\sqrt{26}$ (n) $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$ (o) $-\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i$ (p) $\frac{3}{2}-i$

(q) $-\frac{1}{2}i$ (r) $-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$ (s) $-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$ (t) $-5-i$

(u) $\frac{\sqrt{442}}{2}$

(3) Legyen $z_1 = 3(\cos 60° + i\sin 60°)$ valamint $z_2 = 12(\cos 120° + i\sin 120°)$. Határozza meg az alábbiakat:

(a) 3

(b) 12

(c) $36(\cos 180° + i\sin 180°)$

(d) $\frac{1}{4}(\cos 300° + i\sin 3000°)$

(e) $3^3(\cos 180° + i\sin 180°)$

(f) $\sqrt[3]{3}(\cos\frac{60°+k\cdot 360°}{3} + i\sin\frac{60°+k\cdot 360°}{3})$ $k=0,1,2$ $(20°, 140°, 260°)$

(g) $\sqrt[4]{12}(\cos\frac{120°+k\cdot 360°}{4} + i\sin\frac{120°+k\cdot 360°}{4})$ $k=0,1,2,3$ $(30°, 120°, 210°, 300°)$

(h) $\sqrt{36}(\cos\frac{180°+k\cdot 360°}{2} + i\sin\frac{180°+k\cdot 360°}{2})$ $k=0,1$ $(90°, 270°)$

(4) Töltse ki az alábbi táblázatot:

Algebrai alak	Trigonometrikus alak
$1+i$	$\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$
$1-\sqrt{3}i$	$2(\cos 300° + i\sin 300°)$
$-1+i$	$\sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°)$
2	$2(\cos 0° + i\sin 0°)$
i	$1(\cos 90° + i\sin 90°)$

(5) Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

(a) $z = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$

(b) $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 1-3i$

(c) $z_1 = \sqrt{3}+2i$,$z_2 = -\sqrt{3}$

(d) $z_1 = 3$, $z_2 = -3$

(e) $z_1 = 4i$, $z_2 = -4i$

(f) $z = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{135°+k\cdot 360°}{3} + i\sin\frac{135°+k\cdot 360°}{3})$ $k=0,1,2$ $(45°, 165°, 285°)$

(g) $z = \sqrt[12]{10}(\cos\frac{71,57°+k\cdot 360°}{6} + i\sin\frac{71,57°+k\cdot 360°}{6})$ $k=0,1,2,3,4,5$
$(11,93°, 71,93°, 131,93°, 191,93°, 251,93°, 311,93°)$

(h) $z_{1,2,3} = (\cos\frac{90°+k\cdot 360°}{3} + i\sin\frac{90°+k\cdot 360°}{3})$ $k=0,1,2$ $(30°, 150°, 270°)$

$z_{4,5,6} = \sqrt[3]{3}(\cos\frac{270°+k\cdot 360°}{3} + i\sin\frac{270°+k\cdot 360°}{3})$ $k=0,1,2$ $(90°, 210°, 330°)$

(i) $z_{1,2,3,4} = (\cos\frac{90°+k\cdot 360°}{4} + i\sin\frac{90°+k\cdot 360°}{4})$ $k=0,1,2,4$ $(22,5°, 112,5°, 202,5°, 292,5°)$

$z_{5,6,7,8} = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{45°+k\cdot 360°}{4} + i\sin\frac{45°+k\cdot 360°}{4})$ $k=0,1,2,3$ $(11,25°, 101,25°, 191,25°, 281,25°)$

(j) $z_{1,2,3} = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{90°+k\cdot 360°}{3} + i\sin\frac{90°+k\cdot 360°}{3})$ $k=0,1,2$ $(30°, 150°, 270°)$

$z_{4,5,6} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}(\cos\frac{45°+k\cdot 360°}{3} + i\sin\frac{45°+k\cdot 360°}{3})$ $k=0,1,2,3$ $(15°, 135°, 255°)$

(6) Végezze el a kijelölt műveleteket:

(a) $2+3i$

(b) $2(\cos\dfrac{300° + k\cdot 360°}{3} + i\,\sin\dfrac{300° + k\cdot 360°}{3})\ k = 0,1,2\ (100°, 220°, 340°)$

(c) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(\cos 75° + i\,\sin 75°)$

(d) $-1+\sqrt{3}i$

(e) $\dfrac{1}{13}+\dfrac{5}{13}i$

(7) Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

(a) $z = 2+7i$

(b) $z = -\dfrac{23}{13} - \dfrac{11}{13}i$

(c) $z = \dfrac{2}{7} - i$

(d) $z = -\dfrac{5}{3} - \dfrac{7}{3}i$

(e) $z_1 = 0,\ z_2 = i,\ z_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i,\ z_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

(f) $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_4 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(g) $z_1 = i,\ z_2 = -i$

(h) $z_1 = 1-i,\ z_2 = 2-i$

(8) Határozza meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját:

(a) $z = \sqrt{2}(\cos 315° + i\,\sin 315°)$

(b) $z = 2(\cos 315° + i\,\sin 315°)$

(c) $z = 2\sqrt{2}(\cos 45° + i\,\sin 45°)$

(d) $z = 4(\cos 30° + i\,\sin 30°)$

(e) $z = \cos 60° + i\,\sin 60°$

IV. feladatsor

(1) Töltse ki az alábbi táblázatot:

