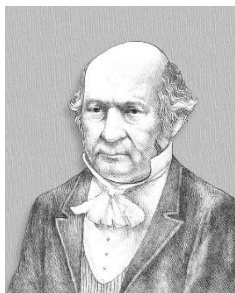


1. Vektorok, komplex számok

1.1. A térbeli vektorok fogalma, műveletek vektorokkal

Tanulási cél: a vektorok fogalmának és a velük végezhető alapvető műveletek megismerése, ezek gyakorlati használhatóságának ismertetése.

Térbeli vektorok definíciója, műveletek és ezek geometriai jelentései



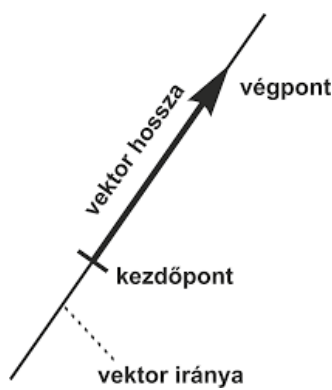
W. R. Hamilton (1805–1865) ír matematikus, csillagász és fizikus volt az, aki először használta a vektor kifejezést. A vektor elnevezés a csillagászatból került át a matematikába. Ott az ellipszis fókuszában álló Naptól a bolygókhoz húzott irányított szakasz elnevezésére szolgált (vectus = húzni, vonni).

Vannak olyan mennyiségek, amelyeket a nagyságukkal egyszerűen meg tudunk határozni. Ilyenek például a tömeg, az idő, a hosszúság. Ezek megadásához elegendő egy szám és egy alkalmasan választott mértékegység. Ugyanakkor például az erő, az elmozdulás vagy a sebesség megadásához több információra is szükség van. Például ha egy test elmozdulását szeretnénk leírni, akkor meg kell mondanunk, hogy milyen irányban és mekkora távolságra mozdul el. Hasonlóan, egy test sebességének megadásához tudnunk kell, hogy milyen irányban és mekkora sebességgel halad.

Definíció: A térbeli irányított szakaszokat **vektoroknak** nevezzük. Egy vektort három adat határoz meg egyértelműen, a nagysága (hossza), az állása (melyik egyenessel párhuzamos), és az irányítása (az egyenesen merre mutat).

Definíció: Két vektor egyenlő, ha mindhárom jellemzőjük azonos, azaz ha van olyan párhuzamos eltolás, amellyel fedésbe hozhatók.

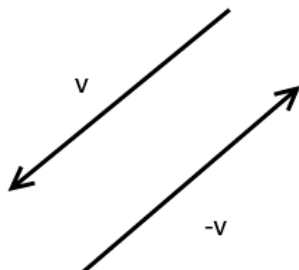
Jelölések: Ha egy $\mathbf{v}$ vektor az A kezdőpontból a B végpontba mutat, akkor a következő jelöléseket használhatjuk: $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \underline{v}$.



Definíció: A $\mathbf{v}$ vektor hosszán a vektort szemléltető szakasz hosszát értjük. Jele: $\|\mathbf{v}\|$. Ha ez az érték 1, akkor a vektort **egységvektornak** nevezzük.

Definíció: Azt a vektort, amelynek hossza 0, **nullvektornak** nevezzük. A nullvektor iránya tetszőleges, azaz minden vektorral párhuzamos és minden vektorra merőleges. Jele: **0**.

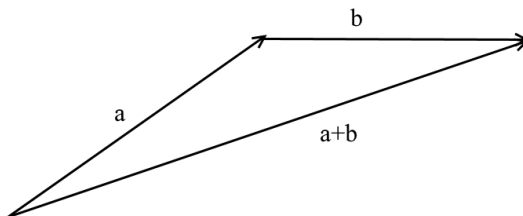
Definíció: A **v ellentettjének** nevezzük és $-v$ -vel jelöljük a v -vel egyenlő hosszúságú, azonos állású, de ellentétes irányítottságú vektort.



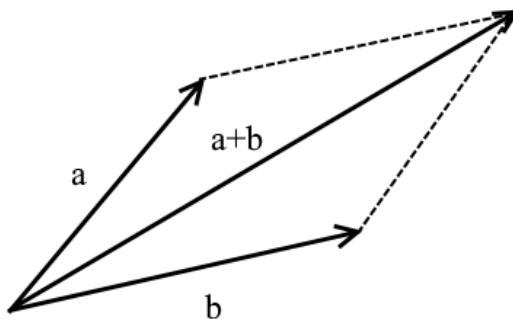
Műveletek vektorokkal

Összeadás

Definíció: Adott két vektor **a** és **b**. Az **a** és **b** vektorokat toljuk el önmagukkal párhuzamosan úgy, hogy a **b** vektor kezdőpontja az **a** vektor végpontjába kerüljön. Ekkor az **a** vektor kezdőpontjából a **b** vektor végpontjába mutató vektort az **a** és **b** vektorok összegének (eredőjének) nevezzük. Jele: **a+b**



háromszög módszer



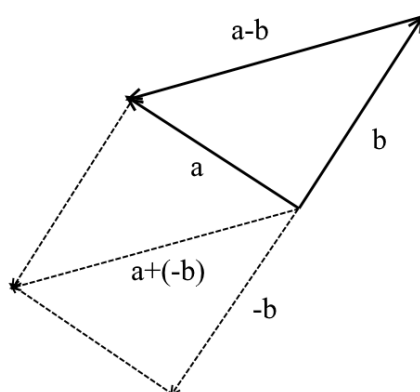
paralelogramma szabály

Tétel: A vektorok összeadása kommutatív $\mathbf{a+b=b+a}$ és asszociatív: $\mathbf{(a+b)+c=a+(b+c)}$ művelet.

Alkalmazás: A testek mozgásának vizsgálatakor (dinamikai és kinematikai feladatokban) a következő modellt használjuk: a testet a tömegközéppontjával helyettesítjük, és vizsgáljuk az erre ható erők eredőjét. A tömegpont nyugalomban van, ha a rá ható erők eredője zérus (Newton I. törvénye miatt; összegük nullvektor).

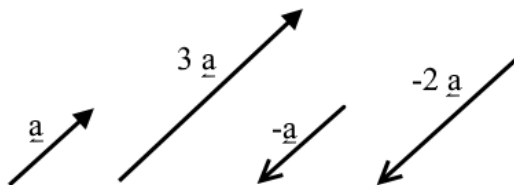
Különbség

Definíció: $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok különbségén értjük és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ -vel jelöljük azt vektort, amelyet $\mathbf{b}$ -hez adva $\mathbf{a}$ -t kapunk. (Toljuk az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat közös kezdőpontba. Ekkor a $\mathbf{b}$ vektor végpontjából az $\mathbf{a}$ vektor végpontjába mutató vektort az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok különbségének nevezzük és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ -vel jelöljük.)



Vektorok szorzása valós számmal (skalárral)

Definíció: Az $\mathbf{a}$ nem nullvektor és a $\lambda \neq 0$ valós szám szorzatán értjük és $\lambda\mathbf{a}$ -val jelöljük azt az $\mathbf{a}$ vektorral azonos állású vektort, amelynek hossza $|\lambda|\|\mathbf{a}\|$, iránya $\lambda > 0$ esetében azonos, $\lambda < 0$ esetén pedig ellentétes az $\mathbf{a}$ vektor irányával.



A skalárral való szorzásra teljesülnek a következők:

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot (\mu) \cdot \mathbf{a} \quad (\text{asszociativitás})$$

$$\lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b} \quad (\text{disztributivitás})$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} \quad (\text{disztributivitás})$$

Definíció: Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ tetszőleges vektorok, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pedig tetszőleges valós számok. Ekkor a $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n$ vektort a $\mathbf{v}_i$ vektorok λ_i együtthatókkal képzett lineáris kombinációjának nevezzük.

Megjegyzés: a fenti együtthatók között szerepelhetnek negatív, pozitív vagy akár nulla értékűek is.

Vektorok felbonthatósága

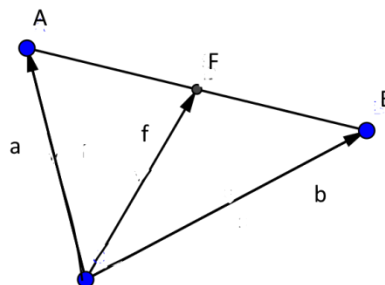
Tétel: (síkban) Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nullvektoroktól különböző nem párhuzamos vektorok, akkor az általuk meghatározott sík bármely $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előállítható az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b}$ alakban, ahol λ_1 és λ_2 egyértelműen meghatározott valós számok. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{v}$ vektor egyértelműen felbontható $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos összetevőkre. Ebben az esetben szokás az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat bázisvektoroknak nevezni.

Tétel: (térben) Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ három nullvektortól különböző nem egysíkú vektor. Ekkor minden térbeli vektor egyértelműen előáll az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ez azt jelenti, hogy minden $\mathbf{v}$ vektorhoz egyértelműen van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valós számhármass, melyre $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$. Ilyenkor az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokat bázisnak és ezeket az együtthatókat a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}$ bázishoz tartozó koordinátáinak nevezzük.

Megjegyzés: Ez a tétel azt jelenti, hogy ha rögzítünk három nem egysíkú vektort a térben, tehát megadunk egy bázist, akkor minden vektort egyértelműen tudunk számhármassal jellemezni ebben a bázisban. A három, nem egysíkú, nullvektortól különböző vektor bármilyen lehet, tehát tetszőleges számú bázist megadhatunk. Természetesen más bázishoz, más koordináták tartoznak ugyanazon $\mathbf{v}$ vektor esetén. A továbbiakban majd egy kitüntetett bázist fogunk használni, mégpedig az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ egységnyi hosszúságú, egymásra páronként merőleges vektorokat, amelyek ebben a sorrendben **jobbsodrású rendszert** alkotnak.

Definíció: Az origóból a tér egy tetszőleges pontjába mutató vektort a pont **helyvektorának** nevezzük.

Tétel: Legyen A és B két különböző térbeli pont, jelölje F az AB szakasz felezőpontját, a megfelelő pontokba mutató helyvektorok pedig legyenek rendre $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{f}$. Ekkor a felezőpontba mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe, azaz $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$.



Bizonyítás: Ezt a bizonyítást azért érdemes levezetni, mivel a benne szereplő egyszerű ötletet más feladatok megoldásánál is használni fogjuk.

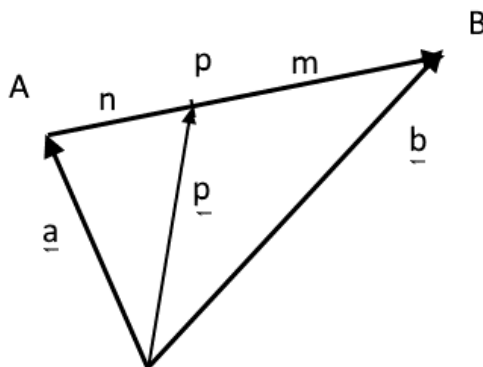
Az ábráról leolvasható a következő összefüggés: $\mathbf{f} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

Elvégezve a behelyettesítést:

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}.$$

Tétel: Legyen A és B két különböző térbeli pont, és P az AB szakasz azon pontja, melyre $AP:PB = n:m$. Ha a megfelelő pontokba mutató helyvektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, és $\mathbf{p}$, akkor

$$\mathbf{p} = \frac{m \cdot \mathbf{a} + n \cdot \mathbf{b}}{m + n}$$



Tétel: Ha az ABC háromszög csúcsaiba mutató helyvektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, akkor a háromszög súlypontjába mutató $\mathbf{s}$ helyvektor:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

1. feladat: Egy testre 100N nagyságú északi és egy 200N nagyságú nyugati irányba mutató erő hat. Mekkora és milyen irányú erővel lehet a testet nyugalomban tartani?

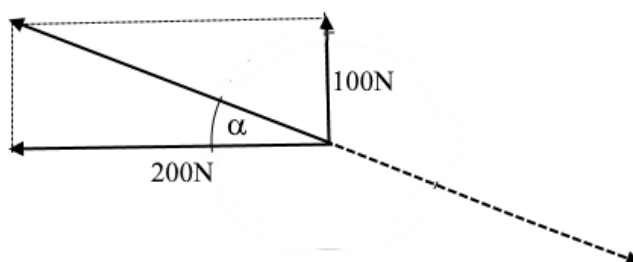
Megoldás

Mivel a két vektor merőleges egymásra, ezért az összegük (eredőjük) nagysága Pitagorasz tétellel számolható:

$$\|\mathbf{F}_e\| = \sqrt{100^2 + 200^2} \approx 223,6N$$

Meghatározzuk az eredő nyugati irányhoz képest észak felé vett hajlásszögét, melyet α -val jelölünk:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{100}{200} \quad \alpha \approx 26,57^\circ$$

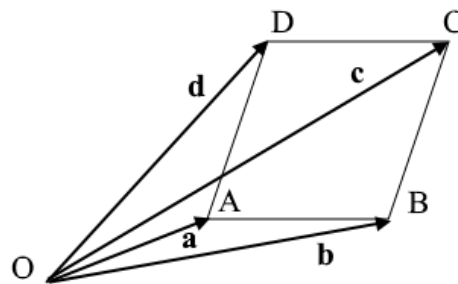


Ha a testet nyugalomban akarjuk tartani, akkor az eredővel ellentétes irányú, vele azonos nagyságú erőt kell alkalmaznunk. Tehát egy $\approx 223,6N$ nagyságú, a keleti iránytól lefelé $\approx 26,57^\circ$ -ban hajló erőre van szükség.

2. feladat: Az $ABCD$ paralelogramma csúcsainak helyvektorai rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$. Fejezzük ki a $\mathbf{d}$ vektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok segítségével!

Megoldás

A helyvektorok a sík egy tetszőleges pontjából az adott pontba mutató vektorok.



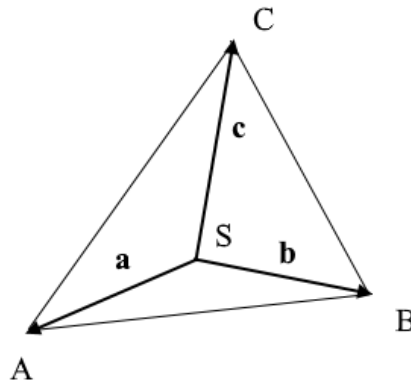
Az ábráról a következő olvasható le:

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AD} = \mathbf{a} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{a} + (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}.$$

3. feladat: Az ABC háromszög S súlypontjából a csúcsokba mutató helyvektorok legyenek rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok összegét!

Megoldás

Készítsünk ábrát.



Legyen F az AB oldal felezőpontja, ezért $\overrightarrow{SF} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$. A súlypont a súlyvonal csúcsától távolabbi

harmadoló pontja, ezért $\mathbf{c} = -2 \cdot \overrightarrow{SF} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

Innen átrendezéssel a következőt kapjuk:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

- 4. feladat:** Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja legyen D . Szerkesszük meg a D' pontot, amelyre $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'} = \mathbf{0}$. Állítsuk elő a $\overrightarrow{D'A}$ és $\overrightarrow{D'B}$ vektorokat az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok segítségével.

Megoldás

Mivel a feltétel szerint $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'} = \mathbf{0}$ teljesül, ezért a D' pont a D pont A -ra vonatkozó középpontos tükröke. Ekkor

$$\overrightarrow{D'A} = \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{2}$$

$$\overrightarrow{D'B} = \overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}}{2}.$$

- 5. feladat:** Az ABC háromszögben $AB:AC = 2:3$. Az A csúsból induló belső szögfelező a szemközti oldalt D pontban metszi. Adjuk meg az $\overrightarrow{AD}$ vektort $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ segítségével.

Megoldás

A feladat megoldásához ismernünk kell a szögfelezők osztásarányára vonatkozó tételt. Eszerint: Bármely háromszögben egy belső szög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja két részre.

Ennek értelmében a D pont a BC oldalon egy ötödölő pont úgy, hogy

$$\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}.$$

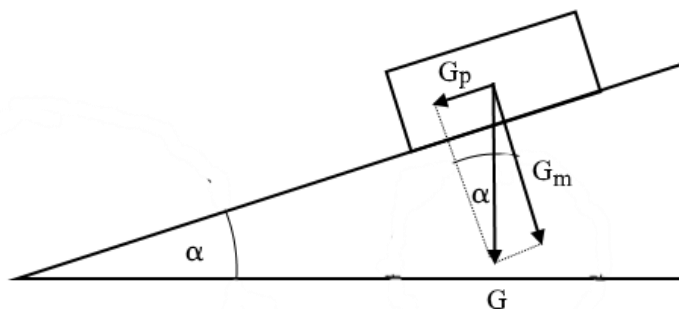
Ekkor:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}}{5}.$$

- 6. feladat:** Bontsuk fel a 20° -os lejtőre helyezett 500N súlyú testre ható súlyerőt a lejtővel párhuzamos és arra merőleges összetevőre.

Megoldás

Rajzoljuk fel az ábrát.



A rajzon találunk merőleges szárú szögeket, ezért a keresett összetevők a következő módon számolhatók.

A lejtővel párhuzamos összetevő:

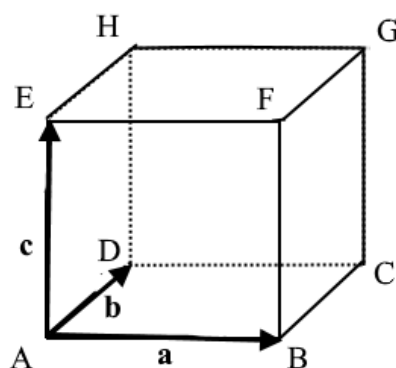
$$\sin \alpha = \frac{\|G_p\|}{\|G\|} \rightarrow \sin 20^\circ = \frac{\|G_p\|}{500N} \rightarrow \|G_p\| \approx 171N,$$

$$\cos \alpha = \frac{\|G_m\|}{\|G\|} \rightarrow \cos 20^\circ = \frac{\|G_m\|}{500N} \rightarrow \|G_m\| \approx 470N.$$

7. feladat: Az $ABCDEFGH$ kocka A csúcsából a szomszédos csúcsokba mutató vektorok legyenek: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$. Fejezzük ki az A csúcsból az összes többi csúcsba mutató vektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok segítségével. Számoljuk ki a keresett vektorok hosszát, ha a kocka élének hossza 5 egység.

Megoldás

Készítsünk ábrát.



A vektorok hosszának kiszámításánál a Pitagorasz tételt kell alkalmazni.

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \mathbf{c}, \quad \|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AG} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AH} = \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Tekintsük az $ABCDEF$ szabályos hatszöget. Az A , B , C és D csúcsba mutató helyvektorokat jelölje rendre: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$. Fejezzük ki az E csúcsba mutató helyvektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok segítségével!

Megoldás:

$$\mathbf{d} - \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{d}$$

$$\mathbf{d} + \mathbf{a} - \mathbf{b} \quad (\text{X})$$

$$\mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

2. **kérdés:** Az $ABCD$ paralelogramma síkjának egy tetszőleges pontja O . Igaz-e a következő összefüggés: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$?

Megoldás

igen (X)
nem

3. **kérdés:** Egy egységnyi oldalú szabályos **hatszög** csúcsai: A, B, C, D, E, F , középpontja K . Legyen $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$. Fejezze ki a megadott vektorok segítségével az $\overrightarrow{ED}$ és $\overrightarrow{BK}$ vektorokat. Határozza meg a keresett vektorok hosszát!

Megoldás

$$\overrightarrow{ED} = -\mathbf{a}, \overrightarrow{BK} = \mathbf{a} - \mathbf{b}, \|\overrightarrow{ED}\| = 1, \|\overrightarrow{BK}\| = 0$$

$$\overrightarrow{ED} = -\mathbf{a}, \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \|\overrightarrow{ED}\| = 1, \|\overrightarrow{BK}\| = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{ED} = -\mathbf{a}, \overrightarrow{BK} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \|\overrightarrow{ED}\| = 1, \|\overrightarrow{BK}\| = 0$$

$$\overrightarrow{ED} = -\mathbf{a}, \overrightarrow{BK} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \|\overrightarrow{ED}\| = 1, \|\overrightarrow{BK}\| = 1 \quad (\text{X})$$

4. **kérdés:** Egy kocka A csúcsából kiinduló élvektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$. Állapítsa meg, hogy az alábbi vektorok közül melyek mutatnak az A -ból kiindulva valamelyik kockacsúcsba:
a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ b) $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ c) $\mathbf{b} - \mathbf{b}$ d) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}$

Megoldás

mindegyik
csak az a) nem (X)
csak b) nem
csak c) nem

5. **kérdés** Legyen P az AB szakasz A -hoz közelebbi negyedelő pontja. Ha az A és B pontokba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, akkor a P pontba mutató helyvektor:

Megoldás

$$\frac{1}{5}(4\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$\frac{1}{5}(\mathbf{a} + 4\mathbf{b})$$

$$\frac{1}{4}(3\mathbf{a} + \mathbf{b}) \quad (\text{X})$$

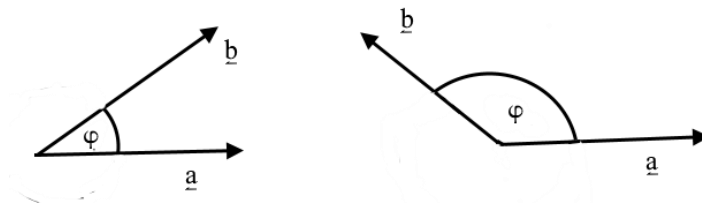
$$\frac{1}{4}(\mathbf{a} + 4\mathbf{b})$$

Vektorok szorzatai

Skaláris szorzat

Gyakran szükségünk van arra, hogy ismerjük egy testre ható $\mathbf{F}$ erőnek a mozgás irányába eső összetevőjét. Megmutatjuk, hogyan lehet egyszerűen kiszámítani két vektor által közbezárt szöget. A számítás kulcsa a *skalárszorzat*nak nevezett kifejezés, amit *belső szorzatként* vagy *skaláris szorzatként* is emlegetnek. Azért beszélünk skalárszorzatról, mert az eredmény egy skalár (valós szám), nem pedig vektor. A skalárszorzat segítségével ki tudjuk számítani egy vektor másik vektorra vonatkozó vetületét és valamely állandó erő által az elmozdulás irányában végzett munkát is.

Definíció: Két egyállású vektor esetében ha a vektorok egyirányúak, akkor hajlásszögük 0° , ha pedig ellentétes irányúak, akkor hajlásszögük 180° . Nem egyállású vektorok esetén a vektorok hajlásszögén a közös pontból kiinduló vektorok által bezárt konvex szöget értjük.



Definíció: Tetszőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor skaláris szorzatán az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \varphi$ mennyiséget értjük, ahol φ a két vektor által közbezárt szög.

A skaláris szorzat tulajdonságai:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$$

$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$

$$\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$$

Tétel: Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla.

Definíció: Ha két vektor merőleges egymásra, akkor ezeket ortogonális vektoroknak nevezzük.

Tétel: Két vektor hegyesszöget zár be egymással akkor és csak akkor, ha skaláris szorzatuk pozitív. Két vektor tompaszöget zár be egymással akkor és csak akkor, ha skaláris szorzatuk negatív.

A skaláris szorzat egyik fontos alkalmazási területe: adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok esetén az $\mathbf{a}$ vektort egyértelműen fel tudjuk bontani $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos és $\mathbf{b}$ -re merőleges összetevőkre.

Tétel: Legyen adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor, ahol $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Ekkor az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$ irányába eső merőleges vetületvektora (az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos összetevője):

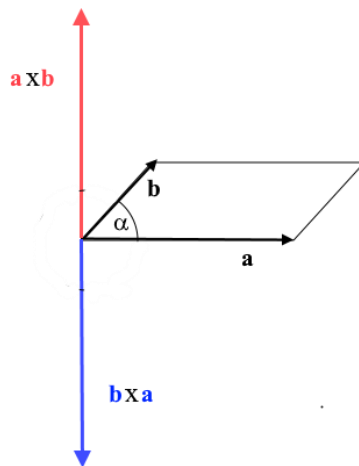
$$\mathbf{a}_p = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b}$$

Vektoriális szorzat

Két vektor esetében értelmezhetünk egy másféle szorzási műveletet is. Ennek a szorzásnak az eredménye egy új vektor, az elnevezése pedig vektoriális szorzat lesz.

A vektoriális szorzat fogalmát széleskörűen alkalmazzák az elektromosság, mágnesesség, az áramlástan és az égi mechanika jelenségeinek leírásában.

Definíció: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt a vektort értjük, amely merőleges $\mathbf{a}$ -ra és $\mathbf{b}$ -re, hossza $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi$, ahol φ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög, és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.



A vektoriális szorzat tulajdonságai:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

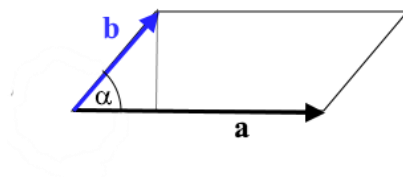
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok esetén a vektoriális szorzatuk akkor és csak akkor nullvektor, ha a két vektor egymással párhuzamos.

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített paralelogramma területe éppen az $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ pozitív valós szám.



$$T = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$$

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített háromszög területe éppen az $\frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}{2}$ pozitív valós szám.

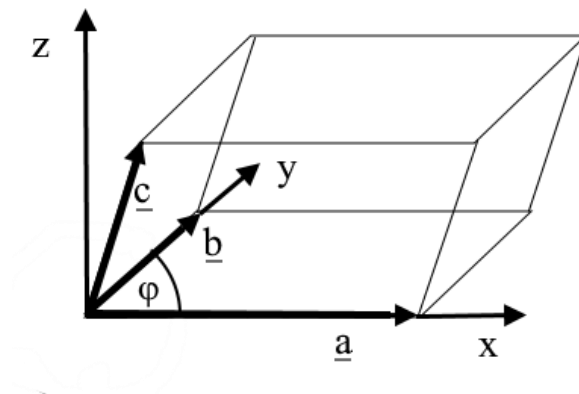
Vegyesszorzat

A vegyesszorzat elnevezés arra utal, hogy ennek kiszámításánál mindkét vektorszorzás műveletre szükségünk lesz.

Definíció: Adott $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem nullvektorok vegyes szorzatán az $\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ valós számot értjük.

Tétel: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok akkor és csak akkor egysíkúak, ha $\mathbf{abc} = 0$. Ha a vegyesszorzat nem nulla, akkor annak abszolút értéke az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon V_p térfogatát adja:

$$V_p = |\mathbf{abc}|.$$



Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített tetraéder V_t térfogata:

$$V_t = \frac{|\mathbf{abc}|}{6}.$$

8. feladat: Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két olyan vektor, melyek hajlásszöge $\frac{\pi}{6}$, valamint $\|\mathbf{a}\| = 5$ és $\|\mathbf{b}\| = 4$. Számolja ki az alábbi skaláris szorzatok értékét:

- a) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
- b) $\mathbf{a}^2$
- c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$
- d) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$
- e) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$

Megoldás

$$\text{a) } \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \frac{\pi}{6} = 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \mathbf{a}^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\| \cos 0^\circ = 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 &= \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \frac{\pi}{6} + \|\mathbf{b}\|^2 = 25 + 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 16 \approx 75,64. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 &= \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \frac{\pi}{6} + \|\mathbf{b}\|^2 = 25 - 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 16 \approx 6,36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) &= \langle 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b} \rangle = 3\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + 6\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - 4\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \\ &= 3\|\mathbf{a}\|^2 + 4\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \frac{\pi}{6} - 4\|\mathbf{b}\|^2 = 75 + 80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 64 \approx 80,28. \end{aligned}$$

9. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét, ha $\|\mathbf{a}\| = 5$, $\|\mathbf{b}\| = 4$ és $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -10$.

Megoldás

A skaláris szorzat definíciója szerint: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \varphi$, ahol φ a két vektor által bezárt szög. Innen:

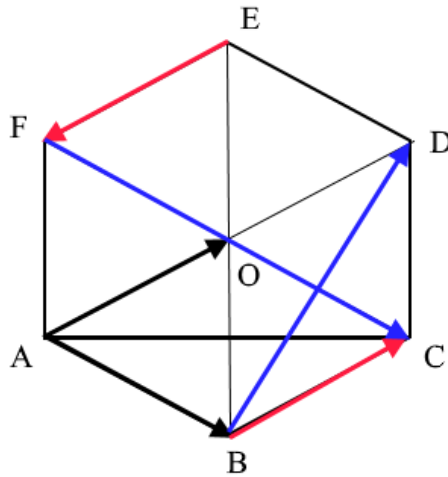
$$\cos \varphi = \frac{-10}{5 \cdot 4} = -\frac{1}{2} \rightarrow \varphi = 120^\circ.$$

10. feladat: Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldalainak hossza 10, a hatszög középpontja O . Számítsa ki a következő skaláris szorzatokat:

$$\langle \overline{AB}, \overline{AO} \rangle, \langle \overline{AB}, \overline{AC} \rangle, \langle \overline{BC}, \overline{EF} \rangle, \langle \overline{FC}, \overline{BD} \rangle, \langle \overline{FC}, \overline{EF} \rangle.$$

Megoldás

Rajzoljuk fel a szabályos hatszöget.



$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO} \rangle = 10 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot 0,5 = 50.$$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 10 \cdot 10 \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 100 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 150.$$

$$\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EF} \rangle = 10 \cdot 10 \cdot \cos 180^\circ = -100.$$

$$\langle \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{BD} \rangle = 20 \cdot 10 \sqrt{3} \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

$$\langle \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{EF} \rangle = 20 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ = 200 \cdot (-0,5) = -100.$$

11. feladat: Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok szöge, ha $\langle \mathbf{a} - 2\mathbf{b}, 2\mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = 0,5$.

Megoldás

Az egyenlet bal oldalán végezzük el a műveleteket és használjuk ki az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 = 1$ és $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{b}\|^2 = 1$ összefüggést:

$$\langle \mathbf{a} - 2\mathbf{b}, 2\mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - 1\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - 4\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 2 - 5\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + 2 = 4 - 5\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Eszerint:

$$4 - 5\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0,5 \rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{3,5}{5} \rightarrow \varphi = 45,57^\circ.$$

12. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét, ha a két vektor egymással 30° -os szöget zár be és $\|\mathbf{a}\| = 5$ valamint $\|\mathbf{b}\| = 10$!

Megoldás

Tudjuk, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített paralelogramma területe éppen az $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ pozitív valós szám, azaz

$$T = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi = 5 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 25.$$

13. feladat: Tekintsük az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ egységvektorokat. Milyen eredményt ad a $(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$ művelet?

Megoldás

A keresett művelet eredménye egy vektor lesz, mivel két vektoriális szorzatot kell egymás után elvégezni. Tudjuk, hogy a vektoriális szorzat eredménye egy vektor, így ezt kétszer egymás után elvégezve is egy vektort kapunk. Ha a jobbsodrású koordináta rendszerre gondolunk, akkor tudjuk, hogy

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = -\mathbf{k}$$

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = -(-\mathbf{i}) = \mathbf{i}.$$

14. feladat: Tekintsük az $ABCDEF$ szabályos hatszöget, melynek oldaléle 15 cm hosszú. Mivel egyenlő az $\overrightarrow{ABBCCD}$?

Megoldás

Tudott, hogy az $\overrightarrow{ABBCCD}$ vegyesszorzat abszolút értéke az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát adja meg. Ebben az esetben, mivel ezek a vektorok egy szabályos hatszög oldal vektorai, ezért ezek egy síkban vannak. Ha a vektorok egy síkban vannak, akkor nem feszítenek ki testet, tehát a vegyesszorzat értéke nulla.

Eszerint:

$$\overrightarrow{ABBCCD} = 0.$$

Ellenőrző kérdések

6. kérdés Ha az $ABCDEFGH$ szabályos nyolcszög oldalainak hossza 10 egység, akkor mivel egyenlő $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle$?

Megoldás

- $50\sqrt{2}$
- $-50\sqrt{2}$ (X)
- 50
- 50

7. kérdés: Ha az $ABCD$ paralelogramma AB oldala 6 egység, akkor mivel egyenlő $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\|$?

Megoldás

- 0 (X)
- 3
- 6
- 9

8. kérdés: Mivel egyenlő $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$?

Megoldás

- 0
- $\mathbf{j}$
- $-\mathbf{j}$ (X)
- 1

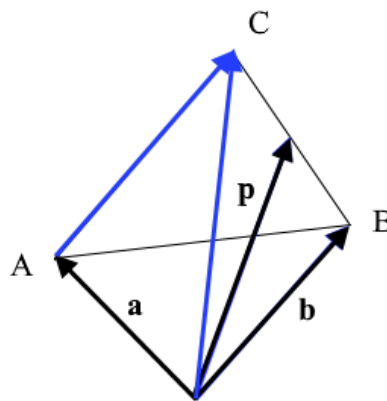
9. **kérdés** Ha az ABC szabályos háromszög oldalainak hossza 2 egység, akkor mivel egyenlő az $\overrightarrow{ABBCCA}$?
- 8
4
2
0 (X)

Összetett feladatok

15. **feladat:** Az ABC háromszög A csúcsához egy tetszőleges O pontból az $\mathbf{a}$, a B csúcsba a $\mathbf{b}$, a BC szakasz felezőpontjába pedig a $\mathbf{p}$ vektor mutat. Állítsuk elő $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, és $\mathbf{p}$ segítségével :
- a) az O -ból a C -be vezető vektort
b) az $\overrightarrow{AC}$ vektort.

Megoldás

Készítsünk ábrát!



- a) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + 2(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB})$
 $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b} + 2(\mathbf{p} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{p} - \mathbf{b}$
- b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 2\mathbf{p} - \mathbf{b} - \mathbf{a}$

16. **feladat:** Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor egyenlő hosszú, akkor összegük és különbségük merőleges egymásra.

Megoldás

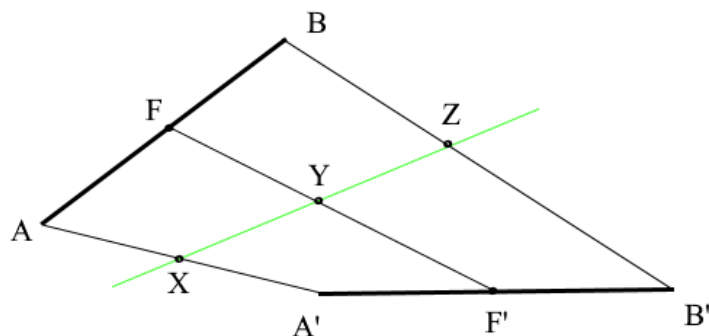
Abban az esetben, ha a két vektor nem párhuzamos, akkor megszerkesztve az összegüket és a különbségüket lényegében egy rombusz két átlóját kapjuk. Az elemi geometriából ismert, hogy ezek egymásra merőlegesek.

Ha a két vektor párhuzamos, akkor vagy azonos irányúak, vagy ellentétesek.

Ha azonos irányúak, akkor a különbségük **0**, ha ellentétes irányúak, akkor pedig az összegük **0**. Mivel a **0** vektor iránya tetszőleges, ezért a **0** vektor bármely vektorra merőleges is, ezzel az állítást igazoltuk.

17. feladat: AB és $A'B'$ tetszőleges szakaszok, ezek felezőpontja F és F' . Igaz-e, hogy az AA' , BB' és FF' szakaszok felezőpontjai egy egyenesen vannak!

Megoldás



Legyen X az AA' , Y az FF' és Z a BB' szakasz felezőpontja.

Legyenek az A, B, F, A', B', F' pontokba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$ és $\mathbf{f}'$.

Ekkor:

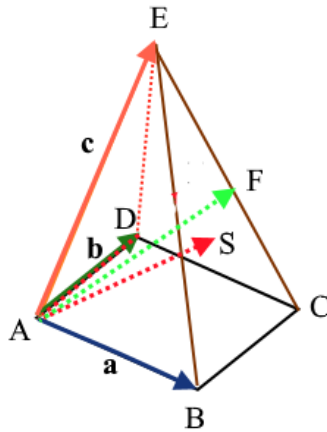
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}'}{2} & \overrightarrow{OZ} &= \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2}, \\ \overrightarrow{OY} &= \frac{\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OF'}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{b}'}{2}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}' + \mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OZ}}{2}.\end{aligned}$$

Ebből az következik, hogy Y felezőpontja az XZ szakasznak, tehát X, Y és Z egy egyenesen vannak.

18. feladat: Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúla alaplaja az $ABCD$ négyzet. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$. Fejezzük ki az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokkal:

- a $\overrightarrow{DE}$ vektort
- az A csúcsból a CE él felezőpontjába mutató vektort
- az A csúcsból a BCE oldallap súlypontjába mutató vektort.

Megoldás



- a) A $\overrightarrow{DE}$ vektor felírható két vektor különbségeként:

$$\overrightarrow{DE} = \mathbf{c} - \mathbf{b}.$$

- b) A CE él, mint szakasz F felezőpontjába mutató vektort akkor tudjuk könnyen meghatározni, ha ismerjük a CE szakasz két végpontjába mutató azon helyvektorokat, amelyek az A csúcsból indulnak. A vektorok összeadására vonatkozó szabály alapján:

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \overrightarrow{AE} = \mathbf{c}.$$

A szakasz felezőpontba mutató vektor:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}.$$

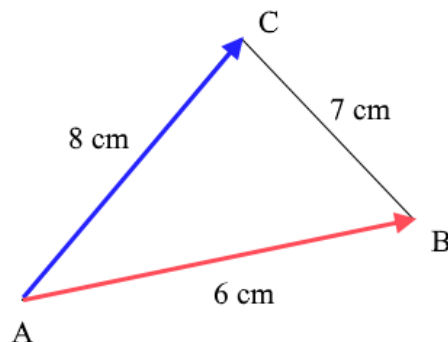
- c) Az A csúcsból a BCE oldallap súlypontjába mutató vektort akkor tudjuk előállítani, ha ismerjük a B , C és E csúcsokba mutató, A pontból induló helyvektorokat. Felhasználva az előző eredményeket:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} \quad \overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \overrightarrow{AE} = \mathbf{c}.$$

A BCE oldallap súlypontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}}{3} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$$

- 19. feladat:** Az ABC háromszögben $AB=6\text{cm}$, $BC=7\text{cm}$ és $AC=8\text{cm}$. Határozzuk meg az $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ értékét!



Megoldás

A skaláris szorzat kiszámításához szükségünk van a két vektor által közbezárt szögre. Jelen esetben ez a háromszög A csúcsánál lévő szöge. Mivel ez egy általános háromszög, ezért ezt a szöveget koszinusztétellel tudjuk kiszámolni. A szokásos betűzést használva:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$7^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{17}{32} \rightarrow \alpha \approx 57,91^\circ.$$

A keresett skaláris szorzat:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 6 \cdot 8 \cdot \cos 57,91^\circ = 25,2.$$

Megjegyzés: Mivel a skaláris szorzat számolásánál a szög koszinuszára van szükség, ezért nem szükséges magát a szöveget kiszámolni. Megállhatunk a $\cos \alpha = \frac{17}{32}$ összefüggésnél, ezt helyettesítjük be a skaláris szorzatba, ezáltal pontos eredményt kapva.

20. feladat: A k paraméter mely értékénél lesznek merőlegesek egymásra az $\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - k\mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) vektorok?

Megoldás

Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla, tehát a

$$\langle \mathbf{a} + k\mathbf{b}, \mathbf{a} - k\mathbf{b} \rangle = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Kihasználva a skaláris szorzat tulajdonságait és az egyenlet bal oldalát átalakítva:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - k \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + k \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - k^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

egyenlethez jutunk.

Ebből:

$$\|\mathbf{a}\|^2 - k^2 \|\mathbf{b}\|^2 = 0,$$

tehát

$$k = \pm \frac{\|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

21. feladat: Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe 6 egység, akkor mekkora a területe a $\mathbf{c} = 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és a $\mathbf{d} = \mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogrammának?

Megoldás

Tudjuk, hogy a paralelogramma területe egyenlő az őt kifeszítő két vektor vektoriális szorzatának abszolút értékével. Tehát a keresett terület:

$$T = \|\mathbf{c} \times \mathbf{d}\|.$$

Behelyettesítve:

$$T = \|(4\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 5\mathbf{b})\|.$$

Először bontsuk fel a belső zárójeleket. Minden tagot minden taggal meg kell szorozni, de ügyelni kell arra, hogy a vektoriális szorzatnál számít a tényezők sorrendje:

$$T = \|4(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + 20(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 5(\mathbf{b} \times \mathbf{b})\|.$$

Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \sin 0^\circ = 0,$$

valamint:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}).$$

Így a keresett terület:

$$T = \|4(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + 20(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 5(\mathbf{b} \times \mathbf{b})\| = \|21(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\| = 21 \cdot 6 = 126 \text{ területegység}.$$

22. feladat: Ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 5 egység, akkor mennyi a térfogata az $\mathbf{u} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$, $\mathbf{w} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedonnak?

Megoldás

Mivel a paralelepipedon térfogata az öt kifeszítő vektorok vegyesszorzatának abszolút értékével egyenlő, ezért

$$V = |\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w}|.$$

Behelyettesítve:

$$V = |(2\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} + 3\mathbf{c})(2\mathbf{b} - \mathbf{c})|.$$

A vegyesszorzat definíciója szerint a keresett térfogatot tovább alakítva:

$$V = |\langle (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 3\mathbf{c}), (2\mathbf{b} - \mathbf{c}) \rangle|.$$

Végezzük el először külön csak a vektoriális szorzást:

$$(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 3\mathbf{c}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + 6(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 3(\mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

Kihasználva, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 3\mathbf{c}) = 6(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 3(\mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

Helyettesítsük ezt vissza a keresett térfogatba:

$$\begin{aligned} V &= |\langle 6(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 3(\mathbf{a} \times \mathbf{c}), (2\mathbf{b} - \mathbf{c}) \rangle| = \\ &= |\langle 12(\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \mathbf{b} \rangle - 6\langle (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \mathbf{c} \rangle - 2\langle (\mathbf{b} \times \mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle + \langle (\mathbf{b} \times \mathbf{a}), \mathbf{c} \rangle - 6\langle (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \mathbf{b} \rangle + 3\langle (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \mathbf{c} \rangle| \end{aligned}$$

Felhasználva a vegyesszorzat jelölési módot, folytatva az átalakítást:

$$V = |12\mathbf{acb} - 6\mathbf{acc} - 2\mathbf{bab} + \mathbf{bac} - 6\mathbf{bcb} + 3\mathbf{bcc}|$$

Mivel három egysíkú vektor vegyes szorzata 0, ezért mindegyik tag, amelyben van ismétlődő vektor, az 0 lesz. (ha három vektor közül kettő azonos, akkor a három vektor biztosan egysíkú)

$$V = |12\mathbf{acb} + \mathbf{bac}|.$$

Felhasználva, hogy $\mathbf{acb} = -\mathbf{abc}$ és $\mathbf{bac} = -\mathbf{abc}$

$$V = |-12\mathbf{abc} - \mathbf{abc}| = |-13\mathbf{abc}| = 13|\mathbf{abc}|.$$

Mivel az **a**, **b**, **c** vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 5 egység ezért

$$V = 13 \cdot 5 = 65.$$

Ellenőrző kérdések

10. kérdés: Az egységnyi oldalhosszúságú négyzet köré írt körének egy tetszőleges (a csúcsoktól különböző) P pontjából a csúcsokhoz húzott helyvektorai legyenek:

$\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PD}$. Mivel egyenlő $\langle \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} \rangle$?

- 0
- 1
- 1
- 2 (X)

11. kérdés: Az előző feladatban szereplő négyzetet tekintve, mivel egyenlő

$\langle \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PD} \rangle$?

- 0 (X)
- 1
- 1
- 2

12. kérdés: Mekkora szöget zárnak be az **a** és **b** egységvektorok, ha tudjuk, hogy **5a-4b** és az **a+2b** vektorok merőlegesek egymásra?

- 30°
- 45°
- 60° (X)
- 120°

13. kérdés: Ha az **a**, **b**, **c** vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 19 egység, akkor mennyi a térfogata az **a-b**, **a+b**, **b+2c** vektorok által kifeszített paralelepipedonnak?

- 38
- 57
- 76 (X)
- 95

2. Vektorok, komplex számok

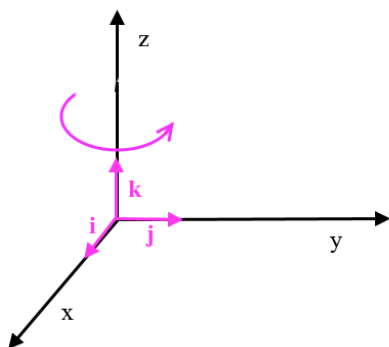
2.2 Vektorok koordinátás alakja

Tanulási cél: ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a koordinátákkal megadott vektorokkal hogyan kell az eddig megismert fogalmakat értelmezni és a műveleteket elvégezni.

Descartes-féle koordináta rendszer, vektorok koordinátás alakja

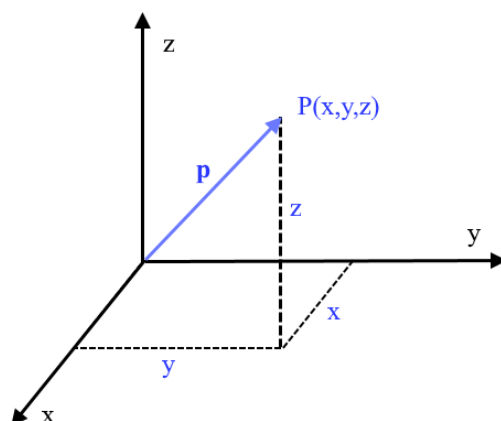
A Descartes-féle koordináta-rendszerben a három tengely egymásra merőleges, és egy pont helyzetét – koordinátáit – az x , y és z tengelyektől mért távolsága határozza meg. A tengelyek metszéspontja az origó. Az origóból kiinduló, és a tengelyek irányába mutató, egymásra kölcsönösen merőleges egységvektorokat nevezzük alapvektoroknak vagy bázisvektoroknak. Az origóból az $(1, 0, 0)$ pontba mutató (x irányú) egységvektor jele $\mathbf{i}$, a $(0, 1, 0)$ pontba mutató (y irányú) egységvektor jele $\mathbf{j}$, míg a $(0, 0, 1)$ pontba mutató (z irányú) egységvektor jele a $\mathbf{k}$.

Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ egységnyi hosszú, egymásra páronként merőleges vektorok ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak. Ez azt jelenti, hogy ha a $\mathbf{k}$ vektor irányával szemben nézve letekintünk az $\mathbf{i}$ és a $\mathbf{j}$ vektorok által kifeszített síkra, akkor ezen a síkon az $\mathbf{i}$ vektort az óramutató járásával ellentétes irányú 90 szögű forgatás viszi a $\mathbf{j}$ vektorba.



Az előző fejezetben tárgyalt, vektorok egyértelmű felbonthatóságára vonatkozó tétel alapján, egy $P(x, y, z)$ pontba mutató helyvektor egyértelműen felírható a tengelyeken vett egységvektorok (bázisvektorok) lineáris kombinációjaként $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alakban.

Ekkor az (x, y, z) rendezett számhármast a $\mathbf{p}$ vektor Descartes koordinátáinak nevezzük, szokásos jelölés: $\mathbf{p} = (x, y, z)$



Műveletek koordinátákkal (összeadás, kivonás, skalárral való szorzás)

Tétel: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Ekkor

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda (a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Tétel: Legyen $A = (a_1, a_2, a_3)$ és $B = (b_1, b_2, b_3)$ két tetszőleges pont, továbbá $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ az adott pontokba mutató helyvektorok. Ekkor

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

1. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{a}$, $2\mathbf{b} - 4\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_e$ vektorokat, ha $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ és $\mathbf{b} = (-3, 4, -2)$! (jelölje $\mathbf{a}_e$ az $\mathbf{a}$ irányú egységvektort)

Megoldás

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1, 2, 3) + (-3, 4, -2) = (-2, 6, 1)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, 2, 3) - (-3, 4, -2) = (4, -2, 5)$$

$$3\mathbf{a} = 3(1, 2, 3) = (3, 6, 9)$$

$$2\mathbf{b} - 4\mathbf{a} = 2(-3, 4, -2) - 4(1, 2, 3) = (-10, 0, -16)$$

$$\mathbf{a} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Jelölje $\mathbf{a}_e$ az $\mathbf{a}$ irányú egységvektort. Ekkor

$$\mathbf{a}_e = \frac{1}{\mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

2. feladat: Döntsük el, hogy párhuzamosak-e az adott vektorpárok:

a) $\mathbf{a} = (-4, 12, 8)$ és $\mathbf{b} = (-2, 6, 4)$

b) $\mathbf{a} = (9, 3, 12)$ és $\mathbf{b} = (3, 1, 5)$

Megoldás

Két vektor párhuzamos, ha az egyik vektor előáll a másik nullától különböző számszorosaként, azaz ha létezik olyan $\lambda \neq 0$ valós szám, amelyre $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$.

a) Könnyen látható, hogy ebben a részben a $\lambda = 2$ értéket választva, $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$, tehát ezek a vektorok párhuzamosak.

Észrevehető, hogy ha $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, akkor $\lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ összefüggés is teljesül, azaz a

vektorok azonos indexű koordinátáinak hányadosai egyenlők. Ezzel a módszerrel:

$$2 = \frac{-4}{-2} = \frac{12}{6} = \frac{8}{4}.$$

b) Kihasználva, hogy ha az azonos indexű koordináták hányadosai egyenlők, akkor az egyik vektor a másik számszorosa, azaz párhuzamosak. Ebben az esetben:

$$\frac{9}{3} = \frac{3}{1} \neq \frac{12}{5}.$$

Tehát ez a két vektor nem párhuzamos.

3. feladat: Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi pontok egy egyenesre esnek-e? $A(1, -2, 3)$, $B(-1, 1, -1)$ és $C(-3, -2, 3)$.

Megoldás

A három pont akkor illeszkedik egy egyenesre, ha $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok párhuzamosak egymással. (Természetesen itt másképpen is ki lehetne választani két-két vektort.)

Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, és $\mathbf{c}$ az A , B és C pontokban mutató helyvektorok. Ekkor:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2, 3, -4) \text{ és } \overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (-4, 0, 0).$$

Mivel:

$$\frac{-4}{-2} \neq \frac{0}{3} = \frac{0}{-4},$$

ezért a három pont nem esik egy egyenesre.

4. feladat: Az előző feladatban megadott pontok nincsenek egy egyenesen, tehát egy háromszöget határoznak meg. Számítsuk ki a háromszög területét!

Megoldás

A terület kiszámításához ismerni kell mindhárom oldal hosszát. Az oldalak hossza nem más, mint az adott pontok távolsága. Az A és B pontok távolsága az $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszával egyezik meg.

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2, 3, -4) \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}.$$

Hasonlóan számoljuk a másik két oldal hosszát is:

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (-4, 0, 0) \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-4)^2 + (0)^2 + (0)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = (-2, -3, 4) \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}.$$

A háromszög területe:

$$K = \sqrt{29} + 4 + \sqrt{29} \approx 14,77.$$

5. feladat: Határozzuk meg az AB szakasz F felezőpontját és az A -hoz közelebb eső H_A harmadoló pontjának koordinátáit, ha $A(4,1,-2)$ és $B(3,-1,1)$!

Megoldás

Használjuk fel, hogy az F pontba mutató $\mathbf{f}$ helyvektor felírható a végpontokba mutató helyvektorok segítségével $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ alakban. Mivel ez egy vektoriális egyenlet, ez az összefüggés a koordinátákra külön-külön is felírható, azaz

$$f_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad f_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \quad f_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}.$$

Tehát:

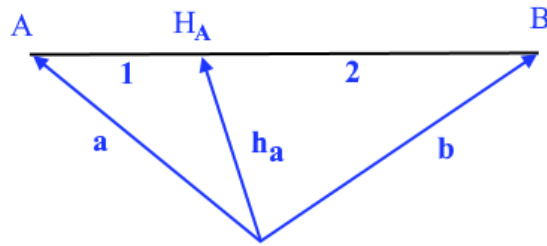
$$f_1 = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2} \quad f_2 = \frac{1+(-1)}{2} = 0 \quad f_3 = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

A kapott eredmények alapján a felezőpont:

$$F\left(\frac{7}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

A H_A pontba mutató $\mathbf{h}_a$ helyvektor szintén felírható a végpontokba mutató helyvektorok segítségével:

$$\mathbf{h}_a = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}.$$



Elvégezve a számolást:

$$\mathbf{h}_a = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} = \frac{2}{3}(4, 1, -2) + \frac{1}{3}(3, -1, 1) = \left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, -1\right).$$

Tehát a keresett harmadoló pont koordinátái:

$$H_A\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, -1\right).$$

6. feladat: Adott az $\mathbf{a} = (-4, 3, 0)$ vektor. Állítsuk elő

- a) az $\mathbf{a}$ -val azonos irányú $\mathbf{a}_e$ egységnyi hosszúságú vektort
- b) az $\mathbf{a}$ -val ellentétes irányú, 8 hosszúságú $\mathbf{b}$ vektort!