$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$g(f(x))$	$f(f(x))$
$\sin(x)$	x^3	$\sin(x^3)$	$\sin^3(x)$	$\sin(\sin(x))$
$\sin(x)+x+1$	$\sqrt{x}$	$\sin(\sqrt{x})+\sqrt{x}+1$	$\sqrt{\sin x+x+1}$	$\sin(\sin(x)+x+1)+\sin x+x+1+1$
$\frac{1}{x+2}$	3^x+1	$\frac{1}{3^x+1+2}$	$3^{\frac{1}{x+2}}+1$	$\frac{1}{\frac{1}{x+2}+2}$
$\cos(x)$	x^4	$\cos(x^4)$	$\cos^4(x)$	$\cos(\cos(x))$
$\sin(x)$	2^x	$\sin(2^x)$	$2^{\sin(x)}$	$\sin(\sin(x))$
$\lg(x)$	x^3+2x-1	$\lg(x^3+2x-1)$	$\lg^3(x)+2\lg(x)-1$	$\lg(\lg(x))$
$\arcsin(x)$	$\sqrt{x}$	$\arcsin(\sqrt{x})$	$\sqrt{\arcsin(x)}$	$\arcsin(\arcsin(x))$
$\ln(x)$	e^x	x	x	$\ln(\ln(x))$
$\ln(x)$	x^2	$\ln(x^2)$	$\ln^2(x)$	$\ln(\ln(x))$
$\ln(x)$	$\ln(x)$	$\ln(\ln(x))$	$\ln(\ln(x))$	$\ln(\ln(x))$

(2) Határozza meg a valós számok legbővebb részhalmazát, ahol az alábbi függvények értelmesek:

(a) $D_f =]-\infty;-4[\cup]-4;-1]\cup[5;\infty[$

(b) $D_f =]-2;2]\setminus\{-\frac{3}{2}\}$

(c) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

(d) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

(e) $D_f =]-\infty;-11[\cup]2;\infty[$

(f) $D_f = [-1;\infty[$

(g) $D_f =]\frac{1}{3};\infty[$

(h) Három kikötést kell tenni:

- $\arccos(x)$ értelmezési tartománya: $[-1,1]$. Jelölje ezt H_1.
- $\ln(x)$ értelmezési tartománya: $]0,\infty[$. Jelölje ezt H_2.
- a nevező nem lehet nulla. Jelölje ezt H_3.

Ezekket: $D_f = H_1\cap H_2\setminus H_3$

Ezeket külön-külön megoldjuk:

- $$-1\le x+2\le 1 \qquad \setminus -2$$
  $$-3\le x\le -1$$
  azaz $H_1 = [-3;-1]$
- $$x+4>0 \qquad \setminus -4$$
  $$x>-4$$
  azaz $H_2 =]-4;\infty[$
- $$\ln(x+4)\neq 0=\ln 1$$
  a logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt
  $$x+4\neq 1 \qquad \setminus -4$$
  $$x\neq -3$$

azaz $H_3 = \{-3\}$

Vagyis: $D_f = H_1\cap H_2\setminus H_3 =]-3;-1]$

(3)

(4) Határozza meg az alábbi függvények inverz függvényét, ha létezik:

(a) $D_f=\mathbb{R}$, $R_f=\mathbb{R}$, $D_{\overline{f}}=\mathbb{R}$, $R_{\overline{f}}=\mathbb{R}$, $\overline{f}(x)=\frac{x+6}{4}$

(b) $D_f=[-3;\infty[$, $R_f=[0;\infty[$, $D_{\overline{f}}=[0,\infty[$, $R_{\overline{f}}=[-3,\infty[$, $\overline{f}(x)=\frac{x^2-6}{2}$

(c) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$, $R_f=\mathbb{R}\setminus\{-6\}$, $D_{\overline{f}}=\mathbb{R}\setminus\{-6\}$, $R_{\overline{f}}=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$, $\overline{f}(x)=\frac{3}{x+6}-5$

(d) $D_f=\mathbb{R}$, $R_f=]3,\infty[$, $D_{\overline{f}}=]3,\infty[$, $R_{\overline{f}}=\mathbb{R}$, $\overline{f}(x)=\log_2(x-3)+7$

(e) $D_f=]5,\infty[$, $R_f=\mathbb{R}$, $D_{\overline{f}}=\mathbb{R}$, $R_{\overline{f}}=]5,\infty[$, $\overline{f}(x)=\frac{5^{x-6}+10}{2}$

(f) $D_f=\mathbb{R}$, $R_f=[3,\infty[$ de így nem invertálható. $D_f=[4,\infty[$, $R_f=[3,\infty[$, $D_{\overline{f}}=[3,\infty[$, $R_{\overline{f}}=[4,\infty[$, $\overline{f}(x)=\sqrt{x-3}+4$

(g) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $D_{\overline{f}} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $R_{\overline{f}} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $\overline{f}(x) = \dfrac{2}{x-3} + 4$

(h) $D_f = [-\frac{1}{3}; 1] = R_{\overline{f}}$, $R_f = [0; 2\pi] = D_{\overline{f}}$, $\overline{f}(x) = \dfrac{1}{3}\left(2\sin\left(\dfrac{x-\pi}{2}\right) + 1\right)$

(i) $D_f = \mathbb{R} = R_{\overline{f}}$, $R_f = [-\frac{\pi}{2}; 0] = D_{\overline{f}}$, $\overline{f}(x) = 4\mathrm{tg}\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$

(j) $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-4; -2]$ de így nem invertálható. Leszűkítés pl.: $D_f = [\pi; 5\pi] = R_{\overline{f}}$, $R_f = [-4; -2] = D_{\overline{f}}$, $\overline{f}(x) = 4\arccos(x+3) + \pi$

(5) Páros, páratlan vagy egyik sem az alábbi függvény:

(a) $f(x) = e^{-x}x^2$, $f(-x) = e^{x}x^2$ azaz egyik sem.

(b) $f(x) = e^{-x^2}\sin x$, $f(-x) = -e^{-x^2}\sin x$, azaz páratlan.

(c) $f(x) = x^2 + \cos x + 2$, $f(-x) = x^2 + \cos x + 2$, azaz páros.

V. feladatsor

(1) Adja meg az $a_n = \dfrac{5n-1}{2n+1}$ sorozat következő elemeit: $a_1 = \dfrac{4}{3}, a_2 = \dfrac{9}{5}, a_{n+1} = \dfrac{5n+4}{2n+3}, a_{n-3} = \dfrac{5n-16}{2n-5}$.

(2) Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából:

(a) Szigorúan monoton csökkenő, $K = a_1 = \dfrac{1}{5}$ $k = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Szigorúan monoton nő, $k = a_1 = \dfrac{4}{3}$ $K = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

(c) Se nem csökken, se nem nő. $K = \dfrac{1}{4}$ $k = -\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(d) A harmadik tagtól kezdve szigorúan monoton csökkenő. $K = a_3 = 7$ $k = a_2 = -10$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{4}{3}$

(3) Adottak az alábbi konvergens sorozatok. Adja meg a határértéket, és azt a küszöbindexet, amelynél nagyobb indexű tagjai a sorozatnak $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$-nál kisebb hibával közelítik a határértéket!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$, $n_0 = 100$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -3$, $n_0 = 1296$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{4}$, $n_0 = 31$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{4}{3}$, $n_0 = 380$

(4) Határozza meg az alábbi nevezetes sorozatok határértéket:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-3}$ (h) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ (k) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (l) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

(5) A nevezetes sorozathatárértékek ismeretével és a műveletekre vonatkozó tételek segítségével határozza meg mely sorozatok konvergensek és mi a határértékük!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

(6) Határozza meg a következő sorozatok határértékét:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{5}{7}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{5}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{7}{9}$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (h) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ (j) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{7}{3}$

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{1}{7}$ (l) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$

(7) Határozza meg a következő sorozatok határértékét:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{4}{\sqrt[3]{5}}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{1}{3}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{15}{16}$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (l) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$

(8) Határozza meg a következő sorozatok határértékét:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{1}{3}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{4}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{32}$ (h) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

VI. feladatsor

(1) Határozza meg az alábbi függvényhatárértékeket a függvény grafikonjának ismeretében:

(a) $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0,\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ nem létezik

(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0,\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0,\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

(d) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$ nem létezik, $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$

(e) $\lim_{x\to+\infty} 2^x = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$

(f) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0,\ \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$

(g) $\lim_{x\to 0} \lg x$ nem létezik, $\lim_{x\to 0^+} \lg x = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \lg x = +\infty$

(h) $\lim_{x\to 0} \log_{\frac{1}{2}} x$ nem létezik, $\lim_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$

(i) $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ nem létezik, $\lim_{x\to-\infty} \sin x$ nem létezik

(j) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$

(k) $\lim_{x\to-1^+} \arcsin x = -\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to 1} \arcsin x$ nem létezik, $\lim_{x\to 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

(l) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

(m) $\lim_{x\to-1^+} \arccos x = \pi,\ \lim_{x\to 1} \arccos x$ nem létezik

(n) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0,\ \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$

(o)

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{ha } x \geq 1 \\ 4^x & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 1} f(x)$ nem létezik, $\lim_{x\to 2} f(x) = 8$

(p)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{ha } x < 2 \\ \sqrt{x} & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 2} f(x)$ nem létezik, $\lim_{x\to 9} f(x) = 3$

(q)

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x \frac{1}{3} & \text{ha } x \geq -1 \\ -\frac{1}{x} & \text{ha } x < -1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to-1} f(x) = 1,\ \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3},\ \lim_{x\to 10} f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{11}$

(2) Határozza meg az alábbi függvények x_0-beli határértékét:

(a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

(c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{3}{4},\ \lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{3}{4}$

(d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{7}{2},\ \lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{7}{2}$

(e) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

(f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

(g) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 1,\ \lim_{x\to-3} f(x) = \frac{5}{4},\ \lim_{x\to 0} f(x) = 2,\ \lim_{x\to 1} f(x)$ nem létezik

(h) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0} f(x)$ nem létezik, $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{2}{3},\ \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{3}{4},\ \lim_{x\to 4} f(x)$ nem létezik