Megoldás

a) Tudjuk, hogy

$$\mathbf{a}_e = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a},$$

ezért ebbe az összefüggésbe behelyettesítve:

$$\mathbf{a}_e = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2}}(-4, 3, 0) = \frac{1}{5}(-4, 3, 0) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

- b) Először adjuk meg az $\mathbf{a}$ vektorral azonos irányú, irányítottságú és egységnyi hosszúságú $\mathbf{a}_e$ vektort. Ezt az előző részben számoltuk ki,

$$\mathbf{a}_e = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right).$$

Ezt az egységnyi hosszúságú vektort nyújtjuk meg 8 egységre:

$$8\mathbf{a}_e = 8\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right) = \left(-\frac{32}{5}, \frac{24}{5}, 0\right)$$

Képezzük az ellentett vektorát, azaz szorozzuk meg (-1) -gyel:

$$\mathbf{b} = -1(8\mathbf{a}_e) = -1\left(-\frac{32}{5}, \frac{24}{5}, 0\right) = \left(\frac{32}{5}, -\frac{24}{5}, 0\right).$$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés Az AB szakasz felezőpontja F . Ha $A(11, -3, -4)$ és $F(-2, 1, 3)$ akkor B pont

$$B(4, 5, -1, -1, 5)$$

$B(7,5, -2, -7,5)$
 $B(-15,5,10)$ (X)
 $B(-15,5,1)$

2. **kérdés:** Határozzuk meg az $ABCD$ paralelogramma D csúcsát, ha $A(1,2,3)$, $B(-1,1,-3)$ és $C(5,-4,5)$!

$D(7, -3,-10)$
 $D(7,-3,-11)$ (X)
 $D(-5,7,-5)$
 $D(7,-3,-5)$

3. **kérdés:** Egy egyenesre illeszkedik-e a következő három pont: $A(1, -1, 5)$, $B(3, 3, 3)$ és $C(0, -3, 4)$?

igen
nem (X)

4. **kérdés:** Határozza meg az $\mathbf{a} = (-1,1,2)$ irányába mutató egységnyi hosszúságú vektor koordinátáit!

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$
 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
 $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ (X)
 $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

5. **kérdés:** Határozza meg az AB szakasz B -hez közelebbi harmadoló pontjának koordinátáit, ha $A(1, 1, -1)$ és $B(3, -1, 2)$!

$\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ (X)
 $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$
 $\left(3, 0, \frac{2}{3}\right)$
 $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Vektorok skaláris szorzata

Emlékeztető az 1. leckéből:

Definíció: Tetszőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor skaláris szorzatán az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \varphi$ mennyiséget értjük, ahol φ a két vektor által közbezárt szög.

Tétel: Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla.

Definíció: ha két vektor merőleges egymásra, akkor ezeket ortogonális vektoroknak nevezzük.

A skaláris szorzat számolása koordinátákkal

Tétel: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Ekkor

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Megjegyzés: ortonormált bázisvektorok esetén $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{i}, \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle = 0$.

Tétel: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ nullvektortól különböző két vektor. Ekkor az általuk közbezárt szög:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.$$

Következmény: Ha

- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0$ akkor a két vektor hegyesszöget zár be egymással,
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle < 0$ akkor a két vektor tompaszöget zár be egymással,
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ akkor a két vektor merőleges egymásra.

Tétel: Legyen adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor, ahol $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Ekkor az $\mathbf{a}$ vektor egyértelműen felbontható $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos ($\mathbf{a}_p$) és $\mathbf{b}$ vektorra merőleges összetevőkre ($\mathbf{a}_m$), ahol

$$\mathbf{a}_p = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_p.$$

7. feladat: Határozzuk meg a következő vektorpárok szögét:

a) $\mathbf{a} = (5, -1, 2)$ $\mathbf{b} = (3, 1, -2)$

b) $\mathbf{a} = (4, -2, 2)$ $\mathbf{b} = (3, 6, 0)$

c) $\mathbf{a} = (-2, -1, 2)$ $\mathbf{b} = (3, 1, 2)$

Megoldás

Jelöljük a két vektor által közbezárt szöget φ -el. Ekkor a

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

összefüggés alapján fogunk számolni.

a) Ha $\mathbf{a} = (5, -1, 2)$ és $\mathbf{b} = (3, 1, -2)$, akkor

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{5 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \\ &= \frac{10}{\sqrt{30} \sqrt{14}} \approx 0,4880 \rightarrow \varphi \approx 60,79^\circ. \end{aligned}$$

b) Ha $\mathbf{a} = (4, -2, 2)$ és $\mathbf{b} = (3, 6, 0)$, akkor

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{4 \cdot 3 + (-2) \cdot 6 + 2 \cdot 0}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 6^2 + 0^2}} = \\ &= \frac{0}{\sqrt{24} \sqrt{45}} = 0 \rightarrow \varphi = 90^\circ. \end{aligned}$$

c) Ha $\mathbf{a} = (-2, -1, 2)$ és $\mathbf{b} = (3, 1, 2)$, akkor

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{(-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \\ &= \frac{-3}{\sqrt{9} \sqrt{14}} \approx -0,2673 \rightarrow \varphi \approx 105,50^\circ. \end{aligned}$$

8. feladat: Adjuk meg z értékét úgy, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra, ha $\mathbf{a} = (-2, -1, 2)$ és $\mathbf{b} = (4, -1, z)$.

Megoldás

Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. Tehát úgy kell z értékét megválasztani, hogy $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ teljesüljön.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= (-2) \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot z = 0 \rightarrow -7 + 2z = 0 \\ z &= 3,5. \end{aligned}$$

9. feladat: Határozzuk meg az ABC háromszög legnagyobb szögét, ha $A(1, 1, 0)$, $B(-2, -1, 1)$ és $C(2, 1, -1)$!

Megoldás

Mivel csak a legnagyobb szög a kérdés, jó lenne eldönteni, melyik csúcsnál található, különben mindegyik szöget ki kell számolnunk, s kiválasztani a legnagyobbat. Mivel a háromszögekben

nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, a legnagyobb szög a legnagyobb oldallal szemben lesz. Az oldalak hosszának meghatározásához írjuk fel az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorokat.

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -2, 1) \rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1, 0, -1) \rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{BC} = (4, 2, -2) \rightarrow \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24}.$$

Mivel BC a leghosszabb oldal, ezért az A csúcsnál lévő α szög a háromszög legnagyobb szöge. Ez a szög lényegében az AB és AC vektorok által bezárt szög, így:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{14} \sqrt{2}} = \\ &= \frac{-4}{\sqrt{14} \sqrt{2}} \approx -0,7559 \rightarrow \alpha \approx 139,10^\circ. \end{aligned}$$

10. feladat: Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a} = (2, -3, -6)$, $\mathbf{b} = (6, -2, 3)$ és $\mathbf{c} = (3, 6, -2)$ vektorok kockát feszítenek ki!

Megoldás

Ez úgy értendő, hogy ha a három vektort közös kezdőpontból mérjük fel, akkor egy kocka egy csúcsból induló három élvektorát kapjuk.

Ennek teljesüléséhez az szükséges, hogy a vektorok hossza azonos legyen, s egymásra páronként merőlegesek legyenek, azaz bármelyik merőleges legyen bármelyikre.

Számoljuk először a vektorok hosszát:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

A másik két vektor hossza is ugyanennyi, hiszen a koordináták csak fel vannak cserélve, valamint az előjelek változnak, de ez a négyzet miatt nem számít.

Már csak a páronkénti merőlegességet kell ellenőrizni. A merőlegességhez az kell, hogy bármely két vektor skaláris szorzata 0 legyen.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2 \cdot 6 + (-3) \cdot (-2) + (-6) \cdot 3 = 0$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 6 + (-6) \cdot (-2) = 0$$

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 6 \cdot 3 + (-2) \cdot 6 + 3 \cdot (-2) = 0.$$

Mivel a merőlegességek is teljesülnek, ezért ezek a vektorok valóban kockát feszítenek ki.

11. feladat: Bontsuk fel az $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$ vektort a $\mathbf{b} = (-3, -1, 1)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre!

Megoldás

A feladathoz lényegében két képletet kell ismernünk:

$$\mathbf{a}_p = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_p.$$

$$\mathbf{a}_p = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} = \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1}{\left(\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2}\right)^2} (-3, -1, 1) = \frac{-8}{11} (-3, -1, 1) = \left(\frac{24}{11}, \frac{8}{11}, -\frac{8}{11}\right)$$

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_p = (2, 1, -1) - \left(\frac{24}{11}, \frac{8}{11}, -\frac{8}{11}\right) = \left(-\frac{2}{11}, \frac{3}{11}, -\frac{3}{11}\right).$$

Ellenőrző kérdések

6. kérdés Számítsa ki az $\mathbf{a} = (-2, 0, 1)$ és $\mathbf{b} = (-1, 3, 2)$ vektorok skaláris szorzatát!

- 3
- 4 (X)
- 4
- 5

7. kérdés Igaz-e, hogy az $\mathbf{a} = (-2, -3, 1)$ és $\mathbf{b} = (2, 3, -1)$ vektorok merőlegesek egymásra?

- igen
- nem (X)

8. kérdés Mekkora a két vektor hajlásszöge, ha $\mathbf{a} = (-1, 3, -2)$ és $\mathbf{b} = (1, -1, 1)$?

- 157,79° (X)
- 0°
- 22,21°
- 67,79°

9. kérdés Mivel egyenlő y , ha az $\mathbf{a} = (-1, 3, -2)$ két $\mathbf{b} = (1, y, 1)$ vektorok merőleges egymásra?

- 2
- 1
- 1 (X)
- 0

10. kérdés Határozza meg a $\mathbf{b} = (-1, -2, -2)$ vektor $\mathbf{a} = (-1, 1, -2)$ vektorral párhuzamos összetevőjének koordinátáit!

- $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
- $\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)$

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \quad (\text{X})$$

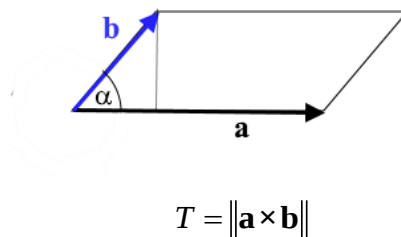
Vektorok vektoriális szorzata

Emlékeztető az 1. leckéből:

Definíció: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt a vektort értjük, amely merőleges $\mathbf{a}$ -ra és $\mathbf{b}$ -re, hossza $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi$, ahol φ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög, és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok esetén a vektoriális szorzatuk akkor és csak akkor nullvektor, ha a két vektor egymással párhuzamos.

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített paralelogramma területe éppen az $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ pozitív valós szám.



Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített háromszög területe éppen az $\frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}{2}$ pozitív valós szám.

A vektoriális szorzat számolása koordinátákkal

Tétel: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \mathbf{i} - \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \mathbf{j} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \mathbf{k} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

12. feladat: Számítsa ki az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ értéket, ha $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$ és $\mathbf{b} = (-1, 0, 2)$!

Megoldás

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = [1 \cdot 2 - (-1) \cdot 0] \mathbf{i} - [2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)] \mathbf{j} + [2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)] \mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Tehát:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2, -3, 1).$$

13. feladat: Határozzuk meg az $ABCD$ paralelogramma területét és C csúcsának koordinátáit, ha $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 0, 3)$ és $D(1, 4, 1)$!

Megoldás

A paralelogrammát lényegében az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok feszítik ki. Tudott összefüggés, hogy ebben az esetben a paralelogramma területe:

$$T = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\|.$$

Állítsuk elő ezeket a vektorokat, ha a csúcsokba mutató helyvektorokat rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ vektorokkal jelöljük.

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2, -1, 3) \quad \overrightarrow{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a} = (0, 3, 1)$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [(-1) \cdot 1 - 3 \cdot 3]\mathbf{i} - [(-2) \cdot 1 - 3 \cdot 0]\mathbf{j} + [(-2) \cdot 3 - 1 \cdot 0]\mathbf{k} = \\ &= -10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$T = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \|-10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}\| = \sqrt{(-10)^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{140}.$$

A C csúcs koordinátáinak meghatározásánál használjuk ki azt, hogy a paralelogramma átlói felezi egymást. Ez a közös felezőpont a paralelogramma középpontja, jelöljük K -val.

K felezőpontja a BD átlónak ezért:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{-1+1}{2} & k_1 &= 0 \\ k_2 &= \frac{0+4}{2} & k_2 &= 2 \\ k_3 &= \frac{3+1}{2} & k_3 &= 2, \end{aligned}$$

azaz

$$K(0, 2, 2).$$

Mivel K az AC átlónak is felezőpontja, ezért:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1+c_1}{2} & c_1 &= -1 \\ 2 &= \frac{1+c_2}{2} & c_2 &= 3 \\ 2 &= \frac{0+c_3}{2} & c_3 &= 4. \end{aligned}$$

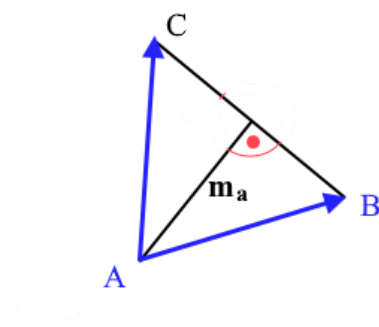
Tehát a keresett C csúcs:

$$C(-1, 3, 4).$$

14. feladat: Határozzuk meg az ABC háromszög A csúcsából induló magasságvonalának hosszát, ha $A(3, -3, 4)$, $B(-1, 2, 4)$ és $C(-1, 6, 1)$!

Megoldás

Készítsünk ábrát.



A megoldás során használjuk ki, hogy a háromszög területét kétféleképpen is ki tudjuk számolni:

$$T = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|,$$

valamint

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2},$$

ahol a szokásos jelölést megtartva $a = \|\vec{BC}\|$, m_a pedig az A csúcsból induló magasság. Mivel a kétféleképpen felírt terület megegyezik, ezért:

$$\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{BC}\| m_a$$

ahonnan:

$$m_a = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{\|\vec{BC}\|}.$$

Állítsuk elő a számoláshoz szükséges vektorokat.

$$\vec{AB} = (-4, 5, 0) \quad \vec{AC} = (-4, 9, -3) \quad \vec{BC} = (0, 4, -3)$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 9 & -3 \end{vmatrix} = [5 \cdot (-3) - 0 \cdot 9] \mathbf{i} - [(-4) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4)] \mathbf{j} + [(-4) \cdot 9 - 5 \cdot (-4)] \mathbf{k} = \\ &= -15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \\ m_a &= \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{\|\vec{BC}\|} = \frac{\sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (-16)^2}}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5. \end{aligned}$$

Vektorok vegyszorzata

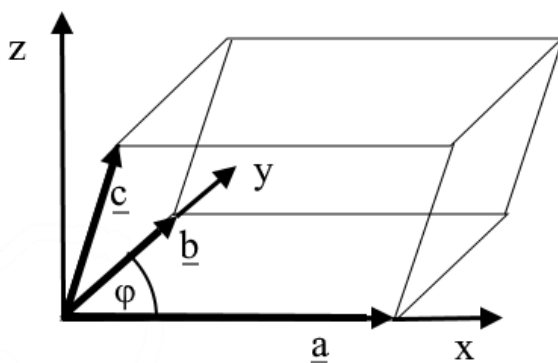
Emlékeztető az 1. leckéből:

A vegyszorzat elnevezés arra utal, hogy ennek kiszámításánál mindkét vektorszorzás műveletre szükségünk lesz.

Definíció: Adott $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem nullvektorok vegyes szorzatán az $\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ valós számot értjük.

Tétel: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok akkor és csak akkor egysíkúak, ha $\mathbf{abc}=0$. Ha a vegyesszorzat nem nulla, akkor annak abszolút értéke az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon V_p térfogatát adja:

$$V_p = |\mathbf{abc}|.$$



Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített tetraéder V_t térfogata:

$$V_t = \frac{|\mathbf{abc}|}{6}.$$

15. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{abc}$ értékét, ha $\mathbf{a} = (2, -4, 3)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 5)$ és $\mathbf{c} = (-2, 3, 1)$.
Egysíkúak-e ezek a vektorok?

Megoldás

Tudjuk, hogy $\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$. Először az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort számoljuk ki.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = [(-4) \cdot 5 - 3 \cdot (-1)]\mathbf{i} - [2 \cdot 5 - 3 \cdot 1]\mathbf{j} + [2 \cdot (-1) - (-4) \cdot 1]\mathbf{k} = \\ &= -17\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

A most kapott vektort skalárisan szorozzuk $\mathbf{c}$ -vel:

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle (-17, -7, 2), (-2, 3, 1) \rangle = (-17) \cdot (-2) + (-7) \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 15.$$

Mivel a vegyesszorzat nem lett nulla, ezért ezek a vektorok nem egysíkúak.

16. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (4, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$ és $\mathbf{c} = (-1, 2, -5)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!

Megoldás

Tudjuk, hogy a $V_p = |\mathbf{abc}|$, azaz ki kell számolni a három vektorok vegyesszorzatát, majd az eredmény abszolút értékét kell venni. A számolást most is két lépésben fogjuk elvégezni.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle (2, -10, 2), (-1, 2, -5) \rangle = -32.$$

Ebből a keresett térfogat:

$$V = |-32| = 32.$$

17. feladat: Egysíkúak-e az alábbi pontok: $A(1, -1, 0)$, $B(0, 1, -1)$, $C(2, 0, -2)$ és $D(1, 1, -2)$?

Megoldás

Ha a négy pont egy síkban van, akkor az egyik pontból a másik három pontba irányított vektor is egy közös síkban van. Ez az állítás fordítva is igaz. Ha kiválasztjuk az A pontot, és képezzük az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokat, akkor ha ezen vektorok vegyesszorzata nulla értéket ad, akkor a vektorok egysíkúak, de ekkor a pontok is olyanok.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1) \quad \overrightarrow{AC} = (1, 1, -2) \quad \overrightarrow{AD} = (0, 2, -2).$$

Képezzük az

$$\overrightarrow{ABACAD} = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle$$

vegyesszorzatot. Ezt most is két lépésben fogjuk számolni.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{ABACAD} = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (-3, -3, -3), (0, 2, -2) \rangle = 0.$$

Mivel a három vektor vegyesszorzata nulla, ezért a három vektor egysíkú. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha az eredeti négy pont is egysíkú.

18. feladat: Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata, ha $A(1, -1, 0)$, $B(-6, 0, -1)$, $C(-2, -4, 1)$ és $D(-2, -4, -3)$?

Megoldás

Tudjuk, hogy a tetraéder térfogata vegyesszorzat segítségével számolható, ha rendelkezünk egy közös csúsból induló három élvektorral. Ennek érdekében válasszuk ki az A csúcsot, és határozzuk meg a többi csúcsba mutató élvektort.

$$\overrightarrow{AB} = (-7, 1, -1) \quad \overrightarrow{AC} = (-3, -3, 1) \quad \overrightarrow{AD} = (-3, -3, -3)$$

Képezzük először az

$$\overrightarrow{ABACAD} = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle$$

vegyesszorzatot. Ezt most is két lépésben fogjuk számolni.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -7 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 24\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{ABACAD} = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (-2, 10, 24), (-3, -3, -3) \rangle = -96.$$

Innen a tetraéder térfogata:

$$V_t = \frac{|\overrightarrow{ABACAD}|}{6} = \frac{|-96|}{6} = 16.$$

Ellenőrző kérdések

11. kérdés: Mivel egyenlő $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, ha $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ és $\mathbf{b} = (0, -2, 1)$?

- (2, 1, 2) (X)
- (2, -1, 2)
- (-2, -1, -2)
- (-2, 1, -2)

12. kérdés: Mekkora az $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ és $\mathbf{b} = (0, -2, 1)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?

- 9
- 3 (X)
- 1,5
- 4,5

13. kérdés: Számítsa ki az ABC háromszög területét, ha $A(-3, 2, 5)$, $B(1, 0, 4)$ és $C(2, 6, 3)$!

- $\frac{\sqrt{749}}{2}$ (X)
- $\frac{37}{2}$
- $\frac{15}{2}$
- $\frac{\sqrt{740}}{2}$

14. kérdés: Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{b} = (5, -3, -2)$ és $\mathbf{c} = (3, -4, 2)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!

- 3 (X)
- 3
- 9
- 5

15. kérdés: Egysíkúak-e az alábbi pontok: $A(1, -1, 0)$, $B(2, 1, -1)$, $C(-1, -1, 1)$ és $D(-4, 1, 5)$?

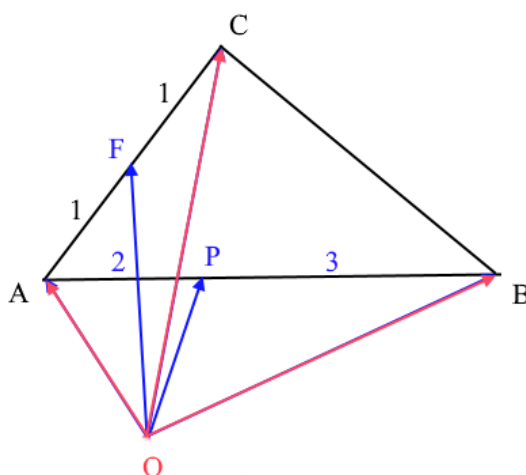
igen
nem (X)

Összetett feladatok

19. feladat: Adott az ABC háromszög $A(1,-1,2)$ csúcsa, valamint az AB oldal egy olyan $P(1,1,2)$ pontja, amelyre $AP:PB=2:3$. Az AC oldal felezőpontja $F(5,5,-2)$. Határozzuk meg a háromszög hiányzó csúcsait és a súlypont koordinátáit! Számítsuk ki a háromszög területét!

Megoldás

Jelölje $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{f}$ és $\mathbf{s}$ rendre az A , B , C , P , F és S pontokba mutató helyvektorokat a szokásoknak megfelelően.



Mivel P egy ötödölő pont az AB szakaszon, ezért

$$\mathbf{p} = \frac{3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}}{5} \rightarrow \mathbf{b} = \frac{5\mathbf{p} - 3\mathbf{a}}{2} = \frac{5}{2}\mathbf{p} - \frac{3}{2}\mathbf{a}.$$

Behelyettesítve:

$$\mathbf{b} = \frac{5}{2}\mathbf{p} - \frac{3}{2}\mathbf{a} = \frac{5}{2}(1, 1, 2) - \frac{3}{2}(1, -1, 2) = (1, 4, 2).$$

Eszerint a háromszög B csúcsa:

$$B(1, 4, 2).$$

Mivel F felezőpont az AC oldalon, ezért:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} \rightarrow \mathbf{c} = 2\mathbf{f} - \mathbf{a},$$

azaz:

$$\mathbf{c} = 2\mathbf{f} - \mathbf{a} = 2(5, 5, -2) - (1, -1, 2) = (9, 11, -6).$$

Tehát a C csúcs koordinátái:

$$C(9, 11, -6).$$

Ismert összefüggés, hogy

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{1}{3}[(1, -1, 2) + (1, 4, 2) + (9, 11, -6)] = \left(\frac{11}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Tehát a háromszög súlypontjának koordinátái:

$$S\left(\frac{11}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

A háromszög területének meghatározásához adjunk meg két olyan vektort, amely kifeszíti a háromszöget. Legyenek ezek most az A pontból induló $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok. Ekkor a háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AB} = (0, 5, 0) \quad \overrightarrow{AC} = (8, 12, -8).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & -12 & -8 \end{vmatrix} = -40\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 40\mathbf{k}.$$

A háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-40)^2 + (-40)^2} = 20\sqrt{2}.$$

20. feladat: Az $ABCD$ paralelogramma csúcsai $A(-2, 1, 2)$, $B(4, 3, -1)$ és $C(1, 9, -3)$. Bizonyítsa be, hogy a paralelogramma négyzet!

Megoldás

Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért az AC és BD átlók felezőpontja megegyezik. Ez a pont a paralelogramma középpontja, jelöljük K -val.

Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, és $\mathbf{k}$ rendre az A , B , C , D és K pontokba mutató helyvektorok.

Ekkor:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}[(-2, 1, 2) + (1, 9, -3)] = \left(-\frac{1}{2}, 5, -\frac{1}{2}\right).$$

Továbbá:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d}) \rightarrow \mathbf{d} = 2\mathbf{k} - \mathbf{b} = 2\left(-\frac{1}{2}, 5, -\frac{1}{2}\right) - (4, 3, -1) = (-5, 7, 0),$$

tehát a paralelogramma D csúcsa:

$$D(-5, 7, 0).$$

Egy paralelogramma akkor négyzet, ha két szomszédos oldala azonos hosszúságú és merőleges egymásra. Tekintsük az AB és AD oldalakat.

$$\overrightarrow{AB} = (6, 2, -3) \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2} = 7$$

$$\overrightarrow{AD} = (3, -6, 2) \quad \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = 7$$

Tehát a paralelogrammánk két szomszédos oldala 7 egységnyi. Még a merőlegességet kell igazolni. Tudjuk, hogy ha két vektor merőleges egymásra, akkor a skaláris szorzatuk nulla. Ellenőrizzük le:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (6, 2, -3), (3, -6, 2) \rangle = 18 - 12 - 6 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy két szomszédos oldal merőleges egymásra.

Mivel olyan paralelogrammánk van, amelynek két szomszédos oldala egyenlő nagyságú és egymásra merőleges, ezért ez a paralelogramma négyzet.

Megjegyzés: A D csúcs meghatározása nélkül is dolgozhattunk volna. A négyzet olyan síkidom, amelynek két egyenlő hosszúságú átlója van, amelyek merőlegesen felezik egymást. Ezt a tulajdonságot kihasználva is megoldhattuk volna a feladatot.

21. feladat: Egy téglatest két élvektora $\mathbf{a} = (4, 3, 1)$ és $\mathbf{b} = (-1, 0, 1)$. Határozzuk meg a harmadik $\mathbf{c}$ élvektorát, ha tudjuk, hogy $\|\mathbf{c}\| = 5$.

Megoldás

A téglatest élei merőlegesek egymásra, ezért a keresett $\mathbf{c}$ vektor merőleges mind az $\mathbf{a}$, mind a $\mathbf{b}$ vektorra. Ha egy olyan vektort keresünk, amely két adott vektor mindegyikére merőleges, akkor ahhoz a vektoriális szorzatra lesz szükségünk. Képezzük az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Ez az új vektor csak akkor lehet a keresett $\mathbf{c}$ élvektor, ha a hossza 5 egység.

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 3^2} = \sqrt{43}.$$

Nekünk egy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányú, de 5 hosszúságú vektorra van szükségünk, ezért

$$\mathbf{c} = \frac{5}{\sqrt{43}}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{5}{\sqrt{43}}(3, -5, 3) = \left(\frac{15}{\sqrt{43}}, -\frac{25}{\sqrt{43}}, \frac{15}{\sqrt{43}}\right).$$

A feltételeknek a most meghatározott $\mathbf{c}$ vektor ellentettje is megfelel, így a feladat másik megoldása:

$$\mathbf{c}' = -\mathbf{c} = \left(-\frac{15}{\sqrt{43}}, \frac{25}{\sqrt{43}}, -\frac{15}{\sqrt{43}}\right).$$

22. feladat: Mekkora az $ABCD$ tetraéder D csúcsból induló testmagasságának hossza, ha $A(1, 2, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(4, 4, 3)$ és $D(-5, 10, 9)$?

Megoldás

A megoldás során a tetraéder térfogatát kétféleképpen fogjuk felírni, amelyből a keresett magasság majd meghatározható lesz.

Határozzuk meg először a tetraéder A csúcsából induló élvektorait:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1) \quad \overrightarrow{AC} = (3, 2, 2) \quad \overrightarrow{AD} = (-6, 8, 8).$$

Először számoljuk ki a tetraéder térfogatát a vegyszorzat segítségével.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (-2, 1, 2), (-6, 8, 8) \rangle = 36,$$

$$V_t = \frac{|\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}|}{6} = \frac{36}{6} = 6.$$

A D csúcsból induló testmagasság meghatározásához használjuk fel a tetraéder középiskolában tanult térfogatképletét, valamint azt, hogy a háromszög területét fel tudjuk írni a vektoriális szorzat hosszaként:

$$V_t = \frac{t_{ABC\Delta} \cdot m_D}{3} = \frac{\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \cdot m_D}{3} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \cdot m_D}{6}.$$

A vektoriális szorzatot már korábban kiszámoltuk, így:

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = 3.$$

Innen a keresett magasság:

$$6 = \frac{3 \cdot m_D}{6} \rightarrow m_D = 12.$$

23. feladat: Határozzuk meg z értékét úgy, hogy az alábbi három vektor egy síkban legyen: $\mathbf{a} = (2, z, z)$, $\mathbf{b} = (-z, 3, -4)$, $\mathbf{c} = (2z, -1, 3)$.

Megoldás

Ha három vektor egy síkban van, akkor a vegyesszorzatuk nulla. Ezt használjuk ki a megoldás során.

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 0.$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & z & z \\ -z & 3 & -4 \end{vmatrix} = -7z\mathbf{i} - (-8+z)\mathbf{j} + (6+z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 0 \rightarrow \langle (-7z, 8-z, 6+z), (2z, -1, 3) \rangle = 0$$

$$-14z^2 - (8-z) + 3(6+z) = 0$$

$$-14z^2 + 4z + 10 = 0$$

$$z_1 = 1 \quad z_2 = -\frac{5}{7}.$$

Ellenőrző kérdések

16. kérdés: Adott az ABC háromszög $C(1, -3, 2)$ csúcsa, valamint az AC oldal egy olyan $P\left(\frac{5}{3}, -1, \frac{4}{3}\right)$ pontja, amelyre $AP:PC=1:2$. Az AB oldal felezőpontja $F\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!

$$S(1, 0, 1)$$

$$S(1, -1, 0)$$

$$S(1, -1, 1) \text{ (X)}$$

$$S(1, 1, -1)$$

17. kérdés: Kockát feszít-e ki a következő három vektor? $\mathbf{a}(-8, 2, 4)$, $\mathbf{b}(2, -4, 8)$, $\mathbf{c}(-4, 8, -2)$

igen

nem (X)

18. kérdés: Mekkora az $ABCD$ tetraéder D csúcsból induló testmagasságának hossza, ha $A(-1, -1, -1)$, $B(3, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$ és $D(0, 0, 3)$?

$$\frac{4}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{2}{6} \sqrt{3} \quad (\mathbf{X})$$

- 19. kérdés:** Határozza meg x értékét úgy, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 62 egység legyen, ha $\mathbf{a}(x, -6, 8)$, $\mathbf{b}(-x, -1, -4)$, $\mathbf{c}(x, -5, 3)$!

$$\frac{1}{3} \sqrt{2} \quad (\mathbf{X})$$

3. Vektorok, komplex számok

1.3. Térelemek megadása, metszéspontja, távolsága, szöge

Tanulási cél: ebben a leckében megmutatjuk, hogyan használhatjuk a skaláris és a vektoriális szorzatot térbeli egyenesek és síkok egyenletének felírására.

Térelemeknek nevezzük három dimenzióban a pontot, egyenest és síkot.

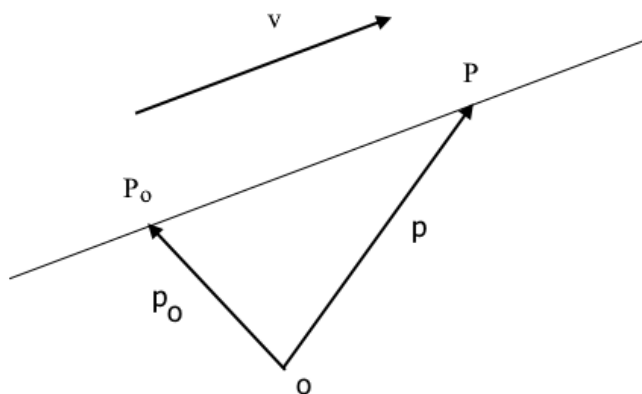
Egyenes megadása térben

Síkbeli koordináta geometriában az egyenes normálvektorának egy, az egyenesre merőleges vektort neveztünk. Térbeli egyenes esetében ez már nem egyértelmű, mert egy térbeli egyenesre végtelen sok merőleges vektor állítható, ezért a térbeli egyenes megadásához más adatra lesz szükségünk.

Legyen adott a térben egy $P_0(x_0, y_0, z_0)$ rögzített pont és egy $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq 0$ vektor. Ekkor pontosan egy olyan egyenes létezik, amely áthalad a P_0 ponton, és párhuzamos a $\mathbf{v}$ vektorral. Ennek az egyenesnek a paraméteres vektoregyenlete:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

ahol $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a P_0 rögzített pont helyvektora, a $\mathbf{p} = (x, y, z)$ az egyenes egy tetszőleges P futópontjának a helyvektora, a t valós szám a paraméter, a $\mathbf{v}$ pedig az egyenes irányvektora.



Ez annyit jelent, hogy t helyére különböző értékeket helyettesítve az egyenesen egy-egy pontot kapunk. Ez fordítva is igaz, az egyenes minden pontjának egyértelműen megfelel egy t érték.

A fenti összefüggés egy vektoregyenlet, ami azt jelenti, hogy ha az egyenlet bal és a jobb oldala megegyezik, akkor a két vektor minden koordinátája megegyezik. Felírva a koordinátákra vonatkozó egyenleteket, az egyenes **paraméteres egyenletrendszerét** kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + v_1 t \\ y &= y_0 + v_2 t \\ z &= z_0 + v_3 t \end{aligned} \right\} t \in R.$$

Megjegyzés: Egy adott egyenes paraméteres egyenletrendszere végtelen sokféleképpen felírható!

Ha az egyenes irányvektorában egyik komponens sem nulla, akkor az egyenleteket t -re rendezve:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} = (t)$$

az egyenes **paraméter nélküli** egyenletéhez jutunk.

1. feladat: Írja fel az $A(3, -1, 4)$ és $B(2, 3, -1)$ pontok által meghatározott egyenes egyenletét mindkét alakban! Adjon egy további C pontot, amely rajta van az egyenesen! Döntse el, hogy a $D(-3, 2, -1)$ pont rajta van-e az egyenesen?

Megoldás:

Az egyenes felírásához szükségünk van egy irányvektorra és egy adott pontra. Irányvektor lehet az $\overrightarrow{AB}$ vektor, az adott pont pedig legyen az A . Mivel $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v} = (-1, 4, -5)$, ezért az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 3 - t, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 4 - 5t, \quad t \in R.$$

Mivel az irányvektor egyik komponense sem nulla, ezért mindegyik egyenletet t -re rendezve megkapjuk a paraméter nélküli alakot:

$$3 - x = \frac{y + 1}{4} = \frac{4 - z}{5}.$$

Az egyenes egy tetszőleges pontját kapjuk, ha t -nek adunk egy valós értéket és ezt behelyettesítjük az egyenes paraméteres egyenletrendszerébe, így meghatározva a keresett C pont (x, y, z) koordinátáit.

Legyen például $t = 2$, ekkor $x = 1, y = 7, z = -2$, tehát az egyenes egy tetszőleges C pontja: $C(1, 7, -2)$. Világos, hogy más t érték esetén az egyenes más-más pontját kapjuk.

Egy pont akkor van rajta egy egyenesen, ha koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét. Ez a paraméteres alaknál azt jelenti, hogy minden koordináta értékhez ugyanaz a t érték tartozik. Ha $D(-3, 2, -1)$ rajta van az egyenesen, akkor D koordinátáit behelyettesítve és az egyenletrendszert megoldva mindegyik sorból azonos t -t számolunk.

$$-3 = 3 - t \rightarrow t = 6; \quad 4 = -1 + 4t \rightarrow t = \frac{5}{4}.$$

Mivel már az első két sorból különböző t értéket kaptunk, egyértelmű, hogy a D pont nincs rajta az egyenesen.

Megjegyzés: Ha az egyenes felírásánál a B pontot választottuk volna adott pontnak, akkor a következő alakot kapnánk:

$$x = 2 - t, \quad y = 3 + 4t, \quad z = -1 - 5t, \quad t \in R.$$

Úgy tűnhet, hogy másik egyenest kaptunk, pedig nem. Ez ugyanaz az egyenes, csak más az alakja.

2. feladat: Igaz-e, hogy $e: x=1-2t, y=3+t, z=-1-t, t \in \mathbb{R}$ és $f: 1-x = \frac{y+3}{2} = \frac{2z+1}{3}$ egyenesek párhuzamosak?

Megoldás

Két egyenes párhuzamos, ha irányvektoraik párhuzamosak. Az e egyenes irányvektora könnyen kiolvasható: $\mathbf{v}_e = (-2, 1, -1)$.

Az f egyenes paraméter nélküli egyenletét alakítsuk vissza a paraméteres formába, hogy az irányvektort ki tudjuk olvasni. Tudjuk, hogy

$$f: 1-x = \frac{y+3}{2} = \frac{2z+1}{3} = t,$$

innen:

$$\begin{aligned} 1-x &= t \rightarrow x = 1-t \\ \frac{y+3}{2} &= t \rightarrow y = -3+2t \\ \frac{2z+1}{3} &= t \rightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t. \end{aligned}$$

Kiolvastva az f egyenes irányvektorát: $\mathbf{v}_f = (-1, 2, \frac{3}{2})$.

Ha két vektor párhuzamos, akkor megfelelő koordinátáik hányadosa állandó. Mivel

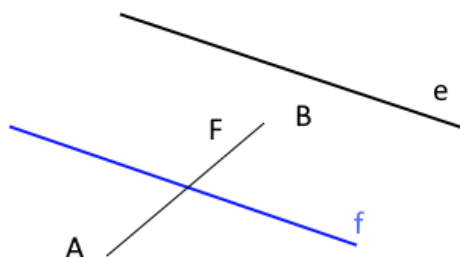
$$\frac{-1}{-2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{1,5}{-1},$$

ezért a két egyenes nem párhuzamos.

3. feladat: Írja fel az AB szakasz felezőpontján átmenő, $e: \frac{x-1}{2} = \frac{2-2y}{3} = z-3$ egyenessel párhuzamos egyenes paraméter nélküli egyenletét, ha $A(2, -1, 0)$ és $B(0, -3, -2)$!

Megoldás

Készítsünk ábrát!



Legyen az általunk keresett egyenes f . Az egyenes felírásához kell egy irányvektora és egy pontja. Mivel az egyenes az AB szakasz felezőpontján megy át, ezért az lesz a rögzített pontunk. Legyen F az AB szakasz felezőpontja, ekkor annak koordinátái:

$$f_1 = \frac{2+0}{2} \rightarrow f_1 = 1$$

$$f_2 = \frac{-1+(-3)}{2} \rightarrow f_2 = -2$$

$$f_3 = \frac{0+(-2)}{2} \rightarrow f_3 = -1$$

Tehát $F(1, -2, -1)$.

Mivel $e \parallel f$, ezért az irányvektoraik párhuzamosak, tehát akár $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_f$ is lehet.

$\mathbf{v}_e$ meghatározásához alakítsuk át az egyenes egyenletét a paraméteres alakra:

$$\frac{x-1}{2} = t \rightarrow x = 1 + 2t$$

$$\frac{2-2y}{3} = t \rightarrow y = \frac{2-3t}{2}$$

$$z-3 = t \rightarrow z = 3 + t.$$

Az egyenletből: $\mathbf{v}_e = (2, -1, 5)$. Mivel $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_f$, ezért a keresett egyenes:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1,5} = z+1$$

4. feladat: Írja fel az $A(0, -4, 3)$ és $B(-3, -1, 0)$ végpontokkal rendelkező szakasz A -hoz közelebbi harmadoló pontján átmenő, XY síkra merőleges egyenes paraméteres egyenletét!

Megoldás

Először keressük meg az A -hoz közelebbi harmadoló H_A pontot. Mivel:

$$h_1 = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot (-3)}{3} \rightarrow h_1 = -1$$

$$h_2 = \frac{2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1)}{3} \rightarrow h_2 = -3$$

$$h_3 = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0}{3} \rightarrow h_3 = 2$$

A számolt koordinátáknak megfelelően:

$$H_A(-1, -3, 2).$$

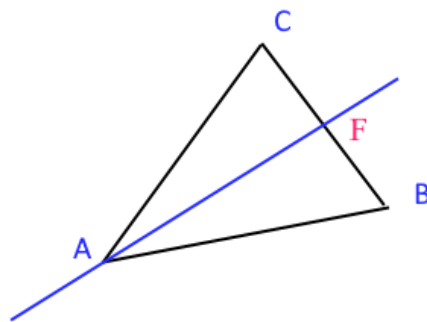
Az XY síkra merőleges egyenes párhuzamos a z tengellyel, ezért a z tengely irányába mutató bármely vektor jó lesz az általunk keresett egyenlet irányvektorának is. Mivel $\mathbf{v}_z = (0, 0, 1)$, ezért a keresett egyenes:

$$x = -1, \quad y = -3, \quad z = 2 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. feladat: Írja fel az ABC háromszög A csúsból induló súlyvonalának egyenletét, ha $A(3, 1, -2)$, $B(-3, -1, 4)$ és $C(1, 5, -6)$.

Megoldás

Tudjuk, hogy a súlyvonal a háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz. Ha F a BC oldal felezőpontja, akkor egy olyan egyenest kell felírunk, amely áthalad az A és F pontokon.



A felezőpont könnyen számolható:

$$f_1 = \frac{-3+1}{2} \rightarrow f_1 = -1$$

$$f_2 = \frac{-1+5}{2} \rightarrow f_2 = 2$$

$$f_3 = \frac{4+(-6)}{2} \rightarrow f_3 = -1$$

tehát $F(-1, 2, -1)$.

A súlyvonal felírásához meghatározzuk egy irányvektorát: $\mathbf{v} = \overrightarrow{AF} = (-4, 1, 1)$, adott pontnak pedig A -t választva a keresett egyenlet:

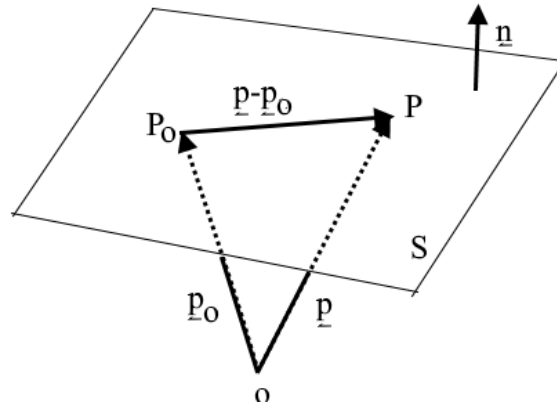
$$x = 3 - 4t, \quad y = 1 + t, \quad z = -2 + t \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sík megadása

Adott a térben egy $P_0(x_0, y_0, z_0)$ rögzített pont és egy $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \neq 0$ vektor. Ekkor pontosan egy olyan sík létezik, amely áthalad a P_0 ponton, és merőleges az $\mathbf{n}$ vektorra. Ekkor a sík normálegyenlete:

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle = 0,$$

ahol $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a P_0 pont helyvektora, a $\mathbf{p} = (x, y, z)$ a sík egy tetszőleges P futópontjának a helyvektora, és $\mathbf{n}$ pedig a sík egy normálvektora (a síkra merőleges vektor).



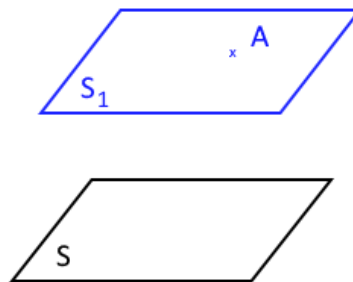
A skalárszorzat koordinátákkal felírt kiszámolási módját felhasználva megkapjuk a sík egyenletét:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

6. feladat: Írja fel az $A(2,1,-2)$ pontra illeszkedő és az $S: x - y + z = 2$ síkkal párhuzamos S_1 sík egyenletét! Adjon egy olyan B pontot, amely illeszkedik az S_1 síkra! Döntse el, hogy a $C(1, -3, 2)$ pont rajta van-e az S_1 síkon?

Megoldás

A feladathoz tartozó ábra:



Két sík párhuzamos, ha normálvektoraik megegyeznek vagy párhuzamosak. Olvassuk ki az adott sík egy normálvektorát: $\mathbf{n}_S = (1, -1, 1)$, ez lehet az általunk keresett S_1 sík normálvektora is. Mivel a sík tartalmazza az A pontot, az lesz a rögzített pont. Ekkor a keresett egyenlet:

$$1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z + 2) = 0.$$

Rendezve:

$$S_1: x - y + z = 1.$$

Ha egy B pont rajta van a síkon, akkor a pont koordinátái kielégítik a sík egyenletét. Mivel most ez egy tetszőleges pont lesz, ezért két koordinátáját tetszőlegesen megválasztjuk, a harmadik koordinátát pedig helyettesítéssel számoljuk.

Legyen $B(-2, 3, z)$. Ekkor

$$-2 + 1 \cdot 3 - 2z = 7 \rightarrow z = -3,$$

tehát $B(-2, 3, -3)$.

Ha $C(1, -3, 2)$ rajta van a síkon, akkor koordinátái kielégítik a sík egyenletét. Ezt behelyettesítéssel ellenőrizhetjük. Mivel

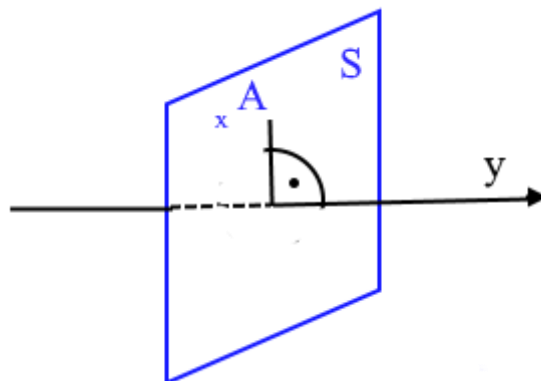
$$1 - 3 - 4 \neq 7,$$

ezért C nincs rajta az S_1 síkon.

7. feladat: Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az y tengelyre és áthalad az $A(1, -2, 3)$ ponton!

Megoldás

Készítsünk egy kész ábrát!



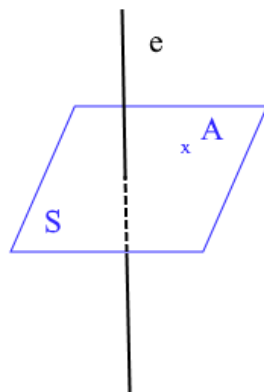
Az y tengely merőleges a keresett síkra, ezért $\mathbf{n}_S = \mathbf{v}_y$ teljesül. Mivel $\mathbf{v}_y = (0, 1, 0)$, így a keresett sík:

$$S: 0(x-1) + 1(y+2) + 0(z-3) = 0 \rightarrow y = -2.$$

8. feladat: Írja fel az $e: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} = 1-z$ egyenesre merőleges és az $A(1, -2, 3)$ ponton átmenő sík egyenletét!

Megoldás

Rajzoljunk egy kész ábrát!



Az előző feladat alapján tudjuk, hogy $\mathbf{n}_s = \mathbf{v}_e$. Az egyenes irányvektorának meghatározásához vissza kell alakítani paraméteres alakba.

$$\frac{x-1}{3} = t \rightarrow x = 1 + 3t,$$

$$\frac{2-y}{2} = t \rightarrow y = 2 - 2t,$$

$$1 - z = t \rightarrow z = 1 - t.$$

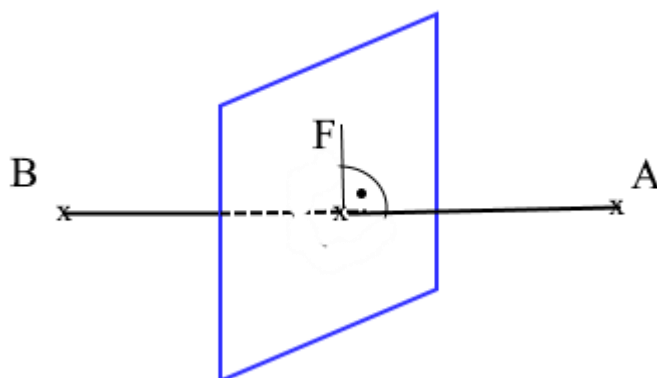
Innen $\mathbf{v}_e = (3, -2, -1)$. Mivel $\mathbf{n}_s = \mathbf{v}_e$, így a keresett sík egyenlete:

$$S: 3(x-1) - 2(y+2) + 1(z-3) = 0 \rightarrow 3x - 2y + z = 10.$$

9. feladat: Írja fel az AB szakasz felezőmerőleges síkjának egyenletét, ha $A(1, 2, -3)$ és $B(-3, 4, 1)$.

Megoldás

Rajzoljunk!



Először meghatározzuk a szakasz felezőpontját: $F\left(\frac{1-3}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (-1, 3, -2)$.

Mivel a felezőmerőleges egyenese merőleges a síkra, ezért $\mathbf{v}_f = \mathbf{n}_s$.

Tudjuk, hogy $\mathbf{v}_f = \overrightarrow{AB} = \mathbf{n}_s = (-4, 2, 4)$, így a keresett sík egyenlete:

$$-4(x+1) + 2(y-3) + 4(z+1) = 0,$$

átrendezve:

$$-4x + 2y + 4z = 6 \rightarrow 2x - y + 2z = 3.$$

Ellenőrző kérdések

1. **kérdés:** Írja fel az $A(-3, 4, 5)$ pontot az origóval összekötő egyenes paraméteres egyenletrendszerét!

$$x = -3t, \quad y = -4t, \quad z = -5t \quad t \in R$$

$$x = 3t, \quad y = -4t, \quad z = -5t \quad t \in R \quad (\mathbf{X})$$

$$x = 3t, \quad y = 4t, \quad z = -5t \quad t \in R$$

$$x = -3t, \quad y = -4t, \quad z = 5t \quad t \in R$$

2. **kérdés:** Írja fel az $A(2, 0, 4)$ és $B(-4, 2, -2)$ pontok felezőpontján áthaladó, $e: x = 2 - t, y = 3 + 2t, z = 2 + t$ egyenessel párhuzamos egyenes paraméter nélküli egyenletét!

$$x + 2 = \frac{y - 1}{2} = z - 1$$

$$-x - 2 = \frac{y - 1}{2} = z + 1$$

$$x + 2 = \frac{1 - y}{2} = z - 1$$

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = z - 1 \quad (\mathbf{X})$$

3. **kérdés:** Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $A(-3, 0, 1)$ ponton és párhuzamos az y tengellyel!

$$x = 3, \quad y = t, \quad z = 1 \quad t \in R$$

$$x = -3 + t, \quad y = t, \quad z = -1 \quad t \in R$$

$$x = -3, \quad y = t, \quad z = 1 \quad t \in R \quad (\mathbf{X})$$

$$x = -3, \quad y = t, \quad z = t \quad t \in R$$

4. **kérdés:** Írja fel az $A(2, -2, 1)$ ponton áthaladó $2x + y - z = 1$ síkra merőleges egyenes egyenletét!

$$x = 2 + 2t, \quad y = -2 + t, \quad z = 1 - t \quad t \in R \quad (\mathbf{X})$$

$$x = 2 - 2t, \quad y = -2 + t, \quad z = 1 - t \quad t \in R$$

$$x = 2 - 2t, \quad y = -2 - t, \quad z = 1 - t \quad t \in R$$

$$x = 2 + 2t, \quad y = -2 + t, \quad z = 1 + t \quad t \in R$$

5. **kérdés:** Döntse el, hogy az $A(1, -3, 2)$ és a $B(-1, 1, 2)$ pontok rajta vannak-e a $2x + y - z = 1$ síkon?

mindkettő rajta van

csak A van rajta

csak B van rajta

egyik sincs rajta (X)

6. Írja fel az $A(1, 5, -2)$ pontra illeszkedő és az YZ síkkal párhuzamos sík egyenletét!

$$x = 1 \quad (\text{X})$$

$$y = 5$$

$$z = 2$$

$$x = 0$$

7. **kérdés:** Írja fel az $A(1, 0, -1)$ pontra illeszkedő és az $e: \frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{3} = \frac{2z-1}{4}$ egyenesre merőleges sík egyenletét!

$$2x + 3y + 2z = 0$$

$$2x - 3y + 2z = 0 \quad (\text{X})$$

$$2x - 3y - 2z = 0$$

$$2x + 3y - 2z = 0$$

Tételek kölcsönös helyzete, közös pontjai

Két egyenes metszéspontja

Mivel közös pontot keresünk, ezért két ismeretlenes, de három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk. Ezt úgy érdemes megtenni, hogy tetszőlegesen kiválasztunk két egyenletet, azokat megoldjuk, majd leellenőrizzük, hogy a kapott megoldás kielégíti-e a harmadik egyenletet. Ha igen, akkor van megoldás, azaz a két egyenes metszi egymást, ha nem, akkor nincs megoldás, azaz a két egyenes nem metszi egymást. Ezeket ilyenkor kitérő egyeneseknek nevezzük.

10. feladat: Határozzuk meg az $e: x = 2 + t, y = -1 - t, z = 1 - 2t \quad t \in \mathbb{R}$ és az $f: x = 4 + t, y = 1 + 3t, z = t \quad t \in \mathbb{R}$ egyenesek metszéspontját, ha létezik!