(i) $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3},\ \lim_{x\to 1} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 2} f(x) = -1,\ \lim_{x\to 3} f(x)$ nem létezik

(j) $\lim_{x\to-1} f(x) =$ nem létezik, $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$

(k) $\lim_{x\to-3} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

(l) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

(m) $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2},\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

(n) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

(3) Határozza meg az alábbi határértékeket:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}} = -\sqrt{5}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{3-2x}-\sqrt{3+2x}} = -\sqrt{3}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{3x} = \frac{2}{3}$ (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{7x} = \frac{5}{7}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \frac{5}{7}$ (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{4x} = \frac{5}{4}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{7x} = \frac{5}{7}$ (h) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{\sin(3x)} = \frac{4}{3}$

(i) $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ (j) $\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right) = \frac{\pi}{4}$

VII. feladatsor

(1) Adja meg az x_0 helyhez tartozó differenciahányados függvényt, a differenciálhányados értékét a definíció alapján:

(a) $f(x)=5$, $x_0=2$, $x_0=-3$ $d_2(x)=\dfrac{5-5}{x-2}=0$ $f'(2)=0$

$d_{-3}(x)=\dfrac{5-5}{x+3}=0$ $f'(-3)=0$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=2$, $x_0=-3$ $d_2(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=-\dfrac{1}{2x}$ $f'(2)=-\dfrac{1}{4}$

$d_{-3}(x)=\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}{x+3}=\dfrac{1}{3x}$ $f'(-3)=-\dfrac{1}{9}$

(c) $f(x)=\sqrt{x}+x$, $x_0=-3$, $x_0=2$, $x_0=4$

$x_0=-3$ -ban a függvény nincs értelmezve.

$d_2(x)=\dfrac{\sqrt{x}+x-\sqrt{2}-2}{x-2}=1+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$ $f'(2)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$d_4(x)=\dfrac{\sqrt{x}+x-\sqrt{4}-4}{x-4}=1+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{4}}$ $f'(4)=1+\dfrac{1}{4}$

(2) Adja meg az alábbi függvények szelő egyeneseinek egyenletét, valamint az érintő egyenesek egyenletét:

(a) $f(x)=4x^2+1$, $P_1(0,1)$, $P_2(-1,5)$ $e_1: y=1$, $e_2: y=-8x-3$, $sz: y=-4x+1$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $P_1(2,\dfrac{1}{2})$, $P_2(-3,-\dfrac{1}{3})$ $e_1: y=-\dfrac{1}{4}x+1$, $e_2: y=-\dfrac{1}{9}x-\dfrac{2}{3}$, $sz: y=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{6}$

(3) Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit:

(a) $f'(x)=\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{x^2}$

(b) $f'(x)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\ln\dfrac{2}{3}-4\cos x$

(c) $f'(x)=6x^2+\dfrac{1}{x\ln 3}$

(d) $f'(x)=12x^3+\sin x-\dfrac{5}{x^2}$

(e) $f'(x)=\cos x\cdot \operatorname{tg} x+\sin\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(f) $f'(x)=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\dfrac{1}{x}$

(g) $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 10}\cdot\arcsin x+\lg x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(h) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\lg x+\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{x\ln 10}$

(i) $f'(x)=20x^4\cdot\operatorname{arctg} x+4x^5\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$

(j) $f'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\sin x+\ln x\cdot\cos x$

(k) $f'(x)=\dfrac{1}{cos^2 x}$

(l) $f'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(m) $f'(x)=\dfrac{e^x\sin x-e^x\cos x}{\sin^2 x}$

(n) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}\ln x-\operatorname{tg} x\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$

(o) $f'(x)=\dfrac{(2^x\ln 2-4x^3)(x+2)-(2^x-x^4)}{(x+2)^2}$

(p) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}3\sin x-(\sqrt[3]{x}+15)3\cos x}{9\sin^2 x}$

(q) $f'(x)=\dfrac{-\frac{1}{\sin^2 x}(e^x+4)-cgtx\cdot e^x}{(e^x+4)^2}$

(r) $f'(x)=\cos(x^3)\cdot 3x^2$

(s) $f'(x)=3(\sin x)^2\cos x$

(t) $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+4}\cdot 2x$

(u) $f'(x)=e^{x^2-\frac{1}{x}+3}\cdot(2x+\dfrac{1}{x^2})$

(v) $f'(x)=e^{\operatorname{tg} x\cdot\ln(x^2+\cos x)}\cdot\left(\dfrac{\ln(x^2+\cos x)}{\cos^2}+\operatorname{tg} x\dfrac{2x-\sin x}{x^2+\cos x}\right)$

(w) $f'(x)=x^x\cdot(\ln x+1)$

(x) $f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot (\frac{\cos x}{\sin x} \cos x - \ln(\sin x) \sin x)$

(y) $f'(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{x+3}}{2^x + x^2}\right) \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}(2^x + x^2) - \sqrt{x+3}(2^x \ln 2 + 2x)}{(2^x + x^2)^2}\right)$

(z) $f'(x) = (x^3+3)^{\operatorname{arctg} x}\left(\frac{3x^2}{x^3+3}\operatorname{arctg} x + \frac{\ln(x^3+3)}{1+x^2}\right)$

(aa) $r'(\varphi) = 4^{\varphi} \ln 4 \cdot \ln \varphi + 4^{\varphi}\frac{1}{\varphi}$

(ab) $V'(t) = 6t^5 \cdot \cos(3t) - t^6 \sin(3t) \cdot 3$

(ac) $h'(t) = p^5 + 1$, p valós paraméter

(ad) $h'(p) = t5 \cdot p^4 - 7p^6$, t valós paraméter

(ae) $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot (\sqrt{x} + 3^x)^{x+4} + \operatorname{ctg} x \cdot (\sqrt{x} + 3^x)^{x+4}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3^x \ln 3}{\sqrt{x} + 3^x}(x+4) + \ln(\sqrt{x} + 3^x)\right)$

(4) Határozza meg az alábbi határértékeket:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(5x)}{3x} = \frac{5}{3} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{3x^2+x+11} = \frac{1}{3} \qquad \lim_{x\to 0^+}(x^2 \cdot \ln(x)) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^x = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = -\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x \sin x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 1} e^{\frac{x-1}{x-x^2}} = e^{-1} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{\ln\frac{x}{2}}{x-2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^2} = \infty \qquad \lim_{x\to 0} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x = \frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to 0+}(\sin x)^x = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg} x)^{\sqrt[3]{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\ln x} = \infty \qquad \lim_{x\to 0+}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^2 \qquad \lim_{x\to\infty}(x - \ln(x^2+1)) = \infty \qquad \lim_{x\to 0+}\ln x \cdot \operatorname{tg} x = 0$$

(5) Írja fel az alábbi $f(x)$ függvények m meredekségű érintőinek egyenletét:

(a) $x_1 = 1$, $e_1 : y = 6x + 25$, $x_2 = 2$, $e_1 : y = 6x + 24$

(b) $x_1 = -\frac{5}{3}$, $e_1 : y = 10x + \frac{36}{3}$, $x_2 = -\frac{7}{3}$, $e_1 : y = 10x + \frac{72}{3}$

(c) $x_1 = 1$, $e_1 : y = \frac{1}{26}x + 0,6482$, $x_2 = -4$, $e_1 : y = \frac{1}{26}x - 0,5329$

(6) Hol növekvő, hol csökkenő, hol van lokális szélsőértéke és milyen a szélsőérték jellege az $f(x)$ függvénynek, ha a derivált függvénye az alábbi:

(a) $f'(x) = (x+4)(x-3)^2$

	$]-\infty;-4[$	-4	$]-4;3[$	3	$]3,\infty[$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	-	$\nearrow$

(b) $f'(x) = \frac{(x+5)^2(x-1)}{x-3}$

	$]-\infty;-5[$	-5	$]-5;1[$	1	$]1;3[$	3	$]3,\infty[$
$f'(x)$	+	0	+	0	-	X	+
$f(x)$	$\nearrow$	-	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	-	$\nearrow$

(c) $f'(x) = \ln x \cdot \frac{(x-2)^2(x-5)}{(x+3)(x-4)}$

	$]0;1[$	1	$]1;2[$	2	$]2;4[$	4	$]4{,}5[$	5	$]5,\infty[$
$f'(x)$	-	0	+	0	+	X	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	-	$\nearrow$	-	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

(7) Hol konvex, hol konkáv, hol van inflexiós pontja az $f(x)$ függvénynek, ha a második derivált függvénye az alábbi:

(a) $f''(x) = (x+4)(x-3)^2$

	$]-\infty;-4[$	-4	$]-4;3[$	3	$]3,\infty[$
$f''(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$\frown$	infl. pont	$\smile$	-	$\smile$

(b) $f''(x) = \frac{(x+4)^3(x-2)^2}{x+1}$

	$]-\infty;-4[$	-4	$]-4;-1[$	-1	$]-1;2[$	2	$]2,\infty[$
$f''(x)$	+	0	-	X	+	0	+
$f(x)$	$\smile$	infl. pont	$\frown$	-	$\smile$	-	$\smile$

(c) $f''(x) = \frac{\sqrt{x}(x-4)}{(x-1)^2(x-2)} \cdot 2^x$

	0	$]0;1[$	1	$]1;2[$	2	$]2;4[$	4	$]4,\infty[$
$f''(x)$	0	+	X	+	X	-	0	+
$f(x)$	-	$\smile$	-	$\smile$	-	$\frown$	infl. pont	$\smile$

(8) Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken:

(a) 1. $D_f = \mathbb{R}$

2. zérushelye van a $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ pontokban

3. páratlan, $f(0) = 0$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

5. $f'(x) = 3 - 3x^2$, a derivált zérushelyei (lehetséges lokális szélsőértékhelyek): $-1, 1$.

6.

x	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,1[$	1	$]1,\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min. $f(-1) = -2$	$\nearrow$	lok. max $f(1) = 2$	$\searrow$

7. $f''(x) = -6x$, a második derivált zérushelyei (lehetséges inflexiós pontok): 0.

8.

x	$]-\infty,0[$	0	$]0,\infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$ konvex	inflexiós pont $f(0) = 0$	$\frown$ konkáv

10. $R_f = \mathbb{R}$.