Megoldás

Az egyenesek irányvektorai: $\mathbf{v}_e = (1, -1, -2)$ és $\mathbf{v}_f = (1, 3, 1)$. Mivel a két irányvektor nem párhuzamos egymással, ezért a két egyenes sem az, tehát vagy metszik egymást vagy kitérők. Próbáljunk metszéspontot keresni. Ebben az esetben célszerű a két egyenes egyenletében szereplő paramétert más-más betűvel jelölni, ezért az f egyenes paraméterét a továbbiakban u -val jelöljük. Ha a két egyenesnek van metszéspontja, akkor az azt jelenti, hogy van olyan t és u paraméter, amelyek ugyanazt az $M(x, y, z)$ pontot határozzák meg. Ez azt jelenti, hogy ennek a két paraméternek ki kell elégítenie a következő egyenletrendszert:

$$2 + t = 4 + u \quad -1 - t = 1 + 3u \quad 1 - 2t = u.$$

A harmadik egyenletből megvan u , ezt beírva az első egyenletbe:

$$2 + t = 4 + 1 - 2t \rightarrow t = 1 \rightarrow u = -1$$

Ha van metszéspont, akkor ezeknek az értékeknek ki kell elégíteniük az eddig általunk fel nem használt második egyenletet is. Ha ez nem teljesül, akkor a két egyenesnek nincs metszéspontja. Behelyettesítve a második egyenletbe:

$$-1 - 1 = 1 + 3 \cdot (-1)$$

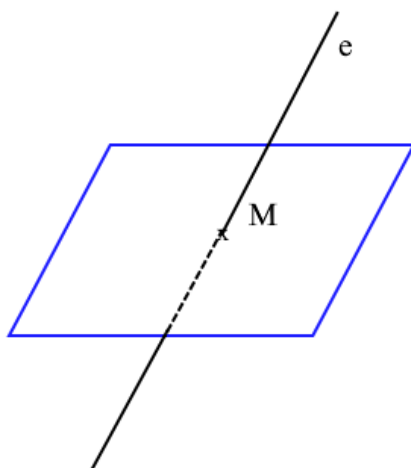
Az egyenlőség teljesül, tehát van metszéspont. Ez a metszéspont meghatározható a t paraméterrel az e egyenesből, vagy az u paraméterrel az f egyenesből is.

Ha a $t = 1$ értéket behelyettesítjük az e egyenesbe, akkor a metszéspont: $M(3, -2, -1)$

Egyenes és sík metszéspontja

11. feladat: Határozzuk meg az $e: x = 2 + t, y = -2 + t, z = 3t \quad t \in \mathbb{R}$ egyenes és az $S: x - 2y + 5z = 20$ sík metszéspontját!

Megoldás



Keressük azt az egyenesen lévő $M(2+t, -2+t, 3t)$ pontot, amely rajta van az S síkon is. Ha egy pont rajta van a síkon, akkor koordinátái kielégítik a sík egyenletét. Helyettesítsük be a pont koordinátáit a sík egyenletébe:

$$(2+t) - 2(-2+t) + 5(3t) = 20 \rightarrow 14t = 14 \rightarrow t = 1.$$

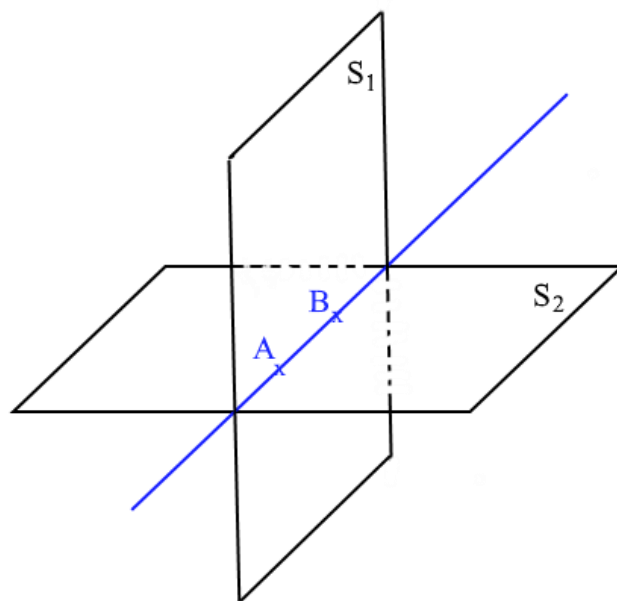
Ez azt jelenti tehát, hogy az egyenes $t = 1$ paraméterértékhez tartozó pontja rajta van az S síkon, vagyis a metszéspont $M(3, -1, 3)$

Két sík metszésvonala

12. feladat: Határozzuk meg az $S_1: x + y - z = 1$ és $S_2: x - y + 2z = 2$ síkok metszésvonalának egyenletét!

Megoldás

Olvassuk ki a síkok normálvektorait: $\mathbf{n}_{S_1} = (1, 1, -1)$ és $\mathbf{n}_{S_2} = (1, -1, 2)$. Látható, hogy a két normálvektor nem egymás skalárszorosa, azaz a síkok nem párhuzamosak.



Ez pedig azt jelenti, hogy egy egyenesben metszik egymást. A metszésvonal meghatározásának az a legegyszerűbb módja, ha keresünk két olyan pontot, amely a metszésvonalon rajta van. Ez egyben azt is jelenti, hogy ez a két pont mindkét síkon is rajta van. Azaz kell két olyan (x,y,z) hármas, amely mindkét sík egyenletét kielégíti. Ekkor a metszésvonal a két ponton átmenő egyenes lesz, ami így már könnyen felírható.

Tekintsük a síkok egyenleteiből álló egyenletrendszert:

$$x + y - z = 1 \quad x - y + 2z = 2$$

Ennek végtelen sok megoldása van. Ezért lehetőségünk van olyan pontokat keresni, amelyek valamelyik koordinátáját mi magunk választjuk meg tetszőleges értékkel. Célszerű egy $A(x, y, 0)$ és egy $B(0, y, z)$ pontot keresni.

Az A pont meghatározása során az egyenletekbe a z helyére nullát írva, megoldjuk az így kapott egyenletrendszert.

$$x + y = 1 \quad x - y = 2 \rightarrow x = 1,5 \quad y = -0,5 \rightarrow A(1,5, -0,5, 0).$$

Hasonlóan keressük meg a B pontot is:

$$y - z = 1 \quad -y + 2z = 2 \rightarrow z = 3 \quad y = 4 \rightarrow B(0, 4, 3)$$

A keresett egyenes két pontjából meghatározzuk az egyenes irányvektorát: $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (-1, 5, 4, 5, 3) = (-3, 9, 6)$, majd a B pont segítségével felírjuk a metszésvonal egyenletét.

$$S_1 \cap S_2 = \begin{cases} x = -3t \\ y = 4 + 9t \\ z = 3 + 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ellenőrző kérdések

8. kérdés: Határozza meg az $e: x = 3 + 2t, y = 1 + t, z = 2 - t \quad t \in R$ és $f: x = -1 + t, y = 2 + 2t, z = 1 - 2t \quad t \in R$ egyenesek metszéspontját!

Megoldás

$$M(-3, -2, -5)$$

$$M(5, 2, 1)$$

$$M(-3, -2, 5) \text{ (X)}$$

$$M(1, 6, -3)$$

9. kérdés: Határozza meg az $e: x = 3 - 3t, y = -1 + t, z = -2 - 2t \quad t \in R$ egyenes és az YZ sík metszéspontját!

Megoldás

$$M(0, -2, 0)$$

$$M(1, 0, 0)$$

$$M(0, -2, 3)$$

$$M(0, 0, -4) \text{ (X)}$$

10. kérdés: Határozzuk meg az $e: x = 2 - t, y = 1 + t, z = 1 - 2t \quad t \in R$ egyenes és az $S: x + y - 2z - 5 = 0$ sík metszéspontját!

Megoldás

$$M(1, 2, -1) \text{ (X)}$$

$$M(0, 3, -3)$$

$$M(2, 1, -1)$$

$$M(0, 5, 0)$$

11. kérdés: Legyen $S_1: x - y + 2z = 6$ és $S_2: 2x - y - z = 3$ két egymást metsző sík. Döntsük el, hogy az $A(-6, -14, -1)$ és $B(-3, 9, 1)$ pontok közül melyik van rajta a két sík metszésvonalán?

Megoldás

mindkettő rajta van

csak A van rajta (X)

csak B van rajta

egyik sincs rajta

Tételek távolsága, hajlásszöge

Két pont távolsága

Definíció: Két pont távolságán az őket összekötő szakasz (vektor) hosszát értjük.

Tétel: Legyenek $A(a_1, a_2, a_3)$ és $B(b_1, b_2, b_3)$ adott pontok. Ekkor a két pont távolsága:

$$d_{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Pont és egyenes távolsága

Definíció: Egy pont és egy, a pontra nem illeszkedő egyenes távolságán a pontból az egyenesre bocsájtott merőleges szakasz hosszát értjük.

Tétel: Legyen adott egy P pont és egy $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes. Ekkor ezek távolsága:

$$d_{Pe} = \frac{\|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

ahol P_0 az e egyenes egy tetszőleges pontja.

Pont és sík távolsága

Definíció: Pont és a pontra nem illeszkedő sík távolságán a pontból a síkra bocsájtott merőleges szakasz hosszát értjük.

Tétel: Legyen adott egy P pont és egy $\mathbf{n}$ normálvektorú S sík. Ekkor ezek távolsága:

$$d_{PS} = \frac{|\langle \overrightarrow{P_0P}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|}$$

ahol P_0 az S sík egy tetszőleges pontja.

13. feladat: Határozzuk meg az $A(2, -1, 5)$, $B(3, 2, 1)$ és $C(6, 4, 3)$ csúcspontú háromszög területét!

Megoldás

A háromszög területe az oldalai hosszának összegével egyenlő, azaz a csúcspontok egymástól mért távolságainak összegével.

Írjuk fel a vektorokat és számoljuk ki a hosszukat:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 3, -4) \quad d(AB) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{AC} = (4, 5, -2) \quad d(AC) = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{45}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3, 2, 2) \quad d(BC) = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{17}$$

A háromszög kerülete: $K = \sqrt{26} + \sqrt{45} + \sqrt{17} \approx 15,93$

14. feladat: Határozza meg a $P(3, 2, -1)$ pont és az $e: x=1+t, y=-1-2t, z=-2 \quad t \in \mathbb{R}$ egyenes távolságát!

Megoldás

A távolság meghatározásához szükségünk van egy pontra az egyenesről. Legyen ez $P_0(1, -1, -2)$, továbbá kell az egyenes irányvektor: $\mathbf{v} = (1, -2, 0)$. Ha $P(3, 2, -1)$, akkor

$$\overrightarrow{P_0P} = (2, 3, 1).$$

$$\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

A kapott vektor hossza:

$$\|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-7)^2} = \sqrt{54}$$

Az irányvektor hossza:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

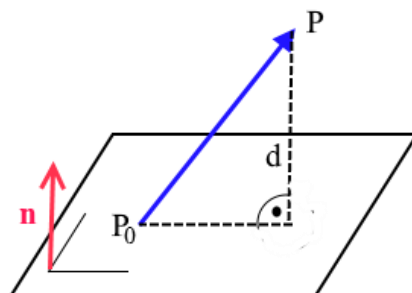
A keresett távolság:

$$d_{pe} = \frac{\|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{5}} \approx 3,29.$$

15. feladat: Határozza meg a $P(1, -2, -1)$ pont és az $S: 2x - 4y + z = 2$ sík távolságát!

Megoldás

A megoldáshoz szükségünk lesz a sík egy tetszőleges pontjára és a normálvektorra. Mivel egy olyan tetszőleges pontot keresünk, amely rajta van a síkon, ezért a pont két koordinátáját szabadon megválaszthatjuk, míg a harmadik koordinátát a sík egyenletébe való helyettesítéssel számoljuk. Keressük a $P_0(0, 0, z)$ síkbeli pontot. Könnyen számolható, hogy ekkor $z = 2$, tehát $P_0(0, 0, 2)$.



Ekkor:

$$\overrightarrow{P_0P} = (-1, 2, 3).$$

Olvassuk ki a sík egy normálvektorát és számoljuk ki a vektor hosszát:

$$\mathbf{n} = (2, -4, 1) \quad \|\mathbf{n}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$$

Behelyettesítve a távolságot megadó képletbe:

$$d_{PS} = \frac{|\langle \overrightarrow{P_0P}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|} = \left| \frac{-2 - 8 + 3}{\sqrt{21}} \right| = \left| \frac{-7}{\sqrt{21}} \right| = \frac{7}{\sqrt{21}} \approx 1,53.$$

Megjegyzés:

Két párhuzamos egyenes távolsága visszavezethető pont és egyenes távolságára. Ugyanis ilyenkor az egyik egyenes egy tetszőleges pontjának a másik egyenestől mért távolságát kell meghatároznunk.

Két párhuzamos sík távolsága visszavezethető pont és sík távolságára, ugyanis ilyenkor az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másik síktól mért távolságát kell meghatároznunk.

Egy egyenes és egy vele párhuzamos sík távolsága visszavezethető pont és sík távolságára, ugyanis ilyenkor az egyenes egy tetszőleges pontjának a síktól mért távolságát kell meghatároznunk.

Tételek hajlásszöge

Tételek hajlásszöge minden esetben legfeljebb 90° lehet. Ezt a szöget α -val fogjuk jelölni.

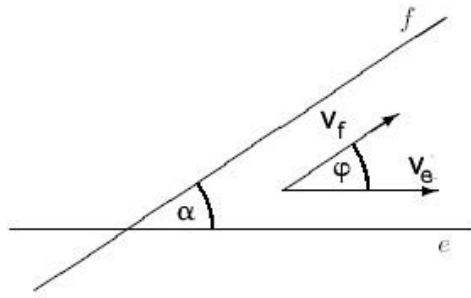
Két egyenes hajlásszöge

Definíció: Két metsző egyenes hajlásszöge megegyezik az egyenesek által közbezárt kisebbik szöggel. Ha a két egyenes nem metszi egymást, akkor párhuzamos eltolással metsző helyzetbe hozhatók.

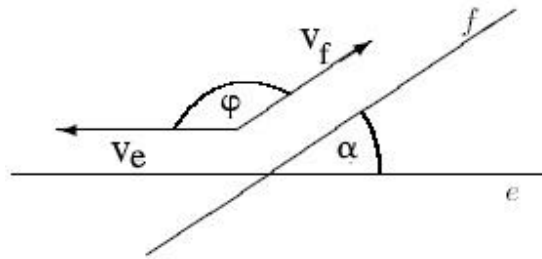
Ez a hajlásszög meghatározható a két egyenes irányvektorából. Jelöljük az e és f egyenesek egy-egy irányvektorát $\mathbf{v}_e$ és $\mathbf{v}_f$ -fel. Ekkor az irányvektorok által bezárt szög skaláris szorzat felhasználásával a következő összefüggésből számolható:

$$\cos \varphi = \frac{|\langle \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_f \rangle|}{\|\mathbf{v}_e\| \|\mathbf{v}_f\|}.$$

Ha $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, akkor $\alpha = \varphi$ a hajlásszög.



Ha $90^\circ < \varphi$, akkor $\alpha = 180^\circ - \varphi$ a két egyenes hajlásszöge.



16. feladat: Határozza meg az $e: x = 3 - 2t, y = 1 + t, z = 4 - 5t \quad t \in \mathbb{R}$ és az $f: x - 1 = \frac{z - 1}{3}, y = 5$ egyenesek hajlásszögét!

Megoldás

Első lépésként meg kell adni mindkét egyenes egy-egy irányvektorát és azok hosszát:

$$\mathbf{v}_e = (-2, 1, -5) \quad \|\mathbf{v}_e\| = \sqrt{30}$$

$$\mathbf{v}_f = (1, 0, 3) \quad \|\mathbf{v}_f\| = \sqrt{10}.$$

Ekkor a keresett szög:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_f \rangle}{\|\mathbf{v}_e\| \|\mathbf{v}_f\|} = \frac{-17}{\sqrt{300}} \approx -0,98 \rightarrow \varphi \approx 168,52^\circ.$$

Mivel ez tompaszög, ezért a keresett hajlásszög:

$$\alpha = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - 168,52^\circ \approx 11,48^\circ.$$

17. feladat: Határozzuk meg az $ABCD$ paralelogramma átlóinak hajlásszögét, ha $A(2, 3, -1)$, $B(5, 4, 3)$, $C(2, -1, 6)$ és $D(-1, -3, 2)$.

Megoldás

A két átló egyenes irányvektorának szögét határozzuk meg először. Az egyik egyenes irányvektora az $\overrightarrow{AC}$, a másiké pedig a $\overrightarrow{BD}$ vektor is lehet. Adjuk meg ezen vektorok koordinátáit:

$$\overrightarrow{AC} = (0, -5, 7) \quad \overrightarrow{BD} = (-6, -7, -1).$$

Számoljuk ki a vektorok által bezárt szögét:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle}{\|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{BD}\|} = \frac{28}{\sqrt{0^2 + (-5)^2 + 7^2} \sqrt{(-6)^2 + (-7)^2 + (-1)^2}} = \\ &= \frac{28}{\sqrt{74} \sqrt{86}} \approx 0,3510 \rightarrow \varphi \approx 69,45^\circ.\end{aligned}$$

Mivel $\varphi < 90^\circ$, ezért a keresett hajlásszög $\alpha = 69,45^\circ$.

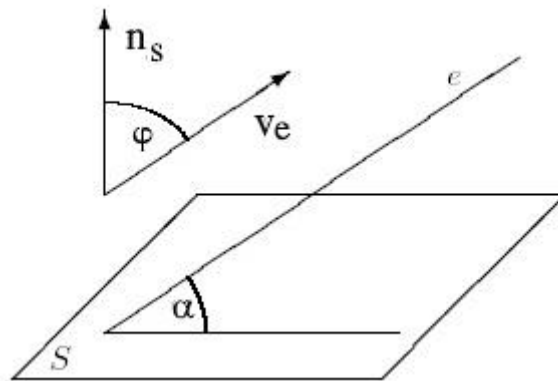
Egyenes és sík hajlásszöge

Definíció: Egyenes és sík hajlásszögén az egyenes és az egyenes síkra eső merőleges vetületének hajlásszögét értjük.

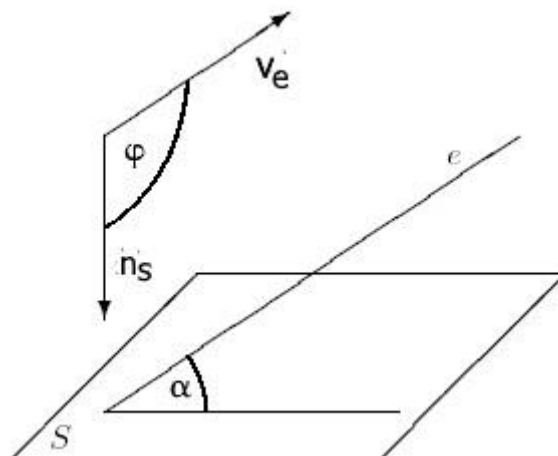
Ha ismerjük a sík egy $\mathbf{n}_s$ normálvektorát és az egyenes egy $\mathbf{v}_e$ irányvektorát, akkor a két vektor által bezárt szög:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{v}_e, \mathbf{n}_s \rangle}{\|\mathbf{v}_e\| \|\mathbf{n}_s\|}.$$

Ha $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, akkor $\alpha = 90^\circ - \varphi$ a hajlásszög.



Ha $90^\circ < \varphi$, akkor $\alpha = \varphi - 90^\circ$ hajlásszög.



18. feladat: Határozza meg az y tengely és az $S : 2x + z = 2 + 4y$ sík hajlásszögét!

Megoldás

A számoláshoz ismernünk kell az egyenes egy irányvektorát és a sík egy normálvektorát, valamint ezen vektorok hosszát.

$$\mathbf{v}_e = (0, 1, 0) \quad \|\mathbf{v}_e\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\mathbf{n}_s = (2, -4, 1) \quad \|\mathbf{n}_s\| = \sqrt{21}.$$

A keresett szög:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{v}_e, \mathbf{n}_s \rangle}{\|\mathbf{v}_e\| \|\mathbf{n}_s\|} = \frac{-4}{\sqrt{21}} \approx -0,87 \rightarrow 150,46^\circ$$

Ez alapján az egyenes és sík hajlásszöge:

$$\alpha = \varphi - 90^\circ \approx 150,46^\circ - 90^\circ \approx 60,46^\circ.$$

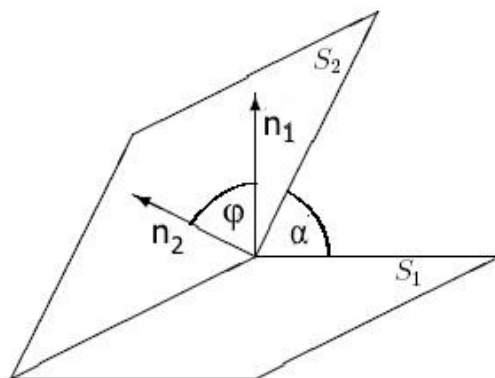
Két sík hajlásszöge

Definíció: Két sík hajlásszöge normálvektoraik hajlásszöge, ha az hegyesszög. Tompaszög esetén 180° -ból azt kivonva kapjuk a síkok szögét.

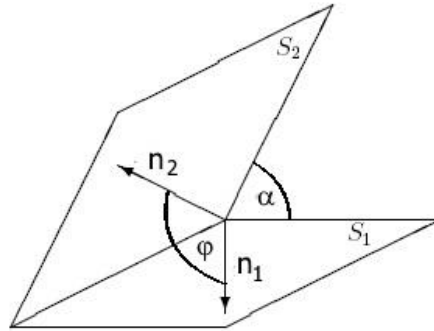
Ha ismerjük a két sík $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ normálvektorát, akkor

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}.$$

Ha $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, akkor $\alpha = \varphi$ a hajlásszög.



Ha $90^\circ < \varphi$, akkor $\alpha = 180^\circ - \varphi$ a két sík hajlásszöge.



19. feladat: Határozza meg az $S_1 : x + y - z = 1$ és $S_2 : x - 2y + z = 0$ síkok hajlásszögét!

Megoldás

Kiolvasva a síkok egy-egy normálvektorát és meghatározva azok hosszát:

$$\mathbf{n}_{S_1} = (1, 1, -1) \quad \|\mathbf{n}_{S_1}\| = \sqrt{3}$$

$$\mathbf{n}_{S_2} = (1, -2, 1) \quad \|\mathbf{n}_{S_2}\| = \sqrt{6}.$$

Majd ezekkel az adatokkal számolva:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{n}_{S_1}, \mathbf{n}_{S_2} \rangle}{\|\mathbf{n}_{S_1}\| \|\mathbf{n}_{S_2}\|} = \frac{-2}{\sqrt{18}} \quad \varphi \approx 118,12^\circ.$$

Innen az általunk keresett hajlásszög:

$$\alpha = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - 118,12^\circ \approx 61,88^\circ.$$

Ellenőrző kérdések

12. kérdés: Határozza meg az $A(2, 3, -1)$ pont és az $e : x = 3 - 2t, y = -2 + t, z = 5 \quad t \in \mathbb{R}$ egyenes távolságát!

Megoldás

7,22 (X)

5,22

9,72

6,75

13. kérdés: Határozza meg az origó és az $S : x + y + z = 0$ sík távolságát!

Megoldás

$\sqrt{2}$

2

0 (X)

1

14. kérdés: Határozza meg az $e: \frac{2-x}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{2+z}{-2}$ egyenes és az $S: x-2y+z=5$ sík hajlásszögét!

Megoldás

70,22°

80,24° (X)

55,12°

62,22°

15. kérdés Határozza meg az $e: x=t, y=1-t, z=1+t \ t \in R$ egyenes és az y tengely hajlásszögét!

Megoldás

35,26°

25,26°

44,74°

54,74° (X)

16. kérdés: Határozza meg az $S: x-3y+z=1$ és az yz sík hajlásszögét!

Megoldás

52,45°

37,21°

72,45° (X)

82,28°

Összetett feladatok

20. feladat: Írja fel az $A(1,3,-2)$ ponton áthaladó, az e és f egyenesekre merőleges g egyenes egyenletét, ha

$$e: x = y = z \quad f: -x = z, y = 3.$$

Adja meg a g egyenes és az xy sík metszéspontját!

Megoldás

Az egyenes egyenletrendszerének felírásához szükségünk van egy pontra és egy irányvektorra. Egy pontja adott a keresett egyenesnek. Nézzük meg, hogy mit tudunk mondani a keresett egyenes egy irányvektoráról. Jelölje $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_f$ és $\mathbf{v}_g$ az e , f és g egyenesek irányvektorait. Ha a keresett g egyenes merőleges e és f egyenesekre, akkor $\mathbf{v}_g \perp \mathbf{v}_e$ és $\mathbf{v}_g \perp \mathbf{v}_f$ is teljesül. Tehát egy olyan vektort keresünk, amelyik merőleges a két ismert vektorra. A $\mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f$ éppen megfelel a feltételeknek, mivel az merőleges a $\mathbf{v}_e$ és a $\mathbf{v}_f$ vektorokra is, azaz legyen $\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f$.

Kiolvassuk az egyenesek irányvektorait:

$$\mathbf{v}_e = (1,1,1) \quad \mathbf{v}_f = (-1,0,1).$$

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 1).$$

Eszerint a g egyenes egyenlete:

$$g: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = z+2.$$

Meg kell határoznunk a most felírt egyenes és az xy sík metszéspontját. Ehhez írjuk fel a g egyenes egyenletét paraméteres alakban. Ehhez a következőből kell elindulni:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = z+2 = t,$$

majd változónként külön-külön rendezéssel a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\frac{x-1}{1} = t \rightarrow x = 1+t$$

$$\frac{y-3}{-2} = t \rightarrow y = 3-2t$$

$$z+2 = t \rightarrow z = -2+t.$$

Mi az egyenesnek azt az M pontját keressük, amelyik rajta van az xy síkon. Az ilyen pont koordinátái általánosan: $M(x, y, 0)$. Mivel a harmadik koordináta 0 , ezt behelyettesítve az egyenes egyenletrendszerébe:

$$z = -2+t \quad 0 = -2+t \quad t = 2.$$

A kapott t értéket visszahelyettesítve számoljuk a pont hiányzó koordinátáit:

$$x = 1 + t \quad x = 1 + 2 = 3$$

$$y = 3 - 2t \quad y = 3 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Tehát a keresett metszéspont:

$$M(3, -1, 0).$$

21. feladat: Adottak az $A(3, -1, 2)$, $B(4, 1, 1)$ és $C(7, -2, 5)$ pontok.

- Írjuk fel az ABC háromszög S súlypontján átmenő, a háromszög síkjára merőleges egyenes paraméteres egyenletrendszerét!
- Írjuk fel a háromszög síkjának egyenletét!
- Adja meg a háromszög B csúcsából induló magasságának hosszát!

Megoldás

- a) Mivel az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektor is a három pontra illeszkedő síkban van, ezért vektoriális szorzatuk merőleges lesz a síkra. Mivel az általunk keresett egyenes is merőleges a síkra, ezért a keresett egyenes egy irányvektora legyen $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Végezzük el a számolást:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1) \quad \overrightarrow{AC} = (4, -1, 3)$$

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5, -7, -9).$$

Meg kell még határoznunk a háromszög súlypontjának koordinátáit:

$$s_1 = \frac{3+4+7}{3} \quad s_1 = \frac{14}{3}$$

$$s_2 = \frac{-1+1+(-2)}{3} \quad s_2 = -\frac{2}{3}$$

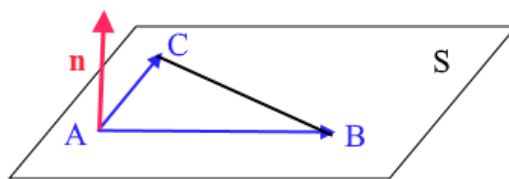
$$s_3 = \frac{2+1+5}{3} \quad s_3 = \frac{8}{3}$$

$$S\left(\frac{14}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

A keresett egyenes:

$$e: x = \frac{14}{3} + 5t, \quad y = -\frac{2}{3} - 7t, \quad z = \frac{8}{3} - 9t \quad t \in \mathbb{R}.$$

- b) A háromszög síkjának felírásához szükséges a sík egy normálvektora és egy ismert pontja.



A normálvektor merőleges a síkra, így kihasználva az előző feladatrészen kapott eredményt:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (5, -7, -9).$$

A sík egyenletét az $\mathbf{n}$ normálvektor és az A pont segítségével írjuk fel:

$$5(x-3) - 7(y+1) - 9(z-2) = 0$$

Átrendezve:

$$5x - 7y - 9z = 4.$$

- c) A B csúsból induló magasságának hossza nem más, mint a B csúsból az AC oldalra bocsátott merőleges szakasz hossza. Másképpen fogalmazva, a B csúcs és az AC oldalegyenes távolsága. Ezt viszont a következőképpen lehet számolni:

$$d_{B,AC} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}.$$

Kihasználva az első részben kapott eredményeket:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (5, -7, -9) \quad \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{5^2 + (-7)^2 + (-9)^2} = \sqrt{155}$$

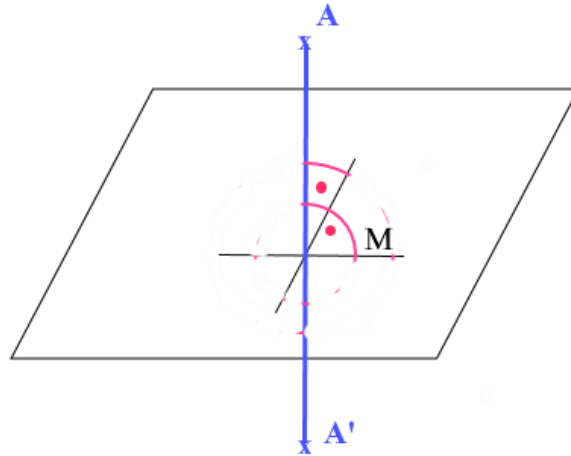
$$\overrightarrow{AC} = (4, -1, 3) \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{26}$$

Tehát a keresett magasság hossza: $\frac{\sqrt{155}}{\sqrt{26}} \approx 2,44$.

22. feladat: Tükrözzük az $A(-2,1,-1)$ pontot az $S: x + y + z = 1$ egyenletű síkra!

Megoldás

Egy pontot egy síkra úgy tükrözzük, hogy először a pontból merőlegest állítunk a síkra, megkeressük a merőleges egyenes és a sík M metszéspontját, majd kihasználjuk, hogy ez a metszéspont felezőpontja az eredeti pont és a tükörkép alkotta szakasznak.



Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor a sík egy normálvektora lehet az egyenes egy irányvektora. Hívjuk ezt az egyenest e egyenesnek, ekkor

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{n}_s = (1, 1, 1)$$

Felírhatjuk a síkra merőleges, az A ponton átmenő e egyenes egyenletét:

$$e: x = -2 + t, y = 1 + t, z = -1 + t \quad t \in \mathbb{R}$$

Az M metszéspont meghatározásához helyettesítsük be az e egyenes egyenletét az S sík egyenletébe:

$$-2 + t + 1 + t - 1 + t = 1 \rightarrow -2 + 3t = 1 \rightarrow t = 1$$

azaz

$$M(-1, 2, 0).$$

Kihasználva, hogy M felezőpont és a tükörkép pontot $A'(x, y, z)$ módon jelölve, a felezőpontra vonatkozó összefüggés alapján:

$$-1 = \frac{-2 + x}{2} \rightarrow x = 0$$

$$2 = \frac{1 + y}{2} \rightarrow y = 3$$

$$0 = \frac{-1 + z}{2} \rightarrow z = 1$$

A keresett tükörkép:

$$A'(0, 3, 1).$$

23. feladat: Adjuk meg annak az S síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2, 3, 5)$ ponton és illeszkedik az y tengelyre!

Megoldás

A sík megadásához szükségünk van egy pontra és egy normálvektorra. A pont adott, a normálvektort kell meghatároznunk. Ha a sík illeszkedik egy egyenesre, akkor a sík egy normálvektora merőleges lesz az egyenesre, és így az egyenes egy irányvektorára is. Tehát olyan $\mathbf{n}$ normálvektort keresünk, amely merőleges az y tengely $\mathbf{v}_y = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$ irányvektorára.

Másrészt, ha megadnánk egy Q pontot az y tengelyen, akkor a $\overrightarrow{QP}$ vektor illeszkedik a síkra, tehát merőleges az $\mathbf{n}$ normálvektorra. Adjunk meg egy pontot az y tengelyről! A legegyszerűbb

az origó, azaz $Q(0,0,0)$. Ekkor $\overrightarrow{QP} = (2,3,5)$. Tehát keresünk egy $\overrightarrow{QP}$ és $\mathbf{v}_y$ vektorokra merőleges vektort. A feltételnek megfelel a vektoriális szorzata. Ezért legyen

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{QP} \times \mathbf{v}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-5, 0, 2).$$

Az S sík egyenlete:

$$S: -5(x-2) + 0(y-3) + 2(z-5) = 0.$$

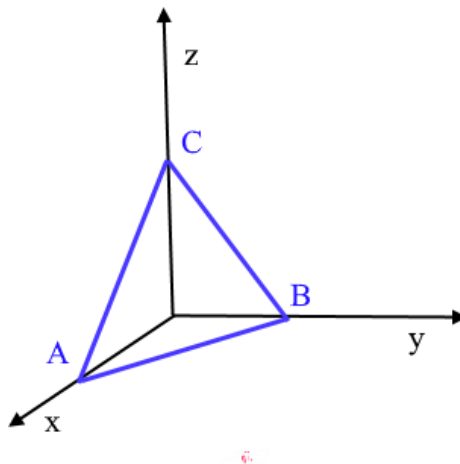
Rendezéssel a következő egyenlethez jutunk:

$$-5x + 2z = 0.$$

24. feladat: Mekkora területű háromszöget metszenek ki a koordinátasíkok az $S: 2x - y + 3z = 6$ egyenletű síkból?

Megoldás

Határozzuk meg először a kimetszett háromszög csúcspontjainak koordinátáit.



Az x tengelyre eső A csúcsponttól tudjuk, hogy a második és harmadik koordinátája 0 , azaz $y = z = 0$. A sík egyenlete alapján, akkor $x = 3$.

Az y tengelyen lévő B csúcspontnál $x = z = 0$, behelyettesítve a sík egyenletébe: $y = -6$.

A z tengelyen lévő C csúcspont koordinátái, ha $x = y = 0$, akkor $z = 2$.

Tehát a csúcspontok:

$$A(3,0,0) \quad B(0,-6,0) \quad C(0,0,2).$$

Válasszuk ki az egyik pontot, például A -t. Indítsunk vektorokat A -ból a háromszög másik két csúcsába. A megadott két vektor kifeszíti a háromszöget és területe pedig

$$t = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

Végezzük el a számolást!

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -6, 0) \quad \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-12, 6, -18)$$

$$t = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 36 + 324} = \sqrt{126}.$$

25. feladat: Adott az $ABCD$ tetraéder, ahol $A(4, 7, 6)$, $B(0, 1, -2)$, $C(-1, 5, 3)$ és $D(4, -5, 2)$.

- Határozzuk meg a tetraéder ABC és BCD oldallapjai által bezárt szögét!
- Határozzuk meg az $ABCD$ tetraéderben az ABC oldallap és az AD oldalegyenes által bezárt szöget!

Megoldás

- Két sík hajlásszöge megadható, ha ismerjük a síkok normálvektorainak hajlásszögét, tehát nem kell a síkok egyenletét felírni, elég a normálvektort ismerni. Ezért állítsuk elő a feladatban szereplő síkok egy-egy normálvektorát.

Az ABC oldallap normálvektora egy olyan vektor lehet, amely merőleges az ABC síkra. Az adatokból ismerhetünk két olyan vektort, amely benne van az említett síkban, ezek az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok. A keresett normálvektor mindkét vektorra merőleges, tehát adódik, hogy válasszuk normálvektornak az $\mathbf{n}_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Adatokkal:

$$\overrightarrow{AB} = (-4, -6, -8) \quad \overrightarrow{AC} = (-5, -2, -3),$$

$$\mathbf{n}_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & -6 & -8 \\ -5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (2, 28, -22),$$

$$\mathbf{n}_{ABC} = \sqrt{2^2 + 28^2 + (-22)^2} = 2\sqrt{318}$$

Hasonló megfontolások alapján a BCD oldallap egy normálvektora pedig legyen $\mathbf{n}_{BCD} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}$.

Adatokkal:

$$\overrightarrow{BD} = (4, -6, 4) \quad \overrightarrow{BC} = (-1, 4, 5)$$

$$\mathbf{n}_{BCD} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (-46, -24, 10)$$

$$\mathbf{n}_{BCD} = \sqrt{(-46)^2 + (-24)^2 + 10^2} = 2\sqrt{698}.$$

Ekkor:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{n}_{ABC}, \mathbf{n}_{BCD} \rangle}{\|\mathbf{n}_{ABC}\| \|\mathbf{n}_{BCD}\|} = \frac{2 \cdot (-46) + 28 \cdot (-24) + (-22) \cdot 10}{2\sqrt{318} \cdot 2\sqrt{698}} =$$

$$= \frac{-984}{4\sqrt{221964}} \quad \varphi \approx 121,48^\circ$$

Mivel $90^\circ < \varphi$, ezért a két sík hajlásszöge:

$$\alpha = 180^\circ - \varphi \approx 180^\circ - 121,48^\circ \approx 58,52^\circ.$$

- b) A hajlásszög meghatározásához elegendő ismerni az ABC oldallap egy normálvektorát és az AD oldalegyenes egy irányvektorát. Használjuk fel, hogy az előző részben már meghatároztuk az ABC oldallap egy normálvektorát:

$$\mathbf{n}_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, 28, -22)$$

Az AD oldalegyenes egy irányvektora lehetne az:

$$\overrightarrow{AD} = (0, -12, -4).$$

Ekkor a keresett szög:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\langle \overrightarrow{AD}, \mathbf{n}_{ABC} \rangle}{\|\overrightarrow{AD}\| \|\mathbf{n}_{ABC}\|} = \frac{0 \cdot 2 + (-12) \cdot 28 + (-4) \cdot (-22)}{\sqrt{0^2 + (-12)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 28^2 + (-22)^2}} = \\ &= \frac{-248}{4\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{318}} \approx -0,5497 \quad \varphi \approx 123,35^\circ. \end{aligned}$$

Mivel $90^\circ < \varphi$, ezért a keresett hajlásszög:

$$\alpha = \varphi - 90^\circ \approx 123,35^\circ - 90^\circ \approx 33,35^\circ.$$

Ellenőrző kérdések

- 17. kérdés** Írja fel az ABC háromszög síkjának egyenletét, ha $A(2, -1, 5)$, $B(-3, -4, 1)$ és $C(6, 5, -1)$!

$$20x - 3y + 2z = 53$$

$$x - y + z = 8$$

$$21x - 23y - 9z = 20 \quad (\mathbf{X})$$

$$4x - 2y + 2z = 20$$

- 18. kérdés** Határozza meg az $A(1, -5, 2)$ pont és az $e: x = 4, y = -2 + 2t, z = 3t \quad t \in \mathbb{R}$ egyenes közös síkjának egyenletét!

$$13x + 9y + 6z = -20$$

$$13x - 9y - 6z = 46$$

$$13x - 9y + 6z = 70 \quad (\mathbf{X})$$

$$13x + 9y - 6z = -44$$

- 19. kérdés** Adott egy háromszög két csúcsa és a súlypontja. Írja fel a BC oldal egyenesének egyenletét, ha $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 0, 3)$ és $S(2, 1, 3)$.

$$x = 6 + 7t, y = 1 + t, z = 3t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x = 6 + 7t, y = 1 + t, z = t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x = -1 + 7t, y = t, z = 3 \quad t \in \mathbb{R} \quad (\mathbf{X})$$

$$x = -1 + 7t, y = t, z = 3t \quad t \in \mathbb{R}$$

- 20. kérdés** Adott az $ABCD$ tetraéder, ahol $A(4, 7, 6)$, $B(0, 1, -2)$, $C(-1, 5, 3)$ és $D(4, -5, 2)$. Határozzuk meg a tetraéderben az AB oldal felezőmerőleges síkjának és a CD oldal egyenesének hajlásszögét!

23,39° (X)

66,61°

27,65°

63,35°

4. Vektorok, komplex számok

1.4. Komplex számok

Tanulási cél: Az eddig megismert valós számkör bővítése

A komplex számok fogalma, algebrai alakja

Általános iskolában már tanultunk a természetes (N), az egész (Z) és racionális (Q) számokról. A középiskolában elmélyítettük a velük kapcsolatos ismereteinket és új felfedezéseket is tettünk. Megismertük az irracionális (Q^*) számokat és így, többszöri számkör bővítés eredményeként, eljutottunk a valós számok (R) köréhez.

Eddigi tanulmányaink során azt is láttuk, hogy a valós számok halmazán nem végezhető el minden, a gyakorlatban felmerülő művelet, hiszen pl. a valós együtthatós másodfokú algebrai egyenlet sem oldható meg a valós számok halmazán, ha a diszkriminánsa negatív. Ezért célszerű lenne az R halmazt úgy bővíteni, hogy ebben az új halmazban (minden eddigi művelet változatlan megtartása mellett) tudjunk a negatív valós számokból is négyzetgyököt vonni.

Ennek érdekében bevezetünk egy elképzelt új számot, amelyet i -vel jelölünk, képzetes egységnek nevezünk és az $i = \sqrt{-1}$ értékkel definiálunk.

Definíció: A $z = a + bi$ alakú számokat, ahol $a, b \in R$ a komplex számok algebrai alakjának nevezzük.

Elnevezések és jelölések: a a komplex szám valós része $\operatorname{Re}(z)$, b a komplex szám képzetes része $\operatorname{Im}(z)$.

Például a $4 - 5i$ komplex szám valós része 4, a képzetes része pedig -5.

A "képzetes" elnevezés az "imaginárius" szóból ered, ezért is jelöljük "i"-vel a komplex számok nem valós, "képzetes" részét. (Az "i"-t az "imaginárius" rövidítésére használták.) A "komplex" elnevezés pedig arra utal, hogy ezek a számok összetettek, több (kettő) részből állnak.

Megjegyzés: minden valós szám olyan komplex szám, amelynek képzetes része 0. Azaz komplex szám a $4 = 4 + 0i$ vagy a $0 = 0 + 0i$ is.

Definíció: Két komplex szám *egyenlő*, ha valós részeik és képzetes részeik is egyenlők.

Műveletek algebrai alakban (összeadás, kivonás, szorzás, osztás)

Definíció: Legyen $z_1 = a_1 + b_1i$ és $z_2 = a_2 + b_2i$. Ekkor

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i.$$

Definíció: Egy $z = a + bi$ alakú komplex szám *konjugáltján* a $\bar{z} = a - bi$ komplex számot értjük. (A képzetes rész előjelét az ellenkezőjére változtatjuk.)

Például ha $z_1 = 7 + 2i$, akkor $\bar{z}_1 = 7 - 2i$, ha $z_2 = -1 + 25i$, akkor $\bar{z}_2 = -1 - 25i$, és ha $z_3 = 13 - \pi i$, akkor $\bar{z}_3 = 13 + \pi i$.

Definíció:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Ezt a bonyolult végeredményt nem kell megtanulni, csak azt érdemes megjegyezni, hogy az osztás végrehajtásának első lépése a **nevező konjugáltjával való bővítés**.

Néhány műveleti tulajdonság:

- az összeadás és a szorzás kommutatív, azaz bármely két komplex szám esetén:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ továbbá } z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

- az összeadás és a szorzás asszociatív, azaz bármely három komplex szám esetén:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3 \text{ továbbá } (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

- a szorzás disztributív az összeadásra nézve, azaz:

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Megjegyzés: A műveletek elvégzése során az algebrában megtanult szabályokat és azonosságokat alkalmazzuk úgy, hogy kihasználjuk az $i = \sqrt{-1}$ összefüggésből adódó $i^2 = -1$ lehetséges helyettesítést. Itt érdemes megfigyelni azt, hogy i hatványai négyes periódussal rendelkeznek, azaz

$$i = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i \cdot i^2 = -i, \quad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, \\ i^5 = i \cdot i^4 = i, \quad i^6 = i^2 \cdot i^4 = -1 \quad \dots$$

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Legyen $z_1 = 2 - 5i$ és $z_2 = -1 + 2i$. Határozza meg az alábbi kifejezések értékét:

- $z_1 + z_2$
- $z_1 - z_2$
- $z_1 z_2$
- $4z_1 - 3z_2$
- $(2z_1 - 3i)(1 - z_2)$
- $\operatorname{Re}(i \cdot z_1)$
- $z_1^2 - 2z_2$
- $\operatorname{Im}(z_2^2 + 2i^{10})$

Megoldás:

- a) Célszerű először zárójellel ellátva behelyettesíteni a kívánt értékeket a kifejezésbe, majd a komplex számokkal, mint kéttagú algebrai kifejezéseket kezelve elvégezni az algebrai átalakításokat.

$$z_1 + z_2 = (2 - 5i) + (-1 + 2i) = 2 - 5i - 1 + 2i = 1 - 3i$$

b) $z_1 - z_2 = (2 - 5i) - (-1 + 2i) = 2 - 5i + 1 - 2i = 3 - 7i$

- c) A zárójel felbontásánál minden tagot minden taggal megszorozunk, majd kihasználjuk az $i^2 = -1$ összefüggést.

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 5i) \cdot (-1 + 2i) = -2 + 4i + 5i - 10i^2 = -2 + 9i - 10 \cdot (-1) = 8 + 9i$$

d) $4z_1 - 3z_2 = 4(2 - 5i) - 3(-1 + 2i) = 8 - 20i + 3 - 6i = 11 - 26i$

e) $(2z_1 - 3i)(1 - z_2) = [2(2 - 5i) - 3i] \cdot [1 - (-1 + 2i)] =$

Először a szögletes zárójeleken belül elvégezzük a műveleteket, majd a két zárójelet összeszorozzuk, minden tagot minden taggal.

$$= [4 - 10i - 3i] \cdot [1 + 1 - 2i] = [4 - 13i] \cdot [2 - 2i] = 8 - 8i - 26i + 26i^2 = -18 - 34i$$

- f) Ebben a feladatban először el kell végezni a zárójelben szereplő műveletet, majd kiolvasni az eredmény valós részét.

$$\operatorname{Re}(i \cdot z_1) = \operatorname{Re}[i(2 - 5i)] = \operatorname{Re}[2i - 5i^2] = \operatorname{Re}[5 + 2i] = 5$$

g) $z_1^2 - 2z_2 = (2 - 5i)^2 - 2(-1 + 2i) = 4 - 20i + 25i^2 + 2 - 4i = -19 - 24i$

h) $\operatorname{Im}(z_2^2 + 2i^{10}) = \operatorname{Im}[(-1 + 2i)^2 + 2(i^2)^5] = \operatorname{Im}[1 - 4i + 4i^2 + 2 \cdot (-1)^5] =$
 $\operatorname{Im}(1 - 4i - 4 - 2) = \operatorname{Im}(-5 - 4i) = -4.$

- 2. feladat:** Legyen $z_1 = 3 + 2i$ és $z_2 = -2 + 6i$. Határozza meg az alábbi kifejezések értékét:

a) $\bar{z}_1 + \overline{3z_2}$

b) $\overline{(2z_1)^2}$

c) $\frac{z_1}{z_2}$

d) $\frac{i}{\bar{z}_1}$

e) $1 - \frac{3}{z_2}$

Megoldás:

- a)

$$\bar{z}_1 + \overline{3z_2} = \overline{3 + 2i} + \overline{3(-2 + 6i)} = 3 - 2i - 6 - 18i = -3 - 20i$$

- b)

$$\overline{(2z_1)^2} = \overline{(2(3 + 2i))^2} = \overline{4(9 + 12i + 4i^2)} = \overline{4(5 + 12i)} = \overline{20 + 48i} = 20 - 48i$$

- c)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{-2+6i} = \frac{3+2i}{-2+6i} \cdot \frac{-2-6i}{-2-6i} = \frac{-6-18i-4i-12i^2}{(-2)^2-(6i)^2} = \frac{6-22i}{4-36i^2} = \frac{6-22i}{40} = \frac{6}{40} - \frac{22}{40}i$$

d)

$$\frac{i}{\bar{z}_1} = \frac{i}{3+2i} = \frac{i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{3i+2i^2}{(3)^2-(2i)^2} = \frac{-2+3i}{9-4i^2} = \frac{-2+3i}{13} = \frac{-2}{13} + \frac{3}{13}i$$

e)

$$1 - \frac{3}{z_2} = 1 - \frac{3}{-2+6i} = \frac{-2+6i-3}{-2+6i} = \frac{-5+6i}{-2+6i} \cdot \frac{-2-6i}{-2-6i} = \frac{10+30i-12i-36i^2}{(-2)^2-(6i)^2} = \frac{46+18i}{4-36i^2} = \frac{46+18i}{40}$$

3. feladat: Oldja meg a következő egyenleteket a komplex számok körében:

a) $3-4iz = z+5i$

b) $(1+i+iz+z) \cdot \left(1+\frac{i}{z}\right) = 0$

c) $z^2 + 2z + 10 = 0$

Megoldás:

a) Ebben az egyenletben az ismeretlen első hatványon szerepel, ezért ez egy elsőfokú egyenlet. Első lépésben az egyenletet rendezni kell. Egyik oldalra kerülnek az ismeretlent tartalmazó tagok, míg a másik oldalra a többiek. Ezt követően a z kiemelése után egy osztással lépünk tovább.

$$3-4iz = z+5i \rightarrow 3-5i = z+4iz \rightarrow 3-5i = z(1+4i)$$

$$z = \frac{3-5i}{1+4i} = \frac{3-5i}{1+4i} \cdot \frac{1-4i}{1-4i} = \frac{3-12i-5i+20i^2}{1+16} = \frac{-17-17i}{17} = -1-i$$

b) Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Eszerint két egyenletet kapunk:

$$(1+i+iz+z) = 0 \quad \text{vagy} \quad \left(1+\frac{i}{z}\right) = 0$$

Oldjuk meg az első egyenletet:

$$1+i+iz+z=0 \rightarrow iz+z=-1-i \rightarrow z(1+i)=-1-i$$

$$z = \frac{-1-i}{1+i} = \frac{-1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{-1+i-i+i^2}{1-(i)^2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Oldjuk meg a másik egyenletet is.

$$1+\frac{i}{z}=0 \rightarrow \frac{i}{z}=-1 \rightarrow z=-i$$

Tehát az egyenletnek két megoldása van: $z_1 = -1$ és $z_2 = -i$.

c) Használjuk a gyökképletet:

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} =$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{36i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = \begin{cases} -1+3i \\ -1-3i \end{cases}$$

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Mivel egyenlő $\operatorname{Re}((-1+3i) - 2(3+4i))$?

- a) 5
- b) -5
- c) -7 (X)
- d) 11

2. kérdés: Legyen $z_1 = -1-5i$ és $z_2 = 3-i$. Mivel egyenlő $(1-2z_1) \cdot (\overline{2z_2+3z_1})$?

- a) -161+81i (X)
- b) -179-13i
- c) 179-21i
- d) -179+21i

3. kérdés: $(-4-3i)^2 - (\overline{1+i}) =$

- a) 6-23i
- b) 6+25i (X)
- c) 24-i
- d) -8-23i

4. kérdés: Mivel egyenlő $\operatorname{Im}\left(\frac{1+5i}{2+2i}\right)$?

- a) 0
- b) 1 (X)
- c) $\frac{4}{3}$
- d) $-\frac{4}{3}$

5. kérdés: $3-3i^9 + 2i^{2019} =$

- a) 3-5i (X)
- b) 3+i
- c) 2i
- d) -2i

6. kérdés: Mivel egyenlő $1 - \frac{3-4i}{i}$?

- a) $-5-3i$
- b) $5+3i$ (X)
- c) $3-3i$
- d) $-3+3i$

7. kérdés: Oldja meg a $2+iz=3z-i$ egyenletet a komplex számok halmazán!

- a) $\frac{5}{8} + \frac{5}{8}i$
- b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
- c) $\frac{5}{8} - \frac{5}{8}i$
- d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (X)

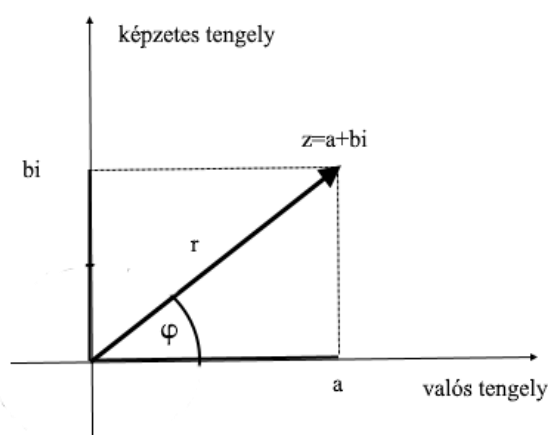
8. kérdés: Oldja meg a $z^2 - 4z + 13 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

- a) $2 \pm 3i$ (X)
- b) $2 \pm 6i$
- c) $4 \pm 3i$
- d) $4 \pm 6i$

Komplex számok ábrázolása, trigonometrikus alak

A valós számokat számegyenesen ábrázoljuk. Egy egyenes a komplex számok ábrázolására nem elegendő, mivel ezek a számok valós és képzetes részből állnak. Éppen ezért ki kell lépünk az egyenesből a síkba. Ezt a síkot komplex számsíknak nevezzük. Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert és a vízszintes tengelyen a komplex szám valós, a függőleges tengelyen pedig képzetes részét jelöljük. A valós tengelyen az egység az 1 valós szám, míg a képzetes tengelyen az i komplex szám az egység.

Ekkor a $z = a + bi$ alakú komplex számot szokás az (a, b) pontba mutató helyvektorral szemléltetni. Ekkor a komplex számok és a koordináta-rendszer pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk.



A $z = a + bi$ alakban megadott komplex számot a valós és képzetes része egyértelműen meghatározza. A komplex számot ábrázoló vektort azonban nem kell feltétlenül ezzel a két adattal megadni. Ugyanezt a vektort megadhatjuk úgy is, ha megadjuk a vektor hosszát és a vektor valós tengely pozitív felével bezárt hajlásszögét. Ezt a két új adatot polárkoordinátáknak hívják. A vektor hosszát a komplex szám abszolút értékének is nevezzük, jele: r , amely Pitagorasz-tétel segítségével:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

A komplex szám hajlásszöge az a szög, amellyel a valós tengely pozitív felét az óramutató járásával ellenkező irányba el kell forgatni úgy, hogy az a komplex számot szemléltető vektor irányával essen egybe. Ennek megfelelően $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$.