(b) 1. $D_g = \mathbb{R}$.

2. nincs zérushelye.

3. páros, $f(0) = 1$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

5. $g'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, a derivált zérushelye az $x = 0$.

6.

x	$]-\infty,0[$	0	$]0,\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max. $f(0) = 1$	$\searrow$

7. $g''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$, a második derivált zérushelyei az $x = -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$ pontok.

x	$]-\infty,-1/\sqrt{3}[$	$-1/\sqrt{3}$	$]-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}[$	$1/\sqrt{3}$	$]1/\sqrt{3},\infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\smile$ konvex	inflexiós pont $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4}$	$\frown$ konkáv	inflexiós pont $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4}$	$\smile$ konvex

10. $R_g =]0;1]$

(c) $h(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$

1. A h függvény mindenhol értelmezett, kivéve az $x = 0$ pontot. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Zérushely: $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

3. $h(-x) = 4x^2 - \frac{1}{x}$, nem páros, nem páratlan. $h(0)$ nincs értelmezve.

4. $\lim\limits_{x\to-vv} h(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} h(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$

5. $h'(x) = 8x - \frac{1}{x^2}$. $h'(x) = 0$ akkor, ha $x = \frac{1}{2}$.

6.

x	$]-\infty,0[$	0	$]0,2[$	2	$]2,\infty[$
$h'(x)$	$-$	X	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$		$\searrow$	lok. min. $h(\frac{1}{2}) = 3$	$\nearrow$

7. $h''(x) = 8 + \frac{2}{x^3}$, $h''(x) = 0$, ha $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

8.

10. $R_h = \mathbb{R}$

x	$]-\infty,-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}[$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$]-\frac{1}{\sqrt[3]{4}},0[$	0	$]0,\infty[$
$h''(x)$	$+$	0	$-$	X	$+$
$h(x)$	$\smile$	inflexiós pont $h(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}})=0$	$\frown$		$\smile$

(d) $i(x)=\frac{x^2}{x^2+4}$
1. $D_i=\mathbb{R}$.
2. Zérushely $x=0$.
3. $i(-x)=\frac{x^2}{x^2+4}=i(x)$ azaz a függvény páros, $i(0)=0$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} i(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty} i(x)=1$.
5. $i'(x)=\frac{8x}{(x^2+4)^2}$, $i'(x)=0$, ha $x=0$
6.

x	$]-\infty,0[$	0	$]0,\infty[$
$i'(x)$	$-$	0	$+$
$i(x)$	$\searrow$	lok. min. $i(0)=0$	$\nearrow$

7. $i''(x)=\frac{8(4-3x^2)}{(x^2+4)^3}$, $i''(x)=0$ ha $x_1=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$
8.

x	$]-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}[$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$]-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}[$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$]\frac{2\sqrt{3}}{3},\infty[$
$i''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$i(x)$	$\frown$	inflexiós pont $i(-\frac{2\sqrt{3}}{3})=\frac{1}{4}$	$\smile$	inflexiós pont $i(\frac{2\sqrt{3}}{3})=\frac{1}{4}$	$\frown$

10. $R_i=[0;1[$

(e) $j(x)=x^2e^{-x}$
1. $D_j=\mathbb{R}$
2. Zérushely: $x=0$
3. $j(-x)=x^2e^x$ nem páros, nem páratlan. $j(0)=0$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} j(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} j(x)=0$
5. $j'(x)=e^{-x}(2x-x^2)$, $j'(x)=0$ ha $x_1=0$, $x_2=2$
6.

x	$]-\infty,0[$	0	$]0,2[$	2	$]2,\infty[$
$j'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$j(x)$	$\searrow$	lok. min. $j(0)=0$	$\nearrow$	lok. max. $j(2)=\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

7. $j''(x)=e^{-x}(x^2-4x+2)$, $j''(x)=0$, ha $x_1=2-\sqrt{2}$, $x_2=2+\sqrt{2}$.
8.

x	$]-\infty,2-\sqrt{2}[$	$2-\sqrt{2}$	$]2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}[$	$2+\sqrt{2}$	$]2+\sqrt{2},\infty[$
$j''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$j(x)$	$\smile$	inflexiós pont $j(2-\sqrt{2})\approx 0,19$	$\frown$	inflexiós pont $j(2+\sqrt{2})\approx 0,38$	$\smile$

10. $R_j=]0,\infty[$

(f) $k(x)=x\lg(x)$
1. $D_k=]0;\infty[$
2. Zérushely: $x=1$
3. nem páros, nem páratlan, ui. negatív x-re nincs értelmezve. $k(0)$ szintén nincs értelmezve.
4. $\lim\limits_{x\to0^+} k(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} k(x)=\infty$
5. $k'(x)=\lg x+\frac{1}{\ln 10}$, $k'(x)=0$ ha $x=\frac{1}{e}$

6.

x	$]0, \frac{1}{e}[$	$\frac{1}{e}$	$]\frac{1}{e}, \infty[$
$k'(x)$	$-$	0	$+$
$k(x)$	$\searrow$	lok. min. $k(\frac{1}{e}) = -0,16$	$\nearrow$