A φ hajlásszög meghatározásánál minden esetben fontos a vektor felrajzolása, mivel a koordináta-sík különböző negyedekben más-más módon történik. Első lépésben egy β segéd-szöget számolunk a

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{b}{a} \right| \text{ ha } a \neq 0$$

segítségével, majd a tényleges hajlásszög meghatározása következik a következő módon:

I. síknegyedben $\varphi = \beta$,

II. síknegyedben: $\varphi = 180^\circ - \beta$,

III. síknegyedben: $\varphi = 180^\circ + \beta$,

IV. síknegyedben $\varphi = 360^\circ - \beta$.

A most bevezetett polárkoordináták segítségével lehetőségünk van a komplex számokat más alakban is felírni.

Definíció: A $z = a + bi$ nullától különböző algebrai alakban felírt komplex szám trigonometrikus alakja:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

ahol r a vektor hossza, φ pedig a hajlásszöge.

Átváltás algebrai alakból trigonometrikus alakba

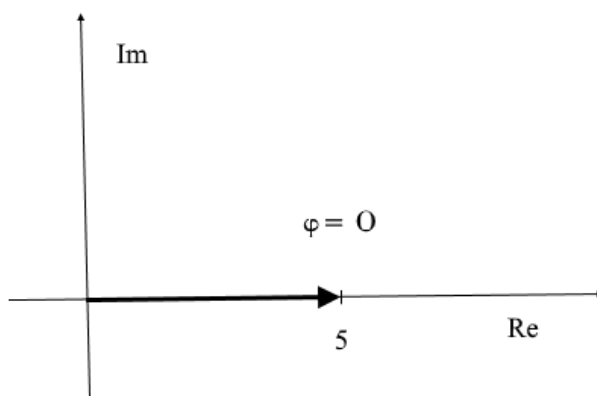
A trigonometrikus alakban megadott komplex szám algebrai alakjának meghatározása a szögfüggvények értékének behelyettesítésével és egyszerűbb alakra hozással történik.

4. feladat: Írja fel a következő komplex számokat trigonometrikus alakban:

- a) $z = 5$
- b) $z = -3i$
- c) $z = 2 + 4i$
- d) $z = -4 + 2i$
- e) $z = -3 - 5i$
- f) $z = 5 - 4i$

Megoldás

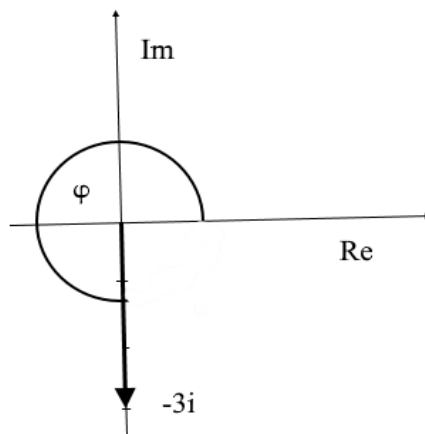
a) Először ábrázoljuk a komplex számot.



A vektor speciális elhelyezkedése miatt az ábráról leolvasható, hogy a vektor hossza 5, hajlásszöge 0° . Így semmiféle mellékszámolásra itt nincs szükség.

$$z = 5 = 5(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ).$$

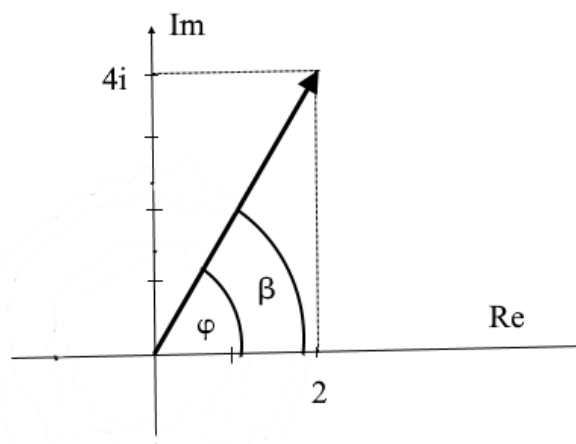
b) Most is az ábrával kell kezdeni.



Az ábráról leolvasható, hogy a vektor hossza 3, hajlásszöge pedig 270° .

$$z = -3i = 3(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ).$$

- c) A valós és képzetes rész is pozitív, ezért egy első negyedbe eső komplex számot fogunk átírni trigonometrikus alakba.



Számítsuk ki a vektor hosszát:

$$r = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

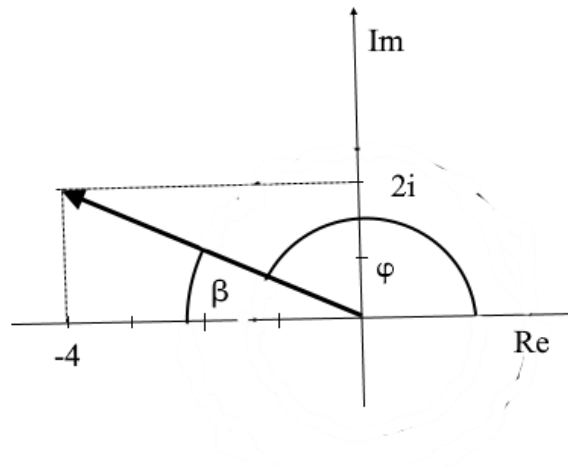
Másrészt:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{2} \rightarrow \varphi = \beta = 63,43^\circ$$

Így a keresett trigonometrikus alak:

$$z = 2 + 4i = \sqrt{20}(\cos 63,43^\circ + i \sin 63,43^\circ).$$

- d) A valós negatív, a képzetes rész pozitív, ezért egy második negyedbe eső komplex számot fogunk átírni trigonometrikus alakba.



A szükséges számolások:

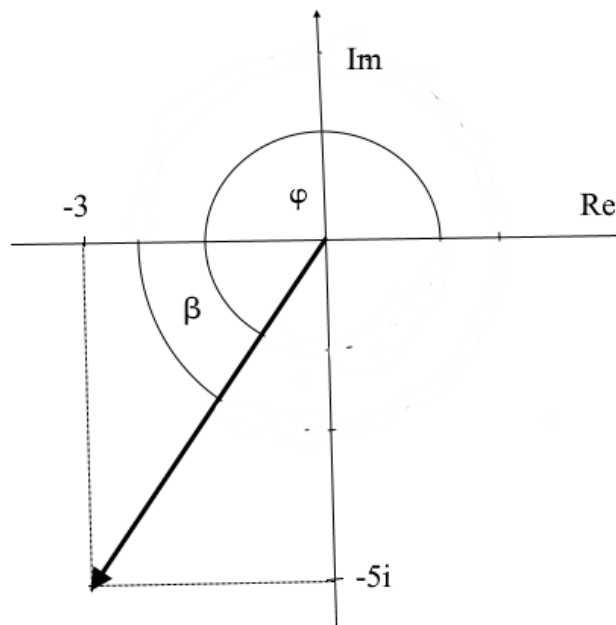
$$r = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{4} \rightarrow \varphi = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 26,57^\circ = 153,43^\circ$$

A keresett trigonometrikus alak:

$$z = -4 + 2i = \sqrt{20} (\cos 153,43^\circ + i \sin 153,43^\circ).$$

- e) A valós és képzetes rész is negatív, ezért egy harmadik negyedbe eső komplex számot fogunk átírni trigonometrikus alakba.



A szükséges számolások:

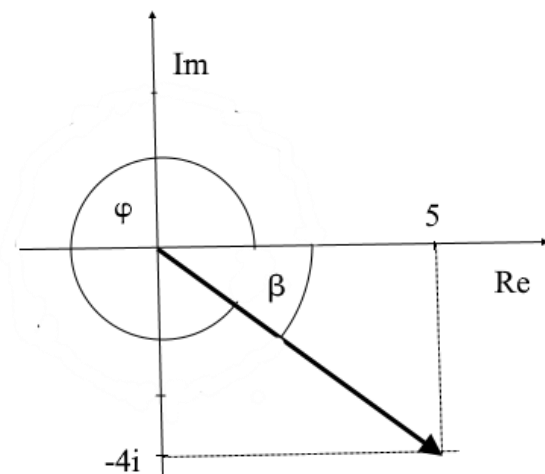
$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{3} \rightarrow \varphi = 180^\circ + \beta = 180^\circ + 59,04^\circ = 239,04^\circ$$

A keresett trigonometrikus alak:

$$z = -3 - 5i = \sqrt{34}(\cos 139,04^\circ + i \sin 139,04^\circ).$$

- f) A valós pozitív, a képzetes rész negatív, ezért egy negyedik negyedbe eső komplex számot fogunk átírni trigonometrikus alakba.



A szükséges számolások:

$$r = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{5} \rightarrow \varphi = 360^\circ - \beta = 360^\circ - 38,66^\circ = 321,34^\circ$$

A keresett trigonometrikus alak:

$$z = 5 - 4i = \sqrt{41}(\cos 321,34^\circ + i \sin 321,34^\circ).$$

5. feladat: Írja fel a következő komplex számokat algebrai alakban:

- a) $z = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$
- b) $z = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$
- c) $z = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$
- d) $z = 5(\cos 123^\circ + i \sin 123^\circ).$

Megoldás

$$\text{a) } z = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{b) } z = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 1 - i$$

$$c) \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{-1}{2} \right) \right) = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

$$d) \quad z = 5(\cos 123^\circ + i \sin 123^\circ) = 5(-0,5446 + i \cdot 0,8387) = -2,723 + 4,1935i.$$

6. feladat: Legyen $z = \frac{6}{\sqrt{2}} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$. Határozza meg $\operatorname{Im}(z)$ és $\operatorname{Re}(z)$ értékeket!

Megoldás

A trigonometrikus alakból át kell térni az algebrai alakra, hogy válaszolni tudjunk.

$$z = \frac{6}{\sqrt{2}} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = \frac{6}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = 3 - 3i \rightarrow \operatorname{Re}(z) = 3, \operatorname{Im}(z) = -3.$$

Ellenőrző kérdések

9. kérdés: Mennyi az $5 - 4i$ komplex szám abszolút értéke?

- a) 9
- b) 3
- c) $\sqrt{41}$ (X)
- d) 1

10. kérdés: Mekkora a $-2 - 3i$ hajlásszöge?

- a) $236,31^\circ$ (X)
- b) $326,31^\circ$
- c) $146,31^\circ$
- d) $213,63^\circ$

11. kérdés: $\sqrt{3} - i$ trigonometrikus alakja:

- a. $2(\cos 320^\circ + i \sin 320^\circ)$
- b. $2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$
- c. $2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$ (X)
- d. $2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$

12. kérdés: $\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$ algebrai alakja:

- a. $-1 + i$ (X)
- b. $1 - i$
- c. $-1 - i$
- d. $1 + i$

13. kérdés: Határozza meg a $\sqrt{3}(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$ komplex szám képzetes részét!

- a. $-1,5$ (X)

b. 1,5

c. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Műveletek trigonometrikus alakban

Trigonometrikus alakban adott komplex számok esetében elvégezhető műveletek: *szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás*.

Ha trigonometrikus alakban adott komplex számokat összeadni illetve kivonni kell, akkor először a számokat algebrai alakba váltjuk át, majd abban az alakban végezzük el a kívánt műveletet.

Szorzás, osztás, hatványozás

Tétel: Legyen $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

$$z_1^n = r_1^n (\cos(n\varphi_1) + i \sin(n\varphi_1)).$$

A műveletek elvégzése során ügyelni kell arra, hogy az eredmény hajlásszöge itt is a 0° és 360° tartományba essen. Ha a képletek alkalmazása során forgásszöget vagy negatív szöget kapnánk, akkor a megfelelő korrekciót el kell végezni.

7. feladat: Legyen $z_1 = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$, $z_2 = 5(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$ és $z_3 = 3(\cos 322^\circ + i \sin 322^\circ)$. Adja meg a következő kifejezések értékét trigonometrikus alakban:

Megoldás

a) $z_1 z_2 = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \cdot 5(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = 10(\cos 345^\circ + i \sin 345^\circ)$

b) $z_3 z_2 = 3(\cos 322^\circ + i \sin 322^\circ) \cdot 5(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = 15(\cos 532^\circ + i \sin 532^\circ) = 15(\cos 172^\circ + i \sin 172^\circ)$

A megoldásnál felhasználva, hogy $532^\circ - 360^\circ = 172^\circ$.

c) $\frac{z_3}{z_1} = \frac{3(\cos 322^\circ + i \sin 322^\circ)}{2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)} = \frac{3}{2}(\cos 187^\circ + i \sin 187^\circ)$

d) $\frac{z_2}{z_3} = \frac{5(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)}{3(\cos 322^\circ + i \sin 322^\circ)} = \frac{5}{3}(\cos(-112^\circ) + i \sin(-112^\circ)) = \frac{5}{3}(\cos 248^\circ + i \sin 248^\circ)$

A megoldásnál felhasználva, hogy $-112^\circ + 360^\circ = 248^\circ$.

e) $z_1^3 = 2^3(\cos 405^\circ + i \sin 405^\circ) = 8(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

f) $z_3^4 = 3^4(\cos 1288^\circ + i \sin 1288^\circ) = 81(\cos 208^\circ + i \sin 208^\circ)$

g) $\frac{z_3}{z_1 z_2^2} = \frac{3(\cos 322^\circ + i \sin 322^\circ)}{2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \cdot 5^2(\cos 420^\circ + i \sin 420^\circ)} =$

$$\frac{3(\cos 322^\circ + i \sin 322^\circ)}{2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \cdot 5^2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)} =$$

$$\frac{3(\cos 322^\circ + i \sin 322^\circ)}{50(\cos 195^\circ + i \sin 195^\circ)} = \frac{3}{50}(\cos 127^\circ + i \sin 127^\circ)$$

8. feladat: Írja fel a következő számot trigonometrikus alakban:
 $(-3+4i) \cdot 2(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ)$.

Megoldás

A szorzat első tényezője algebrai alakban van adva. Ahhoz, hogy a szorzást el tudjuk végezni, ezt át kell írunk trigonometrikus alakba.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3} \rightarrow \beta = 53,13^\circ \rightarrow \alpha = 126,87^\circ$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

Tehát

$$-3+4i = 5(\cos 126,87^\circ + i \sin 126,87^\circ).$$

Így már el lehet végezni a szorzást, az eredmény:

$$5(\cos 126,87^\circ + i \sin 126,87^\circ) \cdot 2(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ) = 10(\cos 236,87^\circ + i \sin 236,87^\circ).$$

9. feladat: Írja fel a következő számot trigonometrikus alakban: $\frac{3i}{2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)}$.

Megoldás

$$\frac{3i}{2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)} = \frac{3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)}{2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)} =$$

$$\frac{3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)}{2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)} = \frac{3}{2}(\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ)) = \frac{3}{2}(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ).$$

10. feladat: Írja fel a következő számot trigonometrikus alakban: $(3-3i)^4$.

Megoldás

Negyedik hatványra trigonometrikus alakban célszerű emelni. Ehhez az algebrai alakban adott komplex számot át kell váltani trigonometrikus alakba.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{3} \rightarrow \beta = 45^\circ \rightarrow \alpha = 315^\circ$$

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$$

$$(3-3i)^4 = (\sqrt{18}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ))^4 = \sqrt{18}^4 (\cos 1260^\circ + i \sin 1260^\circ) =$$

$$324(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ).$$

Gyökvonás

Tétel: A z komplex számnak pontosan n darab n -edik gyöke van. Ha z trigonometrikus alakja $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, akkor n -edik gyökei az

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} + i \sin \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} \right)$$

komplex számok, ahol $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Megjegyzés:

A nemnegatív valós számok halmazán a gyökvonás egyértelmű művelet, azaz egy nemnegatív valós számnak mindig pontosan egy darab n -edik gyöke van. Ettől eltérően a komplex számok körében a gyökvonás többértékű művelet.

Ha a z komplex szám n -edik gyökeit ábrázoljuk a koordináta rendszerben, akkor ($n \geq 3$ esetén) a megfelelő gyökök egy szabályos n -szög csúcsaiba mutató helyvektorok.

11. feladat Legyen $z = 32(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$. Határozzuk meg $\sqrt[5]{z}$ értékeit!

Megoldás

$$z_k = \sqrt[5]{32} \left(\cos \frac{150^\circ + k \cdot 360^\circ}{5} + i \sin \frac{150^\circ + k \cdot 360^\circ}{5} \right),$$

ahol $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Azaz:

$$k = 0 \quad z_0 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$

$$k = 1 \quad z_1 = 2(\cos 102^\circ + i \sin 102^\circ)$$

$$k = 2 \quad z_2 = 2(\cos 174^\circ + i \sin 174^\circ) .$$

$$k = 3 \quad z_3 = 2(\cos 246^\circ + i \sin 246^\circ)$$

$$k = 4 \quad z_4 = 2(\cos 318^\circ + i \sin 318^\circ)$$

12. feladat Számítsuk ki $\sqrt[4]{-81}$ értékeit!

Megoldás

Az algebrai alakban adott komplex számot át kell váltani trigonometrikus alakba.

$$-81 = 81(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) .$$

Ekkor már alkalmazható a gyökvonás képlete:

$$z_k = \sqrt[4]{81} \left(\cos \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} + i \sin \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} \right), \text{ ahol } k = 0, 1, 2, 3 .$$

Azaz:

$$k = 0 \quad z_0 = 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$k = 1 \quad z_1 = 3(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$k = 2 \quad z_2 = 3(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) .$$

$$k = 3 \quad z_3 = 3(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$

13. feladat: Számítsuk ki $\sqrt[3]{-3-3i}$ értékeit!

Megoldás

A gyök alatt szereplő komplex számot át kell írni trigonometrikus alakba.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{3} \rightarrow \beta = 45^\circ \rightarrow \alpha = 225^\circ$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}.$$

Alkalmazva a gyökvonás képletét:

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{18}} \left(\cos \frac{225^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{225^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right),$$

ahol $k = 0, 1, 2$.

Azaz:

$$k = 0 \quad z_0 = \sqrt[3]{\sqrt{18}} (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$$

$$k = 1 \quad z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{18}} (\cos 195^\circ + i \sin 195^\circ) .$$

$$k = 2 \quad z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{18}} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$

14. feladat: Adja meg $\sqrt{\frac{1-i}{2(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)}}$ értékeit!

Megoldás

$$\sqrt{\frac{1-i}{2(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)}{2(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 115^\circ + i \sin 115^\circ)}$$

Alkalmazva a gyökvonás képletét:

$$z_k = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{115^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} + i \sin \frac{115^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} \right),$$

ahol $k = 0, 1$.

Azaz:

$$k = 0 \quad z_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\cos 57,5^\circ + i \sin 57,5^\circ)$$

$$k = 1 \quad z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\cos 237,5^\circ + i \sin 237,5^\circ) .$$

Ellenőrző kérdések

14. kérdés: Határozza meg $\frac{1}{2(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)}$ trigonometrikus alakját!

a) $\frac{1}{2}(\cos 255^\circ + i \sin 255^\circ)$ (X)

- b) $\frac{1}{2}(\cos 345^\circ + i \sin 345^\circ)$
- c) $\frac{1}{2}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$
- d) $\frac{1}{2}(\cos 165^\circ + i \sin 165^\circ)$

15. kérdés: Legyen $z = -2 + 2i$. Mekkora z^3 hajlásszöge?

- a) 135°
- b) 45° (X)
- c) 315°
- d) 225°

16. kérdés: Legyen $z_1 = 3 + 4i$ és $z_2 = 3(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$. Határozza meg a $z_1^4 z_2$ értékét!

- a) $60(\cos 312,52^\circ + i \sin 312,52^\circ)$
- b) $15(\cos 153,13^\circ + i \sin 153,13^\circ)$
- c) $1875(\cos 153,13^\circ + i \sin 153,13^\circ)$
- d) $1875(\cos 312,52^\circ + i \sin 312,52^\circ)$ (X)

17. kérdés: Határozza meg $-4 + 5i$ köbgyökei közül a legnagyobb szögűnek a hajlásszögét!

- a) $282,87^\circ$ (X)
- b) $231,3^\circ$
- c) $287,11^\circ$
- d) $321,3^\circ$

18. kérdés: Határozza meg a $-5i$ negyedik gyökei közül a legkisebb szögűnek a hajlásszögét!

- a) 90°
- b) 45°
- c) $76,5^\circ$
- d) $67,5^\circ$ (X)

19. kérdés: Mennyi a $-8i$ köbgyökeinek szorzata?

- a) $8i$
- b) $-8i$ (X)
- c) 8
- d) -8

Az algebra alaptétele, egyenletek

Ebben a szakaszban polinomiális egyenleteket oldunk meg a komplex számok halmazán. A megoldás során szem előtt tartjuk az algebra alaptételét.

Tétel: Minden

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

alakú egyenletnek, ahol $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ és $n \in \mathbb{Z}^+$ pontosan n darab gyöke van a komplex számok körében.

15. feladat: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$2i + 3iz = 4 - 5z$$

Megoldás

Ez egy elsőfokú egyenlet, amit rendezéssel oldunk meg.

$$2i + 3iz = 4 - 5z \rightarrow z(5 + 3i) = 4 - 2i$$

$$z = \frac{4 - 2i}{5 + 3i} = \frac{4 - 2i}{5 + 3i} \cdot \frac{5 - 3i}{5 - 3i} = \frac{20 - 12i - 10i + 6i^2}{25 - 9i^2} = \frac{14 - 22i}{34} = \frac{14}{34} - \frac{22}{34}i.$$

16. feladat: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet és ábrázolja a kapott gyököket:

$$z^3 - 1 = 0.$$

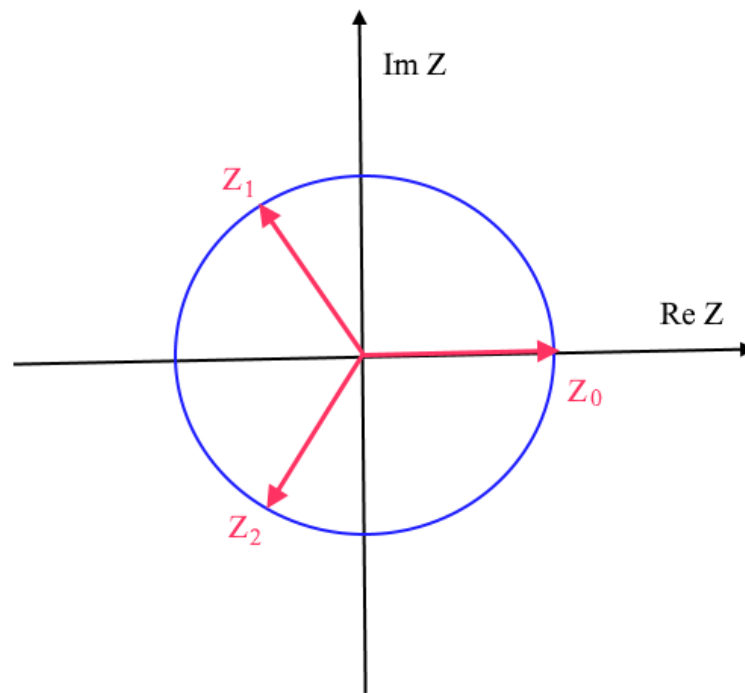
Megoldás

$$z^3 = 1 \rightarrow z = \sqrt[3]{1} \rightarrow z = \sqrt[3]{1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)}$$
$$z_k = 1 \left(\cos \frac{0^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{0^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right), \text{ ahol } k = 0, 1, 2.$$

$$k = 0 \quad z_0 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 1 + 0i$$

$$k = 1 \quad z_1 = 1(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2 \quad z_2 = 1(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



17. feladat: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$z^2 + 4z + 5 = 0$$

Megoldás

Ez egy másodfokú egyenlet. Használjuk a gyökképletet:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} -1 + i \\ -1 - i \end{cases} \end{aligned}$$

Összetett feladatok

18. feladat: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$z^2 + 19 + 4i = (4 + 2i)z$$

Megoldás

Az egyenletet nullára rendezzük, majd használjuk a gyökképletet:

$$\begin{aligned} z^2 - (4 + 2i)z + 19 + 4i &= 0 \\ z_{1,2} &= \frac{(4 + 2i) \pm \sqrt{(-4 - 2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (19 + 4i)}}{2} = \\ &= \frac{4 + 2i \pm \sqrt{16 + 16i + 4i^2 - 76 - 16i}}{2} = \frac{4 + 2i \pm \sqrt{-64}}{2} = \end{aligned}$$

$$\frac{4+2i \pm 8i}{2} = \begin{cases} 2+5i \\ 2-3i \end{cases}$$

19. feladat: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$z^6 + 8\sqrt{3}z^3 = 64i^{2010}$$

Megoldás

Ez egy másodfokú egyenletre visszavezethető egyenlet, ha a $z^3 = x$ helyettesítést elvégezzük.

A rendezésnél használjuk ki az $i^{2010} = (i^2)^{1005} = (-1)^{1005} = -1$ összefüggést.

$$z^6 + 8\sqrt{3}z^3 = 64i^{2010} \rightarrow x^2 + 8\sqrt{3}x + 64 = 0$$

Használjuk a gyökképletet x meghatározására:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-8\sqrt{3} \pm \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64}}{2} = \frac{-8\sqrt{3} \pm \sqrt{-64}}{2} = \\ &= \frac{-8\sqrt{3} \pm \sqrt{64}i}{2} = \frac{-8\sqrt{3} \pm 8i}{2} = \begin{cases} -4\sqrt{3} + 4i \\ -4\sqrt{3} - 4i \end{cases} \end{aligned}$$

Elvégezzük a visszahelyettesítést.

Ha

$$x_1 = z^3 = -4\sqrt{3} + 4i = 8(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$$

$$z_k = 2 \left(\cos \frac{150^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{150^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right) \text{ ahol } k = 0, 1, 2.$$

Ha

$$x_2 = z^3 = -4\sqrt{3} - 4i = 8(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$$

$$z_l = 2 \left(\cos \frac{210^\circ + l \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{210^\circ + l \cdot 360^\circ}{3} \right), \text{ ahol } l = 0, 1, 2.$$

Tehát az egyenlet gyökei:

$$\begin{aligned} k=0 \quad z_0 &= 2(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ) \\ k=1 \quad z_1 &= 2(\cos 170^\circ + i \sin 170^\circ) \\ k=2 \quad z_2 &= 2(\cos 290^\circ + i \sin 290^\circ) \\ l=0 \quad z_3 &= 2(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ) \\ l=1 \quad z_4 &= 2(\cos 190^\circ + i \sin 190^\circ) \\ l=2 \quad z_5 &= 2(\cos 310^\circ + i \sin 310^\circ) \end{aligned}$$

20. feladat: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$(2-3i)z^4 + 8\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = -40 + 40i$$

Megoldás

Először a trigonometrikus alakban adott komplex számot át kell írni algebrai alakra, majd az egyenletet rendezzük.

$$(2-3i)z^4 + 8\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -40 + 40i$$

$$(2-3i)z^4 - 8 - 8i = -40 + 40i \rightarrow (2-3i)z^4 = -32 + 48i$$

$$z^4 = \frac{-32 + 48i}{2-3i} = \frac{-16(2-3i)}{2-3i} = -16 = 16(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$$

Az egyenlet gyökei:

$$z_k = 2 \left(\cos \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} + i \sin \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} \right),$$

ahol $k = 0, 1, 2, 3$.

21. feladat:

$$\left(i - \frac{i-1}{z}\right) \cdot (z - i^{103} + 3iz) = 0$$

Megoldás

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla:

$$i - \frac{i-1}{z} = 0 \quad \text{vagy} \quad z - i^{103} + 3iz = 0.$$

Az első egyenlet megoldása:

$$i - \frac{i-1}{z} = 0 \rightarrow i = \frac{i-1}{z}$$

$$z = \frac{i-1}{i} = \frac{i-1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i^2 + i}{-i^2} = \frac{1+i}{1} = 1+i.$$

A második egyenlet megoldásánál használjuk ki, hogy $i^{103} = i^{102} \cdot i = (i^2)^{51} \cdot i = -i$.

$$z + i + 3iz = 0 \rightarrow z = \frac{-i}{1+3i} = \frac{-i}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} = -\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i.$$

Tehát az egyenlet megoldásai:

$$z_1 = 1+i \text{ és } z_2 = -\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i.$$

Ellenőrző kérdések

20. kérdés: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$z^2 + 2z + 2i = -1 - 2iz$$

Megoldás

- a) $z_1 = -1$ $z_2 = -1 - 2i$ (X)
- b) $z_1 = -1$ $z_2 = 1 + 2i$
- c) $z_1 = 1$ $z_2 = -1 - 2i$
- d) $z_1 = 1$ $z_2 = 1 + 2i$

21. kérdés: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$z^4 + iz^2 + 12 = 0$$

Megoldás

$$a) \quad z_k = \sqrt{3} \left(\cos \frac{0^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} + i \sin \frac{0^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} \right) \quad k = 0, 1$$

$$z_l = 2 \left(\cos \frac{180^\circ + l \cdot 360^\circ}{2} + i \sin \frac{180^\circ + l \cdot 360^\circ}{2} \right) \quad l = 0, 1$$

$$b) \quad z_k = \sqrt{3} \left(\cos \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} + i \sin \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} \right) \quad k = 0, 1$$

$$z_l = 2 \left(\cos \frac{0^\circ + l \cdot 360^\circ}{2} + i \sin \frac{0^\circ + l \cdot 360^\circ}{2} \right) \quad l = 0, 1$$

$$c) \quad z_k = \sqrt{3} \left(\cos \frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} + i \sin \frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} \right) \quad k = 0, 1$$

$$z_l = 2 \left(\cos \frac{270^\circ + l \cdot 360^\circ}{2} + i \sin \frac{270^\circ + l \cdot 360^\circ}{2} \right) \quad l = 0, 1 \quad (X)$$

$$d) \quad z_k = \sqrt{3} \left(\cos \frac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} + i \sin \frac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} \right) \quad k = 0, 1$$

$$z_l = 2 \left(\cos \frac{90^\circ + l \cdot 360^\circ}{2} + i \sin \frac{90^\circ + l \cdot 360^\circ}{2} \right) \quad l = 0, 1$$

22. kérdés: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$(1 - 2\sqrt{3}i) \cdot z^3 - 8 = 24(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

Megoldás

$$a) \quad z = 2 \left(\cos(30^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(30^\circ + k \cdot 120^\circ) \right) \quad k = 0, 1, 2$$

$$b) \quad z = 2 \left(\cos(40^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(40^\circ + k \cdot 120^\circ) \right) \quad k = 0, 1, 2 \quad (X)$$

$$c) \quad z = 2 \left(\cos(60^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(60^\circ + k \cdot 120^\circ) \right) \quad k = 0, 1, 2$$

$$d) \quad z = 2 \left(\cos(45^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(45^\circ + k \cdot 120^\circ) \right) \quad k = 0, 1, 2.$$

23. kérdés: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$(z^2 - 4z + 5)(z^4 + 81i) = 0.$$

Megoldás

$$z_1 = 2 + i \quad z_2 = 2 - i$$

$$a) \quad z_k = 3 \left(\cos(45^\circ + k \cdot 90^\circ) + i \sin(45^\circ + k \cdot 90^\circ) \right) \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_1 = 2 + i \quad z_2 = 2 - i$$

$$b) \quad z_k = 3 \left(\cos(60^\circ + k \cdot 90^\circ) + i \sin(60^\circ + k \cdot 90^\circ) \right) \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} & z_1 = -2 + i \quad z_2 = -2 - i \\ \text{c)} \quad & z_k = 3(\cos(67,5^\circ + k \cdot 90^\circ) + i \sin(67,5^\circ + k \cdot 90^\circ)) \quad k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & z_1 = 2 + i \quad z_2 = 2 - i \\ \text{d)} \quad & z_k = 3(\cos(67,5^\circ + k \cdot 90^\circ) + i \sin(67,5^\circ + k \cdot 90^\circ)) \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad \textbf{(X)} \end{aligned}$$

1. Vektorok, komplex számok

1.5. Modulzáró ellenőrző kérdések

1. **kérdés** Az A és B pontokba mutató helyvektorok legyenek rendre $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Tükrözzük az A pontot B -re. Legyen a tükörkép A' , majd tükrözzük A' -re a B pontot. Az így kapott B' pontba mutató helyvektort fejezzük ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok segítségével!

$$\frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}$$
$$\frac{2\mathbf{b} - 3\mathbf{a}}{3}$$
$$\frac{3\mathbf{b} - 2\mathbf{a}}{2}$$
$$3\mathbf{b} - 2\mathbf{a} \quad (\text{X})$$

2. **kérdés** Tekintsük az ABC háromszöget, ahol $A(1,2,3)$, $B(-3,4,1)$ és $C(-1,-6,3)$. Írja fel a háromszög BC oldallal párhuzamos középvonalának egyenletét!

$$x = -1 + t, y = 3 - 5t, z = 2 + t \quad t \in R \quad (\text{X})$$
$$x = t, y = 2 - 5t, z = 3 + t \quad t \in R$$
$$x = -1 - t, y = 3 + 5t, z = 2 + t \quad t \in R$$
$$x = -1 + t, y = 3 + 5t, z = 2 - t \quad t \in R$$

3. **kérdés** Tekintsük az $A(-2,5,1)$, $B(-2,-1,-4)$ és $C(1,-4,5)$ pontokat. Legyen H_A az AB szakasz A -hoz közelebbi harmadoló pontja. Számítsa ki az AH_AC háromszög területét!

$$12,15 \quad (\text{X})$$
$$24,3$$
$$20,15$$
$$6,56$$

4. **kérdés** Határozza meg az $x = -5 + 2t, y = 3 + t, z = 4 + 2t \quad t \in R$ egyenes és az xy sík metszéspontját!

$$(-1, 5, 0)$$
$$(-9, -1, 0) \quad (\text{X})$$
$$(-11, 0, -2)$$
$$(0, 5, 5, 9)$$

5. **kérdés** Határozza meg mekkora szöget zár be az $ABCD$ tetraéderben az AD oldal egyenese az ABC oldallap síkjával, ha $A(2;-2;2)$, $B(5;-2;-1)$, $C(5;2;-1)$ és $D(1;-1;2)$!

$$45^\circ$$
$$60^\circ$$
$$120^\circ$$
$$30^\circ \quad (\text{X})$$

6. **kérdés** Adott az $ABCD$ tetraéder négy csúcsa: $A(4;6;2)$, $B(0;-1;-2)$, $C(-1;6;3)$ és $D(5;-4;3)$. Írja fel a B pontra illeszkedő, ACD síkkal párhuzamos sík egyenletét!

$$5x + 3y + 25z = -53 \quad (\text{X})$$

$$10x + 6y + 50z = -101$$

$$5x - 3y + 25z = -53$$

$$-5x + 3y + 25z = -53$$

7. **kérdés** Mennyi a $\frac{1+5i}{-1+5i} - i^6$ komplex szám valós része:

$$-\frac{1}{13}$$

$$2$$

$$-2$$

$$\frac{25}{13} \quad (\text{X})$$

8. **kérdés** Adja meg $\left(\frac{3-7i}{2+5i}\right)^{10}$ értékét algebrai alakban:

$$32i \quad (\text{X})$$

$$32(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

$$32$$

$$-32$$

9. **kérdés** A $z^6 + (4-2i)z^3 - 4i = 0$ egyenlet gyökei közül a legkisebb hajlásszögűnek a hajlásszöge:

$$30^\circ$$

$$45^\circ \quad (\text{X})$$

$$60^\circ$$

$$90^\circ$$

2. Függvénytan

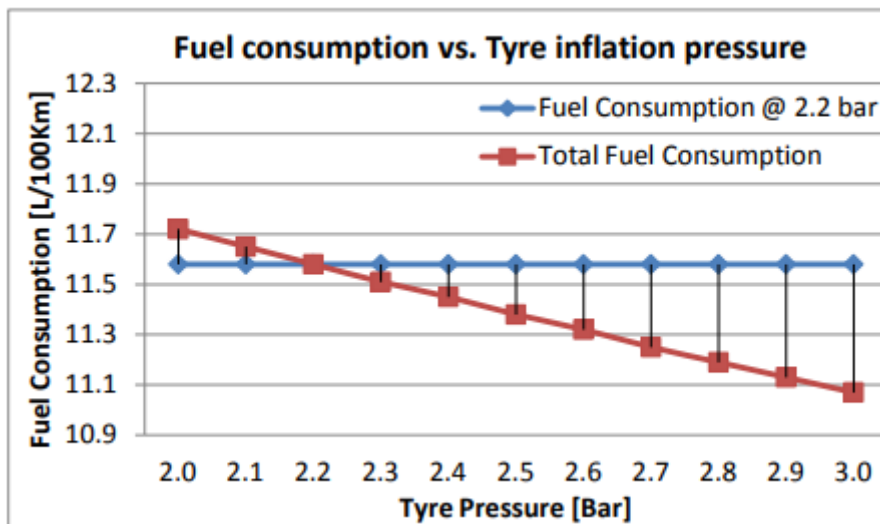
2. 1. Függvénytani alapismeretek

Tanulási cél: a függvény fogalmához kapcsolódó kifejezések áttekintése, az értelmezési tartomány meghatározásához alkalmazott leggyakoribb eljárások gyakorlása. A függvényekkel végzett műveletek megismerése, kiemelt hangsúllyal a kompozíció műveletének gyakorlása. Az inverz függvény fogalmának megismerése, grafikonjának képzése, egyszerűbb függvények esetében az inverz függvény képletének előállítás.

Elméleti összefoglaló:

A mérnöki munka során gyakran hallunk olyan állításokat, hogy egy változó függvénye egy másik változónak. Például egy jármű maximális sebessége függ a motor maximális teljesítményétől, függ az út meredekségétől, a jármű frontális keresztmetszetétől, vagy éppen a jármű fogyasztása függ a guminyomástól. Két változó közötti összefüggés többféleképpen is megadható, csak néhányat említve diagrammal, táblázattal, grafikonnal, formulával.

Észrevehetjük, hogy a fenti példákban a változóink egy-egy adott tartományból (halmazból) kerülnek ki. Például ha egy jármű fogyasztását vizsgáljuk a guminyomás függvényében, akkor a guminyomást 1,5 és 3 bar között érdemes vizsgálni, mivel alacsonyabb és magasabb érték túlzott kopáshoz vezet és csökken a gumi élettartama (1. ábra).

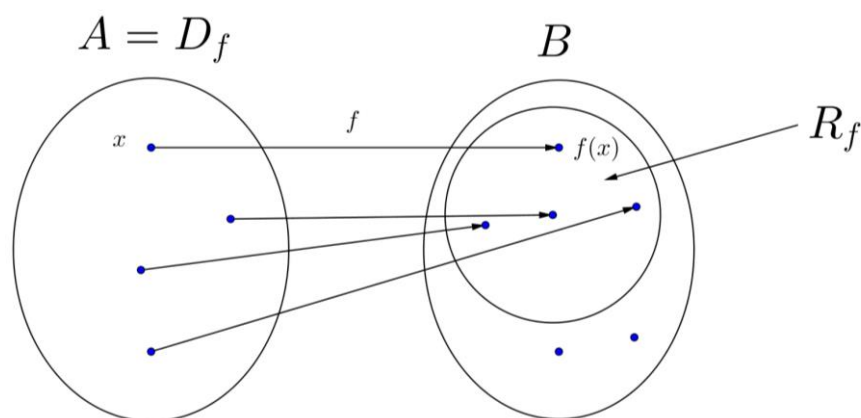


1. ábra. A fogyasztás változása a guminyomás függvényében

Nézzük a fenti függési viszonyok matematikai általánosítását.

Definíció: Legyen A és B két nem üres halmaz. Ha az A halmaz minden egyes eleméhez hozzárendeljük a B halmaz egy-egy elemét, akkor az A halmazon egy **függvényt** értelmeztünk. Az A halmaz a függvény **értelmezési tartománya**, a B halmaz pedig a függvény **képhalmaza**.

B -nek azon elemei, amelyek a hozzárendelésben részt vesznek, a függvény **értékkészletét** alkotják. Tehát az értékkészlet a képhalmaz része. Jelölés: az f függvény értelmezési tartománya D_f , az f függvény értékkészlete R_f (2. ábra).



2. ábra. Függvény értelmezési tartománya, képhalmaza, értékkészlete

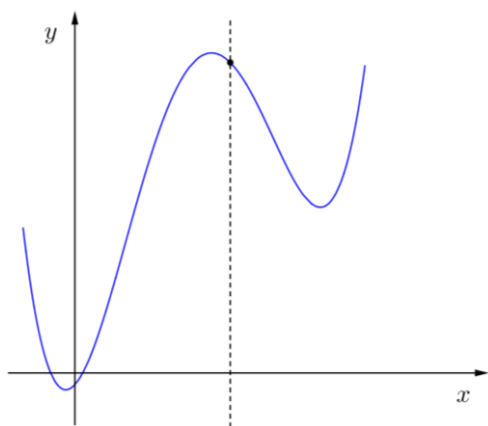
Definíció: Ha a függvényt f jelöli és $x \in A$, akkor az x -hez rendelt B -beli elemet $f(x)$ -szel jelöljük, amit az f függvény x helyhez tartozó **helyettesítési értékének** nevezzük.

Definíció: Az x változó neve **független változó** (vagy argumentum), az $f(x)$ neve pedig **függő változó**, amit szokás $y = f(x)$ -szel is jelölni.

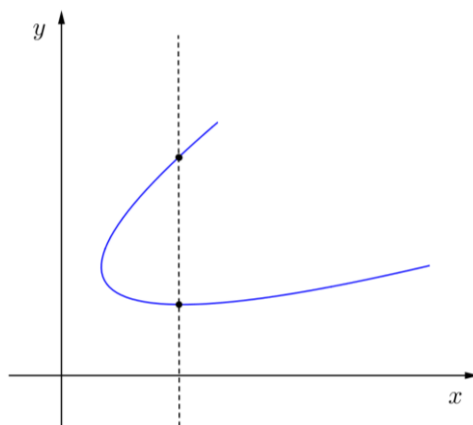
Definíció: Azokat a függvényeket, amelyek értelmezési tartománya és értékkészlete is valós számokból áll, **egyváltozós valós függvényeknek** nevezzük.

Definíció: A $P(x, f(x)), x \in D_f$ pontok halmazát az f függvény **grafikonjának** nevezzük, ahol x végigfutja az f értelmezési tartományát.

A grafikonok rengeteg különböző alakot ölthetnek, de fontos megjegyezni, hogy nem minden síkgörbe függvény grafikonja. Egy függvény az értelmezési tartományának tetszőleges pontjához csak egyetlen y értéket rendel. Ez a tulajdonság könnyen ellenőrizhető, mivel a függvény grafikonát az x tengely bármely pontján átmenő függőleges egyenes legfeljebb egy pontban metszi (3-4. ábra).



3. ábra. Ez a görbe függvénygrafikon



4. ábra. Ez a görbe nem függvénygrafikon

A mérnöki munka során gyakori feladat, hogy mérési eredményekből az adott folyamatot jól leíró, képlettel is megadható függvényt határozzunk meg.

A függvények ábrázolásakor sokszor elegendő egy jelleggörbe megrajzolása, mely egyértelműen mutatja a függvény előjelviszonyait (az értelmezési tartomány mely részein halad a függvény az x tengely alatt és felett), a zérushelyeket, a szakadási helyek és a végtelen(ek) környezetében való viselkedését.

Egy függvény megadásához meg kell adni az értelmezési tartományt, a képhalmazt és a hozzárendelési szabályt, melynek segítségével minden $x \in A$ elemhez meghatározható a hozzátartozó $f(x) \in B$ elem. Általában a hozzárendelési szabályt képlettel adjuk meg.

Például: $f(x) = \sqrt{x+4}$

A gyakorlatban nem mindig adjuk meg az értelmezési tartományt és az értékkészletet. Ilyenkor azon x számok halmazát értjük az értelmezési tartomány alatt, amelyekre a hozzárendelési utasítás elvégezhető, illetve azon y értékek halmazát értjük értékkészlet alatt, amelyek egy-egy x számhoz tartoznak.

Ebből kifolyólag, ha nem adunk meg értelmezési tartományt a lineáris függvény, hatványfüggvény, exponenciális függvény, szinusz függvény, koszinusz függvény esetén, akkor a legbővebb halmaz, melyen ezek a függvények értelmezve vannak a valós számok halmaza ($\mathbb{R}$).

Azonban néhány függvény esetében nem minden valós számra végezhető el a hozzárendelési utasítás. Ide tartozik a páros pozitív egész kitevőjű gyökfüggvény, a valós törtfüggvény és a logaritmus függvény. Vegyük sorra, hogy melyik függvény esetében milyen kikötést kell tenni.

a) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, ahol n páros pozitív egész

Negatív számokból nem tudunk gyököt vonni a valós számok halmazán (csak komplex számok körében, ahogy az előző leckékben láttuk), így az argumentum nagyobb egyenlő, mint 0, azaz $x \geq 0$.

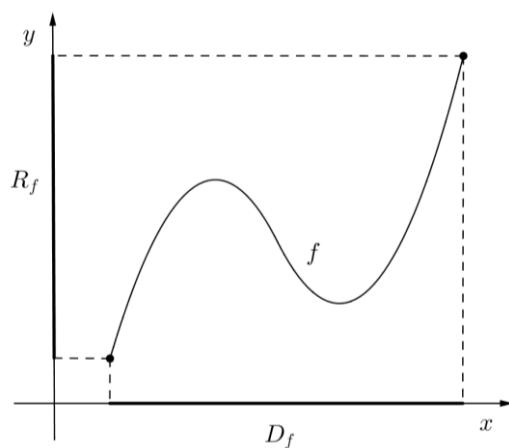
b) $f(x) = \log_a x$, ahol $a \neq 1$, $a > 0$

0-nál nagyobb számoknak van csak logaritmusa, azaz a kikötés $x > 0$.

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

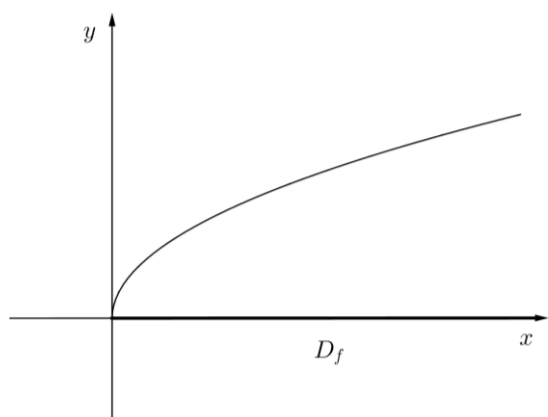
Egy tört nevezője nem lehet 0, mivel 0-val nem tudunk osztani, azaz a kikötés $x \neq 0$.

Vizsgáljuk meg az értelmezési tartomány és az értékkészlet fogalmát szemléletesen a függvények ábrájához kapcsolódóan. A függvények ábrájáról az értelmezési tartományt az x tengelyről, míg az értékkészletet az y tengelyről olvassuk le (5. ábra).

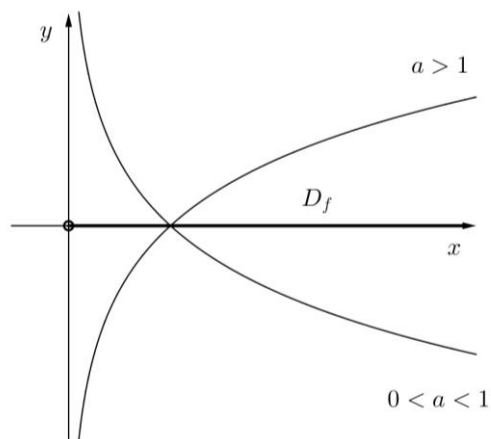


5. ábra. Az értelmezési tartomány és értékkészlet leolvasása a tengelyekről

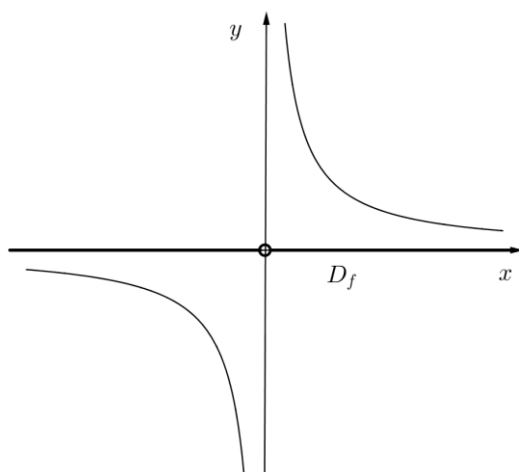
A függvények értelmezési tartományának meghatározásakor láttuk, hogy mely függvények esetében milyen kikötést kell tennünk. Nézzük meg most ezen függvények ábráját, s ez alapján is olvassuk le az értelmezési tartományt az x tengelyről (6-8. ábra).



6. ábra. Gyök függvény értelmezési tartománya



7. ábra. Logaritmus függvény értelmezési tartománya



8. ábra. Tört függvény értelmezési tartománya

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: A függvény hozzárendelési utasítása egy tört. Tudjuk, hogy egy tört nevezője nem lehet nulla. Most tehát a valós számok közül azokat kell kizárni az értelmezési tartományból, amelyekre a nevező nulla. Megoldjuk tehát az

$$x^2 + x = 0$$

egyenletet. Használhatjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét, vagy az $x(x+1) = 0$ szorzatra bontást.

Mivel egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, azt kapjuk, hogy egyenletünk két megoldása: $x_1 = -1$ és $x_2 = 0$.

Ebből a két számból álló halmazt kell tehát a valós számok halmazából kivonni. Így az f függvény D_f -el jelölt értelmezési tartománya:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty).$$

2. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Négyzetgyököt a valós számok körében csak nemnegatív számból vonhatunk. Ezért az a feltétel, hogy

$$x^2 - x - 2 \geq 0.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldáshalmaza adja az értelmezési tartományt.

A másodfokú egyenlőtlenség megoldását a következőképp kaphatjuk meg. Először megoldjuk az

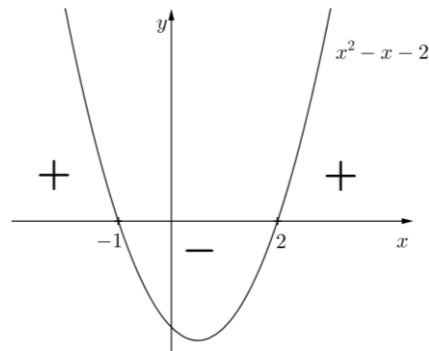
$$x^2 - x - 2 = 0$$

egyenletet. Szorzatra bontva a másodfokú kifejezést

$$(x+1)(x-2) = 0,$$

a két gyök tehát $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$. Persze a megoldóképletet is használhattuk volna.

A másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, így grafikonja egy felfelé nyíló parabola, tehát a kifejezés a két gyökén kívül pozitív, és a két gyöke között negatív (9. ábra). Az értelmezési tartományt úgy kapjuk meg, hogy a valós számok közül elhagyjuk azokat, ahol a másodfokú kifejezés negatív, azaz a $(-1, 2)$ nyílt intervallum pontjait (9. ábra).



9. ábra

Ezek alapján

$$D_f = \mathbb{R} \setminus (-1, 2) = (-\infty, -1] \cup [2, \infty).$$

Figyeljünk a zárójelekre! Az előző feladatban a valós számok halmazából egy kételemű halmazt vontunk ki, ezért használtunk ott kapcsos zárójelet. A mostani feladatban egy nyílt intervallum összes elemét kellett elhagyni a valós számok halmazából.

3. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2 - 2x + 1)}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Most két dolog jelent korlátozást. Az első az, hogy logaritmusát csak pozitív számnak vehetjük, tehát teljesülnie kell az

$$x^2 - 2x + 1 > 0$$

egyenlőtlenségnek.

A második az, hogy a nevezőben nem állhat nulla.

Az értelmezési tartományt tehát úgy kapjuk meg, hogy a fenti egyenlőtlenség megoldáshalmazából elhagyjuk a nevező gyökhelyeit.

Megoldjuk az $x^2 - 2x + 1 > 0$ egyenlőtlenséget. Mivel $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, a másodfokú kifejezés minden 1-től különböző szám esetén pozitív (grafikonja egy felfelé nyíló parabola, zérushelye $x = 1$ -ben). Tehát az egyenlőtlenség megoldáshalmaza

$$H_1 = (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$

A második feltételnek megfelelően $\ln(x^2 - 2x + 1) \neq 0$. Mivel a logaritmus függvény csak 1-ben nulla, a nevező akkor lesz nulla, ha

$$x^2 - 2x + 1 = 1,$$

azaz, ha

$$x^2 - 2x = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a két megoldása $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$. Ezt a két számot kell tehát még elhagyni a H_1 halmazból.

Ezek alapján végül is

$$D_f = H_1 \setminus \{0, 2\} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty).$$

4. feladat: Mi az értelmezési tartománya az $f(x) = \sqrt{2-x} + \ln(x-1)$ függvénynek?

Megoldás: Nyilván értelmesnek kell lenni külön a gyökös és külön a logaritmikus kifejezésnek is.

Jelölje H_1 azt a halmazt, ahol a gyökös kifejezés értelmes, H_2 azt a részhalmazt, ahol a logaritmikus kifejezés értelmes.

A D_f ennek a két halmaznak a metszete.