7. $k''(x) = \frac{1}{x \ln 10}$, $k''(x)$-nek nincs zérushelye
8.

x	$]0, \infty[$
$k''(x)$	$+$
$k(x)$	$\smile$

10. $R_k =]-0,16, \infty[$

(g) $l(x) = \ln(x^2 + 4)$
1. $D_l = \mathbb{R}$
2. Zérushely nincs.
3. $l(-x) = \ln(x^2 + 4) = l(x)$ páros, $l(0) = \ln 4$.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} l(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} l(x) = \infty$
5. $l'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$, $l'(x) = 0$ ha $x = 0$
6.

x	$]-\infty, 0[$	0	$]0, \infty[$
$l'(x)$	$-$	0	$+$
$l(x)$	$\searrow$	lok. min. $l(0) = \ln 4$	$\nearrow$

7. $l''(x) = \frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$, $l''(x) = 0$, ha $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.
8.

x	$]-\infty, -2$	-2	$]-2; 2$	2	$]2; \infty[$
$l''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$l(x)$	$\frown$	inflexiós pont $l(-2) = \ln 8$	$\smile$	inflexiós pont $l(-2) = \ln 8$	$\frown$

10. $R_l = [\ln 4, \infty[$

(h) $m(x) = \ln(x^2 - 1)$
1. $D_m =]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$
2. Zérushely: $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$.
3. $m(-x) = \ln(x^2 - 1) = m(x)$ páros, $m(0)$ nincs értelmezve
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} m(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} m(x) = \infty$ $\lim\limits_{x \to -1^-} m(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} m(x) = -\infty$
5. $m'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$, $m'(x) = 0$ ha $x = 0$, de ez nem része az értelmezési tartománynak
6.

x	$]-\infty, -1[$	$]1, \infty[$
$m'(x)$	$-$	$+$
$m(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

7. $m''(x) = \frac{-2-2x^2}{(x^2-1)^2}$, $m''(x)$, seholsem nulla.
8.

x	$]-\infty, -1[$	$]1, \infty[$
$m''(x)$	$-$	$-$
$m(x)$	$\frown$	$\frown$

10. $R_m = \mathbb{R}$

(9) Határozza meg az alábbi függvények x_0 küröli n-ed fokú Taylor polimonját!

(a) $T_{f,0,4}(x) = 3 + x - 2x^2 + x^3 + x^4$

$T_{f,1,4}(x) = 4 + 4(x-1) + 7(x-1)^2 + 5(x-1)^3(x-1)^4 = 3 + x - 2x^2 + x^3 + x^4$

(b) $T_{f,0,3}(x) = e - 2ex + 2ex^2 - \frac{4}{3}ex^3$

$T_{f,0,4}(x) = e - 2ex + 2ex^2 - \frac{4}{3}ex^3 + \frac{2}{3}ex^4$

$T_{f,\frac{1}{2},3}(x) = 1 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$

$T_{f,\frac{1}{2},4}(x) = 1 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{3}e\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{3}e\left(x - \frac{1}{2}\right)^4$

$T_{f,1,3}(x) = e^{-1} - 2e^{-1}(x-1) + 2e^{-1}(x-1)^2 - \frac{4}{3}e^{-1}(x-1)^3$

$T_{f,1,4}(x) = e^{-1} - 2e^{-1}(x-1) + 2e^{-1}(x-1)^2 - \frac{4}{3}e^{-1}(x-1)^3 + \frac{2}{3}e^{-1}(x-1)^4$

(c) $T_{f,0,3}(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3$

$T_{f,-1,3}(x) = x + 1 - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{3}(x+1)^3$

VIII. feladatsor

(1) Az alapfüggvények integrálja segítségével határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

(a) $\int f(x)\,dx = \frac{x^{9/2}}{9/2} - \ln|x| + 2x + C$ (b) $\int f(x)\,dx = 3\ln|x| - 2\frac{x^{-4}}{-4} + C$

(c) $\int f(x)\,dx = e^x + 4\cos x + \operatorname{tg} x + C$ (d) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + C$

(e) $\int f(x)\,dx = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + 4x + C$ (f) $\int f(x)\,dx = \frac{5^x}{\ln 5} - 3\frac{x^6}{6} + 2\ln|x| + 3x + C$

(g) $\int f(x)\,dx = 4\sin x + 3\operatorname{ctg} x + C$ (h) $\int f(x)\,dx = 7\ln|x| + 4\frac{x^{-1}}{-1} - 3\sqrt{3}x + C$

(2) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját helyettesítéssel:

(a) $\int f(x)\,dx = \frac{(1-7x)^3}{-3\cdot 7} + C$ (b) $\int f(x)\,dx = 3\frac{\ln|2x+3|}{2} + C$

(c) $\int f(x)\,dx = \frac{e^{2-4x}}{-4} + C$ (d) $\int f(x)\,dx = -\frac{\cos(5-3x)}{-3} + C$

(e) $\int f(x)\,dx = \frac{-\operatorname{ctg}(4x+1)}{4} + C$ (f) $\int f(x)\,dx = 2\frac{\operatorname{arctg}(4x+3)}{4} + C$

(g) $\int f(x)\,dx = \frac{\arcsin(5x+2)}{5} + C$ (h) $\int f(x)\,dx = -\frac{\frac{(5x+3)^{2/3}}{2/3}}{5} + C$