Meghatározzuk először H_1 -et. Az a feltétel, hogy

$$2-x \geq 0.$$

azaz $x \leq 2$ legyen. Ez alapján

$$H_1 = (-\infty, 2].$$

H_2 esetén az a feltétel, hogy

$$x-1 > 0,$$

azaz $x > 1$ legyen. Ebből

$$H_2 = (1, \infty).$$

Ennek a két halmaznak a metszetéből kapjuk, hogy

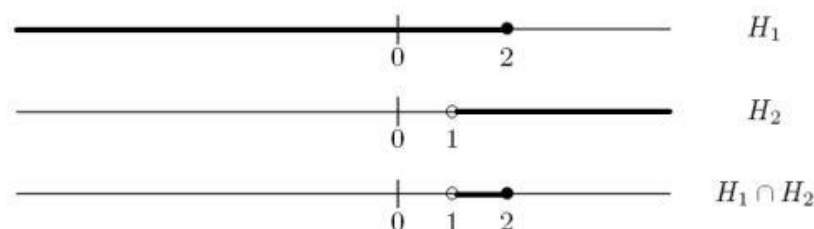
$$D_f = (1, 2].$$

Egyváltozós függvények értelmezési tartományát gyakran valós számok részhalmazainak metszeteként, vagy uniójaként kapjuk meg. Metszetet használunk abban az esetben, ha egyik és másik feltételnek is egyszerre kell teljesülnie. Uniót használunk olyankor, mikor az egyik vagy a másik feltétel teljesül.

A valós számok részhalmazai ábrázolhatók a valós számegyenesen. Az ilyen részhalmazok metszeteit és unióit, különösen, ha azok tagjai több darabból állnak, grafikusán célszerű meghatározni a következő módon. A metszet, vagy unió minden tagját feltüntetjük egy valós számegyenesen, úgy, hogy a halmazhoz tartozó pontokat megvastagítjuk. Ezeket egymás alá rajzoljuk, úgy, hogy a origók egy függőleges vonalban legyenek. Az egységet is mindegyik ábrán ugyanakkorának választjuk. Az üres kör azt jelzi, hogy az a szám nincs a halmazban, a teli kör azt, hogy benne van.

Ezután a metszetet úgy kapjuk, hogy legalul felvesszünk még egy számegyenest, ügyelve arra, hogy az origója és az egysége a fentiek alá essen, és azon megjelöljük azokat a pontokat, amelyek mindegyik számegyenesen meg voltak jelölve. Az uniónál azokat a pontokat kell a legalsó számegyenesen megjelölni, amelyek valamelyik fentén meg voltak jelölve.

A feladatunk esetében ezt mutatja az alábbi ábra.



5. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Annak kell teljesülni, hogy

$$\frac{x-2}{x+1} \geq 0.$$

Ez akkor igaz, ha a tört értéke nulla, ami a valós számok egy H_1 részhalmazán teljesül, vagy ha a tört értéke pozitív, ami egy H_2 részhalmazon teljesül. Most ennek a két halmaznak az uniója adja a D_f -et.

Kezdjük H_1 meghatározásával.

Egy tört akkor nulla, ha a számlálója nulla, és a nevező pedig értelmes. Az $x-2=0$ feltétel teljesül, ha $x=2$. Mivel 2-ben a nevező nem nulla, így ez a tört egyetlen zérushelye, vagyis

$$H_1 = \{2\}.$$

Rátérünk H_2 meghatározására.

Egy tört két esetben pozitív. Ha mind a számláló, mind a nevező pozitív, ez egy H_2' halmaz pontjaiban teljesül, vagy ha mind a számláló, mind a nevező negatív, ez egy H_2'' pontjaiban teljesül. Ezek uniója adja H_2 -t.

Meghatározzuk először H_2' -t. Annak kell teljesülni, hogy

$$x-2 > 0,$$

$$\text{azaz } x > 2,$$

és

$$x+1 > 0,$$

azaz $x > -1$.

Ez a két egyenlőtlenség egyszerre az $x > 2$ számokra teljesül, tehát

$$H_2' = (2, \infty).$$

H_2'' esetén annak kell teljesülni, hogy

$$x - 2 < 0,$$

azaz $x < 2$,

és $x + 1 < 0$,

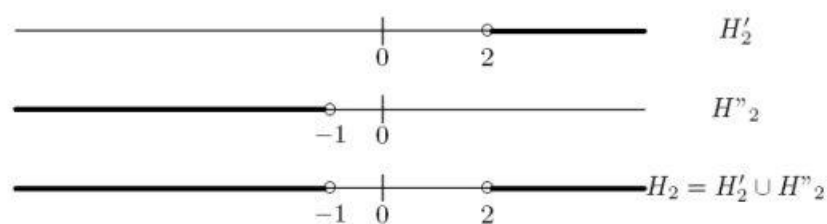
azaz $x < -1$.

Ez a két egyenlőtlenség egyszerre az $x < -1$ számokra teljesül, vagyis

$$H_2'' = (-\infty, -1).$$

Ezeket felhasználva, amint az az alábbi ábráról is leolvasható

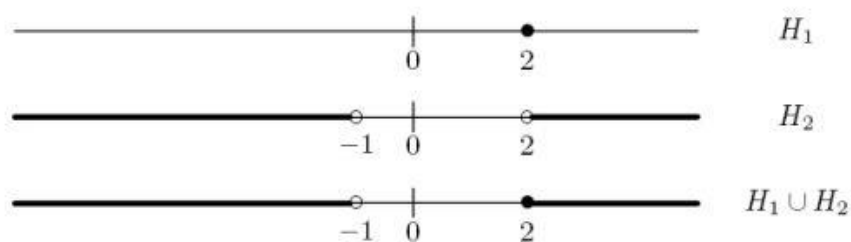
$$H_2 = H_2' \cup H_2'' = (-\infty, -1) \cup (2, \infty).$$



Végül is

$$D_f = H_1 \cup H_2 = (-\infty, -1) \cup [2, \infty).$$

Az D_f grafikus előállítása szerepel a következő ábrán.



6. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}\right)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: A logaritmus argumentumára vonatkozó kikötés alapján teljesül az

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} > 0$$

egyenlőtlenség.

Egy tört két esetben pozitív. Ha mind a számláló, mind a nevező pozitív, vagy ha mind a kettő negatív.

Bevezetjük a következő jelöléseket.

$\frac{+}{+}$		$\frac{-}{-}$	
H_1 -el jelöljük azt a halmazt, ahol a számláló és a nevező is pozitív.		H_2 -vel azt a halmazt, ahol mindkettő negatív.	
H_1' jelölje azt a halmazt, ahol a számláló pozitív.	H_1'' az a halmaz, ahol a nevező pozitív.	H_2' az a halmaz, ahol a számláló negatív.	H_2'' az a halmaz, ahol a nevező negatív.
Ezek metszete $H_1 = H_1' \cap H_1''$.		Ezek metszete $H_2 = H_2' \cap H_2''$	
Ezek uniója adja az értelmezési tartományt.			
$D_f = H_1 \cup H_2$			

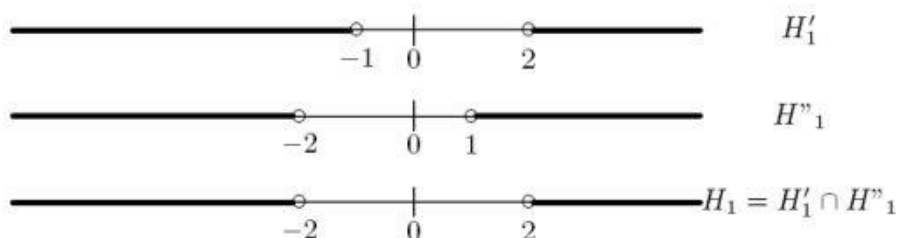
Kezdjük H_1 meghatározásával.

Mivel a számláló és a nevező képe is felfelé nyíló parabola, ezek a gyökeiken kívül pozitívak, és a gyökeik között negatívak.

Egyenlővé téve a számlálót is és a nevezőt is nullával, és megoldva az egyenleteket, azt kapjuk, hogy a számláló gyökei -1 és 2, a nevező gyökei pedig -2 és 1.

A lenti ábráról leolvashatjuk, hogy

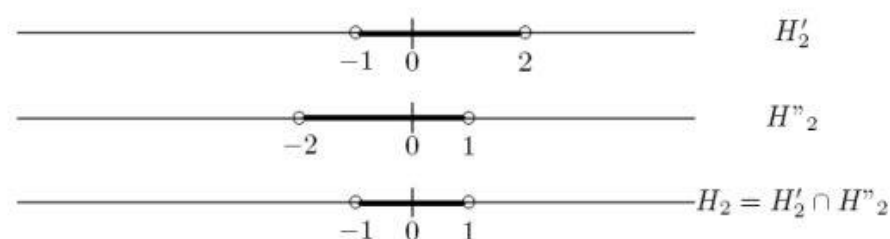
$$H_1 = (-\infty, -2) \cup (2, \infty).$$



Térjünk rá H_2 meghatározására.

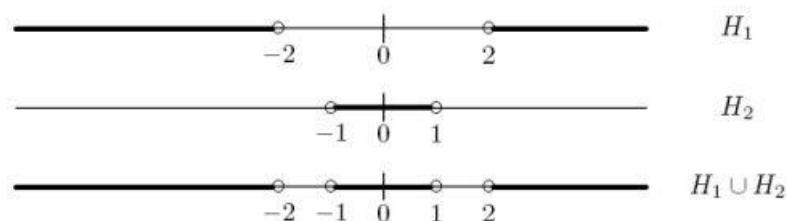
Mivel a számláló és a nevező képe is felfelé nyíló parabola, ezért gyökeik között negatívak (Láttuk, hogy a számláló gyökei -1 és 2, a nevező gyökei pedig -2 és 1). A lenti ábra alapján meghatározható a metszet.

$$H_2 = (-1, 1).$$



Végül, az uniót is grafikusan meghatározva, az alábbi ábrából kapjuk, hogy

$$D_f = H_1 \cup H_2 = (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty).$$



Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Mi az $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ függvény értelmezési tartománya?

* $D_f = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$

* $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty). (x)$

* $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty).$

* $D_f = (0, 1).$

2. kérdés: Mi az értelmezési tartománya az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$ függvénynek?

* $D_f = (-\infty, -2] \cup (0, \infty).$

* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

* $D_f = (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$. (x)

* $D_f = \mathbb{R} \setminus [-2, 0]$.

3. kérdés: Legyen $f(x) = \ln(x(2-x))$. Ekkor $D_f =$

* $(0, 2)$. (x)

* $(-2, 0)$.

* $[0, 2]$.

* $(0, 2]$.

4. kérdés: Az $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)} - \sqrt{3-x}$ függvény értelmezési tartománya

* $(-1, 0) \cup (0, 3]$. (x)

* $(-1, 0) \cup (0, 3)$.

* $(-1, 3)$.

* $(-1, 3]$.

5. kérdés: Mi az értelmezési tartománya az $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+3}\right)$ függvénynek?

* $D_f = (-2, 3)$.

* $D_f = (-3, 2)$. (x)

* $D_f = (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$.

* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$.

Elméleti összefoglaló:

A függvényekkel különféle műveleteket végezhetünk. Értelmezzük az f és g egyváltozós valós függvények összegét, különbségét, szorzatát, hányadosát, melyek csak azokban a pontokban értelmezettek, amelyekben f és g is értelmezett (azaz értelmezési tartományuk közös részein).

$$h(x) = f(x) + g(x), \text{ ahol } D_h = D_f \cap D_g$$

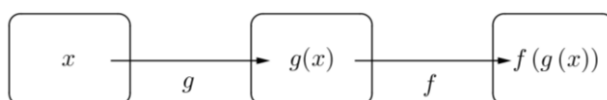
$$h(x) = f(x) - g(x), \text{ ahol } D_h = D_f \cap D_g$$

$$h(x) = f(x)g(x), \text{ ahol } D_h = D_f \cap D_g$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ ahol } D_h = D_f \cap D_g \text{ és } g(x) \neq 0$$

A fentiekén túlmenően egy újabb művelettel ismerkedünk meg. A függvények kompozícióját tekintjük a legfontosabb függvénytűveletnek.

Definíció: Az f és g függvényekből $f(g(x))$ módon konstruált függvényt **összetett függvénynek** (f és g kompozíciójának) nevezzük, melyre teljesül $R_g \cap R_f \neq \emptyset$. Az $f(g(x))$ értelmezési tartománya g értelmezési tartományának azon része, ahol g olyan értékeket vesz fel, melyeken f értelmezve van. A $g(x)$ -függvényt **belső függvénynek**, az $f(x)$ függvényt **külső függvénynek** nevezzük. Az $f(g(x))$ kiértékelésekor először a $g(x)$ -et számoljuk ki, majd másodszorra alkalmazzuk f -et $g(x)$ -re (10. ábra).



10. ábra. Összetett függvény alkotása

Az összetett függvény másik szokásos jelölése $(f \circ g)(x)$. Mi az első jelölést fogjuk használni.

Ha kettőnél több függvény felhasználásával alkotunk meg egy összetett függvényt, akkor többszörösen összetett függvényről beszélünk. Például f, g, h függvények esetén $f(g(h(x)))$ többszörösen összetett függvény alkotható.

A függvényeket tetszőleges sorrendben is egymásba ágyazhatjuk, azonban ezen összetételek eredménye általában különböző: $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

Kidolgozott feladatok:

7. feladat: Tekintsük az $f(x) = x + 1$ és a $g(x) = \sqrt{x-1}$ függvényt.

Határozzuk meg a $h = f + g$ összeg függvényt és a $k = f \cdot g$ szorzat függvényt.

Megoldás: Az f függvény mindenütt értelmezve van ($D_f = \mathbb{R}$), a g függvény az 1-nél nagyobb vagy egyenlő számok halmazán ($D_g = [1, \infty)$), ezért

$$D_h = D_k = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [1, \infty) = [1, \infty).$$

A h függvény hozzárendelési utasítása

$$h(x) = f(x) + g(x) = (x+1) + \sqrt{x-1},$$

a k függvény hozzárendelési utasítása pedig

$$k(x) = f(x) \cdot g(x) = (x+1) \cdot \sqrt{x-1}.$$

8. feladat: Legyen $f(x) = (x+1)^2$ és $g(x) = x-1$.

Határozzuk meg a $h = f - g$ és a $k = \frac{f}{g}$ függvényeket.

Megoldás: Kezdjük a különbséggel. Mivel mindkét függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, így $D_h = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. A hozzárendelési utasítás pedig

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x+1)^2 - (x-1) = x^2 + x + 2.$$

A k függvény értelmezési tartományába a g függvény zérushelye nem tartozik bele, így $D_k = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. A hozzárendelési utasítás pedig

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x+1)^2}{x-1}.$$

9. feladat: Tekintsük az $f(x) = x^2 + 3x - 2$ függvényt. Mivel egyenlő $f\left(\frac{x}{2}\right)$ és $f\left(\frac{1}{x}\right)$?

Megoldás: Egy függvény hozzárendelési utasítása mondja meg, hogy az mit rendel az argumentumához.

Most a hozzárendelési utasítás azt mondja, hogy az argumentum négyzetéhez hozzá kell adni az argumentum háromszorosát és abból levonni kettőt. Bármilyen is az argumentum, feltéve persze, hogy az értelmezési tartományban van. Ez most a valós számok halmaza, ezzel tehát nem lehet gond. Ezért

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x - 2.$$

Hasonlóan, feltéve, hogy $x \neq 0$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{x}\right) - 2 = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 2.$$

10. feladat: Tekintsük az $f(x) = x - 1$ és a $g(x) = \sqrt{x} - 1$ függvényeket. Határozzuk meg a $g(f(x))$ és az $f(g(x))$ függvények hozzárendelési utasítását.

Megoldás: A $g(f(x))$ kompozícióban a g függvény az $f(x)$ -re, azaz az $x - 1$ -re fejti ki hatását. Mivel a g függvény hatása az, hogy gyököt von az argumentumából és abból még levon 1-et, azt kapjuk, hogy

$$g(f(x)) = g(x - 1) = \sqrt{x - 1} - 1.$$

Megjegyezzük, hogy így is számolhattunk volna:

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} - 1 = \sqrt{x - 1} - 1.$$

Hasonlóan

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x} - 1) = (\sqrt{x} - 1) - 1 = \sqrt{x} - 2,$$

mivel az f úgy hat, hogy az argumentumából levon 1-et.

Mindez a másik felírási móddal:

$$f(g(x)) = g(x) - 1 = (\sqrt{x} - 1) - 1 = \sqrt{x} - 2.$$

11. feladat: Legyen $f(x) = e^{x-1}$ és $g(x) = x + \frac{1}{x}$. Írjuk fel mind a két sorrendű kompozíció képletét.

Megoldás:

$$g(f(x)) = g(e^{x-1}) = e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}},$$

vagy a másik felírási móddal

$$g(f(x)) = f(x) + \frac{1}{f(x)} = e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}.$$

$$D_{g(f(x))} = \mathbb{R}$$

Hasonlóan

$$f(g(x)) = f\left(x + \frac{1}{x}\right) = e^{x + \frac{1}{x} - 1},$$

vagy

$$f(g(x)) = e^{g(x)-1} = e^{x + \frac{1}{x} - 1}.$$

$$D_{f(g(x))} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A kétfajta felírási mód közül használja az olvasó a számára természetesebbet. Mi a továbbiakban csak az egyiket adjuk meg.

12. feladat: Legyen $f(x) = x^2 + x + 2$. Határozzuk meg $f(f(x))$ képletét.

Megoldás:

$$f(f(x)) = f(x^2 + x + 2) = (x^2 + x + 2)^2 + (x^2 + x + 2) + 2 = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x + 8.$$

13. feladat: Tekintsük az $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ és a $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ függvényeket. Írjuk fel $g(f(x))$ képletét.

Megoldás:

$$g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1} - 1}{\frac{x+1}{x-1} + 1} = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1) + (x-1)} = \frac{1}{x}.$$

Noha a kompozíció általában bonyolultabb függvény, mint a külső és a belső függvény, a példánk mutatja, hogy ez fordítva is lehet.

14. feladat: Tudjuk, hogy $f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2 + 3x - 1$. Mivel egyenlő $f(x)$?

Megoldás: Az a feladatunk, hogy kifejezzük $x^2 + 3x - 1$ -et az $\frac{x}{2}$ függvényeként. Amit $\frac{x}{2}$ -vel csinálni kell, hogy belőle $x^2 + 3x - 1$ legyen, az a keresett hozzárendelési utasítás.

Mivel könnyen látható, hogy

$$x^2 + 3x - 1 = 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{x}{2}\right) - 1,$$

ezért a keresett hozzárendelési utasítás:

$$f(x) = 4x^2 + 6x - 1.$$

15. feladat: Ha $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, mivel egyenlő $f(x)$?

Megoldás: Most azt keressük, hogy mit kell az $x + \frac{1}{x}$ -szel csinálni, hogy belőle $x^2 + \frac{1}{x^2}$ legyen.

Vegyük észre, hogy

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2},$$

ahonnan

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.$$

Tehát

$$f(x) = x^2 - 2.$$

16. feladat: Bontsuk fel két függvény kompozíciójára $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ függvényt.

Megoldás: Az egyik lehetséges megoldás a következő:

Legyen $f(x) = x^2 + 1$ és $g(x) = \sqrt{x}$. Ekkor

$$h(x) = g(f(x)),$$

hiszen

$$g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

De eljárhattunk volna máshogy is.

Legyen $u(x) = x^2$ és $v(x) = \sqrt{x+1}$.

Ekkor

$$h(x) = v(u(x)),$$

hiszen

$$v(u(x)) = \sqrt{u(x)+1} = \sqrt{x^2+1}.$$

Látjuk tehát, hogy összetett függvényt általában többféleképpen lehet egyszerűbb függvények kompozíciójára bontani. Hogy a lehetőségek közül melyiket célszerű választani, azt az dönti el, hogy a továbbiakban mire akarjuk használni a felbontást.

Ez az eljárás, tehát egy összetett függvény felbontása egyszerűbb függvények kompozíciójára, a későbbiekben igen fontos lesz, és nagyon gyakran fog szerepelni.

17. feladat: Bontsuk fel a $h(x) = e^{x^3} - x$ függvényt két függvény kompozíciójára.

Megoldás: Először egy jelöléssel kapcsolatos megjegyzés. Az a^{b^c} alakú hatványoknál felmerül, hogy ez $a^{(b^c)}$, vagy $(a^b)^c$ rövidítése-e, ez a kettő ugyanis nem ugyanaz. Például $2^{(3^2)} = 2^9 = 512$, de $(2^3)^2 = 8^2 = 64$. Az a konvenció, hogy

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}.$$

Most már egy lehetséges felbontás

$$f(x) = x^3,$$

$$g(x) = e^x - \sqrt[3]{x}.$$

Ekkor valóban

$$h(x) = g(f(x)),$$

hiszen

$$g(f(x)) = g(x^3) = e^{x^3} - \sqrt[3]{x^3} = e^{x^3} - x.$$

(Az volt itt a lényeg, hogy mivel az eredeti függvényben x^3 és x is szerepel, kifejeztük az x -et x^3 -bel.)

18. feladat: Bontsuk fel az $u(x) = \sqrt{2 - \sin^2 x}$ függvényt három függvény kompozíciójára.

Megoldás: Most is több megoldás van, ezek közül talán a legtermészetesebb az alábbi.

Legyen $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = 2 - x$ és $h(x) = \sqrt{x}$.

Ekkor $u(x) = h(g(f(x)))$,

hiszen

$$h(g(f(x))) = h(g(\sin^2 x)) = h(2 - \sin^2 x) = \sqrt{2 - \sin^2 x}.$$

Ellenőrző kérdések:

6. kérdés: Legyen $f(x) = 2x - 5$. Ekkor $f\left(\frac{x}{2}\right) =$

* $x - \frac{5}{2}$.

* $x - 5$. (x)

* $2x - \frac{5}{2}$.

* $x - 10$.

7. kérdés: Legyen $f(x) = 2x + 5$. Ekkor $f\left(\frac{2}{x}\right) =$

* $\frac{1}{x} + 5$.

* $\frac{4}{x} + \frac{5}{2}$.

* $\frac{1}{x} + \frac{5}{2}$.

* $\frac{4}{x} + 5$. (x)

8. kérdés: Legyen $f(x) = 3x - 2$. Ekkor $f(f(x)) =$

* $9x - 8$. (x)

* $9x - 2$.

* $9x^2 - 8$.

* $9x^2 - 4$.

9. kérdés: Legyen $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ és $g(x) = \sqrt{x+1}$. Ekkor $g(f(x)) =$

* $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$. (x)

* $\sqrt{x - \sqrt{x} + 2}$.

* $\sqrt{2} - \sqrt{x}$.

* $\sqrt{2} - \sqrt[4]{x}$.

10. kérdés: Legyen $f(x) = \sin(1-x)$ és $g(x) = (1-x)^2$. Ekkor $g(f(x)) =$

* $\sin(1-x)^2$.

* $1 - 2\sin(1-x) + \sin^2(1-x)$. (x)

* $\sin^2(1-x)$.

* $\sin(2x-x^2)$.

11. kérdés: Ha $g(f(x)) = \sqrt{x^2-5}$ és $g(x) = \sqrt{x-5}$, akkor $f(x) =$

* $x^2 \cdot (x)$

* $x-5$.

* $(x-5)^2$.

* $x+5$.

12. kérdés: Ha $g(f(x)) = x$ és $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$, akkor $f(x) =$

* $\frac{1}{x+1}$.

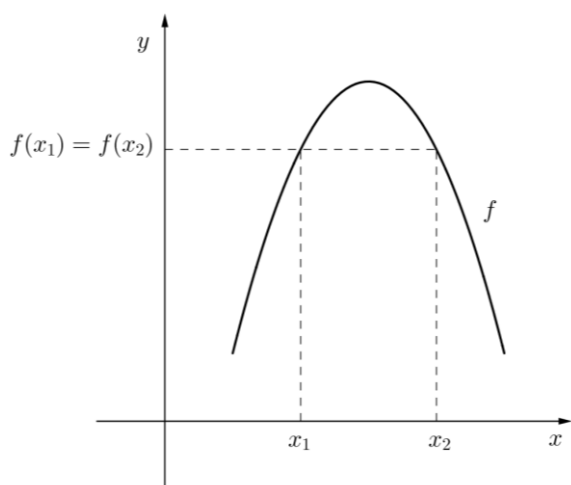
* $\frac{1}{x} + 1$.

* $\frac{1}{x-1} \cdot (x)$

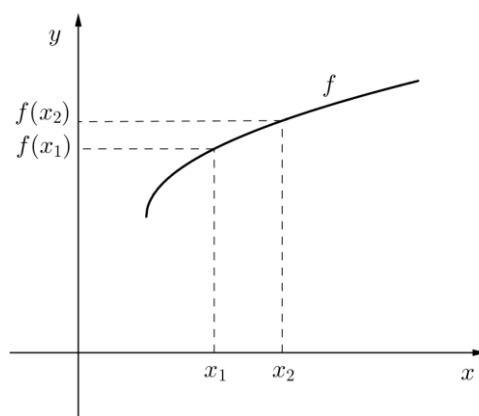
* $\frac{1}{x} - 1$.

Elméleti összefoglaló:

Definíció: Egy f függvény **kölcsönösen egyértelmű**, ha bármely $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$ (11-12. ábra).



11. ábra. Nem kölcsönösen egyértelmű függvény



12. ábra. Kölcsönösen egyértelmű függvény

Példa néhány értékre kiszámítva a fenti függvények:

$f(x) = -(x-3)^2 + 5$	$f(x) = \sqrt{x-1} + 2$
$x_1 = 2, f(x_1) = f(2) = -(2-3)^2 + 5 = 6$	$x_1 = 2, f(x_1) = f(2) = \sqrt{2-1} + 2 = 3$
$x_2 = 4, f(x_2) = f(4) = -(4-3)^2 + 5 = 6$	$x_2 = 3, f(x_2) = f(3) = \sqrt{3-1} + 2 = \sqrt{2} + 2 \approx 3,41$
$f(x_1) = f(2) = 6 = f(x_2) = f(4)$	$f(x_1) = f(2) = 3 \neq f(x_2) = f(3) \approx 3,41$

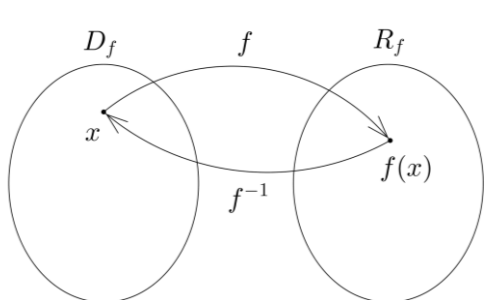
A szigorúan monoton függvények kölcsönösen egyértelmű függvények.

Definíció: Ha az f függvény kölcsönösen egyértelmű, akkor létezik f^{-1} -el jelölt **inverz függvénye**, mely az f értékkészletét képezi le az f értelmezési tartományára, tehát

$$f : D_f \rightarrow R_f$$

$$f^{-1} : R_f \rightarrow D_f$$

továbbá teljesül, hogy $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ bármely $x \in D_f$, illetve bármely $x \in D_{f^{-1}}$ esetén (13. ábra).



13. ábra. Inverz függvény definíciója

Tehát az inverz függvény értelmezési tartománya az eredeti függvény értékkészlete, és értékkészlete az eredeti függvény értelmezési tartománya.

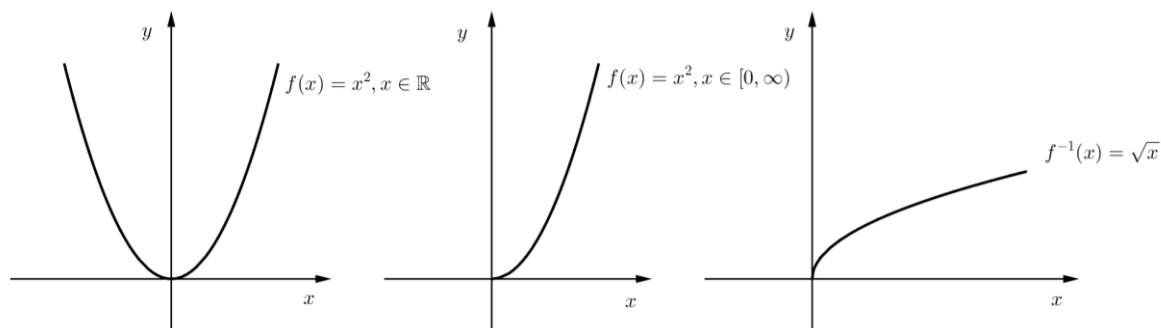
$$R_f = D_{f^{-1}} \quad D_f = R_{f^{-1}}$$

Megjegyzés: Az f^{-1} jelölés könnyen megtévesztő lehet. Ha a egy szám, akkor a^{-1} -el az $\frac{1}{a}$

reciprokot szoktuk jelölni, de az $f^{-1}(x)$ nem $\frac{1}{f(x)}$ -et jelöl.

Ha az f függvény nem kölcsönösen egyértelmű, de az értelmezési tartományának van olyan részhalmaza, ahol e feltétel teljesül, akkor az f függvény ezen a részhalmazon értelmezett leszűkítésének a definíció alapján létezik inverze.

Erre példa az $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ függvény, amely nem invertálható, de például $x \in [0, \infty)$ leszűkített intervallumon már létezik inverze (mert itt már szigorúan monoton), mely a $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ függvény lesz (14. ábra).



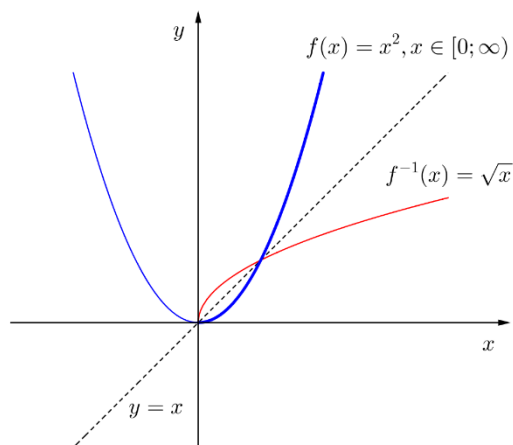
14. ábra. x^2 függvény értelmezési tartományának leszűkítése, majd invertálása

Technikailag az inverz függvény képletét az $f(x) = y$ egyenlet x -re való rendezésével lehet előállítani. Fontos még megjegyezni, hogy az inverz függvény inverze az eredeti függvény.

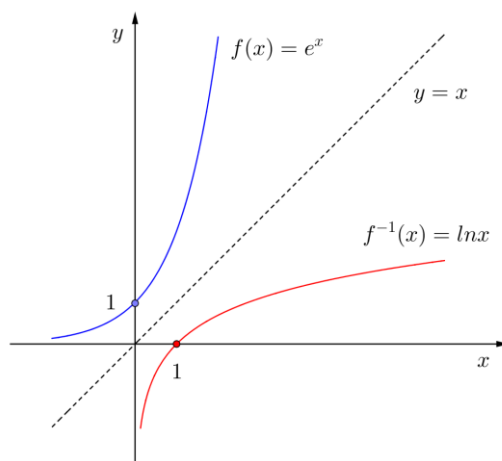
Mivel az f és f^{-1} függvényeknél az értelmezési tartomány és az értékkészlet helyet cserél, ezért a függvény ábrázolásánál a koordinátatengelyek is szerepet cserélnek. Ennek következtében az $f(x)$ és $f^{-1}(x)$ görbék egymás tükörképei, az $y = x$ egyenesre nézve.

Az elemi függvények között több függvény– inverz függvény pár található (15-17. ábra).

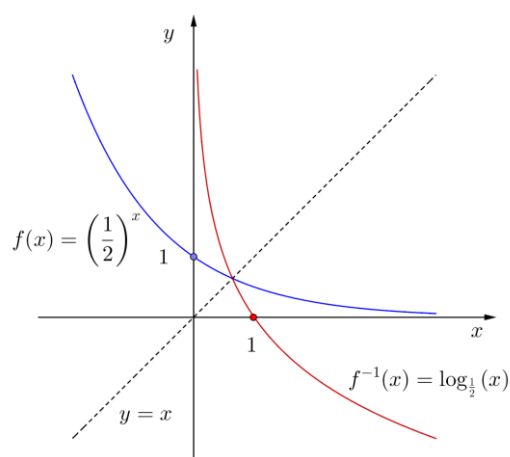
Néhány példa:



15. ábra. Hatványfüggvény és gyökfüggvény



16. ábra. Exponenciális és logaritmus függvény ($a > 1$)



17. ábra. Exponenciális és logaritmus függvény ($1 > a > 0$)

Kidolgozott feladatok:

19. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 2x - 3$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: Először az eredeti függvény értelmezési tartományát és az értékkészletét határozzuk meg, amiből az inverz függvény értelmezési tartományára és értékkészletére következtetünk, valamint megvizsgáljuk a függvény monotonitását, amiből az inverz függvény létezésére következtetünk (ahogy láttuk csak szigorúan monoton függvényeknek van inverze).

Ebben az esetben az f értelmezési tartománya a valós számok halmaza, szigorúan monoton növekvő (grafikonja egy emelkedő egyenes), értékkészlete szintén a valós számok halmaza. Így létezik az inverz függvénye és az is a valós számok halmazán van értelmezve. Az inverz függvény képletének előállításához megoldjuk az

$$y = 2x - 3$$

egyenletet x -re, hiszen most azt keressük, hogy mit kell az $y = f(x) = 2x - 3$ -al csinálni, hogy belőle visszakapjuk az x -et.

Rendezéssel azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{y + 3}{2}.$$

Ebből az inverz függvény képletét úgy kapjuk, hogy az y helyére x -et írunk, mivel a függvények argumentumát x -el szoktuk jelölni. Tehát az inverz függvény képlete:

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}.$$

20. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + 1$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: Az x^3 függvény elemi alapfüggvény, mind az értelmezési tartománya, mind az értékkészlete a valós számok halmaza, és szigorúan monoton növekvő.

Ugyanezek igazak az $x^3 + 1$ függvényre is.

Létezik tehát az inverz függvény, ami szintén minden valós számra értelmezett. Előállítjuk a képletét. Megoldjuk x -re az

$$y = x^3 + 1$$

egyenletet. Kapjuk, hogy

$$x^3 = y - 1,$$

$$x = \sqrt[3]{y - 1}.$$

Innen az inverz függvény

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}.$$

21. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{x+2}$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: Először is $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$, hiszen a nevező nem lehet nulla. Az értékkészlet meghatározása egy kicsit bonyolultabb.

Egy függvény értékkészlete azokból az y számokból áll, amelyekhez található olyan D_f -beli x , hogy $f(x) = y$.

A mi esetünkben ez azt jelenti, hogy y benne van az értékkészletben, ha megoldható x -re az

$$y = \frac{1}{x+2}$$

egyenlet. Persze csak olyan x jöhet szóba, amelyre $x \neq -2$.

Az látszik, hogy y nem lehet nulla, hiszen a törtünk számlálója soha nem nulla. De y bármely nullától különböző szám lehet. (Egy tört értéke akkor lehet 0, ha a számlálója 0. Itt a számláló 1, így a tört értéke nem lehet 0. A nevező bármilyen nullától különböző értéket felvehet, így a tört értéke (y) is bármilyen nullától különböző érték lehet.)

Ezért $R_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Az f függvény nem szigorúan monoton, de kölcsönösen egyértelmű, létezik tehát az inverz függvény. Hátra van még a képletének előállítás. Ennek érdekében megoldjuk x -re az

$$y = \frac{1}{x+2}$$

egyenletet, feltételezve, hogy $y \neq 0$, $x \neq -2$. Kapjuk, hogy

$$x = \frac{1}{y} - 2.$$

Ebből az inverz függvény

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2.$$

22. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 2^{x-1} + 3$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: A függvényünk mindenütt értelmezett és értékkészlete $R_f = (3, \infty)$, továbbá szigorúan monoton növekvő. Létezik tehát az inverz függvény. Az inverz képletének előállításához megoldjuk az

$$y = 2^{x-1} + 3$$

egyenletet, feltéve, hogy $y > 3$.

Ekkor

$$2^{x-1} = y-3,$$

majd mindkét oldal kettes alapú logaritmusát véve, és felhasználva a logaritmus egyik azonosságát ($\log_a(x^n) = n \log_a x$) azt kapjuk, hogy

$$\log_2(2^{x-1}) = \log_2(y-3),$$

$$(x-1)\log_2(2) = \log_2(y-3),$$

$$x-1 = \log_2(y-3),$$

$$x = \log_2(y-3) + 1.$$

Végül is az inverz függvény képlete

$$f^{-1}(x) = \log_2(x-3) + 1.$$

23. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = -\ln(x+7) - 3$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: A logaritmus argumentumára kell kikötést tennünk, $x+7 > 0$.

Ezt rendezve $x > -7$ kell, hogy teljesüljön, azaz $D_f = (-7, \infty)$. Ez lesz az inverz függvény értékkészlete. A logaritmus függvény értékkészlete $\mathbb{R}$, így az inverz függvény értelmezési tartománya is ez lesz.

Megoldjuk x -re az $y = -\ln(x+7) - 3$ egyenletet.

$$y+3 = -\ln(x+7)$$

$$-y-3 = \ln(x+7)$$

Mindkét oldalt e alapra emeljük és logaritmus azonosságot ($a^{\log_a b} = b$) alkalmazva kapjuk, hogy

$$e^{-y-3} = e^{\ln(x+7)}$$

$$e^{-y-3} = x+7$$

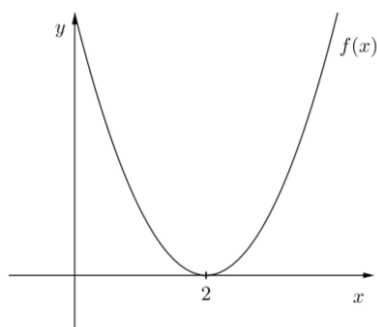
$$e^{-y-3} - 7 = x$$

Ez alapján az inverz függvény

$$f^{-1}(x) = e^{-y-3} - 7$$

24. feladat: Tekintsük az $f(x) = x^2 - 4x + 4$ függvényt. Határozzuk meg egy alkalmas megszorításának az inverz függvényét.

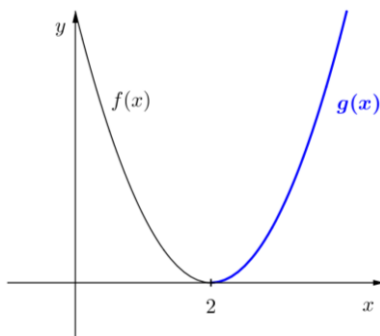
Megoldás: Az $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ felírásból látszik, hogy a függvénynek egy zérushelye van ($(x - 2)^2 = 0$ egyenlet megoldásából), mégpedig az $x = 2$ -ben. Mivel a főegyüttható pozitív, így a függvény képe egy felfelé nyíló parabola, mely a 18. ábrán látható.



18. ábra

Látszik, hogy a függvény nem szigorúan monoton az egész értelmezési tartományán, de ha megszorítjuk a kettőnél nagyobb, vagy egyenlő számokra, a megszorítás már az lesz.

Tekintsük tehát a $g(x) = x^2 - 4x + 4$, $D_g = [2, \infty)$ függvényt (mely az eredeti függvény megszorítása) (19. ábra), és ennek határozzuk meg az inverzét.



19. ábra

A 19. ábra alapján g értékkészlete $R_g = [0, \infty)$. Ez lesz az inverz értelmezési tartománya.

Megoldjuk az $y \geq 0$, $x \geq 2$ feltételek mellett x -re az

$$y = x^2 - 4x + 4 \text{ egyenletet.}$$

$$(x - 2)^2 = y,$$

$$x - 2 = \sqrt{y}, \text{ (tudjuk, hogy } x - 2 \geq 0, \text{ ezért nem kell itt } |x - 2| \text{-t írunk),}$$

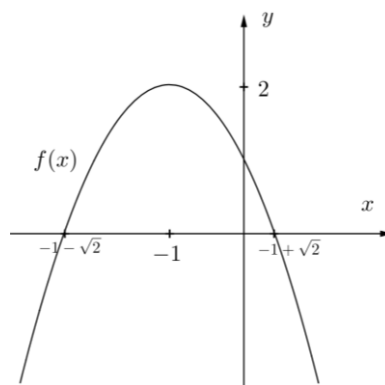
$$x = \sqrt{y} + 2.$$

A g inverz függvénye tehát

$$g^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2.$$

25. feladat: Tekintsük az $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ függvényt és alkalmas megszorításának határozzuk meg az inverzét.

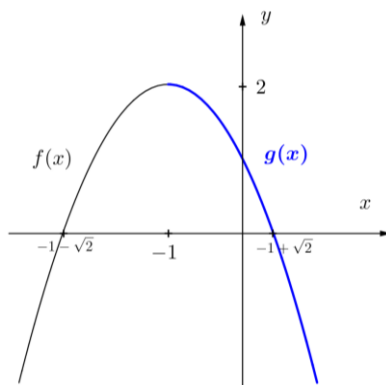
Megoldás: A függvény ábrázolásához először a megoldóképlet segítségével kiszámítjuk a gyököket: $x_1 = -1 - \sqrt{2} \approx -2,41$, $x_2 = -1 + \sqrt{2} \approx 0,41$. Ezek lesznek a függvény zérushelyei. Mivel a függvény főegyütthatója negatív, így egy lefelé nyíló parabola lesz a függvényünk grafikonja (20. ábra). A parabola csúcsának x koordinátája a gyökök átlaga, mivel azonos távolságra található a két zérushelytől. A csúcs y koordinátája pedig a függvény képletébe való helyettesítéssel kapható meg: $f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 1 = 2$. (Megjegyzés: az ábrázolás egyszerűbb módjáról a Függvény transzformációk című leckében tanulunk majd.)



20. ábra

A 20. ábra alapján látszik, hogy ha megszorítjuk a függvényünket a -1 -nél nagyobb, vagy egyenlő számokra, akkor egy szigorúan monoton csökkenő függvényt kapunk.

Tekintsük tehát a $g(x) = -x^2 - 2x + 1 = 2 - (x+1)^2$, $D_g = [-1, \infty)$ függvényt (mely az eredeti függvény megszorítása) és határozzuk meg az inverzét (21. ábra).



21. ábra

A 21. ábra alapján világos, hogy $R_g = (-\infty, 2]$.

Megoldjuk tehát az $y \leq 2$, $x \geq -1$ feltételek mellett x -re az

$$y = 2 - (x+1)^2$$

egyenletet.

$$(x+1)^2 = 2 - y,$$

$$x+1 = \sqrt{2-y},$$

(az abszolút értéket megint nem kell kitenni, hiszen a feltételek miatt $x+1 \geq 0$).

Ebből

$$x = \sqrt{2-y} - 1.$$

Ez alapján az inverz függvény

$$g^{-1}(x) = \sqrt{2-x} - 1.$$

Ellenőrző kérdések:

13. kérdés: Az $f(x) = 2 - 3x$ függvény inverz függvénye

$$* f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

$$* f^{-1}(x) = \frac{-x}{3} + \frac{2}{3}. (x)$$

$$* f^{-1}(x) = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}.$$

$$* f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$

14. kérdés: Az $f(x) = \sqrt[5]{x-1}$ függvény inverz függvénye

$$* f^{-1}(x) = x^5 + 1. (x)$$

$$* f^{-1}(x) = (x+1)^5.$$

$$* f^{-1}(x) = 1 - x^5.$$

$$* f^{-1}(x) = x^{-5} + 1.$$

15. kérdés: Az $f(x) = \frac{2}{x-1}$ függvény inverz függvénye

$$* f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + 1.$$

$$* f^{-1}(x) = \frac{2}{x} - 1.$$

$$* f^{-1}(x) = \frac{2-x}{x}.$$

$$* f^{-1}(x) = \frac{2+x}{x}. (x)$$

16. kérdés: Mi az $f(x) = e^{1-x} - 2$ függvény inverz függvénye?

$$* f^{-1}(x) = \ln(x+2) + 1.$$

$$* f^{-1}(x) = 1 + \ln(x-2).$$

$$* f^{-1}(x) = 1 - \ln(x+2). (x)$$

$$* f^{-1}(x) = \ln(1-x) + 2.$$

17. kérdés: Mi az $f(x) = 2\log_6(3x) - 4$ függvény inverz függvény-e?

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3} 6^{\frac{1}{2}y+2} \quad (x)$$

$$f^{-1}(x) = 2^{\frac{1}{2}y+2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{6^{y+4}}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3} 6^{\frac{1}{2}y} + 4$$

18. kérdés: Az $f(x) = x^2 - 6x + 10$ függvény szigorúan monoton növe az alábbi intervallumon:

$$* [3, \infty). (x)$$

$$* [-1, 4].$$

$$* (-\infty, 6).$$

$$* (-\infty, 3).$$

19. kérdés: Az $f(x) = x^2 + 4x + 2$, $D_f = [-2, \infty)$ függvény inverze az alábbi függvény:

$$* \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+2} - 2. \quad (x)$$

$$* \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2.$$

$$* \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 2.$$

$$* \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+2} + 2.$$

2. Függvénytan

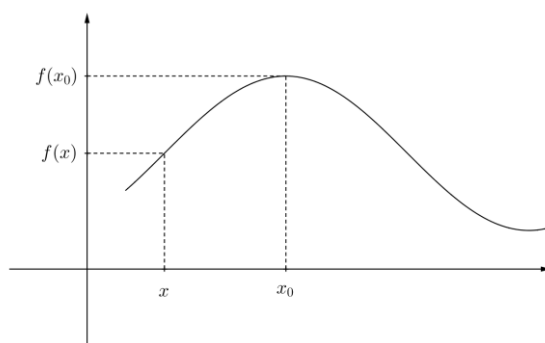
2.2. Függvény tulajdonságok, az elemi függvények és transzformáltjaik

Tanulási cél: a legfontosabb függvénytulajdonságok áttekintése, az elemi függvények ezen tulajdonságok alapján való jellemzése, az arkuszfüggvények megismerése.

Elméleti összefoglaló:

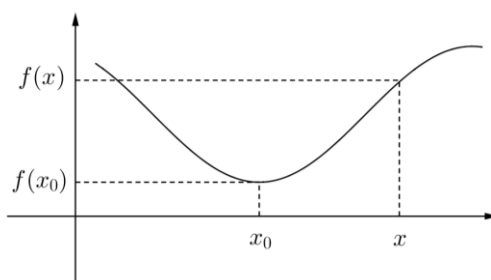
A következő részben felsoroljuk azokat a fogalmakat, amelyeket a függvények vizsgálata során a leggyakrabban használunk.

Definíció: Az f valós függvénynek az x_0 helyen **globális maximuma** van, ha az értelmezési tartományba eső minden x esetén $f(x) \leq f(x_0)$ (1. ábra).



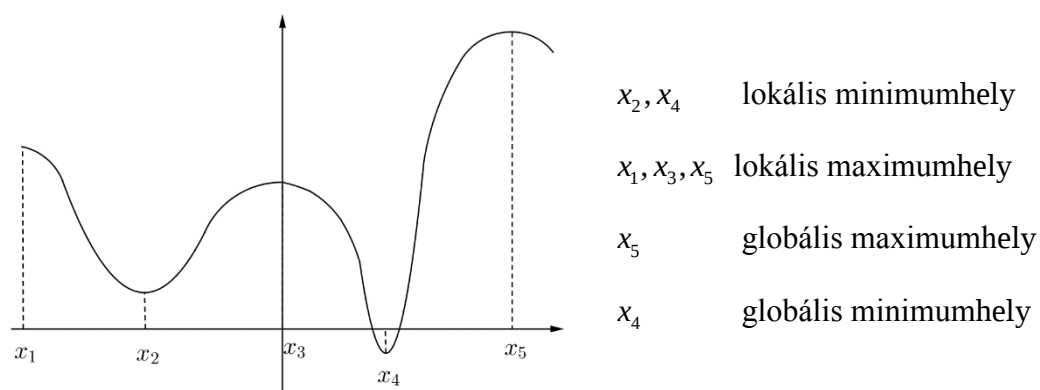
1. ábra. Globális maximum definíciója

Definíció: Az f valós függvénynek az x_0 helyen **globális minimuma** van, ha az értelmezési tartományba eső minden x esetén $f(x) \geq f(x_0)$ (2. ábra).



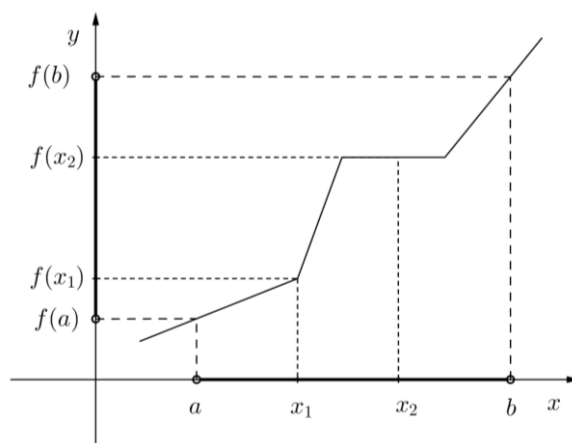
2. ábra. Globális minimum definíciója

Definíció: Az $f(x_0)$ globális maximumot és globális minimumot **globális szélsőértéknek**, az x_0 helyet pedig **globális szélsőérték helynek** nevezzük. Ha az $f(x_0)$ csak az x_0 hely valamely környezetében maximális, illetve minimális, akkor **lokális maximumról**, illetve **lokális minimumról** beszélünk, x_0 pedig lokális maximumhely, illetve lokális minimumhely, közös néven **lokális szélsőérték hely** (3. ábra).



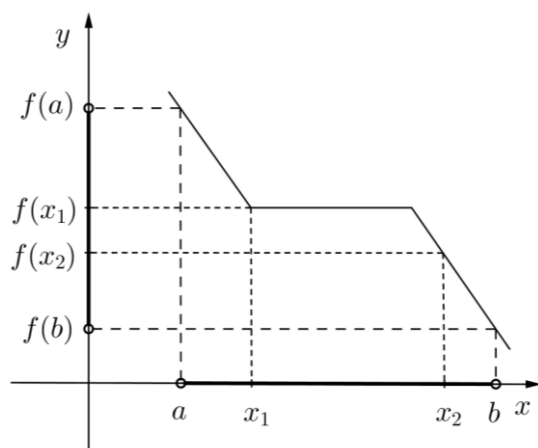
3. ábra. Példa lokális és globális szélsőértékekre

Definíció: Az f függvény **monoton nő** az $(a, b) \subset D_f$ intervallumon, ha minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ és $x_1 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$ (4. ábra).



4. ábra. Monoton növekvő függvény definíciója

Definíció: Az f függvény **monoton csökken** az $(a, b) \subset D_f$ intervallumon, ha minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ és $x_1 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) \geq f(x_2)$ (5. ábra).

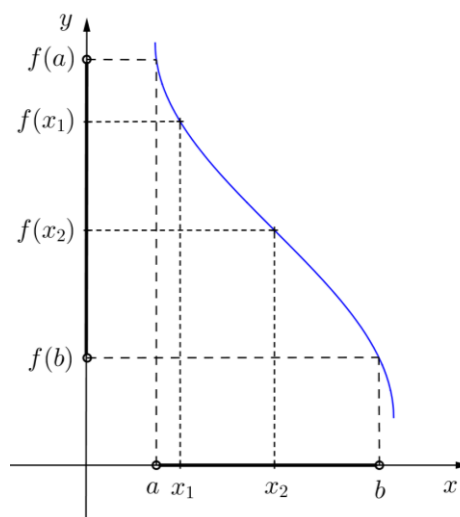
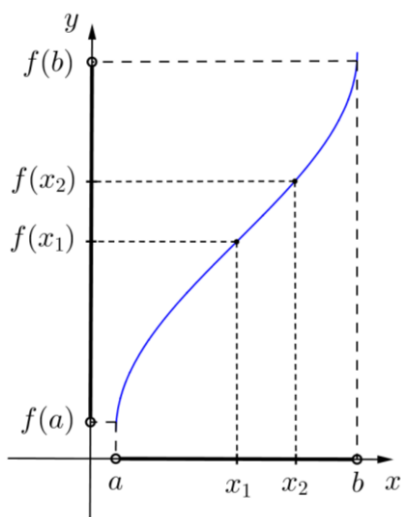


5. ábra. Monoton csökkenő függvény definíciója

Tehát a monoton növekedés (és monoton csökkenés) definíciója megengedi, hogy a függvény grafikonjában legyenek olyan szakaszok, ahol azok párhuzamosak az x tengellyel (tehát konstansok).

Definíció: Hasonlóképp fogalmazhatóak meg a függvények szigorú monotonitására vonatkozó definíciók is. Az f függvény **szigorúan monoton nő** az $(a, b) \subset D_f$ intervallumon, ha minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ és $x_1 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) < f(x_2)$ (6. ábra).

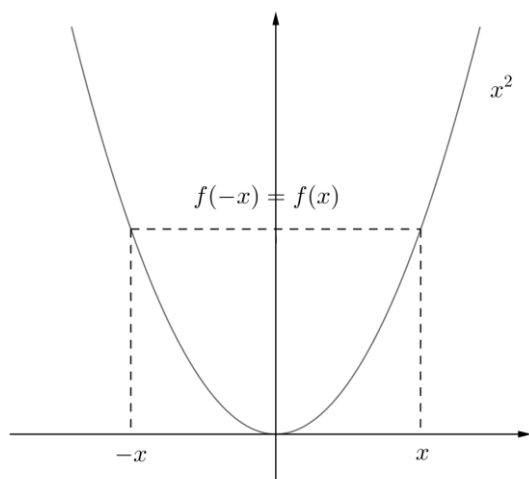
Definíció: Az f függvény **szigorúan monoton csökken** az $(a, b) \subset D_f$ intervallumon, ha minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ és $x_1 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) > f(x_2)$ (7. ábra).