(3) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját helyettesítéssel:

(a) $\int f(x)\,dx = -4\frac{\cos^6 x}{6} + C$ (b) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}\frac{(3+2x^3)^{2/3}}{2/3} + C$

(c) $\int f(x)\,dx = \frac{(x^2+2)^{3/4}}{3/4} + C$ (d) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$

(e) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3-2)^{6/5}}{6/5} + C$ (f) $\int f(x)\,dx = \frac{\operatorname{arctg}^{5/3} x}{5/3} + C$

(g) $\int f(x)\,dx = 3\frac{\ln^5 x}{5} + C$ (h) $\int f(x)\,dx = \frac{4}{\arccos x} + C$

(i) $\int f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{sin^2 x} + C$ (j) $\int f(x)\,dx = -\frac{1}{3}\frac{1}{(x^2+x)^3} + C$

(4) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját helyettesítéssel:

(a) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln|4x+1| + C$ (b) $\int f(x)\,dx = -\frac{7}{3}\ln|4-3x| + C$

(c) $\int f(x)\,dx = -\frac{5}{2}\ln|1+x^2| + C$ (d) $\int f(x)\,dx = \frac{4}{3}\ln|1+3\sin x| + C$

(e) $\int f(x)\,dx = -\frac{4}{3}\ln|5+3e^{-x}| + C$ (f) $\int f(x)\,dx = 2\ln|\operatorname{arctg} x| + C$

(5) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját helyettesítéssel:

(a) $\int f(x)\,dx = e^{1+\sin x} + C$ (b) $\int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{x}} + C$

(c) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{5}\sin(5\sqrt{x}) + C$ (d) $\int f(x)\,dx = 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + C$

(6) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját parciális integrálással:

(a) $\int f(x)\,dx = (2x-5)\sin x + 2\cos x + C$ (b) $\int f(x)\,dx = -(x^2-1)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

(c) $\int f(x)\,dx = (4x+3)\frac{e^{2x}}{2} - e^{2x} + C$ (d) $\int f(x)\,dx = 4x\frac{e^{1-2x}}{-2} - e^{1-2x} + C$

(e) $\int f(x)\,dx = -\frac{1}{5}\sin(2x)e^{1-x} - \frac{2}{5}\cos(2x)e^{1-x} + C$ (f) $\int f(x)\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

(g) $\int f(x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - x + C$ (h) $\int f(x)\,dx = x\ln x - x + C$

(i) $\int f(x)\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$ (j) $\int f(x)\,dx = x^2\operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x + C$

(k) $\int f(x)\,dx = \frac{3}{13}\cos(2x+2)e^{3x-4} + \frac{2}{13}\sin(2x+2)e^{3x-4} + C$

(l) $\int f(x)\,dx = \ln^2 x\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right) - 2\ln x\left(\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} + 2x\right) + \frac{2}{27}x^3 + \frac{x^2}{4} + 4x + C$

(7) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

(a) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$ (b) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}\text{arctg}\,(3x + C)$

(c) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{20}\text{arctg}\left(\frac{4}{5}x\right) + C$ (d) $\int f(x)\,dx = \frac{2}{3}\frac{\text{arctg}\left(\sqrt{5/3}x\right)}{\sqrt{5/3}} + C$

(e) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$ (f) $\int f(x)\,dx = \frac{3}{2}\text{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C$

(g) $\int f(x)\,dx = \arcsin(x - 1) + C$ (h) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}\arcsin(3x - 1) + C$

(i) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\arcsin(2x + 3) + C$ (j) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}\arcsin(3x - 2) + C$

IX. feladatsor

(1) Határozza meg az alábbi határozott integrálok értékét:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = -\ln 2$ (b) $\displaystyle\int_{2}^{7} \sqrt{x+2}\,dx = \frac{38}{3}$ (c) $\displaystyle\int_{3}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{10}-3$

(d) $\displaystyle\int_{1}^{e} \ln x\,dx = 1$ (e) $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x^2+8x+20}\,dx = \frac{\pi}{8}$ (f) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = 2$

(2) Határozza meg a területeket, ha:

(a) $\displaystyle\int_{-6}^{-3} f(x)\,dx = \ln 4$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{e^2+1}{4}$

(c) $\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,dx = \frac{16}{3}$

(3) Határozza meg a két görbe által közrezárt területet!

(a) $T = 4,5$

(b) $T = 4,5$

(c) $T = \dfrac{1}{3}$

(4) Határozza meg az $f(x)$ és az x tengely által közbezárt területet!

(a) $T = \dfrac{125}{6}$

(b) $T = \dfrac{125}{6}$

(c) $T = \dfrac{5}{4} - \ln 4$

(5) Határozza meg alábbi fügvények x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogatát!

(a) $V = \dfrac{2}{3}\pi$

(b) $V = \pi \ln 3$

(c) $V = \pi$

(d) $V = \pi\left(\dfrac{e^2}{2} + 2e - 1,5\right)$

(e) $V = \pi\left(\dfrac{2e^3+1}{9}\right)$

(f) $V = \dfrac{\pi^2}{24}$