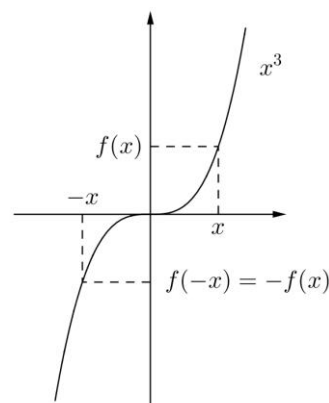
6. ábra. Szigorúan monoton növekvő függvény definíciója 7. ábra. Szigorúan monoton csökkenő függvény definíciója

Definíció: Az f függvényt **páros** függvénynek nevezzük, ha minden $x \in D_f$ esetén $-x$ is az értelmezési tartományban van és $f(-x) = f(x)$ (8. ábra).

Definíció: Az f függvényt **páratlan** függvénynek nevezzük, ha minden $x \in D_f$ esetén $-x$ is az értelmezési tartományban van és $f(-x) = -f(x)$ (9. ábra).



8. ábra. Páros függvény

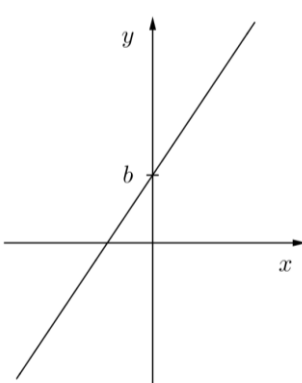


9. ábra. Páratlan függvény

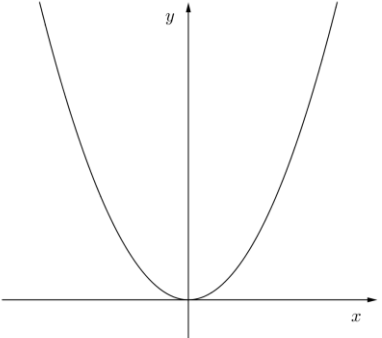
Megjegyzés: A páros függvény görbéje az y tengelyre, a páratlan függvény görbéje az origóra szimmetrikus. Az x^n (ahol n páros), $\cos x$ függvények párosak, az x^n (ahol n páratlan), $\sin x, \frac{1}{x}, \operatorname{tg} x, \arcsin x, \arctg x$ függvények páratlanok. A többi elemi függvény se nem páros, se nem páratlan.

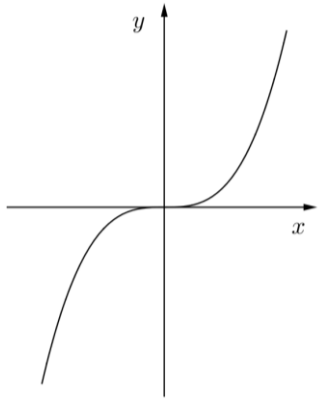
Definíció: Minden olyan x_0 érték, amelyre az f függvény helyettesítési értéke 0, azaz $f(x) = 0$, az f függvény **zérushelye**. Azaz a zérushely az f függvény x tengellyel való metszéspontjá(i)t adja meg.

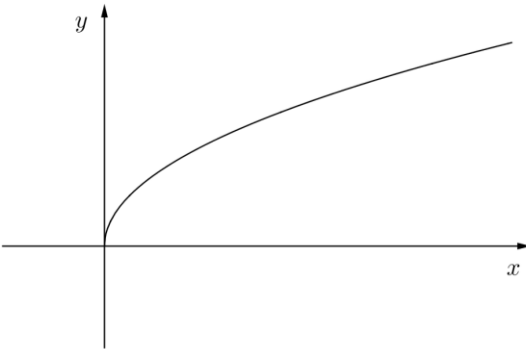
Elemi függvények

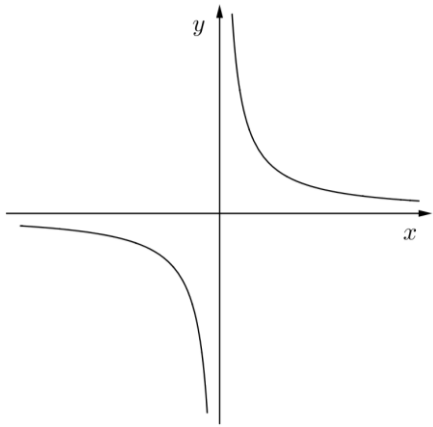
Lineáris függvény	
	$f(x) = mx + b$
	b az y tengellyel való metszéspont
	m a meredekség
	ha $m > 0$, akkor szigorúan monoton nő
	ha $m < 0$, akkor szigorúan monoton csökken
	$D_f = \mathbb{R}$
	$R_f = \mathbb{R}$
	nincs globális szélsőérték

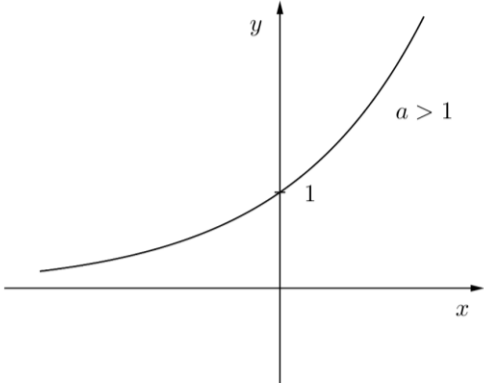
Hatványfüggvény	
	$f(x) = x^n$, n páros pozitív egész

	$D_f = \mathbb{R}$
	$R_f = \mathbb{R}$
	szigorúan monoton csökken $x \in (-\infty, 0]$ tartományon
	szigorúan monoton nő $x \in [0, \infty)$ tartományon
	globális minimum helye $x = 0$, értéke $y = 0$ páros függvény

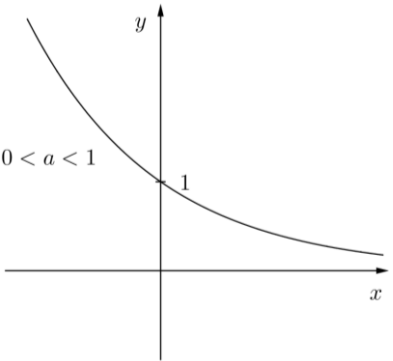
Hatványfüggvény	
	$f(x) = x^n$, n páratlan pozitív egész
	$D_f = \mathbb{R}$
	$R_f = \mathbb{R}$
	szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$ -en
	nincs globális szélsőértéke páratlan függvény

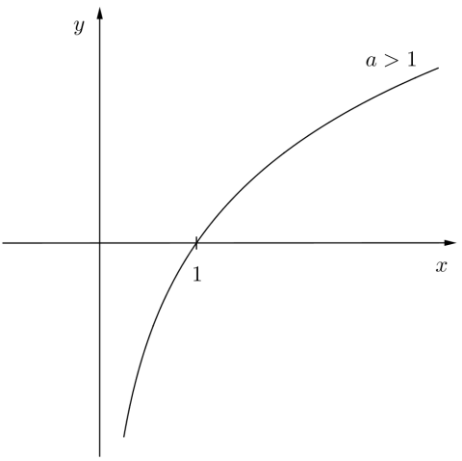
Gyökfüggvény	
	$f(x) = \sqrt[n]{x}$, n páros pozitív egész
	$D_f = [0, \infty)$
	$R_f = [0, \infty)$
	szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon
	globális minimum helye $x = 0$, értéke $y = 0$

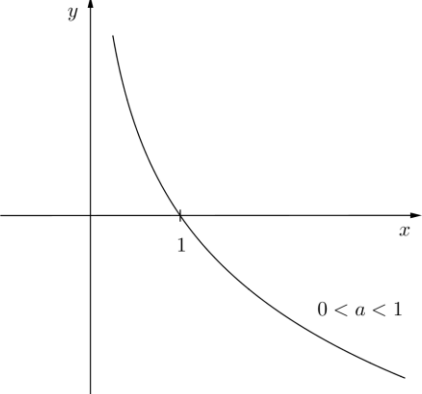
Törtfüggvény	
	$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \text{ páratlan pozitív egész}$
	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
	$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
	szigorúan monoton csökken a $(-\infty, 0)$ és a $(0, \infty)$ tartományokon
	nincs globális szélsőértéke
	páratlan függvény

Exponenciális függvény	
	$f(x) = a^x, a > 1$
	$D_f = \mathbb{R}$
	$R_f = (0, \infty)$
	szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$ -en
	nincs globális szélsőértéke
	Fontos kiemelni az e alapú exponenciális függvényt (más néven természetes alapú exponenciális függvény), ahol e egy irracionális szám, melynek értéke 2,7182818284..., jelölése: e^x .

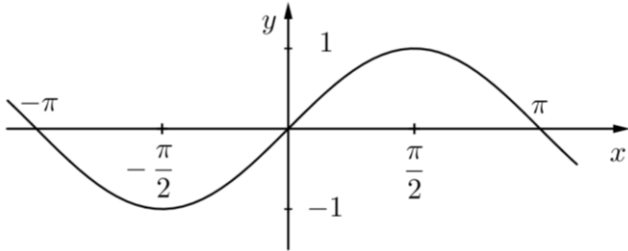
Exponenciális függvény	
	$f(x) = a^x, 0 < a < 1$
	$D_f = \mathbb{R}$
	$R_f = (0, \infty)$
	szigorúan monoton csökken $\mathbb{R}$ -en
	nincs globális szélsőértéke

	Példa: radioaktív elemek felezési ideje exponenciális függvényt követ a Föld légkörében a nyomás a magasság függvényében exponenciálisan csökken
---	---

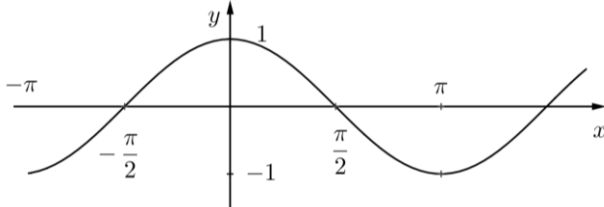
Logaritmus függvény	
	$f(x) = \log_a x, a > 1$
	$D_f = (0, \infty)$
	$R_f = \mathbb{R}$
	szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon
	nincs globális szélsőértéke Fontos kiemelni a természetes logaritmus függvényt (más néven e alapú logaritmus függvény), ahol a logaritmus alapja az exponenciális függvénynél már látott e irracionális szám. Jelölése: $\ln x$ (más jelöléssel $\log_e x$)

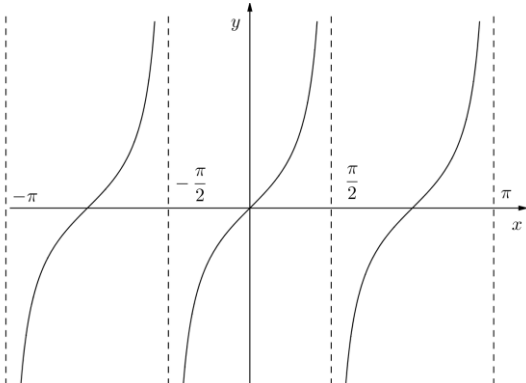
Logaritmus függvény	
	$f(x) = \log_a x, 0 < a < 1$
	$D_f = (0, \infty)$
	$R_f = \mathbb{R}$
	szigorúan monoton csökken az értelmezési tartományon
	nincs globális szélsőértéke

Színusz függvény

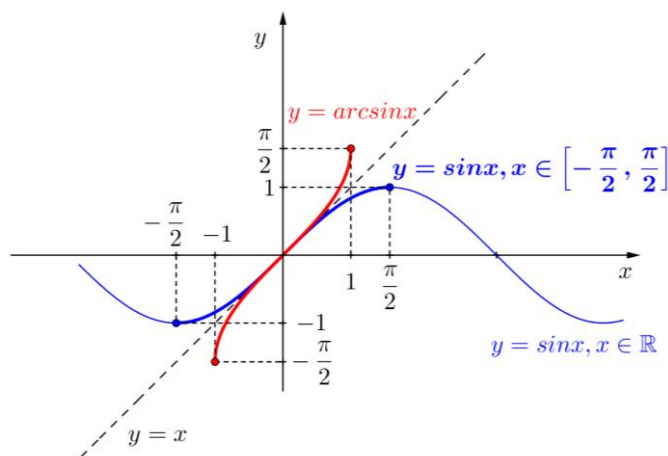
	$f(x) = \sin x$
	$D_f = \mathbb{R}$
	$R_f = [-1, 1]$
	szigorúan monoton nő a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + k2\pi$ tartományokon, $k \in \mathbb{Z}$
	szigorúan monoton csökken a $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] + k2\pi$ tartományokon, $k \in \mathbb{Z}$
	periodikus 2π szerint
	globális maximum helye $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, értéke $y = 1$
	globális minimum helye $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, értéke $y = -1$
	páratlan függvény
Példa: harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő grafikonja szinusz függvény	

Koszínusz függvény

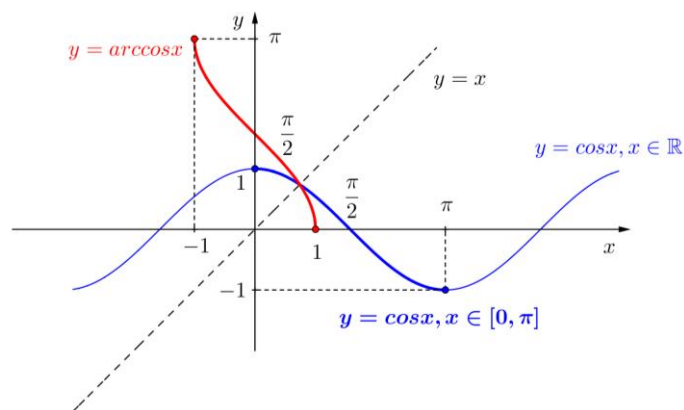
	$f(x) = \cos x$
	$D_f = \mathbb{R}$
	$R_f = [-1, 1]$
	szigorúan monoton nő a $[\pi, 2\pi] + k2\pi$ tartományokon, $k \in \mathbb{Z}$
	szigorúan monoton csökken a $[0, \pi] + k2\pi$ tartományokon, $k \in \mathbb{Z}$
	periodikus 2π szerint
	globális maximum helye $x = 0 + 2k\pi$, értéke $y = 1$
	globális minimum helye $x = \pi + 2k\pi$, értéke $y = -1$
	páros függvény
Példa: harmonikus rezgőmozgás sebesség-idő grafikonja koszinusz függvény	

Tangensfüggvény	
	$f(x) = \operatorname{tg} x$
	$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
	$R_f = \mathbb{R}$
	szigorúan monoton nő az értelmezési tartomány peiódusain
	periodikus π szerint
	páratlan függvény

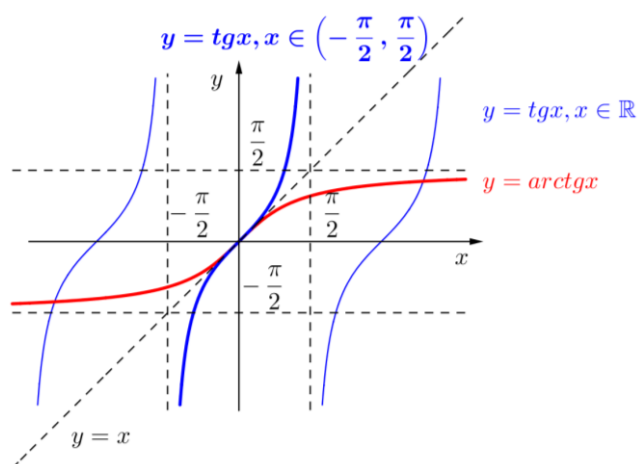
A trigonometrikus függvények periodikusak, ezért a teljes értelmezési tartományon nem invertálhatóak. Azonban a szigorúan monoton intervallumokon invertálhatóak. Az ilyen módon kapott inverz függvényeket **arkuszfüggvényeknek** (vagy ciklometrikus függvényeknek) nevezzük. Nézzük a trigonometrikus függvények értelmezési tartományának leszűkítését és invertálását ábrák segítségével (10-12. ábra). (Érdemes megfigyelní, hogy az arkuszfüggvények a trigonometrikus függvények leszűkítéséből az $y = x$ tengelyre való tükrözéssel megkaphatóak. Emlékeztető a Függvénytani alapismeretek című leckében az inverz fogalmának bevezetésekor.)



10. ábra. $\operatorname{Arcsin} x$ függvény származtatása a $\sin x$ függvényből



11. ábra. $\text{Arccos}x$ függvény származtatása a $\cos x$ függvényből

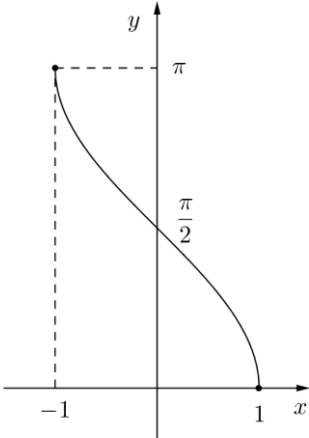


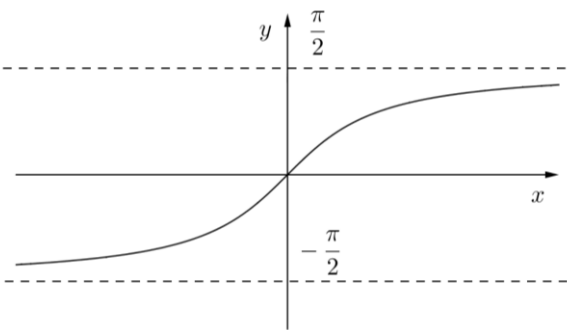
12. ábra. $\text{Arctg}x$ függvény származtatása a $\text{tg}x$ függvényből

Tekintsük át tulajdonságaikat.

Arkuszszinusz függvény	
	$f(x) = \arcsin x$
	$D_f = [-1, 1]$
	$R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
	(Érdemes megfigyelni az $\arcsin x$ függvény értelmezési tartománya, értékkészlete és a $\sin x$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete közötti összefüggést. Emlékeztető a Függvénytani alapismeretek című leckében.)
	szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon
	globális minimum

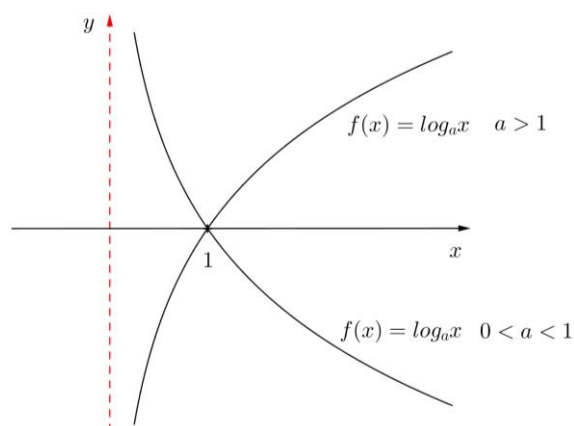
	helye $x = -1$, értéke $y = -\frac{\pi}{2}$
	globális maximum helye $x = 1$, értéke $y = \frac{\pi}{2}$
	páratlan függvény

Arkuszkoszinusz függvény	
	$f(x) = \arccos x$
	$D_f = [-1, 1]$
	$R_f = [0, \pi]$
	(Érdeemes megfigyelni az $\arccos x$ függvény értelmezési tartománya, értékkészlete és a $\cos x$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete közötti összefüggést. Emlékeztető a Függvénytani alapismeretek című leckében.)
	szigorúan monoton csökken az értelmezési tartományon
	globális minimum helye $x = 1$, értéke $y = 0$
	globális maximum helye $x = -1$, értéke $y = \pi$

Arkusztangens függvény	
	$f(x) = \arctg x$
	$D_f = \mathbb{R}$
	$R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
	(Érdeemes megfigyelni az $\arctg x$ függvény értelmezési tartománya, értékkészlete és a $\tg x$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete közötti összefüggést. Emlékeztető a Függvénytani alapismeretek című leckében.)
	szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon
	nincs globális szélsőértéke
	páratlan függvény

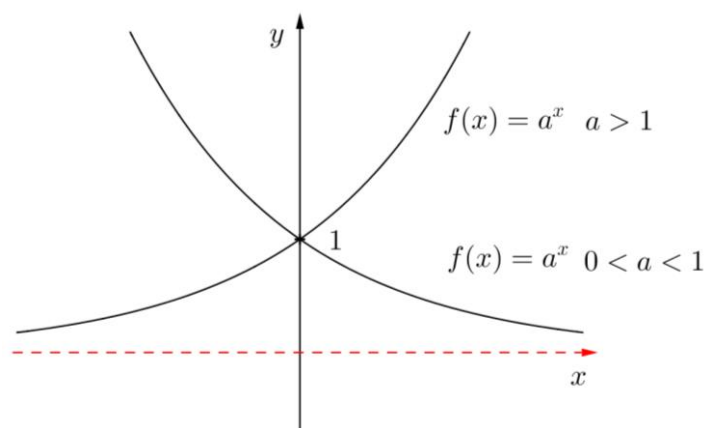
Definíció: Az **aszimptota** egy olyan görbe, többnyire egyenes, amelyet egy függvény grafikonja tetszőlegesen megközelít (hozzásimul), de soha el nem éri.

Például: Az $f(x) = \log_a x$ függvénynek függőleges aszimptotája a $x=0$ egyenletű egyenes (13. ábra).



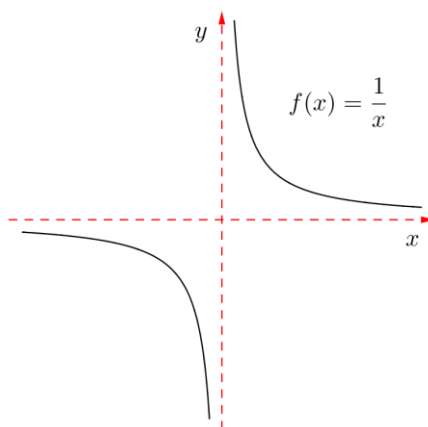
13. ábra. Logaritmus függvény függőleges aszimptotája

Az $f(x) = a^x$ függvénynek vízszintes aszimptotája az $y=0$ egyenletű egyenes (14. ábra).



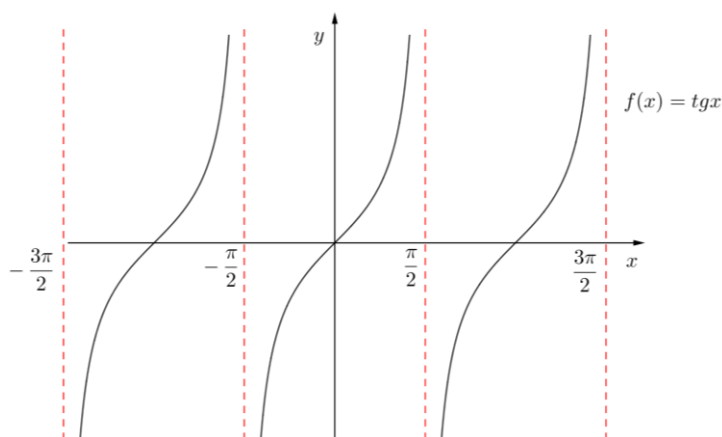
14. ábra. Exponenciális függvény vízszintes aszimptotája

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek két aszimptotája van, a függőleges $x=0$ -ban, a vízszintes aszimptota $y=0$ -ban (15. ábra).



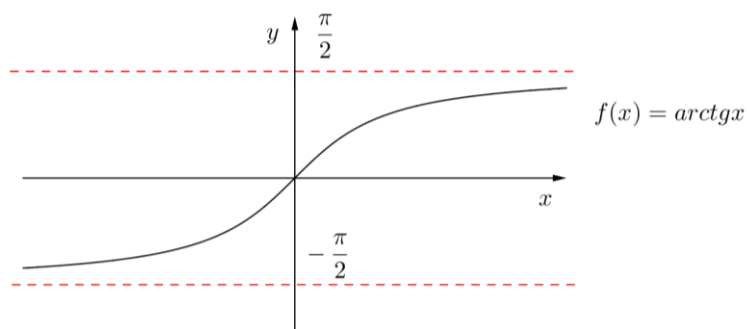
15. ábra. Tört függvény aszimptotái

Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvénynek végtelen sok függőleges aszimptotája van az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ pontokban (16. ábra).



16. ábra. Tangens függvény függőleges aszimptotái

Az $f(x) = \operatorname{arctg} x$ függvénynek két vízszintes aszimptotája van $y = -\frac{\pi}{2}$ és $y = \frac{\pi}{2}$ -ben (17. ábra).



17. ábra. Arkusztangens függvény vízszintes aszimptotái

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \arcsin(2x-5)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Az $\arcsin(x)$ függvény értelmezési tartománya a $[-1, 1]$ intervallum, tehát az argumentumra a feltétel

$$-1 \leq 2x-5 \leq 1.$$

Megoldjuk ezt a kettős egyenlőtlenséget. Az ezekre vonatkozó ekvivalens átalakítási lehetőségek hasonlóak az egyenlőségekéhez. Szabad például minden "oldalhoz" hozzáadni ugyanazt a számot. Ötöt hozzáadva minden "oldalhoz" azt kapjuk, hogy

$$4 \leq 2x \leq 6.$$

Kettővel végigosztva

$$2 \leq x \leq 3.$$

Így tehát

$$D_f = [2, 3].$$

2. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \arccos\left(\frac{3x-4}{2}\right)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Most is az a feltétel, hogy

$$-1 \leq \frac{3x-4}{2} \leq 1.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve kapjuk, hogy

$$-2 \leq 3x-4 \leq 2,$$

$$2 \leq 3x \leq 6,$$

$$\frac{2}{3} \leq x \leq 2.$$

Így végül

$$D_f = \left[\frac{2}{3}, 2\right].$$

3. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \arcsin\left(\frac{2}{x-1}\right)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Két kikötést kell tennünk, egyrészt a nevező, másrészt az arcsin miatt. Az osztás miatt a nevezőben $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

Az arcsin miatti feltétel az, hogy

$$-1 \leq \frac{2}{x-1} \leq 1.$$

Mivel a nevező nem állandó előjelű, két esetet kell vizsgálni, ha pozitív és ha negatív. (A nullát már kizártuk.)

+	-
Ha $x-1 > 0$, vagyis $x > 1$, akkor a nevezővel beszorozva az eredeti kettős egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $-(x-1) \leq 2 \leq x-1$.	Ha $x-1 < 0$, vagyis $x < 1$, akkor a nevezővel beszorozva az eredeti kettős egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $-(x-1) \geq 2 \geq x-1$. (Ha negatív számmal szorzunk megfordulnak az egyenlőtlenségek irányai.)
Ennek megoldáshalmazát jelölje H_1 .	Ennek megoldáshalmazát jelölje H_2 .
Ennek a két halmaznak az uniója adja D_f -et. $D_f = H_1 \cup H_2$	

Foglalkozzunk először H_1 meghatározásával.

Ekkor, az $x > 1$ feltételen túl, annak kell teljesülni, hogy

$$-x+1 \leq 2,$$

$$\text{azaz } x \geq -1,$$

és

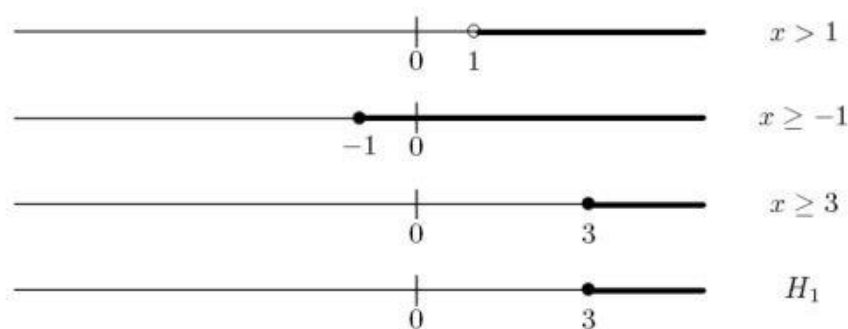
$$2 \leq x-1,$$

$$\text{azaz } x \geq 3.$$

Ez a három egyenlőtlenség egyszerre teljesül, ha $x \geq 3$, tehát

$$H_1 = [3, \infty).$$

Ezt mutatja az alábbi ábra.



H_2 esetén, az $x < 1$ feltételen túl, annak kell teljesülni, hogy

$$-x+1 \geq 2,$$

azaz $x \leq -1$,

és

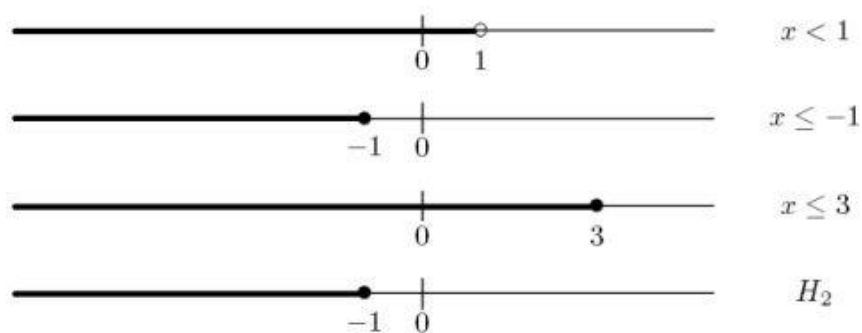
$$2 \geq x-1,$$

azaz $x \leq 3$.

Ez a három egyenlőtlenség egyszerre teljesül, ha $x < -1$, tehát

$$H_2 = (-\infty, -1).$$

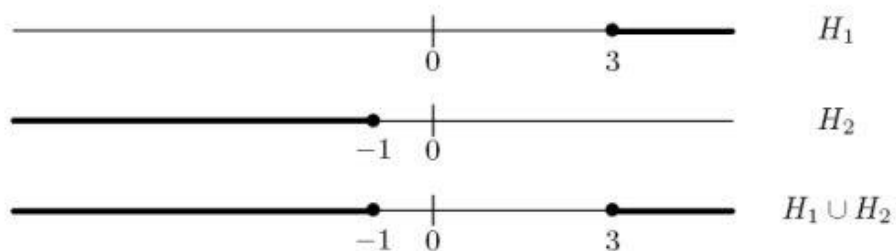
Grafikusan mindez.



Ezek alapján végül

$$D_f = H_1 \cup H_2 = (-\infty, -1] \cup [3, \infty).$$

Az unió grafikus előállítását mutatja az alábbi ábra.



4. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{\arcsin(3x) - 4}{2}$ függvény inverzét.

Megoldás: Mivel az $\arcsin x$ függvény szigorúan monoton függvény az értelmezési tartományán (az $\arcsin(x)$ függvény értelmezési tartománya $[-1;1]$, míg az $\arcsin(3x)$ függvény értelmezési tartománya $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$), így van inverz függvénye. Rendezzük a következő egyenletet x -re.

$$y = \frac{\arcsin(3x) - 4}{2}$$

$$2y = \arcsin(3x) - 4$$

$$2y + 4 = \arcsin(3x)$$

Mindkét oldalnak vesszük a szinuszt:

$$\sin(2y + 4) = \sin(\arcsin(3x)).$$

Mivel az inverz függvény inverzét vesszük a jobb oldalon, így a jobb oldal:

$$\sin(2y + 4) = 3x,$$

$$\text{amiből } \frac{\sin(2y + 4)}{3} = x.$$

Felcserélve a változókat kapjuk, hogy

$$y = \frac{\sin(2x + 4)}{3},$$

amiből az inverz függvény

$$f^{-1} = \frac{\sin(2x + 4)}{3}.$$

5. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 7 - 4\arctg(x+1)$ függvény inverzét.

Megoldás: Mivel az $\arctg x$ függvény szigorúan monoton függvény $\mathbb{R}$ -en, így van inverz függvénye. Rendezzük a következő egyenletet x -re.

$$y = 7 - 4\arctg(x+1)$$

$$y - 7 = -4\arctg(x+1)$$

$$\frac{y - 7}{-4} = \arctg(x+1)$$

Mindkét oldalnak vesszük a tangensét:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{y-7}{-4}\right) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+1))$$

Mivel az inverz függvény inverzét vesszük a jobb oldalon, így a jobb oldal:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{y-7}{-4}\right) = x+1,$$

amiből $\operatorname{tg}\left(\frac{y-7}{-4}\right) - 1 = x$.

Felcserélve a változókat kapjuk, hogy

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x-7}{-4}\right) - 1,$$

amiből az inverz függvény

$$f^{-1} = \operatorname{tg}\left(\frac{x-7}{-4}\right) - 1.$$

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Az $f(x) = \arcsin\left(\frac{2-x}{3}\right)$ értelmezési tartománya

$[-1, 5]$. (X)

$(-1, 5)$.

$[1, 5]$.

$[-5, -1]$.

2. kérdés: Az $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{1-x}\right)$ függvény értelmezési tartománya

$(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$. (X)

$[0, 2]$.

$(-2, 0)$.

$[2, \infty)$.

3. kérdés: Mi az inverz függvénye az $f(x) = 1 - \frac{\arccos(4x)}{2}$ függvénynek?

$$f^{-1} = \frac{\cos(2x+2)}{4}.$$

$$f^{-1} = 2 \cos(4x) - 2.$$

$$f^{-1} = \frac{1}{4} \cos(2-2x) \quad . \text{ (X)}$$

$$f^{-1} = \frac{\cos(x-1)}{2}.$$

4. kérdés: Az inverz függvénye az $f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{x}{5}\right) + 6$ függvénynek

$$f^{-1} = 5 \operatorname{tg}(x-6) - 5.$$

$$f^{-1} = \frac{\operatorname{tg}(x-6)}{5} - 1.$$

$$f^{-1} = \frac{\operatorname{tg}(x-6) - 1}{5}.$$

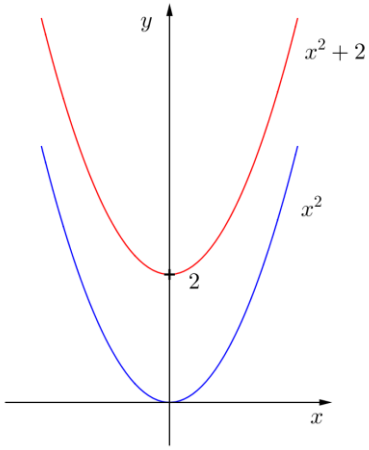
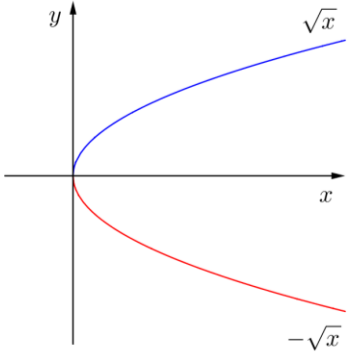
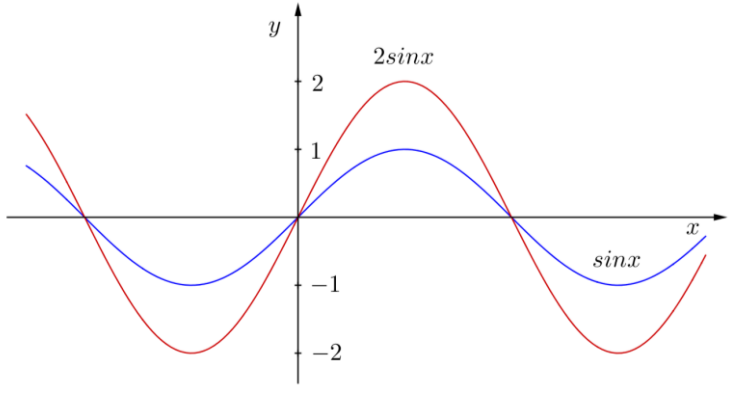
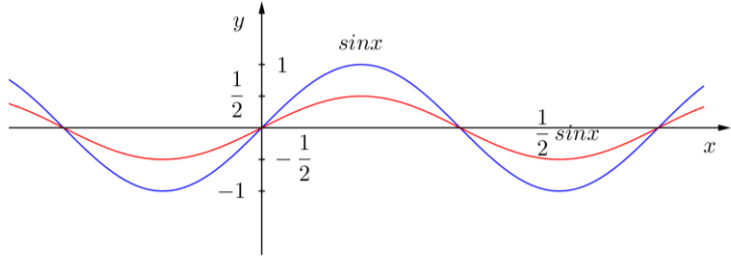
$$f^{-1} = 5 - 5 \operatorname{tg}(x-6) \quad . \text{ (X)}$$

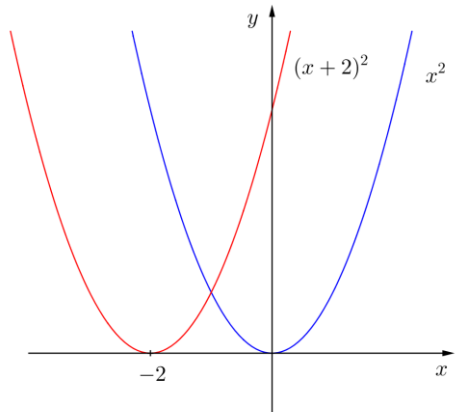
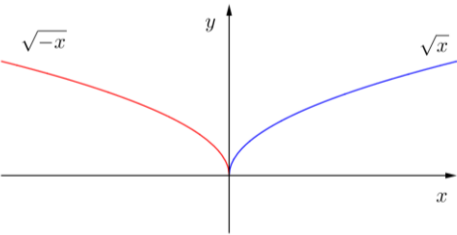
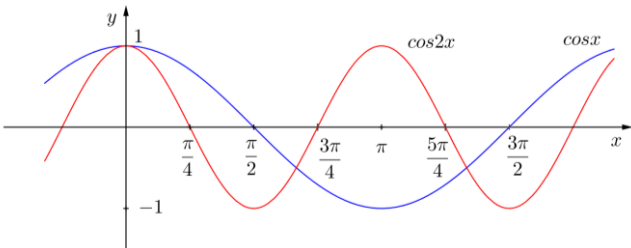
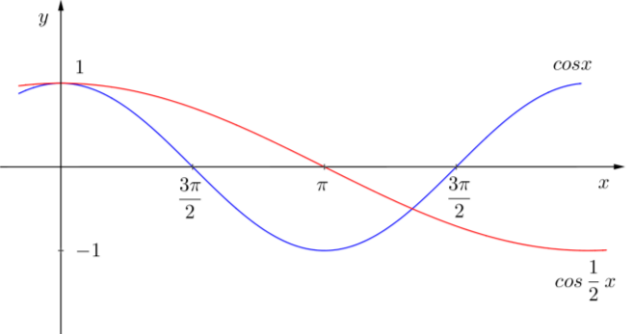
Elméleti összefoglaló:

Sokszor egy-egy függvény ábráját egy már ismert elemi függvény görbéjéből eltolással, tükrözéssel, nyújtással vagy zsugorítással, azaz transzformációval kapjuk meg.

Tekintsük át a leggyakrabban előforduló függvény transzformációkat, s azok hatását a függvénygörbére.

	Transzformált függvény	Transzformáció hatása a függvénygörbére	
--	---------------------------	---	--

Érték transzformáció	$f(x) + a$	eltolás a -val az y tengely irányában a előjelének megfelelően	
	$-f(x)$	tükrözés x tengelyre	
	$cf(x)$ $c > 1$	y tengely irányú c -szeres nyújtás	
	$cf(x)$ $0 < c < 1$	y tengely irányú c -szeres zsugorítás	

Változó transzformáció	$f(x+a)$	eltolás a -val x tengely mentén a előjelével ellentétes irányban	
	$f(-x)$	tükrözés y tengelyre	
	$f(cx)$ $c > 1$	x tengely irányú $\frac{1}{c}$ -szeres zsugorítás	
	$f(cx)$ $0 < c < 1$	x tengely irányú $\frac{1}{c}$ -szeres nyújtás	

Érdemes megjegyezni, hogy ha egy függvény esetében több transzformációt kell elvégezni, akkor először a változó transzformációkat, majd az érték transzformációkat kell elvégezni. A változó transzformációk az értelmezési tartományra, míg az érték transzformációk az értékkészletre hatnak, s azt változtatják meg.

Korábbi leckében láttuk, hogy a függvényekkel különféle műveleteket lehet végezni. Gyakran előfordul, hogy két függvény (f és g) összegét, különbségét, szorzatát vagy hányadosát kell ábrázolni, azaz

$$y = f(x) + g(x), \quad y = f(x) - g(x), \quad y = f(x)g(x), \quad y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

egyenletű görbéket. Ilyenkor az f és g függvények azonos x értékhez tartozó y értékeit kell összeadni, kivonni, szorozni vagy osztani. Nézzünk minden műveletre egy példát. Legyen $f(x) = \sin x$ $g(x) = x$.

Általában néhány nevezetes pontban vett helyettesítési érték kiszámításával felrajzolható a jelleggörbe.

Nézzünk néhány konkrét x -re kiszámolva a helyettesítési értékeket

ha $x = 0$, akkor $y = f(0) + g(0) = \sin 0 + 0 = 0$

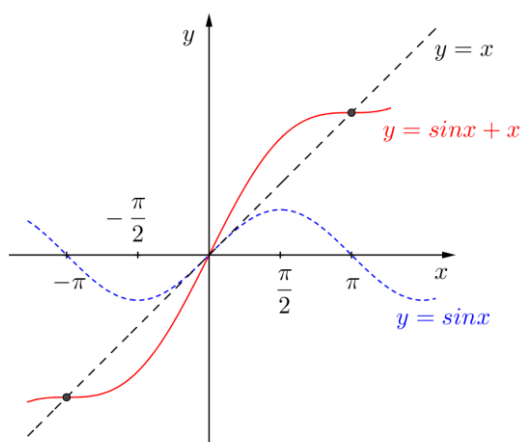
ha $x = \frac{\pi}{2}$, akkor $y = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \approx 1 + 1,57 \approx 2,57$

ha $x = \pi$, akkor $y = f(\pi) + g(\pi) = \sin \pi + \pi \approx 3,14$

ha $x = -\frac{\pi}{2}$, akkor $y = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \approx -2,57$

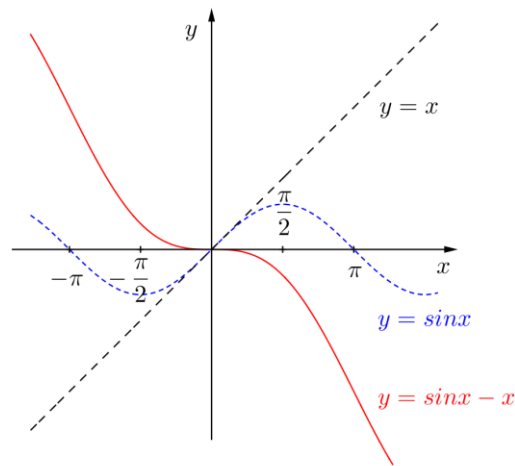
ha $x = -\pi$, akkor $y = f(-\pi) + g(-\pi) = \sin(-\pi) - \pi \approx -3,14$

Ábrázoljuk az eredeti függvényeket és a kiszámolt néhány helyettesítési érték alapján az összeg függvényt (18. ábra).



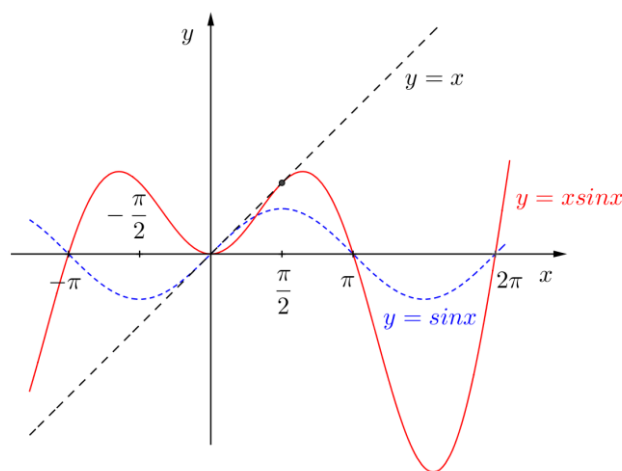
18. ábra. $f(x) = \sin x + x$ függvény ábrája

Hasonlóan az előző feladathoz, néhány helyettesítési érték kiszámolásával felrajzolható a jelleggörbe. A függvények különbségekor az f és g függvények azonos x értékhez tartozó y értékeit kell kivonni egymásból (19. ábra).



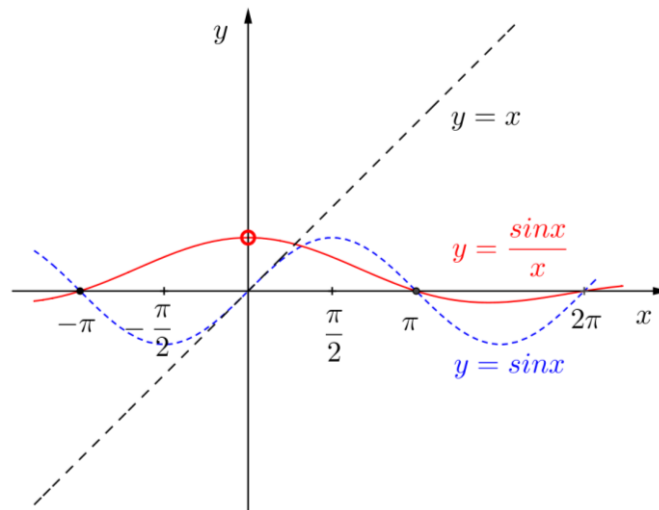
19. ábra. $f(x) = \sin x - x$ függvény ábrája

A függvények szorzatakor az f és g függvények azonos x értékhez tartozó y értékeit kell összeszorozni egymással (20. ábra).



20. ábra. $f(x) = x \sin x$ függvény ábrája

A függvények hányadosa esetében az f és g függvények azonos x értékhez tartozó y értékeit kell egymással elosztani (21. ábra).



21. ábra. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ függvény ábrája

Vizsgáljuk meg az értelmezési tartományokat.

$$f(x) = \sin x \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = x \quad D_g = \mathbb{R}$$

Korábban láttuk, hogy a függvényekkel végzett műveletek esetén az új értelmezési tartomány az eredeti függvények értelmezési tartományainak metszete.

Így $D_{f+g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$, s hasonlóan $D_{f-g} = \mathbb{R}$, $D_{fg} = \mathbb{R}$. A két függvény hányadosa esetében viszont a $g(x) \neq 0$, azaz $x \neq 0$. Ennek megfelelően $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mely a 21. ábrán is látható.

Két függvény szorzatára gyakorlati példa a csillapított rezgést leíró függvény. A valóságban a testek ritkán végeznek időben állandósult harmonikus rezgőmozgást, mivel a rugó által kifejtett visszatérítő erőn kívül is hat még fékező erő (ez lehet súrlódás, közegellenállás).

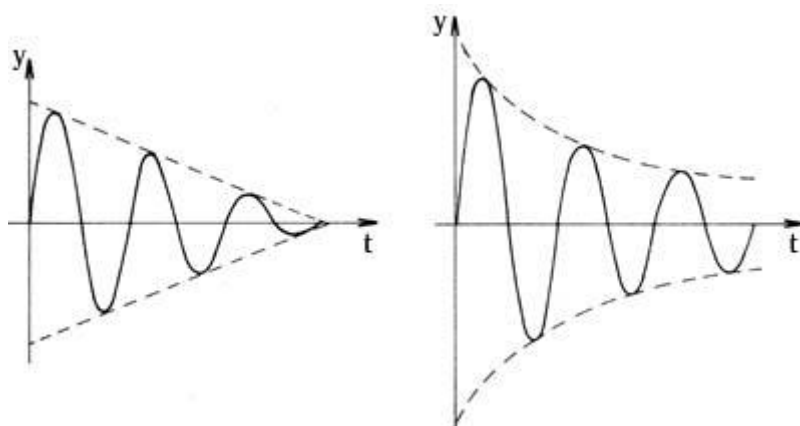
A csillapított rezgőmozgást leíró egyenlet megoldása nem túl nagy csillapítás esetén ($\beta < \omega_0$)

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega' t + \varphi_0),$$

ahol $\beta = \frac{k}{2m}$, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, ω_0 saját-körfrekvencia, A amplitúdó, φ_0 kezdőfázis.

Itt egy exponenciális és egy szinusz függvény szorzata adja a csillapított rezgőmozgást leíró függvényt.

Súrlódásos csillapítás esetén az amplitúdók egy egyenesre illeszkednek, míg közegellenállásos csillapításkor a maximum kitérés az idővel exponenciálisan csökken (22. ábra).



22. ábra. Súrlódásos és közegellenállásos csillapítás esetében a rezgőmozgás

Kidolgozott példák:

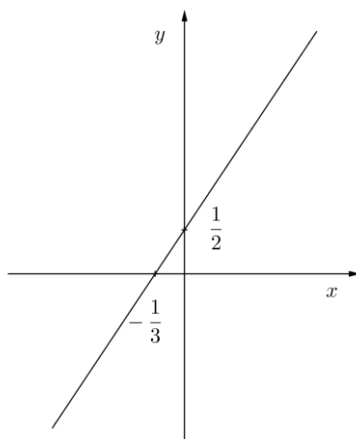
6. feladat: Ábrázolja az $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ függvényt.

Megoldás: Függvényábrázoláskor érdemes először az értelmezési tartományt megvizsgálni a tanult módon, s az ábrázolást követően pedig ellenőrizni, hogy az ábra valóban megfelel az értelmezési tartomány miatt tett kikötéseknek. Ebben az esetben a lineáris függvény értelmezési tartományára nem kell kikötést tenni, a függvény a teljes $\mathbb{R}$ -en értelmezve van.

Az ábrázolás előtt egy átalakítást kell elvégezni

$$f(x) = \frac{3x+1}{2} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Ebből az alakból már látható, hogy egy lineáris egyenes lesz a függvény képe. Az x együtthatója adja a meredekséget ($m = \frac{3}{2}$), és a konstans tag pedig, hogy hol metszi a függvény az y tengelyt (y tengely menti eltolás pozitív irányba $\frac{1}{2}$ -el). Ezek alapján a függvényt a 23. ábra mutatja.

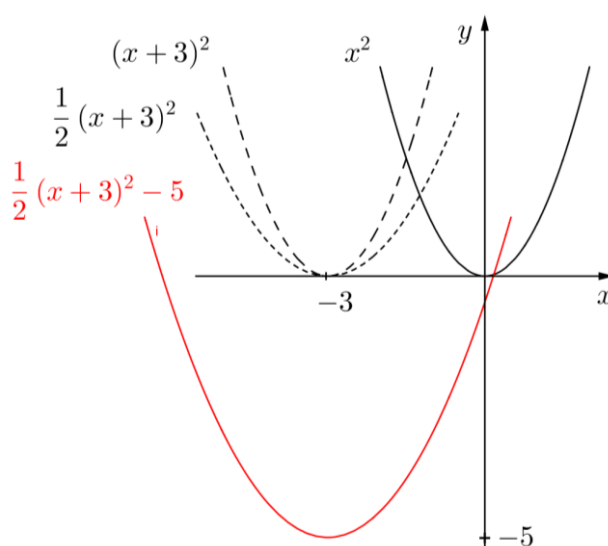


23. ábra. $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ függvény ábrája

7. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 5$ függvényt.

Megoldás: A másodfokú függvény értelmezési tartományára nem kell kikötést tenni, a függvény a teljes $\mathbb{R}$ -en értelmezve van. A függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. x^2
2. $(x+3)^2$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén 3-mal balra eltoljuk)
3. $\frac{1}{2}(x+3)^2$ (Az előző görbét az y tengely mentén felére zsugorítjuk)
4. $\frac{1}{2}(x+3)^2 - 5$ (Az előző görbét az y tengely mentén negatív irányba 5-tel eltoljuk) (24. ábra)



24. ábra. Függvény transzformáció több lépésben

8. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ függvényt.

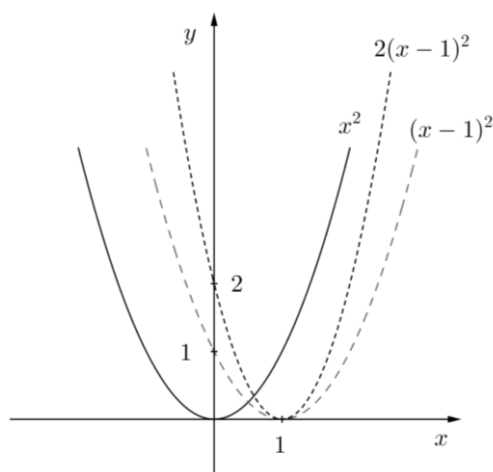
Megoldás: A másodfokú függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. Ez a másodfokú függvény az előző függvény felírásától abban különbözik, hogy nem olvashatóak le róla közvetlenül a függvény transzformációs lépések (a függvényben több helyen szerepel az x változó). Ehhez először teljes négyzetté kell alakítanunk:

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 6 = -2(x^2 - 2x - 3) = -2((x-1)^2 - 4) = -2(x-1)^2 + 8$$

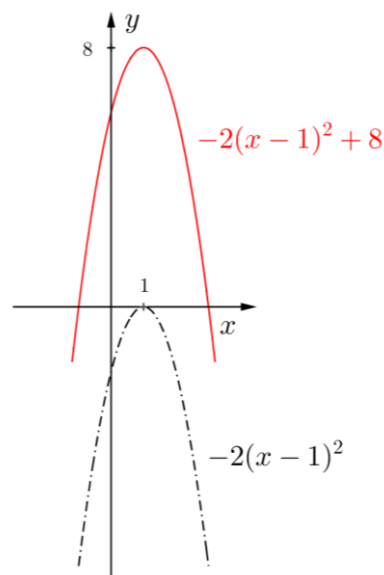
Ez alapján a függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. x^2

2. $(x-1)^2$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén 1-el jobbra eltoljuk)
3. $2(x-1)^2$ (Az előző görbét az y tengely mentén kétszeresére nyújtjuk)
4. $-2(x-1)^2$ (Az előző görbét az x tengelyre tükrözzük)
5. $-2(x-1)^2 + 8$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 8-al eltoljuk) (25-26. ábra)



25. ábra. Függvény transzformáció első három lépése



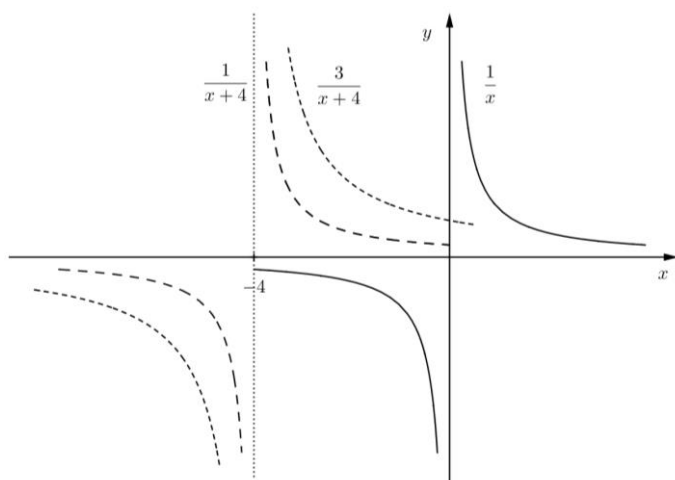
26. ábra. Függvény transzformáció utolsó két lépése

9. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = 2 - \frac{3}{x+4}$ függvényt, majd az ábráról olvassa le, hogy hol van a függvénynek aszimptotája.

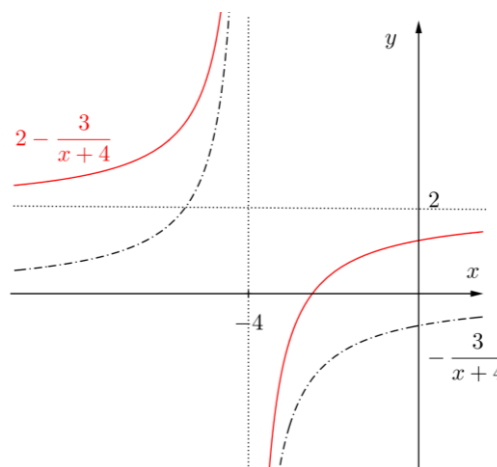
Megoldás: A törtfüggvény esetében a nevezőre kikötést kell tennünk, mégpedig a nevező nem lehet 0, azaz $x+4 \neq 0$, amiből $x \neq -4$. Tehát az értelmezési tartomány $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. A függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. $\frac{1}{x}$
2. $\frac{1}{x+4}$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén 4-el balra eltoljuk)
3. $\frac{3}{x+4}$ (Az előző görbét az y tengely mentén háromszorosára nyújtjuk)
4. $-\frac{3}{x+4}$ (Az előző görbét az x tengelyre tükrözzük)
5. $2 - \frac{3}{x+4}$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 2-vel eltoljuk) (27-28. ábra)

Az 28. ábrán jól látszik, hogy a függvény valóban nincs az $x = -4$ -ben értelmezve, függőleges aszimptotája van ott. Valamint vízszintes aszimptotát látunk az $y = 2$ -ben.



27. ábra. Függvény transzformáció első három lépése



28. ábra. Függvény transzformáció utolsó két lépése

10. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ függvényt.

Megoldás: A törtfüggvény esetében a nevezőre itt is kikötést kell tennünk, mégpedig a nevező nem lehet 0, azaz $x-3 \neq 0$, amiből $x \neq 3$. Tehát az értelmezési tartomány $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

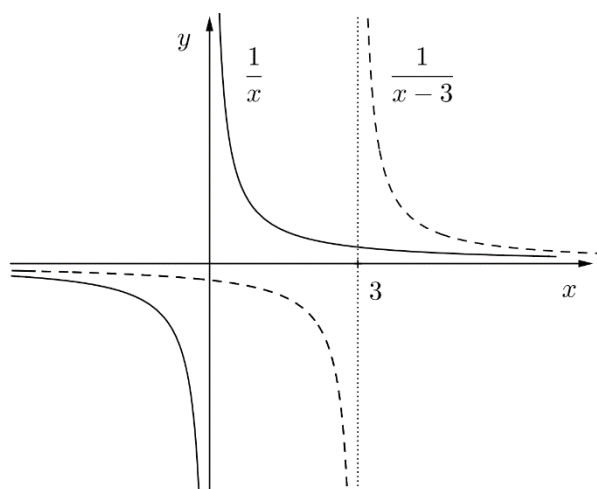
Ez a tört függvény az előző függvény felírásától abban különbözik, hogy nem olvashatóak le róla közvetlenül a függvény transzformációs lépések (a függvényben több helyen szerepel az x változó). Ehhez először a következő átalakításokra van szükség (a nevezőt kialakítjuk a számlálóban, majd egyszerűsítünk):

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3} = \frac{(x-3)+5}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{5}{x-3} = 1 + \frac{5}{x-3}$$

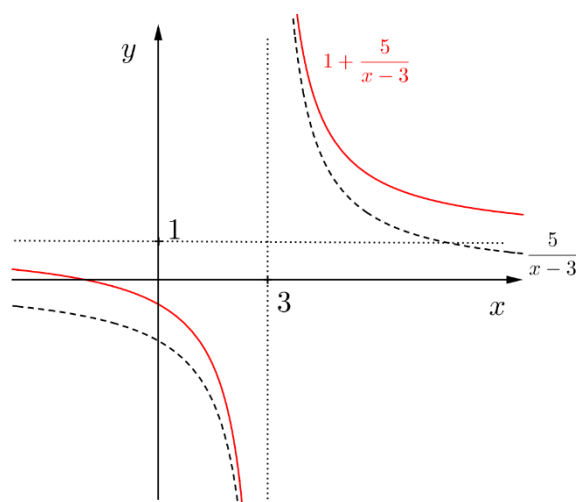
Erről a felírásból már egyértelműen leolvashatóak a függvény transzformációs lépések, melyeket a következő sorrendben érdemes elvégezni:

1. $\frac{1}{x}$
2. $\frac{1}{x-3}$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén 3-al jobbra eltoljuk)
3. $\frac{5}{x-3}$ (Az előző görbét az y tengely mentén ötszörösére nyújtjuk)
4. $1 + \frac{5}{x-3}$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 1-el eltoljuk) (29-30. ábra)

A 30. ábrán jól látszik, hogy a függvény valóban nincs az $x=3$ -ban értelmezve, függőleges aszimptotája van ott.



29. ábra. Függvény transzformáció első három lépése



30. ábra. Függvény transzformáció utolsó két lépése

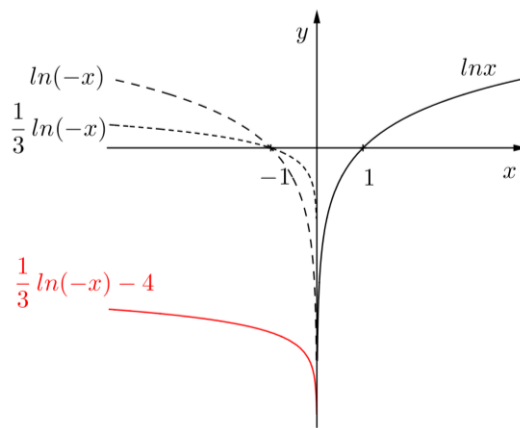
11. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = \frac{1}{3} \ln(-x) - 4$ függvényt.

Megoldás: A logaritmus függvény argumentumára kikötést kell tennünk, mégpedig az argumentumnak 0-nál nagyobbaknak kell lennie, azaz $-x > 0$, amiből $x < 0$. Tehát az értelmezési tartomány $x \in (-\infty, 0)$.

A logaritmus függvény ábrázolásakor mindig meg kell néznünk a logaritmus alapját, mert az alap határozza meg a függvény monotonitását. Itt a logaritmus alapja e , ami 1-nél nagyobb ($e \approx 2,71$), így a logaritmus függvény ebben az esetben szigorúan monoton növekvő lesz. A függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. $\ln(x)$
2. $\ln(-x)$ (Az alapfüggvényt az y tengelyre tükrözzük)
3. $\frac{1}{3} \ln(-x)$ (Az előző görbét az y tengely mentén $\frac{1}{3}$ -szorosára zsugorítjuk)
4. $\frac{1}{3} \ln(-x) - 4$ (Az előző görbét az y tengely mentén negatív irányba 4-el eltoljuk) (31. ábra)

A 31. ábrán jól látszik, hogy a függvény valóban csak negatív értékekre van értelmezve, s az $x=0$ -ban függőleges aszimptotája van.



31. ábra. Függvény transzformáció több lépésben

12. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = -5\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + 1$ függvényt. Hol metszi a függvény az y tengelyt?

Megoldás: Az exponenciális függvény értelmezési tartományára nem kell kikötést tennünk, így a függvény a teljes $\mathbb{R}$ -en értelmezve van.

Az exponenciális függvény esetében is hasonlóan a logaritmus függvényhez mindig meg kell vizsgálnunk az alapot, mert az alap itt is meghatározza a függvény monotonitását. Ebben az esetben az exponenciális kifejezés alapja $\frac{1}{3}$, ami 1-nél kisebb, de 0-nál nagyobb, így az exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő lesz.

A függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^x$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén felére zsugorítjuk)
3. $5\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ (Az előző görbét az y tengely mentén ötszörösére nyújtjuk)
4. $-5\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ (Az előző görbét az x tengelyre tükrözzük)
5. $-5\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + 1$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 1-el eltoljuk) (32. ábra)

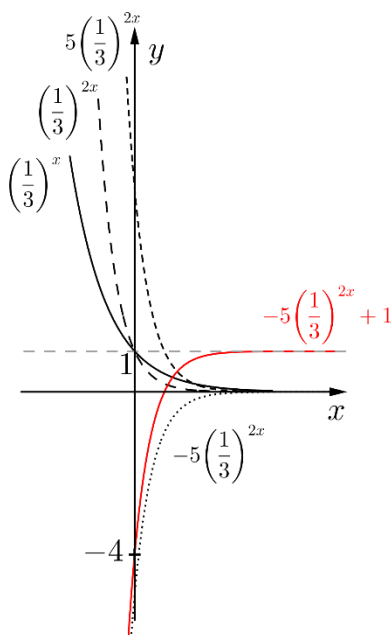
A 32. ábráról leolvasható, hogy a függvény az $y = -4$ -ben metszi az y tengelyünket. Ez egyszerűen megkapható, ha az eredeti függvénybe az x helyére 0-at helyettesítünk. (Másképp is végiggondolható, hogy miért. Az alapfüggvény az $y = 1$ -ben metszi az y tengelyt. A 2. transzformációs lépés ezt a metszéspontot nem változtatja, míg a következő lépésben az

ötszörösét kell venni, azaz felkerül a metszéspont az $y = 5$ -be. A tükrözés során $y = -5$ -be kerül, s az utolsó lépésben 1-et hozzáadva $y = -4$ -et kapunk.)

Egy lépéssel kevesebbet is végezhetünk volna, ha egy hatványazonosságot alkalmazunk az ábrázolás előtt, mégpedig

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^x = \left(\frac{1}{9}\right)^x.$$

Ezzel az átalakítással a második transzformációs lépés kihagyható, s alapfüggvényként az $\left(\frac{1}{9}\right)^x$ kerül ábrázolásra, a többi lépés megegyezik az előzővel.



32. ábra. Függvény transzformáció több lépésben

13. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = \sqrt{3x+6} + 5$ függvényt. Az ábráról olvassuk le a globális szélsőértéket.

Megoldás: A gyökfüggvény esetében a gyök alatti kifejezésnek nemnegatívnak kell lennie, azaz $3x+6 \geq 0$, amiből $x \geq -2$. Tehát az értelmezési tartomány $x \in [-2, \infty)$.

Az ábrázolás előtt az argumentumon átalakítást kell végezni a következőképp

$$f(x) = \sqrt{3x+6} + 5 = \sqrt{3(x+2)} + 5$$

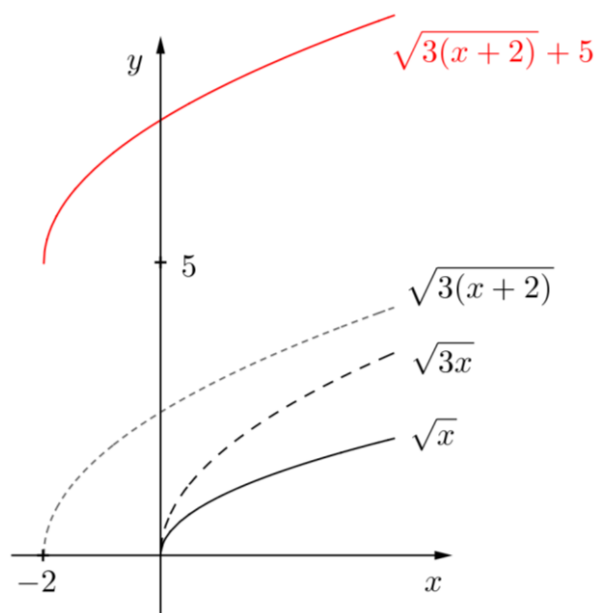
Ezt követően már leolvashatóak a függvény transzformációs lépések:

1. $\sqrt{x}$
2. $\sqrt{3x}$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén harmadára zsugorítjuk)

3. $\sqrt{3(x+2)}$ (Az előző görbét az x tengely mentén 2-vel balra eltoljuk)
4. $\sqrt{3(x+2)} + 5$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 5-el eltoljuk) (16. ábra)

A 33. ábrán jól látszik, hogy a függvény valóban csak az $x \geq -2$ értékekre van értelmezve.

A 33. ábráról leolvassva a globális minimum helye $x = -2$, értéke $y = 5$. (Egyszerűen végiggondolható, hogy miért. Az alapfüggvénynek az origóban van globális minimuma. Az első transzformációs lépés nem változtat ezen, a következő viszont eltolja balra 2-vel, azaz átkerül az $x = -2, y = 0$ -ba. Az utolsó transzformáció során a felfelé tolással az y értéke változik a minimumnak, így lesz a minimum helye $x = -2$, értéke $y = 5$.)



33. ábra. Függvény transzformáció több lépésben

14. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = \frac{1}{2} \cos(2x + \pi) - 1$ függvényt.

Megoldás: A koszinusz függvény értelmezési tartományára nem kell kikötést tennünk, így az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$.

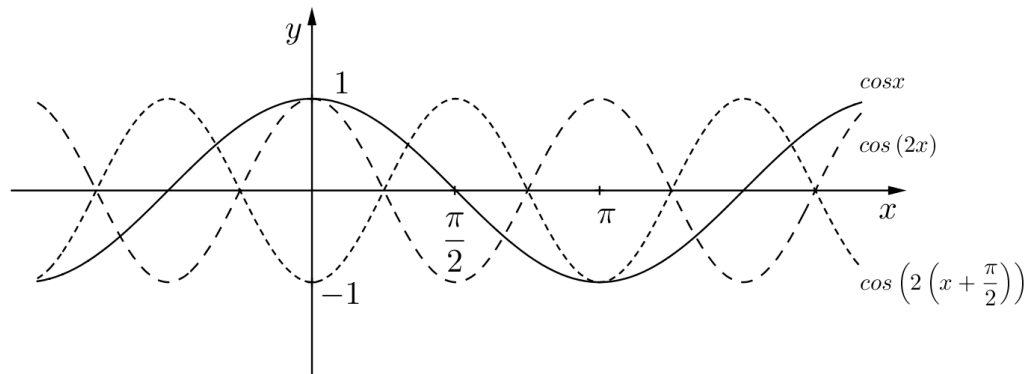
Az ábrázolás előtt itt is az argumentumon átalakítást kell végezni a következőképp

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos(2x + \pi) - 1 = \frac{1}{2} \cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 1$$

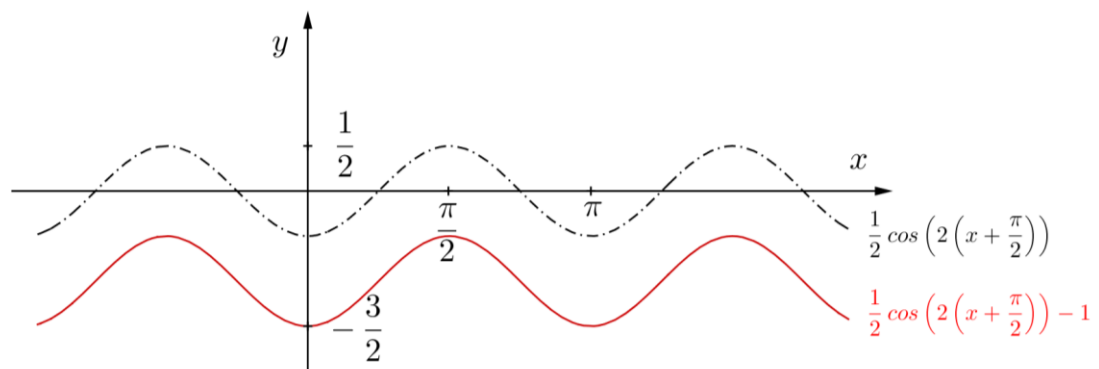
A függvényt ilyen alakban már a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. $\cos x$
2. $\cos 2x$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén felére zsugorítjuk)

3. $\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ (Az előző görbét az x tengely mentén $\frac{\pi}{2}$ -vel balra eltoljuk)
 4. $\frac{1}{2}\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ (Az előző görbét az y tengely mentén felére zsugorítjuk)
 5. $\frac{1}{2}\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 1$ (Az előző görbét az y tengely mentén negatív irányba 1-el eltoljuk)
- (34-35. ábra)



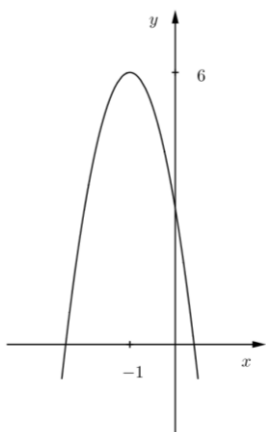
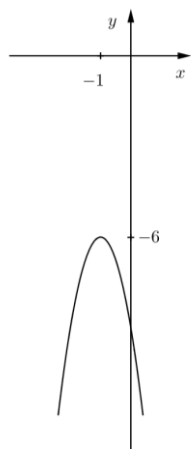
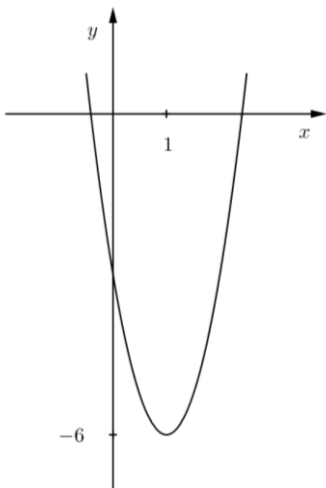
34. ábra. Függvény transzformáció első három lépése

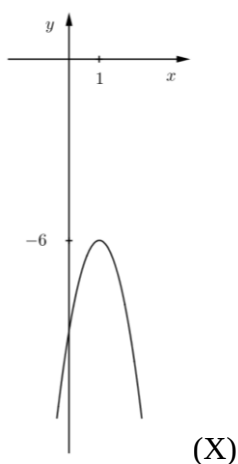


35. ábra. Függvény transzformáció utolsó két lépése

Ellenőrző kérdések:

5. **feladat:** Melyik ábra tartozik az $f(x) = -3x^2 + 6x - 9$ függvényhez?





6. feladat: Hol van globális szélsőértéke az $f(x) = 4(x-5)^2 - 1$ függvénynek?

lokális maximum helye $x = 5$, értéke $y = 1$

lokális minimum helye $x = 5$, értéke $y = -1$ (X)

lokális minimum helye $x = -1$, értéke $y = -5$

lokális maximum helye $x = -1$, értéke $y = 5$

7. feladat: Hol van aszimptotája az $f(x) = 8 + \frac{2}{x-4}$ függvénynek?

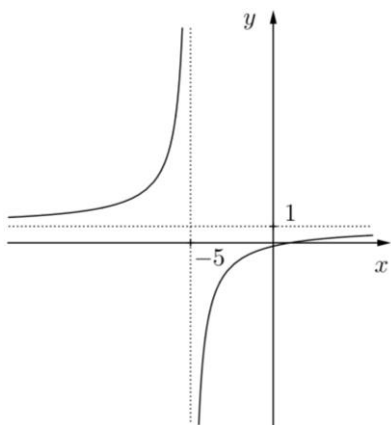
$x = 4$ -ben függőleges aszimptotája, $y = 8$ -ban vízszintes aszimptotája (X)

$x = -4$ -ben függőleges aszimptotája, $y = 8$ -ban vízszintes aszimptotája

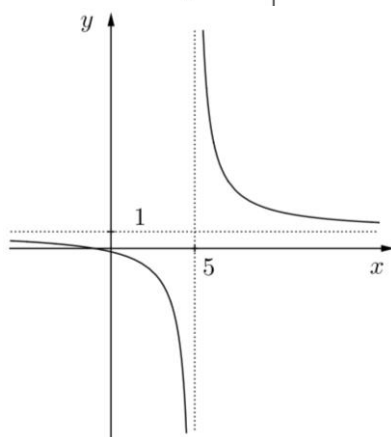
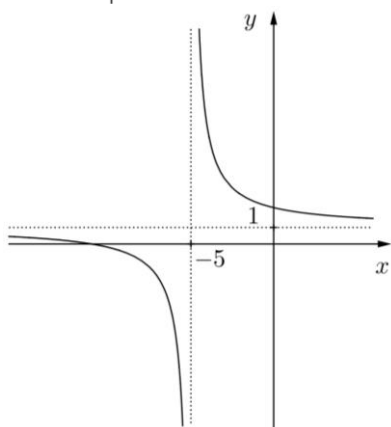
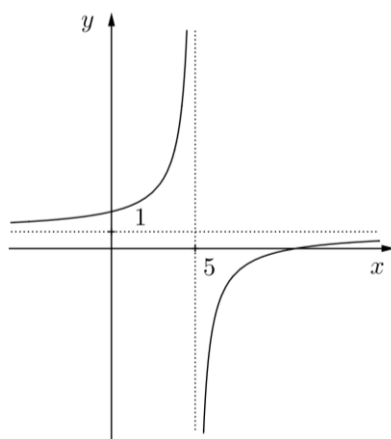
$x = 4$ -ben függőleges aszimptotája, $y = -8$ -ban vízszintes aszimptotája

$x = -4$ -ben függőleges aszimptotája, $y = -8$ -ban vízszintes aszimptotája

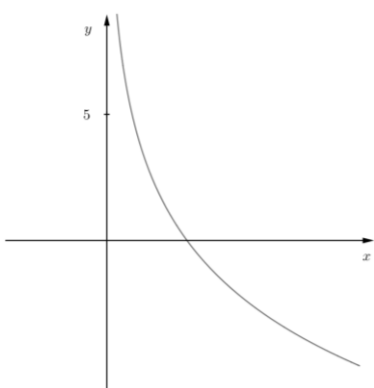
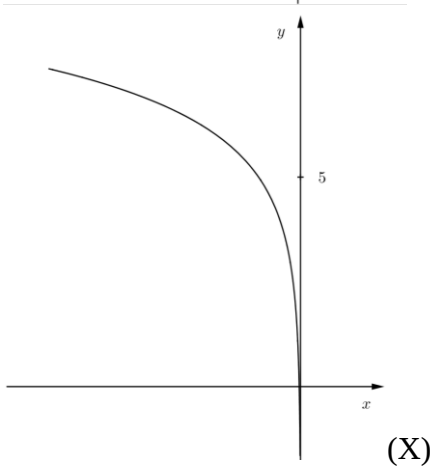
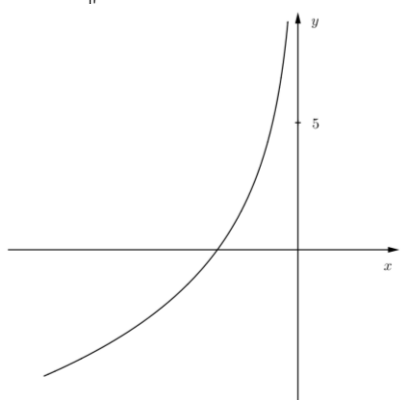
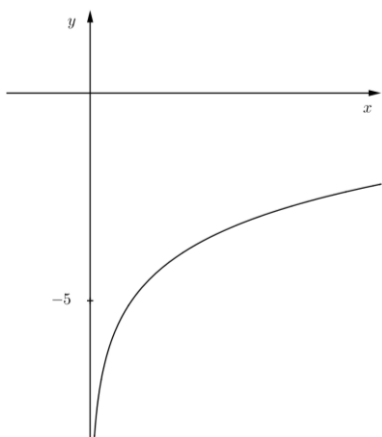
8. feladat: Melyik ábra tartozik az $f(x) = \frac{x-1}{x+5}$ függvényhez?



(X)



9. **feladat:** Melyik ábra tartozik az $f(x) = 3\log_2(-x) + 5$ függvényhez?



10. feladat: Hol metszi az $f(x) = 4e^{-2x}$ függvény az y tengelyt?

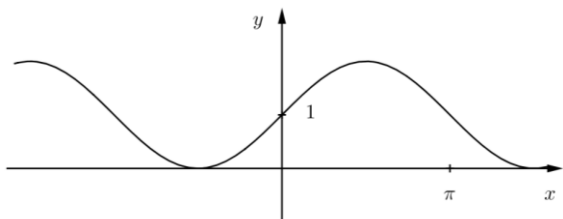
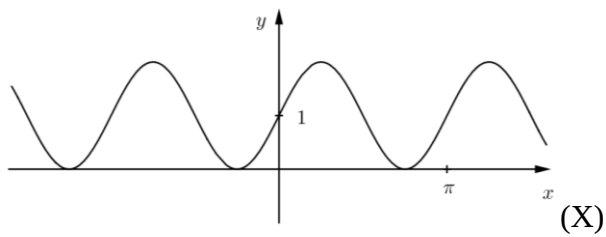
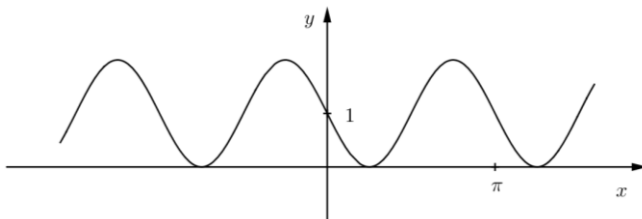
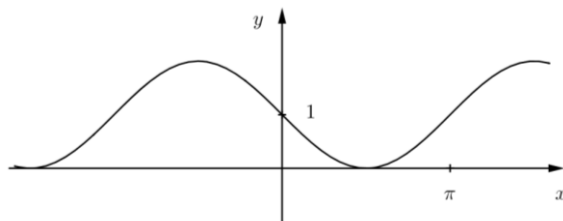
$$y = 2$$

$$y = -2$$

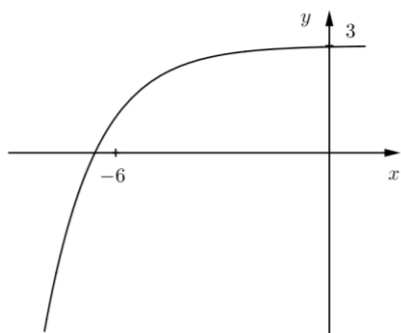
$$y = 4 \quad (\text{X})$$

$$y = -4$$

11. feladat: Melyik ábra tartozik az $f(x) = \sin(2x - 2\pi) + 1$ függvényhez?

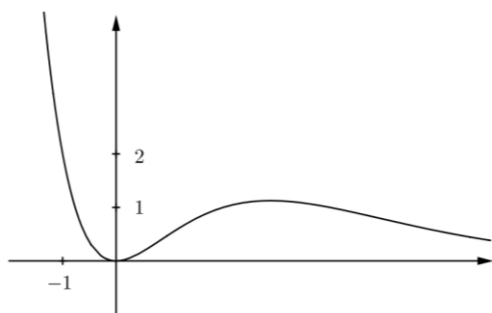
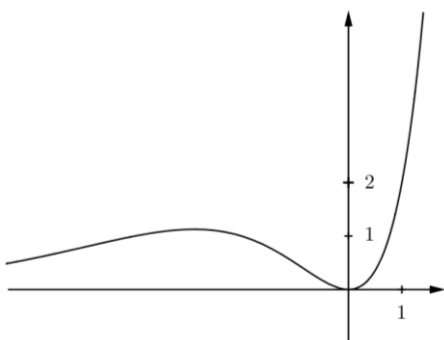


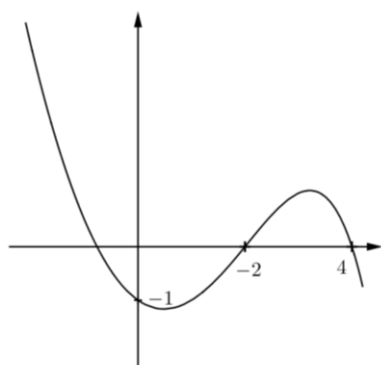
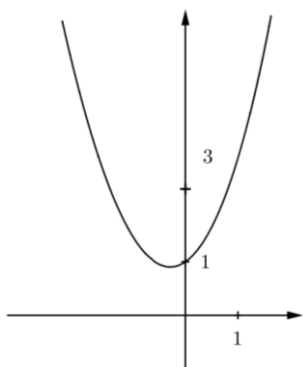
12. feladat: Melyik hozzárendelési szabály tartozik a következő függvényábrához?



- $f(x) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}$
- $f(x) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}$ (X)
- $f(x) = 3 - 2^{x+5}$
- $f(x) = 3 - 2^{x-5}$

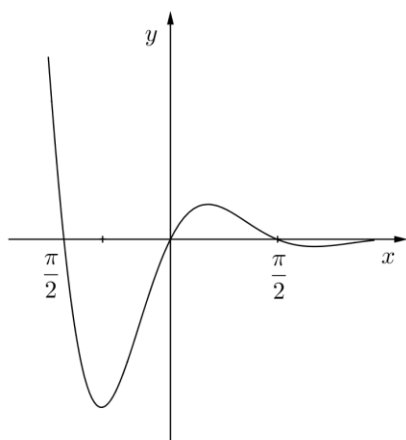
13. feladat: Melyik ábra tartozik az $f(x) = x^2 - 2^x$ függvényhez?





(X)

14. feladat: Melyik hozzárendelési utasítás tartozik a következő függvény ábrájához?



$$f(x) = e^{-x} \sin 2x \quad (\text{X})$$

$$f(x) = e^{-x} + \sin 2x$$

$$f(x) = e^x - \sin 2x$$

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{e^x}$$

2. Függvénytan

2.3. Számsorozatok, függvények határértéke, folytonossága

Tanulási cél: megismerni a határérték fogalmát, begyakorolni határértékek kiszámolását.

Követelmények

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha

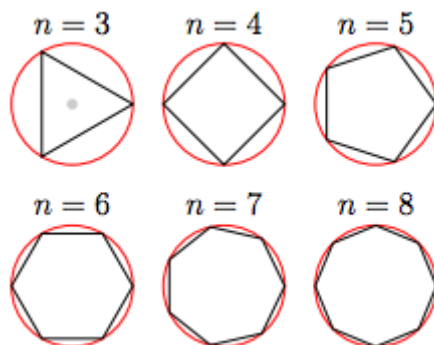
- ismeri a különböző fajta határértékek intuitív fogalmát,
- képes függvény grafikonjáról határértékek leolvasására,
- ismeri a számsorozat fogalmát,
- ismeri a számsorozat határértékének fogalmát,
- képes konvergens sorozat esetén küszöbindex meghatározására,
- ismeri a monotonitás fogalmát,
- képes megvizsgálni egy sorozat monotonitását,
- ismeri a sorozatok határértékével kapcsolatos tételeket,
- képes sorozatok határértékének meghatározására
- ismeri a függvényhatárértékek szabatos definícióját,
- ismeri a függvények határértékével kapcsolatos tételeket,
- képes függvények határértékeinek meghatározására.

Kulcsfogalmak

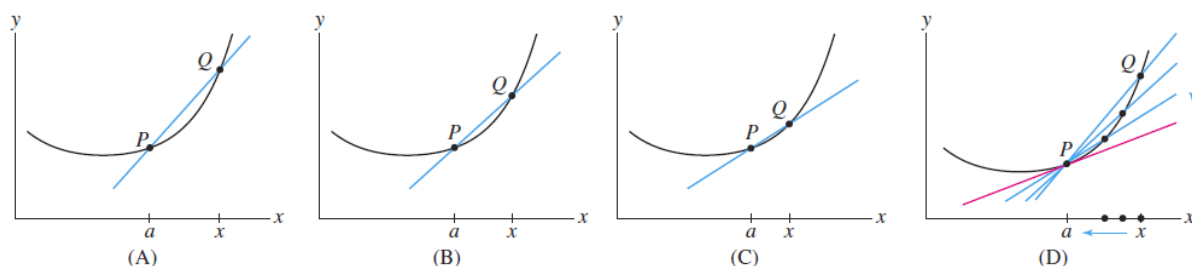
- intuitív határérték (egy- és kétoldali, végtelenben vett határérték)
- számsorozat
- számsorozat határértéke
- küszöbindex
- monotonitás
- környezet
- függvény határértéke
- határozatlan alak

Elméleti összefoglaló

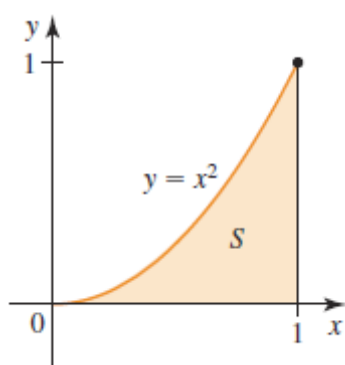
A határérték, határátmenet a matematika egyik legfontosabb fogalma. Már az ókori matematikában is felbukkan (a határérték az, amihez egy változó mennyiség egyre jobban és jobban közeledik), ma is használatos pontos megfogalmazása Augustin-Louis Cauchy és Karl Weierstrass érdeme.



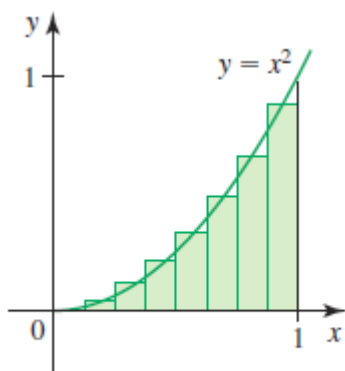
Például a körbe írt szabályos sokszögek egyre közelebb vannak a körhöz, ha az oldalszámot növeljük. Ez a határátmenet lehetővé teszi a kör kerületének és területének meghatározását.



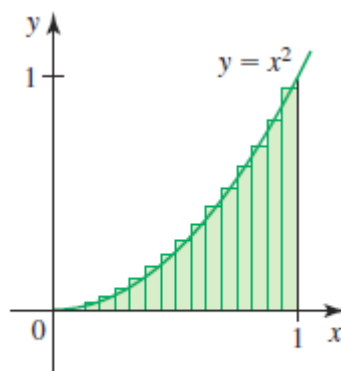
Egy görbe P pontban húzható érintője a P és Q pontokon átmenő szelők határhelyezete, ha a Q pont minden határon túl közeledik a P ponthoz. Az itteni határátmenet segítségével felírható az érintő egyenlete.



Az ábrán látható S síkidomot (amelynek a területét a geometriában tanult módszerekkel nem lehet kiszámolni) egyre jobban megközelítik az alábbi ábrán látható kis téglalapok uniója, így a területét a téglalapok területének összege.



(a) $n = 8$



(b) $n = 16$

A két legfontosabb probléma, amely a határérték fogalmának kidolgozásához vezetett az érintő problémája, és a terület problémája.

A határérték intuitív fogalma

A határérték legegyszerűbb fajtája az egyváltozós függvény határértéke, ezzel foglalkozunk a továbbiakban.

Tekintsük az $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)}$ függvényt. Ez a függvény nincs értelmezve az $a = 1$ helyen. Az

érdekelne minket, hogy hogyan viselkedik az $f(x)$ érték, ha x közel van 1-hez. Ennek érdekében kiszámoljuk a függvény értékét néhány 1-hez közeli helyen. A számításokat az alábbi táblázat tartalmazza.

x	0.5	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1	1.5
f(x)	0.75	0.95	0.995	0.9995	1.0005	1.005	1.05	1.25

Ezekből a számokból is látható, hogy ha x egyre közelebb van egyhez, akár balról, akár jobbról, $f(x)$ is közelebb lesz 1-hez. Ezt úgy fogalmazzuk meg, hogy $f(x)$ határértéke 1, ha x közeledik 1-hez. Ez elvezet a határérték alábbi, matematikai szempontból nem precíz definíciójához.

Tevékenység: Egy, az előbbihez hasonló táblázat segítségével állapítsuk meg, hogy mi lehet

az $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x}}$ függvény határértéke, ha x pozitív értékeken keresztül közeledik nullához.

Definíció (intuitív): Legyen $f(x)$ egy olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya tartalmaz egy olyan nyílt intervallumot, amelynek az a szám a közepe, kivéve esetleg az a számot. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **határértéke** az a helyen a L szám, ha $f(x)$ tetszőleges közel kerül L -hez, ha x már elég közel van a -hoz. Ezt így fogjuk jelölni:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

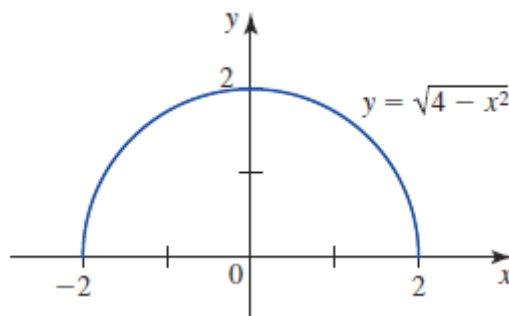
Definíció: Legyen $f(x)$ egy olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya értelmezve van az olyan számokra, amelyek közel vannak a -hoz, de annál nagyobbak. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **jobb oldali határértéke** az a helyen a L szám, ha $f(x)$ tetszőleges közel kerül L -hez, ha x már a -hoz elég közeli, de a -nál nagyobb szám. Ezt így fogjuk jelölni:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L.$$

Definíció: Legyen $f(x)$ egy olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya értelmezve van az olyan számokra, amelyek közel vannak a -hoz, de annál kisebbek. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **bal oldali határértéke** az a helyen a L szám, ha $f(x)$ tetszőleges közel kerül L -hez, ha x már a -hoz elég közeli, de a -nál kisebb szám. Ezt így fogjuk jelölni:

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L.$$

A két utóbbi definíció szemléltetésére tekintsük az $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ függvényt. Ennek értelmezési tartománya a $[-2, 2]$ zárt intervallum, és a grafikonja az alábbi ábrán látható.



Az ábráról könnyen leolvasható, hogy $\lim_{x \rightarrow -2+} \sqrt{4-x^2} = 0$, és $\lim_{x \rightarrow 2-} \sqrt{4-x^2} = 0$. Mindkét eredmény egy gyors numerikus kísérlettel ellenőrizhető. Például az elő limesz esetén $f(-1.9999) = 0.1999975$, a második limesz esetén $f(1.9999) = 0.1999975$. Mindkét szám közel van nullához.

Az alábbi tétel a kétoldali és az egyoldali határértékek közötti kapcsolatról szól.

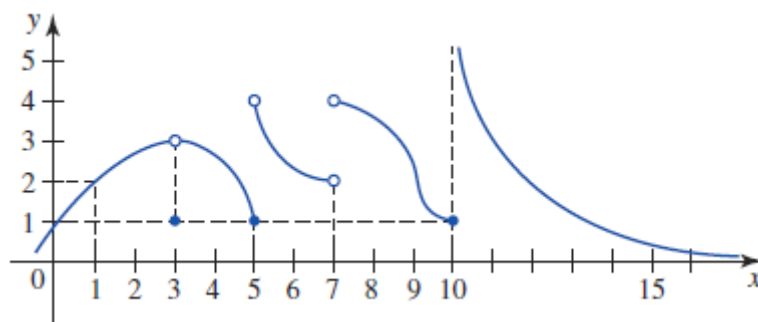
Tétel: Legyen $f(x)$ egy olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya tartalmaz egy olyan nyílt intervallumot, amelynek az a szám a közepe, kivéve esetleg az a számot. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ pontosan akkor teljesül, ha } \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L.$$

Felmerül a kérdés, hogy hogyan lehet a határértéket meghatározni. Később a precíz definíció birtokában erre korrekt módszereink lesznek. De addig is, például a fenti táblázatban mutatott numerikus kísérlettel gyakran ki lehet találni a határértéket. Ha ábrát tudunk rajzolni a függvényről, az is felhasználható a határérték leolvasására. Ha egyszerűsíteni tudjuk a függvény hozzárendelési utasítását, a határérték meghatározása is egyszerűsödik.

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Az alábbi ábra egy f függvény grafikonját mutatja.



Olvassuk le az ábráról az alábbi határértékeket: a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, b) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$, c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, d) $\lim_{x \rightarrow 5-} f(x)$, e) $\lim_{x \rightarrow 5+} f(x)$, f) $\lim_{x \rightarrow 7-} f(x)$, g) $\lim_{x \rightarrow 7+} f(x)$, h) $\lim_{x \rightarrow 10-} f(x)$, i) $\lim_{x \rightarrow 10+} f(x)$, j) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Megoldás: a) Ha megfigyeljük a függvényünk viselkedését a 0 körül, látjuk, hogy az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel kerülnek 1-hez, ha x elég közel van nullához, ezért $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

b) Akárhogyan közeledik az x az 1-hez, az ábra alapján az $f(x)$ függvényértékek 2-höz közelednek, azaz $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, és így $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2$ is teljesül, ami eredetileg a kérdés volt.

c) Könnyen leolvassuk az előzőek alapján, hogy $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$, figyeljük meg viszont, hogy $f(3) = 1$.

d)-e) Az eddigiekkel ellentétben a függvényünk 5 körüli viselkedésénél egyáltalán nem mindegy, hogy az 5-höz a bal vagy a jobb oldalról közeledünk. Látjuk az ábráról, hogy 5-höz közeleli, de 5-nél kisebb x értékekre $f(x)$ 1-hez lesz közel, $\lim_{x \rightarrow 5-} f(x) = 1$, de ha x közel van 5-höz, de annál nagyobb, akkor $f(x)$ 4-hez közeleli, azaz $\lim_{x \rightarrow 5+} f(x) = 4$. Mivel a két egyoldali limesz külön-külön létezik ugyan, de nem egyenlő, ezért a kétoldali $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ határérték nem létezik.

f)-g)-h) Az előzőek alapján világos kell, hogy legyen, hogy $\lim_{x \rightarrow 7-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 7+} f(x) = 4$ és $\lim_{x \rightarrow 10-} f(x) = 1$.

i) Az 10-hez közeleli, de 10-nél nagyobb x számok esetén az $f(x)$ viselkedése az eddigiektől eltérő. De a grafikon azt akarja ábrázolni, hogy $f(x)$ minden határon túl nő, ha x jobbról közeledik 10-hez. Ezt így jelöljük: $\lim_{x \rightarrow 10+} f(x) = \infty$.

j) Ilyen típusú limesz sem szerepelt az eddigi definíciókban. De nyilván érezzük a grafikon azt szemlélteti, hogy ahogy egyre nagyobbá válik az x , az $f(x)$ értékek minden határon túl közelednek nullához, amit így fogunk jelölni: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Elméleti összefoglaló

Számsorozatok

Az i) és j) pontokban szereplő határértékekkel együtt eddig 5 fajta limeszről volt szó. Ki fog hamarosan derülni, hogy vannak továbbiak is, összesen 15 fajta. Ezek ismertetése előtt rátérünk a számsorozatokra. A precíz definíciók ezek segítségével könnyen megadhatók.

Definíció: Számsorozatnak hívjuk az $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, hagyományos okokból $a(n)$ helyett a_n -et írunk és a_n -et a sorozat **n -edik elemének** hívjuk, n -et pedig az a_n sorozatelem **indexének** nevezzük.

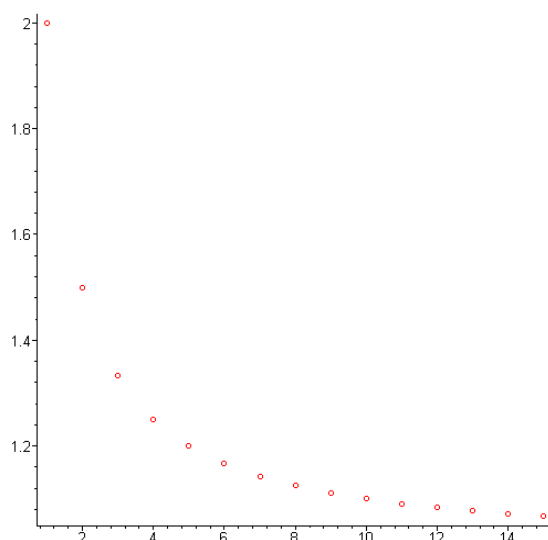
Magát a sorozatelemeket az index szerinti természetes sorrendjükben (a_n) fogja jelölni, tehát $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$. A számsorozat elnevezés helyett röviden sorozatot is szokás mondani. A sorozatokat leggyakrabban az a_n elem kiszámolását lehetővé tevő képlet megadásával definiáljuk. Például így: $a_n = n + \frac{1}{n}$. Ennek a sorozatnak az első néhány eleme

$$\left(2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \dots\right).$$

Tevékenység: Számoljuk ki az előbbi sorozat huszadik és harmincötödik elemét.

Tekintsük az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sorozatot. Ennek az első néhány eleme $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right)$. Ha

ábrázoljuk ezeket a számokat egy számegyenesen vagy egy koordináta rendszerben az (n, a_n) koordinátájú pontokat, az alábbi ábrákat kapjuk. Az ábrán a vízszintes egyenes nem az x tengely, hanem az $y = 1$ egyenes.



(Így minden sorozatot ábrázolhatunk, ez a szemléltetés gyakran hasznos.)

Az ábrákról leolvashatjuk, hogy (a_n) elemei egyre kisebbek, de mindegyik nagyobb, mint 1. Az elemek közelednek 1-hez. Sőt, úgy mondjuk, hogy az elemek minden határon túl közelednek 1-hez, amin azt értjük, hogy az a_n sorozatelem és az 1 távolsága, ami definíció szerint $|a_n - 1|$, tetszőlegesen kicsivé válik, ha n elég nagy. Az is igaz, hogy a sorozatelemek egyre közelednek pl. a 0-hoz is, sőt minden 1-nél kisebb számhoz is, de az ilyen számokhoz nem közelednek a sorozatelemek minden határon túl, például a 0-tól vett távolságuk mindig legalább 1, az $\frac{1}{3}$ -tól vett távolságuk mindig legalább $\frac{2}{3}$, és így tovább. Tekintsünk most egy 1-nél nagyobb számot, például 1.025-t. A sorozatelemek először közelednek 1.025-höz, de a 40. elem éppen 1,025, és ezután a sorozatelemek elkezdnek távolodni, és egyre távolabb kerülnek 1.025-től.

Ebből az elemzésből láthatjuk, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sorozat esetén az 1-nek kitüntetett szerepe van: ő az **egyetlen** valós szám, amelyhez a sorozatelemek minden határon túl közelednek.

Ilyen tulajdonságú szám sok más sorozat esetén is található, de messze nem mindegyik esetén. Például az $a_n = (-1)^n$ képlettel megadott sorozat elemei felváltva -1 és 1, ezek az elemek nem közelednek minden határon túl semmilyen számhoz. Ezek motiválják a következő definíciót.

Definíció: Az (a_n) sorozat **határértéke** vagy **limesze** az $A \in \mathbb{R}$ valós szám, ha tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $n \geq N(\varepsilon)$ esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Azt, hogy az (a_n) sorozat határértéke A

$$a_n \rightarrow A \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

fogja jelölni. Ilyenkor az (a_n) sorozatot **konvergensnek** hívjuk, az $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ természetes számot pedig az ε -hoz tartozó **küszöbindexnek**.

A definíció szemléletes tartalma a fenti gondolatmenet alapján az, hogy ha a sorozat határértéke A , akkor a sorozat elég nagy indexű elemei mindannyian bármilyen kis távolságnál is közelebb lesznek A -hoz. Ez a sorozatok körében a legfontosabb fogalom.

Tétel: Ha egy (a_n) sorozatnak létezik határértéke, akkor az egyértelmű.

Definíció: Az (a_n) sorozat egy **részsorozata** egy olyan (b_n) sorozat, amely úgy keletkezik, hogy töröljük az eredeti sorozat véges sok vagy végtelen sok elemét olyan módon, hogy végtelen sok elem maradjon, és a megmaradó elemek a (b_n) sorozat elemei.

Például az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozatnak néhány részsorozata az alábbi:

$\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right)$, itt a páratlan indexű elemeket tartottuk meg, és minden másodikat töröltünk;
 $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots\right)$, itt azokat az elemeket tartottuk meg, amelyek indexe négyzetszám;
 $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \dots\right)$, itt azokat az elemeket tartottuk meg, amelyek indexe prímszám.

Egy sorozatnak nyilván végtelen sok részsorozata van.

Tétel: Ha $a_n \rightarrow A$, és (b_n) részsorozata (a_n) -nek, akkor $b_n \rightarrow A$.

Ez a tétel sokszor hasznos, például erre alapozva úgy lehet megmutatni, hogy egy sorozat nem konvergens, hogy keresünk két részsorozatot, amelyeknek különbözik a határértéke.

A nem konvergens sorozatokat divergensnek is hívjuk. A divergens sorozatok nagyon szertelenül is viselkedhetnek. Két típusuk azonban mutat némi szabályszerűséget, ezek a minden határon túl növekedő, és a minden határon túl csökkenő sorozatok.

Definíció: Az (a_n) sorozat **határértéke a plusz végtelen**, ha tetszőlegesen nagy $c \in \mathbb{R}$ pozitív számhoz is van olyan $N(c) \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $n \geq N(c)$ esetén

$$a_n > c.$$

Ezt $a_n \rightarrow \infty$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ fogja jelölni.

Az (a_n) sorozat **határértéke a mínusz végtelen**, ha tetszőlegesen nagy abszolút értékű negatív $c \in \mathbb{R}$ számhoz is van olyan $N(c) \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $n \geq N(c)$ esetén

$$a_n < c.$$

Ezt $a_n \rightarrow -\infty$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ fogja jelölni.

Egy másik fajta némileg szabályos viselkedést jelent, ha a sorozat elemei egy véges intervallumba esnek. Ezzel kapcsolatos a következő definíció.

Definíció: Az (a_n) sorozat **felülről korlátos** és a $K \in \mathbb{R}$ szám a felső korlátja, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq K$.

Az (a_n) sorozat **alulról korlátos** és a $k \in \mathbb{R}$ szám az alsó korlátja, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq k$.

Az (a_n) sorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

Egy további szabályos viselkedés, ha a sorozat elemei egyre nőnek vagy csökkennek.

Definíció: Az (a_n) sorozat **monoton növekvő**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$, **monoton csökkenő**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

Szokás akkor is azt mondani, hogy egy sorozat monoton növekvő vagy csökkenő, ha a megfelelő egyenlőtlenség nem minden n -re, hanem csak egy adott K küszöbszámnál nagyobb vagy egyenlő n -ekre teljesül.

A monoton sorozatok egy bizonyos értelemben szabályosan viselkednek. A legtöbb sorozat nem monoton.

Mivel a sorozatok $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, az algebrai függvényműveletek rájuk is értelmezhetők. Például az összeg hozzárendelési utasítása a hozzárendelési utasítások összege, és így tovább. Kicsit pontosabban ez a három legfontosabb műveletre az alábbi.

Definíció: Tekintsük az (a_n) és (b_n) sorozatokat. Ekkor a két sorozat **összege** az $(a_n + b_n)$ sorozat, **szorzata** az $(a_n b_n)$ sorozat, és ha b_n egyetlen n -re sem nulla, akkor **hányadosa** az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat.

A sorozatok témakörében a legfontosabb feladat a határérték meghatározása lesz, amennyiben létezik. Eközben az alábbi tételeket állandóan fel fogjuk használni. Először egy, a konvergens sorozatokról szóló tétel következik.

Tétel: Ha $a_n \rightarrow A \in \mathbb{R}$ és $b_n \rightarrow B \in \mathbb{R}$, akkor

$$a_n + b_n \rightarrow A + B,$$

$$a_n b_n \rightarrow AB,$$

$$|a_n| \rightarrow |A|,$$

$$\text{ha létezik az } \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ sorozat, és } B \neq 0, \text{ akkor } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B}.$$

Jóval bonyolultabb a helyzet, ha valamelyik vagy mindkét sorozat valamelyik végtelenbe tart. Csak a legfontosabb eseteket tartalmazzák az alábbi tételek.

Az összeggel kapcsolatban:

Tétel: Tekintsük az (a_n) és (b_n) sorozatokat.

Ha $a_n \rightarrow \infty$ és $b_n \rightarrow B \in \mathbb{R}$, akkor $a_n + b_n \rightarrow \infty$.

Ha $a_n \rightarrow \infty$ és $b_n \rightarrow \infty$, akkor $a_n + b_n \rightarrow \infty$.

Ha $a_n \rightarrow -\infty$ és $b_n \rightarrow B \in \mathbb{R}$, akkor $a_n + b_n \rightarrow -\infty$.

Ha $a_n \rightarrow -\infty$ és $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n + b_n \rightarrow -\infty$.

A szorzattal kapcsolatban:

Tétel: Tekintsük az (a_n) és (b_n) sorozatokat, és tegyük fel, hogy $a_n \rightarrow \infty$.

Ha $b_n \rightarrow B > 0$, akkor $a_n b_n \rightarrow \infty$.

Ha $b_n \rightarrow \infty$, akkor $a_n b_n \rightarrow \infty$.

Ha $b_n \rightarrow B < 0$, akkor $a_n b_n \rightarrow -\infty$.

Ha $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n b_n \rightarrow -\infty$.

Tétel: Ha $a_n \rightarrow \infty$ és $b_n \geq a_n$ minden n -re, akkor $b_n \rightarrow \infty$. Hasonlóan, ha $a_n \rightarrow -\infty$ és $b_n \leq a_n$ minden n -re, akkor $b_n \rightarrow -\infty$.

Végül a hányadossal kapcsolatban:

Tétel: Tekintsük az (a_n) sorozatot, és tegyük fel, hogy $a_n \neq 0$ semmilyen n -re.

Ha $a_n \rightarrow \pm\infty$, akkor $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$.

Ha $a_n \rightarrow 0$ és $a_n > 0$, minden n -re, akkor $\frac{1}{a_n} \rightarrow \infty$.

Ha $a_n \rightarrow 0$ és $a_n < 0$, minden n -re, akkor $\frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty$.

Ha $a_n \rightarrow 0$, akkor $\frac{1}{|a_n|} \rightarrow \infty$.

Ezeknek a tételeknek a kombinálásával, mint majd látjuk, számos sorozat határértéke kiszámolható. A tételek másik csoportja, ami megkönnyíti a limeszek kiszámítását a nevezetes limeszekről szóló tételek.

Tétel: $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Tétel: $a_n = n^\alpha \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{ha } \alpha > 0, \\ 1, & \text{ha } \alpha = 0, \\ 0, & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases}$

Tétel: $a_n = q^n \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{ha } q > 1, \\ 1, & \text{ha } q = 1, \\ 0, & \text{ha } -1 < q < 1, \\ \text{nem létezik a határérték,} & \text{ha } q \leq -1. \end{cases}$

Legyen $a_n = n$, $b_n = n^2$. Ekkor $a_n \rightarrow \infty$, és $b_n \rightarrow \infty$. Könnyen látható, hogy $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$,

ugyanakkor $\frac{b_n}{a_n} = n \rightarrow \infty$. Ez azt mutatja, hogy pusztán az az információ, hogy mi egy tört számlálójának és nevezőjének külön-külön a limesze a tört limeszét nem határozza meg. Ezt

úgy mondjuk, hogy a $\frac{\infty}{\infty}$ típusú tört határozatlan alak. Ilyen határozatlan alak, nem csak tört esetén, több fajta is van. A legfontosabbak az alábbiak:

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \pm\infty, \quad \infty - \infty, \quad -\infty - (-\infty), \quad 1^\infty.$$

Az ilyen sorozatok limeszének meghatározása nehézséget jelent. A megoldás minden esetben abban áll, hogy azonos átalakításokkal átalakítjuk a_n képletét, hogy a fenti tételek alkalmazásával a limesz leolvasható legyen. Hogy ezt hogyan érdemes csinálni, az persze sorozat típustól függően más és más lehet. A kidolgozott feladatokban bemutatjuk a legfontosabb eseteket. Arra kell törekedni, hogy egy új feladat megoldás során sikerüljön beazonosítani a feladat típusát, majd ezután végre kell hajtani a típushoz tartozó megoldási módszert.

Kidolgozott feladatok:

2. feladat: Írjuk fel az $a_n = 2^n$ sorozat első néhány elemét.

Megoldás: Rendre behelyettesítve n helyére az 1, 2, 3, 4, 5, értékeket, kapjuk, hogy
 $(a_n) = (2, 4, 8, 16, 32, \dots)$.

3. feladat: Mi lehet az $a_n = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ sorozat hozzárendelési utasítása.

Megoldás: A megadott elemek alapján az a szabály körvonalazódik, hogy az n -edik elem az n -edik páratlan szám, tehát

$$a_n = 2n - 1.$$

Figyeljük meg, hogy n legkisebb értéke 1, tehát a **nullát nem tekintjük természetes számnak**.

4. feladat: Mi lehet az $a_n = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right)$ sorozat hozzárendelési utasítása.

Megoldás: Az első elemet $\frac{0}{1}$ alakban is felírhatnánk, így még szembeötlőbb, hogy az n -edik elem olyan tört, amelynek a nevezője n , a számlálója pedig $n - 1$, tehát

$$a_n = \frac{n-1}{n}.$$

5. feladat: Mi az $a_n = \frac{1}{2n+1}$ sorozat határértéke?

Megoldás: Az egyik tételünk szerint, ha egy sorozat valamelyik végtelenbe tart, akkor a reciproka nullához tart. De $2n+1 \rightarrow \infty$, (hiszen ha $n \rightarrow \infty$, akkor $2n \rightarrow \infty$, és ezért a nála eggyel nagyobb $2n+1$ is végtelenbe tart; ezek mindegyike felsorolt tételek egy nagyon egyszerű alkalmazása, mindenkinek javasoljuk, hogy azonosítsa be a szóban forgó tételeket).

Így látjuk, hogy $a_n = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$.

De úgy is okoskodhattunk volna, hogy a sorozatunk részsorozata az $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ sorozatnak, egy konvergens sorozat minden részsorozat, egy szintén felsorolt tétel szerint, ugyanoda konvergál, mint az eredeti sorozat. Ezért ismét azt kapjuk, hogy $a_n \rightarrow 0$.

6. feladat: Mi az $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ sorozat határértéke?

Megoldás: Tudjuk, hogy $\sqrt{n} \rightarrow \infty$, hiszen ez n^α szerkezetű nevezetes sorozat $\alpha > 0$ esete. Így az egyik tételünk szerint, (meg kellene az olvasónak keresni) a nála nagyobb $\sqrt{n+1}$ is tart végtelenbe. Így az előbbi feladatban is felhasznált tétel szerint a reciproka nullába tart, azaz

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0.$$

7. feladat: Mi az $a_n = n^2 - 3n$ sorozat határértéke?

Megoldás: Mivel n^2 és $3n$ is plusz végtelenbe tart, ez egy $\infty - \infty$ típusú határozatlan alak. De az alábbi átalakítás könnyen meghatározhatóvá teszi a limeszt:

$$a_n = n^2 - 3n = n(n-3).$$

Itt mindkét tényező végtelenbe tart, és akkor az egyik tételünk szerint a szorzatuk is,

$$a_n = n^2 - 3n \rightarrow \infty.$$

Látjuk, hogy a_n képlete másodfokú polinom. A polinomok esetén egy másfajta átalakítás, a legmagasabb fokú n hatvány kiemelése hasznosabb, mert minden esetben működik.

$$a_n = n^2 - 3n = n^2 \left(\frac{n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} \right) = n^2 \left(1 - \frac{3}{n} \right).$$

Ebben a szorzatban az első tényező plusz végtelenbe tart, $\frac{3}{n} = 3 \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 3 \cdot 0 = 0$, így a második tényező $1 - 0 = 1$ -be tart, ami egy pozitív szám, így egy másik tételünk szerint a szorzatuk plusz végtelenbe tart. Ugyanazt a végeredményt kaptuk, mint előbb.

Azt is könnyű végiggondolni, hogy a legmagasabb fokú n hatvány kiemelése mindig leolvashatóvá teszi a limeszt, mert kiemelés után az első tényező mindig plusz végtelenbe tart, a második pedig a főegyütthatóhoz. Így azt kapjuk, hogy **polinom esetén a határérték** mindig végtelen, mégpedig **plusz végtelen, ha a főegyüttható pozitív**, és **mínusz végtelen, ha a főegyüttható negatív**.

8. feladat: Mi az $a_n = (2n-1)n - (1-2n)^2$ sorozat határértéke?

Megoldás: Ha megnézzük a sorozatunk képletét, láthatjuk, hogy a szorzások elvégzése után egy másodfokú polinom keletkezik, amelynek a főegyütthatója $2n^2 - 4n^2 = -2n^2$ lenne, azaz

$$a_n = -2n^2 + \dots$$

A többi tagot nem is kell kiszámolni, mert a limesz szempontjából érdektelenek. Mivel a főegyüttható negatív, $a_n = (2n-1)n - (1-2n)^2 \rightarrow -\infty$.

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Mennyi az $a_n = (-1)^n n + (n-8)^2$ sorozat kilencedik eleme?

-2

-1

1

Nulla (X)

2. kérdés: Mi lehet az $a_n = (4, 7, 10, 13, 16, \dots)$ sorozat hozzárendelési utasítása?

$a_n = 3n + 1$ (X)

$a_n = 2n + 2$

$a_n = n^2 + 3$

$a_n = 2n^2 + n - 1$

3. kérdés: Mennyi az $a_n = (2n+1)^2 - 2(n+1)^2$ sorozat határértéke?

0

∞ (X)

$-\infty$

2

4. kérdés: Mennyi az $a_n = (1-n)^2 - (n+1)^2$ sorozat határértéke?

1

0

∞

$-\infty$ (X)

Kidolgozott feladatok:

9. feladat: Mennyi az $a_n = \frac{2n-1}{n+2}$ sorozat határértéke?

Megoldás: A sorozat képlete egy tört, amelynek számlálója és nevezője is plusz végtelenbe tart, ezért a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. Ezekben az esetekben

leggyakrabban a **kiemelés** vezet eredményre. Polinomok hányadosa esetén a nevező

legmagasabb fokú n hatványát, (csak az n hatványt, az együtthatóját már nem), célszerű kiemelni a számlálóból és nevezőből is. Most tehát a számlálóból és nevezőből is n -et. Kiemelés és egyszerűsítés után

$$a_n = \frac{2n-1}{n+2} = \frac{n \left(2 - \frac{1}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{2}{n} \right)} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}.$$

Ezek ekvivalens átalakítások voltak. Az utolsó tört például a 120. elem kiszámolására egyáltalán nem célszerű, de a limesz leolvasására nagyon is. Hiszen látjuk, hogy a számláló 2-höz, a nevező 1-hez tart, és így a tört $\frac{2}{1} = 2$ -hez, vagyis

$$a_n = \frac{2n-1}{n+2} \rightarrow 2.$$

10. feladat: Mennyi az $a_n = \frac{3n^2 - 2n + 4}{-2n^2 + n - 3}$ sorozat határértéke?

Megoldás: Most a számláló a plusz végtelenbe, a nevezője mínusz végtelenbe tart, tehát ismét

a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. A módszerünk szerint kiemelünk a

számlálóból és nevezőből is n^2 -et, majd egyszerűsítünk:

$$a_n = \frac{3n^2 - 2n + 4}{-2n^2 + n - 3} = \frac{n^2 \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} \right)}{n^2 \left(-2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} \right)} = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}{-2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}.$$

Az utolsó törtben a számláló 3-ba, a nevező -2-be tart, ezért

$$a_n = \frac{3n^2 - 2n + 4}{-2n^2 + n - 3} \rightarrow \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

Egy rövid kis numerikus kísérlettel alátámaszthatjuk az eredményünket. Emlékszünk, hogy a limesz az a szám, amihez nagy index esetén a sorozatelem igen közel van. Számoljuk ki kalkulátorral, mondjuk a_{1231} -et. Ez nem egy kellemes számolás, de

$$a_{1231} = -1.499796666.$$

Ez tényleg közel van $-\frac{3}{2}$ -hez. Ilyen numerikus kísérletet minden határérték kiszámolása során végezhetünk, ez segít, hogy rossz eredményt ne fogadjunk el helyesnek.

11. feladat: Mennyi az $a_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{-2n - 3}$ sorozat határértéke?

Megoldás: Ismét a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. Most a számlálóból és a nevezőből is n -et kell kiemelni, majd egyszerűsíteni vele:

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{-2n - 3} = \frac{n \left(n + 3 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(-2 - \frac{3}{n} \right)} = \frac{n + 3 + \frac{1}{n}}{-2 - \frac{3}{n}}.$$

Ebben a törtben a számláló plusz végtelenbe, a nevező -2-be tart, ezért a hányadosuk mínusz végtelenbe, gondoljuk meg, nagy számnak a fele is nagy, ha még a mínusz előjelet is figyelembe vesszük, akkor nagy negatív, tehát:

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{-2n - 3} \rightarrow -\infty.$$

Az iméntihez hasonló numerikus kísérlet azt mutatja, hogy például $a_{2879} = -1440.249783$, egy jó nagy abszolút értékű negatív szám, összhangban a kapott végeredménnyel.

12. feladat: Mennyi az $a_n = \frac{-n^2 + n + 2}{n^3 - n^2 + 2n - 2}$ sorozat határértéke?

Megoldás: A limesz $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú, a módszerünk szerint a számlálóból és a nevezőből is n^3 -t emelünk ki:

$$a_n = \frac{-n^2 + n + 2}{n^3 - n^2 + 2n - 2} = \frac{n^3 \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} \right)}{n^3 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^3} \right)} = \frac{-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^3}}.$$

Az utolsó törtben a számlálóban minden tag nullához tart, így az egész számláló is, a nevező 1-hez tart, tehát

$$a_n = \frac{-n^2 + n + 2}{n^3 - n^2 + 2n - 2} \rightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

Az előző három feladatból leszűrhető a következő tétel:

Két polinom hányadosának a határértéke

(1) a főegyütthatók hányadosa, ha a számláló és a nevező azonos fokszámú,

(2) végtelen, ha a számláló magasabb fokszámú, mint a nevező, mégpedig mínusz végtelen, ha a főegyütthatók ellenkező előjelűek, és plusz végtelen, ha a főegyütthatók azonos előjelűek,

(3) nulla, ha a számláló alacsonyabb fokszámú, mint a nevező.

Ellenőrző kérdések:

5. kérdés: Mennyi az $a_n = \frac{n-1}{3n+2}$ sorozat határértéke?

$$\frac{1}{3} \quad (\text{X})$$

3

2
 ∞

6. kérdés: Mennyi az $a_n = \frac{n^2 - 1}{-2n^2 + 2}$ sorozat határértéke?

$\frac{1}{2}$
0
-2
 $-\frac{1}{2}$ (X)

7. kérdés: Mennyi az $a_n = \frac{n(2-n)^2}{-n^2 + 2}$ sorozat határértéke?

0
 $-\infty$ (X)
 ∞
-1

8. kérdés: Mennyi az $a_n = \frac{(n-2)^2 - (n-3)^2}{2n-3}$ sorozat határértéke?

0
 ∞
 $-\infty$
1 (X)

Kidolgozott feladatok:

13. feladat: Tekintsük az $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$ sorozatot. Adjunk küszöbindexet $\varepsilon = 0.01$ -hez.

Megoldás: Először is, mivel a_n azonos fokszámú polinomok hányadosa, a limesze $\frac{1}{2}$.

Küszöbindexet adni a megadott ε -hoz annyit jelent, hogy meghatározunk egy természetes számot úgy, hogy az annál nagyobb vagy egyenlő indexekre teljesül az

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < 0.01$$

egyenlőtlenség. (Általában, ha A jelöli a határértéket, akkor az $|a_n - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.)

Beírjuk tehát a_n helyére a képletét, és megoldjuk az

$$\left| \frac{n+1}{2n-1} - \frac{1}{2} \right| < 0.01$$

egyenlőtlenséget. Először közös nevezőre hozunk az abszolút értéken belül:

$$\left| \frac{2(n+1) - (2n-1)}{2(2n-1)} \right| < 0.01.$$

A számlálóban elvégezve a műveleteket és összevonásokat kapjuk, hogy

$$\left| \frac{3}{2(2n-1)} \right| < 0.01.$$

A kapott tört számlálója pozitív, és a nevezője is az, hiszen sorozatok körében az n pozitív egész szám lehet. Így a tört maga is pozitív, egy pozitív szám abszolút értéke önmaga, tehát a

$$\frac{3}{2(2n-1)} < 0.01$$

egyenlőtlenséghez jutunk. A következő lépésben átszorunk a nevezőben lévő $2n-1$ tényezővel, ami minden n -re pozitív, vagyis nem fordul meg az egyenlőtlenség iránya.

$$\frac{3}{2} < 0.01 \cdot (2n-1).$$

Ezután átosztva a szintén pozitív 0.01 -al, megint nem fordul meg az egyenlőtlenség iránya.

$$\frac{3}{2 \cdot 0.01} < 2n-1,$$

$$\frac{300}{2} < 2n-1,$$

$$150 < 2n-1.$$

Innen

$$\frac{151}{2} < n,$$

$$75.5 < n.$$

Minden átalakítás ekvivalens átalakítás volt, tehát a kiinduló egyenlőtlenség teljesül, ha $n > 75.5$. Tehát a keresett küszöbindex $N(0.01) = 76$.

Kicsit többet is csináltunk, mint amit a feladat szövege megkövetelt, hiszen a lehető legkisebb küszöbindexet sikerült meghatároznunk. Minden 76 -nál nagyobb egyenlő természetes szám is jó küszöbindex 0.01 -hoz.

14. feladat: Tekintsük az $a_n = \frac{-3n-2}{2n+1}$ sorozatot. Adjunk küszöbindexet $\varepsilon = 0.02$ -hoz.

Megoldás: Ugyanúgy, mint az előbb, először meghatározzuk a határértéket. Ez most $-\frac{3}{2}$.

Ezért az

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

$$\left| a_n - \left(-\frac{3}{2} \right) \right| < 0.02,$$

$$\left| \frac{-3n-2}{2n+1} + \frac{3}{2} \right| < 0.02$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Ismét a közös nevezőre hozás az első lépés, amit a számláló kiszámolása követ:

$$\left| \frac{2(-3n-2)+3(2n+1)}{2(2n+1)} \right| < 0.02$$

$$\left| \frac{-1}{2(2n+1)} \right| < 0.02.$$

A kapott tört minden n -re negatív, így abszolút értéke önmaga mínusz egyszerese:

$$\frac{-(-1)}{2(2n+1)} < 0.02,$$

$$\frac{1}{2(2n+1)} < 0.02.$$

(Nem az egyenlőtlenséget szoroztuk meg mínusz eggyel, hanem a bal oldali negatív törtet, hogy kiszámoljuk az abszolút értékét.) A hátralévő lépések már egyszerűek:

$$\frac{1}{2} < 0.02 \cdot (2n+1),$$

$$\frac{1}{2 \cdot 0.02} < 2n+1,$$

$$\frac{50}{2} < 2n+1,$$

$$12 < n.$$

A keresett, egyébként most is a lehető legjobb, küszöbindex tehát $N(0.02) = 13$.

Egy kis numerikus kísérlet:

$$\left| a_{11} + \frac{3}{2} \right| = |-0.021739130| = 0.021739130 > 0.02, \text{ sőt}$$

$$\left| a_{12} + \frac{3}{2} \right| = |-0.02| = 0.02, \text{ ami nem kisebb 0.02-nál, viszont}$$

$$\left| a_{13} + \frac{3}{2} \right| = |-0.018518519| = 0.018518519 < 0.02 \text{ már teljesül, és még nagyobb indexekre az}$$

abszolút érték még inkább kisebb 0.02-nál. A példákban látott módszerrel mindig a legkisebb küszöbindexet kapjuk meg.

15. feladat: Számítsuk ki az $a_n = \frac{3^{n+1} - 2}{2^n + 1}$ sorozat limeszét.

Megoldás: Ebben a feladatban a q^n nevezetes sorozat két példánya is szerepel $q = 3$ és $q = 2$ választással. A megadott tételből tudjuk, hogy a limesz mindkét esetben plusz végtelen. Így a

tört számlálója és nevezője is végtelenbe tart, a limesz $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú. Az ilyen típusú limeszek

kiszámolásakor, mint eddig is, legtöbbször a **kiemelés** segít. Olyan mennyiségeket igyekszünk kiemelni a számlálóból és a nevezőből külön-külön, hogy a kiemelés során kapott másik tényező nullától különböző konstanshoz tartson, és ez a konstans a nevezőben még nullától különbözzön is. Először picit átalakítjuk a_n képletét:

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 2}{2^n + 1} = \frac{3 \cdot 3^n - 2}{2^n + 1}.$$

Ezután a számlálóból kiemelünk 3^n -t, a nevezőből 2^n -t, és néhány átalakítást is elvégzünk:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3^{n+1} - 2}{2^n + 1} = \frac{3 \cdot 3^n - 2}{2^n + 1} = \frac{3^n \left(3 - \frac{2}{3^n} \right)}{2^n \left(1 + \frac{1}{2^n} \right)} = \\ &= \frac{3^n}{2^n} \cdot \frac{3 - \frac{2}{3^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} = \left(\frac{3}{2} \right)^n \cdot \frac{3 - \frac{2}{3^n}}{1 + \frac{1}{2^n}}. \end{aligned}$$

A kapott szorzatban $\left(\frac{3}{2} \right)^n \rightarrow \infty$, hiszen $\frac{3}{2} > 1$. A tört számlálója 3-ba tart, hiszen $3^n \rightarrow \infty$,

ezért $\frac{2}{3^n} \rightarrow 0$. Hasonlóan a nevező 1-hez tart, így a tört $\frac{3}{1} = 3$ -hoz, ami egy pozitív szám, és tudjuk az egyik tételünkből, hogy egy plusz végtelenbe tartó és egy pozitív konstanshoz tartó mennyiség szorzata plusz végtelenbe tart, tehát

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 2}{2^n + 1} \rightarrow \infty.$$

16. feladat: Számítsuk ki az $a_n = \frac{2^n - 5^n}{10^n - 9^{10}}$ sorozat limeszét.

Megoldás: Az világos, hogy a nevező tart plusz végtelenbe. Megvizsgáljuk a számlálót. Mivel

$$2^n - 5^n = 5^n \left(\frac{2^n}{5^n} - 1 \right) = 5^n \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n - 1 \right)$$

látjuk, hogy a szorzat első tényezője plusz végtelenbe, a második tényezője -1-be tart, így a szorzat maga mínusz végtelenbe. Tehát ismét a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típussal van dolgunk. (Ha a számlálóból 2^n -t emeltünk volna ki, akkor kicsit más úton, de ismét kijött volna, hogy a számláló mínusz végtelenbe tart, érdemes ezt kipróbálni.) Ezután a_n -t a módszerünkkel, kiemeléssel, átalakítjuk, figyelembe véve, hogy $10^n = 2^n \cdot 5^n$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2^n - 5^n}{10^n - 9^{10}} = \frac{2^n - 5^n}{2^n \cdot 5^n - 9^{10}} = \frac{5^n \left(\frac{2^n}{5^n} - 1 \right)}{5^n \left(2^n - \frac{9^{10}}{5^n} \right)} = \\ &= \frac{\left(\frac{2}{5} \right)^n - 1}{2^n - \frac{9^{10}}{5^n}}. \end{aligned}$$

A kapott tört számlálója -1-be tart, a nevezője plusz végtelenbe, így a tört nullába, $a_n \rightarrow 0$.

17. feladat: Számítsuk ki az $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}$ sorozat határértékét.

Megoldás: Mindkét gyök alatti mennyiség, és így mindkét gyökös mennyiség is plusz végtelenbe tart, tehát a $\infty - \infty$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. Mivel ezt négyzetgyökök különbsége okozza, a gyöktelenítésnek nevezett eljárás segít a limesz kiszámolásában. Ennek lényege az alábbi azonosság:

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}.$$

Ezt alkalmazva az $A = n + 2$, $B = n - 3$ választással

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n-3} = \frac{(n+2) - (n-3)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-3}} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-3}}. \end{aligned}$$

Ezek az átalakítások lehetővé teszik a limesz meghatározását, hiszen az utolsó tört nevezője végtelenbe tart, így a tört nullába, $a_n \rightarrow 0$.

A szokott numerikus kísérlettel $a_{100000} \approx 0.0079057$, ami alátámasztja az eredményünket. Azt is látjuk ebből, hogy a sorozat elég lassan tart nullához. Például az előbbi feladatban szereplő sorozat esetén már $a_{10} \approx -0.001$, az a sorozat igen gyorsan tart nullába.

18. feladat: Számítsuk ki az $a_n = \sqrt{n^2 - n + 2} - \sqrt{n^2 + 2n - 1}$ sorozat határértékét.

Megoldás: Ugyanazok miatt, mint az előbb most is a $\infty - \infty$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. A gyöktelenítés módszerét hívjuk segítségül.

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2 - n + 2} - \sqrt{n^2 + 2n - 1} = \frac{(n^2 - n + 2) - (n^2 + 2n - 1)}{\sqrt{n^2 - n + 2} + \sqrt{n^2 + 2n - 1}} = \\ &= \frac{-3n + 3}{\sqrt{n^2 - n + 2} + \sqrt{n^2 + 2n - 1}}. \end{aligned}$$

Az utolsó törtben a számláló mínusz végtelenbe, a nevező plusz végtelenbe tart. A gyöktelenítés nem oldott meg minden, mert határozatlan alakot kaptunk. Ha azonban kiemelünk a számlálóból és a nevezőből n -et, a limesz kiszámolhatóvá válik:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-3n + 3}{\sqrt{n^2 - n + 2} + \sqrt{n^2 + 2n - 1}} = \frac{n \left(-3 + \frac{3}{n} \right)}{\sqrt{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right)} + \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}} = \\ &= \frac{n \left(-3 + \frac{3}{n} \right)}{\sqrt{n^2} \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{n^2} \sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}} = \frac{n \left(-3 + \frac{3}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \right)} = \\ &= \frac{-3 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}}. \end{aligned}$$

Az utolsó tört számlálója -3 -ba tart, a gyök alatti mennyiségek mindketten 1 -be, így a nevező 2 -be, tehát

$$a_n = \sqrt{n^2 - n + 2} - \sqrt{n^2 + 2n - 1} \rightarrow -\frac{3}{2}.$$

19. feladat: Monoton-e az $a_n = \frac{n-1}{2n+1}$ sorozat valamelyik értelemben?

Megoldás: Tájékozódásul kiszámoljuk a sorozat néhány tagját. Például $a_1 = 0$, $a_{40} \approx 0.481$, $a_{1000} \approx 0.499$. Ezek a számok növekednek, és ez alapján azt tételezzük fel, hogy a sorozat növvő. Tehát azt próbáljuk meg bebizonyítani, hogy $a_n \leq a_{n+1}$ teljesül minden n -re, vagy minden, valamilyen küszöbszámnál nagyobb minden n -re. Mivel a_{n+1} -et úgy lehet kifejezni n -el, hogy a sorozatot definiáló képletbe az n helyére $n+1$ -et írunk, az $a_n \leq a_{n+1}$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy

$$\frac{n-1}{2n+1} \leq \frac{(n+1)-1}{2(n+1)+1} = \frac{n}{2n+3}.$$

Itt az elején és a végén álló törtben mindkét nevező pozitív, keresztbe szorozva velük egyszer sem fordul meg az egyenlőtlenség iránya, így azt kapjuk, hogy

$$(n-1)(2n+3) \leq n(2n+1).$$

Elvégezve a műveleteket, és egyszerűsítéseket ebből következik, hogy

$$2n^2 - 2n + 3n - 3 \leq 2n^2 + n \\ -3 \leq 0.$$

Az az egyenlőtlenség, hogy $-3 \leq 0$ minden n -re igaz, mert n -től függetlenül igaz. Ezért a sorozatunk növvő az első elemétől kezdve.

20. feladat: Monoton-e az $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ sorozat valamelyik értelemben?

Megoldás: Most például $a_{10} \approx 1.049$, $a_{100} \approx 1.005$, $a_{1000} \approx 1.0005$. Ezek a számok egyre kisebbek, ezért arra gondolunk, hogy a sorozat csökkenő, azaz $a_n \geq a_{n+1}$. Ezt az egyenlőtlenséget akarjuk igazolni. Kiírva ezt n -el

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \geq \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}.$$

Mivel $\sqrt{A}$ a pozitív A szám két négyzetgyöke közül a pozitívot jelenti, ez így is írható:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \geq \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} \geq 0.$$

Ebből négyzetre emeléssel, és rendezéssel

$$1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$$

adódik. Mivel a nevezők ismét pozitívak, keresztbe szorzás után ezt azt jelenti, hogy $n+1 \geq n$, vagyis $1 \geq 0$. Ez egy ismét minden n -re igaz egyenlőtlenség. Tehát a sorozatunk az első elemétől kezdve csökkenő.

Ellenőrző kérdések:

9. kérdés: Mennyi az $\varepsilon = 0.01$ -hez tartó legkisebb küszöbindex az $a_n = \frac{1-n}{1-2n}$ sorozat esetén?

- 76 (X)
- 77
- 74
- 765

10. kérdés: Mennyi az $a_n = \frac{1-2^{2n+2}}{4^n - 3^n}$ sorozat limesze?

- 4
- 4 (X)
- ∞
- $-\infty$

11. kérdés: Mennyi az $a_n = \sqrt{n^2 - n} - \sqrt{n^2 - 1}$ sorozat határértéke?

- $\frac{3}{7}$
- $-\frac{11}{23}$
- $-\frac{1}{2}$ (X)
- $\frac{1}{2}$

12. kérdés: Mennyi az $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$ sorozat határértéke?

- ∞ (X)
- 0
- nem létezik

Elméleti összefoglaló

A határértékek pontos megfogalmazásához szükségünk lesz a kétoldali és a bal, illetve jobb oldali pontozott környezetek fogalmára. Ezekben a definíciókban δ alatt mindig egy kicsi pozitív számot kell érteni.

Definíció: Legyen $\delta > 0$. Az $a \in \mathbb{R}$ valós szám δ **sugarú környezete** az $(a - \delta, a + \delta)$ nyílt intervallum.

Ennek tehát az a szám eleme, éppen az intervallum közepe. Egy x szám pontosan akkor eleme a δ sugarú környezetnek, ha $|x - a| < \delta$.

Definíció: Legyen $\delta > 0$. Az $a \in \mathbb{R}$ valós szám δ **sugarú pontozott környezete** az $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ nyílt halmaz.

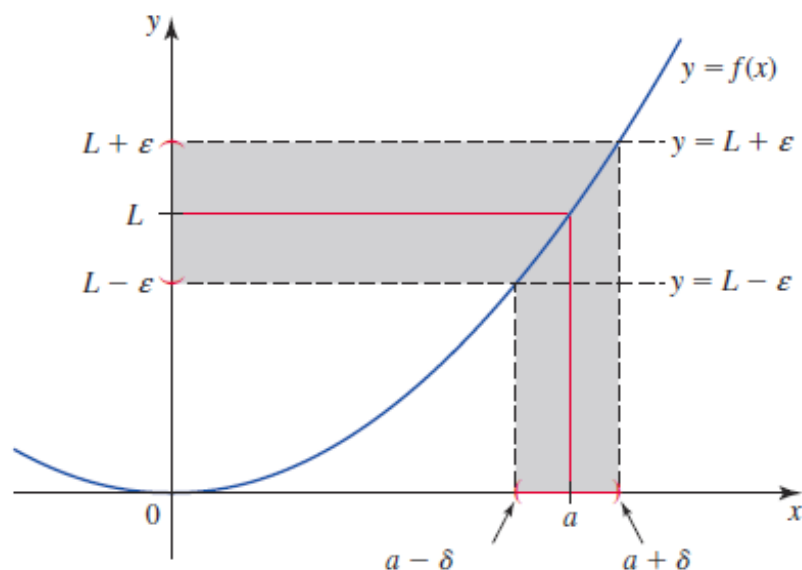
A δ sugarú pontozott környezete környezetet tehát úgy kapjuk, hogy a δ sugarú környezetből elhagyjuk az a számot, így az szétbomlik két, a bal és jobb oldalán lévő intervallum uniójára. Egy x szám pontosan akkor eleme a δ sugarú pontozott környezetnek, ha $0 < |x - a| < \delta$.

Definíció: Legyen $\delta > 0$. Az $a \in \mathbb{R}$ valós szám **bal oldali δ sugarú pontozott környezete** az $(a - \delta, a)$ nyílt intervallum, **jobb oldali δ sugarú pontozott környezete** az $(a, a + \delta)$ nyílt intervallum.

Definíció: A $-\infty$ pontozott környezetei $(-\infty, a)$ típusú nyílt intervallumok, a ∞ pontozott környezetei az (a, ∞) nyílt intervallumok.

Ezután már megfogalmazható a határérték definíciója.

Definíció: Az f függvény **kétoldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $L \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú pontozott környezete része D_f -nek, és $0 < |x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ fogja jelölni.



A fenti ábra az előző definíció geometriai szemléltetése. Ez a definíció pontosan azt fejezi ki, hogy $f(x)$ tetszőlegesen közel lesz L -hez, ha x már elég közel van a -hoz.

Definíció: Az f függvény **jobb oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $L \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú **jobb oldali pontozott környezet**e része D_f -nek, és $0 < |x - a| = x - a < \delta$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **bal oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $L \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú **bal oldali pontozott környezet**e része D_f -nek, és $0 < |x - a| = -(x - a) < \delta$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$ fogja jelölni.

A következő hat definíció a véges helyen vett végtelen határértékekről szól.

Definíció: Az f függvény **kétoldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen ∞ , ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú pontozott környezet e része D_f -nek, és $0 < |x - a| < \delta$ esetén $f(x) > M$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **jobb oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen ∞ , ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú pontozott jobb oldali környezet e része D_f -nek, és $0 < |x - a| = x - a < \delta$ esetén $f(x) > M$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **bal oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen ∞ , ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú pontozott bal oldali környezet e része D_f -nek, és $0 < |x - a| = -(x - a) < \delta$ esetén $f(x) > M$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **kétoldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $-\infty$, ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú pontozott környezet e része D_f -nek, és $0 < |x - a| < \delta$ esetén $f(x) < -M$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **jobb oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $-\infty$, ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú pontozott jobb oldali környezete része D_f -nek, és $0 < |x - a| = x - a < \delta$ esetén $f(x) < -M$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **bal oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $-\infty$, ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú pontozott bal oldali környezete része D_f -nek, és $0 < |x - a| = -(x - a) < \delta$ esetén $f(x) < -M$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty$ fogja jelölni.

A következő két definíció a végtelenben vett véges határértékről szól.

Definíció: Az f függvény ∞ -ben vett határértéke az $L \in \mathbb{R}$ szám, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(a, \infty) \subset D_f$ és $x > a$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ennek jele $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

Definíció: Az f függvény $-\infty$ -ben vett határértéke az $L \in \mathbb{R}$ szám, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(-\infty, -a) \subset D_f$ és $x < -a$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ennek jele $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Végül hátra van még a négy végtelenben vett végtelen határérték.

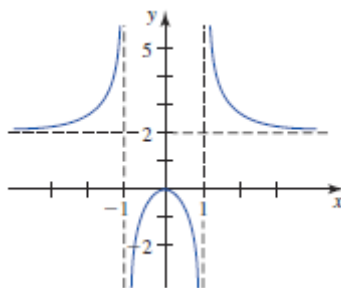
Definíció: Az f függvény ∞ -ben vett határértéke ∞ , ha tetszőleges $M > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(a, \infty) \subset D_f$ és $x > a$ esetén $f(x) > M$. Ennek jele $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Definíció: Az f függvény ∞ -ben vett határértéke $-\infty$, ha tetszőleges $M > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(a, \infty) \subset D_f$ és $x > a$ esetén $f(x) < -M$. Ennek jele $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

Definíció: Az f függvény $-\infty$ -ben vett határértéke ∞ , ha tetszőleges $M > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(-\infty, -a) \subset D_f$ és $x < -a$ esetén $f(x) > M$. Ennek jele $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

Definíció: Az f függvény $-\infty$ -ben vett határértéke $-\infty$, ha tetszőleges $M > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(-\infty, -a) \subset D_f$ és $x < -a$ esetén $f(x) < -M$. Ennek jele $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Az alábbi ábráról leolvasható az ábrázolt függvény esetén az imént definiált 15 fajta határérték közül hat. Melyik hat, és mennyi azok értéke?



A továbbiakban persze az lesz a célunk, hogy minél több függvény mindenféle határértékét ki tudjuk számítani. Ehhez, mint majd látni fogjuk az **elemi függvények határértékeit**, a **határértékekről szóló tételeket** és néhány **nevezetes limeszt** fogunk felhasználni. Kezdjük a határérték tételekkel.

Egy bonyolult függvény az elemi függvényekből épül fel a függvényműveletek segítségével. Ezért fontos kideríteni, hogy mi a kapcsolat a függvényműveletek és a határérték között. Ezeket a tételeket hívjuk határértéktételeknek.

A **véges határértékekre**, tehát amikor a határértékek értéke véges, érvényes az alábbi tétel.

Tétel: Tegyük fel, hogy $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$ és $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = M$. Itt $L, M \in \mathbb{R}$, és α az a , $a+$, $a-$, ∞ , $-\infty$ szimbólumok egyike. Ekkor

- a) $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$,
- b) $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x)g(x)) = LM$,
- c) $\lim_{x \rightarrow \alpha} (cf(x)) = cL$, minden $c \in \mathbb{R}$ konstansra,
- d) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{M}$, feltéve, hogy $M \neq 0$.

Ha az előforduló határértékek között végtelen is van, jóval bonyolultabb a helyzet.

Bevezetünk egy jelölést, amely segítségével, persze kicsit pontatlanul, ezek a tételek tömören összefoglalhatók. (A ∞ mostanáig a plusz végtelent jelentette, így lesz ez a továbbiakban is, de az alábbi tételekben a hangsúly kedvéért kiírjuk a $+$ jelet.) A

$$\boxed{+\infty} \cdot \boxed{-\infty} = \boxed{-\infty}$$

jelsorozat azt fogja jelölni, hogy ha egy függvénynek **valamelyik**, (véges helyen vett kétoldali vagy egyoldali, valamelyik végtelenben vett) határértéke $+\infty$, egy másik függvénynek **ugyanott, ugyanolyan típusú** határértéke $-\infty$, akkor a szorzatuknak, szintén **ugyanott, ugyanolyan típusú** határértéke $-\infty$. Az alábbi formulákban $A \in \mathbb{R}$, és ha A a nevezőben áll, akkor $A \neq 0$.

Tétel:

$$\boxed{+\infty} \pm \boxed{A} = \boxed{+\infty},$$

$$\boxed{-\infty} \pm \boxed{A} = \boxed{-\infty},$$

$$\boxed{+\infty} \cdot \boxed{A} = \boxed{+\infty}, \text{ ha } A > 0,$$

$$+\infty \cdot A = -\infty, \text{ ha } A < 0,$$

$$-\infty \cdot A = -\infty, \text{ ha } A > 0,$$

$$-\infty \cdot A = +\infty, \text{ ha } A < 0,$$

$$+\infty + +\infty = +\infty,$$

$$-\infty + -\infty = -\infty,$$

$$+\infty - -\infty = +\infty,$$

$$-\infty - +\infty = -\infty,$$

$$+\infty \cdot +\infty = +\infty,$$

$$-\infty \cdot -\infty = +\infty,$$

$$+\infty \cdot -\infty = -\infty,$$

$$A \div \pm\infty = 0,$$

$$\pm\infty \div A = \pm\infty, \text{ ha } A > 0,$$

$$\pm\infty \div A = \mp\infty, \text{ ha } A < 0.$$

$$1 \div 0+ = +\infty, \text{ (a nevező a pozitív számokon keresztül tart nullához),}$$

$$1 \div 0- = -\infty, \text{ (a nevező a negatív számokon keresztül tart nullához).}$$

A határérték segítségével megfogalmazható a függvények egy nagyon előnyös tulajdonsága.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezési tartománya tartalmazza az a szám egy nyílt környezetét. Ekkor f **follytonos** a -ban, ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezési tartománya tartalmaz egy $[a, a + \delta)$ szerkezetű intervallumot valamilyen $\delta > 0$ -ra. Ekkor f **jobbról folytonos** a -ban, ha $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezési tartománya tartalmaz egy $(a - \delta, a]$ szerkezetű intervallumot valamilyen $\delta > 0$ -ra. Ekkor f **balról folytonos** a -ban, ha $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$.

Tétel: Ha pontosan akkor folytonos a -ban, ha balról is és jobbról is folytonos a -ban.

Sokszor nagyon hasznos az alábbi tétel.

Tétel: Ha a g függvény folytonos L -ben, és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(L)$. Itt a helyett állhat $a+$ vagy $a-$ is.

Különösen hasznos, ha egy függvény egy intervallum minden pontjában, a végpontokban a megfelelő oldalról, folytonos, pláne, ha az egész értelmezési tartományán folytonos.

Szinte az összes elemi függvény az egész értelmezési tartományán folytonos, a végpontokban legalább valamelyik oldalról. Sőt, a függvenyműveletek általában nem rontják el a folytonosságot, pontosabban érvényes az alábbi tétel.

Tétel: Tegyük fel, hogy az f és a g függvények folytonosak a -ban. Ekkor

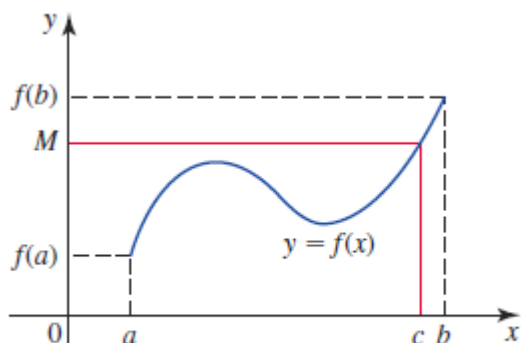
- a) az $f \pm g$ függvény is folytonos a -ban,
- b) az fg függvény is folytonos a -ban,
- c) a cf függvény is folytonos a -ban tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén,
- d) az $\frac{f}{g}$ függvény is folytonos a -ban, ha $g(a) \neq 0$.

Tétel: Ha az f függvény folytonos a -ban, a g függvény folytonos $f(a)$ -ban, akkor a $g \circ f$ összetett függvény is folytonos a -ban.

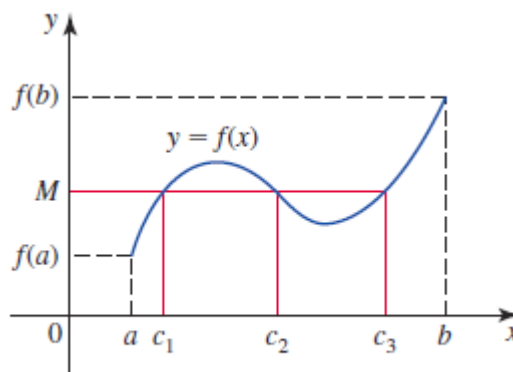
A folytonos függvények egy, szemléletesen magától értetődő, tulajdonságát fogalmazza meg a következő középértéktétel.

Tétel: Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallum minden pontjában, a végpontokban a megfelelő oldalról. Legyen az M szám $f(a)$ és $f(b)$ között egy tetszőleges érték, azaz $f(a) \leq M \leq f(b)$. Ekkor van legalább egy $c \in [a, b]$ szám, úgy, hogy $f(c) = M$.

Más szóval egy folytonos függvény két értéke között minden értéket felvesz, a grafikonja megszakítás nélkül összeköti az $(a, f(a))$ koordinátájú pontot a $(b, f(b))$ ponttal. A fenti tételt szemlélteti az alábbi ábra.



(a) $f(c) = M$



(b) $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = M$

Ismertetünk két nevezetes trigonometrikus határértéket.

Tétel:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

A legtöbb függvény, amivel találkozni fogunk olyan lesz, amelynek az értelmezési tartománya véges vagy végtelen hosszú intervallumok diszjunkt uniója. Mivel az értelmezési tartomány belső pontjában ezek a függvények folytonosak, csak az értelmezési tartomány szélein felvett határértékek az érdekesek.

A limesz kiszámolásakor most is, hasonlóan a számsorozatokhoz, a

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \pm\infty, \quad \infty - \infty, \quad -\infty - (-\infty), \quad 1^\infty$$

határozatlan alakok jelentenek gondot. Ki fog derülni, hogy ezek nagyrészt ugyanolyan átalakításokkal kezelhetők, mint amilyeneket a számsorozatoknál láttunk.

Külön vizsgálatot igényel az $\frac{1}{0}$ típusú limesz is.

Kidolgozott feladatok:

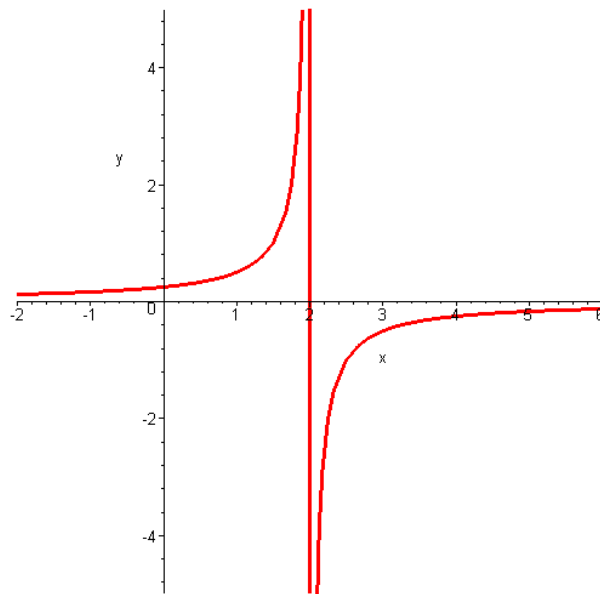
21. feladat: Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{4-2x}$ függvényt, és számoljuk ki az összes, nem triviális határértékét.

Megoldás: Mostantól nem triviális határérték alatt olyan határértéket értünk, amelyet nem lehet közvetlenül behelyettesítéssel kiszámolni. Először is megállapítjuk, hogy a függvényünk értelmezési tartománya a $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ halmaz. Ez két végtelen hosszú intervallum uniója. Két darabból áll, így négy „széle” van, és minden pontja belső pont, a D_f egy nyílt halmaz. Azt is látjuk, hogy az $\frac{1}{x}$ elemi függvény lineáris transzformáltjával van dolgunk. Így f mindenütt folytonos, ahol értelmezve van. Ezek miatt csak az alábbi limeszek az érdekesek:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Minden más határérték a helyettesítési érték, például $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{4-2 \cdot 0} = \frac{1}{4}$.

Ha a vizsgált függvényről jó ábrát tudunk készíteni, az a határértékek leolvasását lehetővé teszi. De függvények lineáris transzformáltjának ábrázolását már ismerjük. Ehhez érdemes elvégezni a következő átalakítást: $f(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{x-2}$. Ezt felhasználva az alábbi ábra mutatja a függvényünk grafikonját.

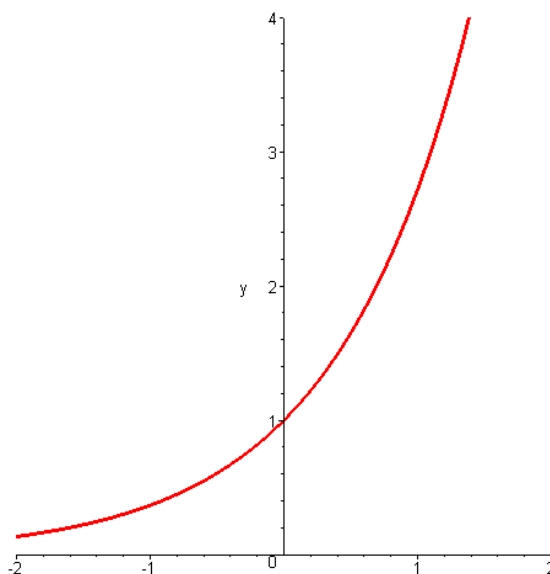


Erről már könnyen leolvassuk a kérdéses limeszeket. Mindegyiket a már bemutatott kis numerikus próbával érdemes demonstrálni. Tehát

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4-2x} = 0, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{4-2x} = \infty, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{4-2x} = -\infty, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4-2x} = 0.$$

22. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{e^x}$ függvény minden nem triviális határértékét.

Megoldás: Most a függvényünk az e^x elemi függvény reciproka. Az e^x ábrája az alábbi:



Erről is látjuk, hogy e^x soha nem nulla, ezért f mindenütt értelmezett: $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, ami egyetlen darabból álló nyílt halmaz, két széle van, a $-\infty$ és a ∞ . Csak az itt felvett határértékek a nem triviális limeszek, hiszen f mindenütt folytonos.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = \infty$, hiszen e^x ábrájáról látjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, ráadásul a nullához a pozitív

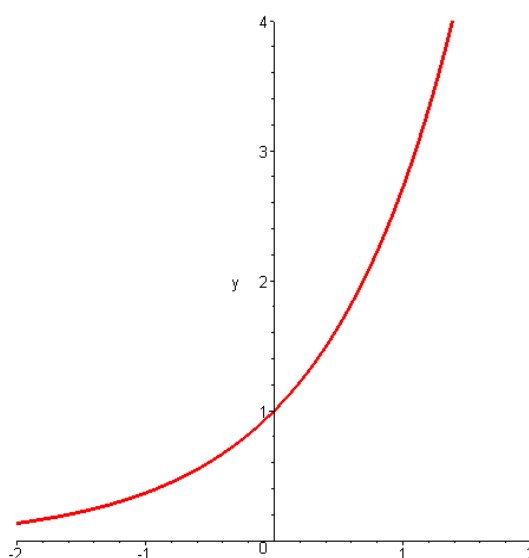
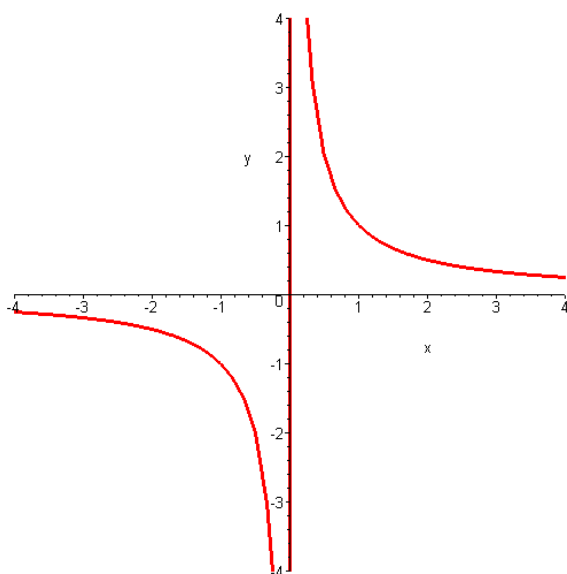
számokon keresztül közeledik e^x , ha x tart $-\infty$ -be. Így az $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x}$ határértékben az egyet egyre kisebb pozitív számmal osztjuk, ezért plusz végtelen ez a limesz. (A keretezett képleteket tartalmazó tétel utolsó előtti sora.)

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$, hiszen e^x ábrájáról látjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$, és így a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x}$ határérték 0. (A keretezett képleteket tartalmazó tétel alulról ötödik sora.)

23. feladat: Számoljuk ki az $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ függvény minden nem triviális határértékét.

Megoldás: Függvényünk egyedül a nullában nincs értelmezve, az értelmezési tartomány a $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ két darabból álló nyílt halmaz, aminek négy széle van. Mivel f mindenütt folytonos, ahol értelmezve van, csak ez a négy limesz a kérdéses.

Az f függvény az $\frac{1}{x}$ elemi függvénynek, mint belső függvénynek, és az e^x szintén elemi függvénynek, mint külső függvénynek a kompozíciója. Ezek ábrája van az alábbi ábrán.



a) Kezdjünk a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}}$ limeszszel. Az $\frac{1}{x}$ bal oldalon lévő ábrájáról látszik, hogy ha x tart $-\infty$ -

be, akkor $\frac{1}{x}$ a negatív számokon keresztül tart nullába. A jobb oldali ábráról leolvasható, hogy

ha az exponenciális függvény argumentuma balról közeledik nullához, akkor e^x egyhez tart,

(az már nem fontos, hogy alulról). Ezek miatt $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

b) A $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$ limesz esetén a gondolatmenet a következő: ha x tart nullába a negatív számokon keresztül, akkor $\frac{1}{x}$ a $-\infty$ -be tart. Ha az exponenciális függvény argumentuma $-\infty$ -be tart, akkor e^x tart nullához, így $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

c) A $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ limesz esetén, ha x a pozitív számokon keresztül nullába tart, akkor $\frac{1}{x}$ a ∞ -be tart. Ha pedig az exponenciális függvény argumentuma ∞ -be tart, akkor e^x is tart ∞ -be, ezért $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.

d) Végül a $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}}$ határérték esetén, amennyiben x -tart ∞ -be, akkor $\frac{1}{x}$ a pozitív számokon keresztül tart nullába. Ha az exponenciális függvény argumentuma jobbról közeledik nullához, akkor e^x egyhez tart. Ezért $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

24. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x^2 + 3x + 2)$ limeszt.

Megoldás: Ez egy határozatlan alakú limesz, mert a polinomunk középső két tagja ellenkező előjelű végtelenbe tart. Ugyanúgy, mint sorozatok esetén, a legnagyobb kitevőjű x hatvány kiemelése a megoldás kulcsa.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x^2 + 3x + 2) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 \left(-2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) \end{aligned}$$

A szorzat első tényezőjében álló limesz $-\infty$, a második tényezőben lévő -2 , ezért (mivel tudjuk, hogy $\boxed{-\infty} \cdot \boxed{-2} = \boxed{+\infty}$)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x^2 + 3x + 2) = \infty.$$

Könnyen végiggondolhatjuk, hogy minden polinomnak mindkét végtelenben valamelyik végtelen a limesze, a fenti módszer minden esetben célhoz vezet.

25. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{(2x + 1)^2 - 4x^2}$ határértéket.

Megoldás: Az előbbi megjegyzésből is világos, hogy a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ határozatlan alakkal van dolgunk. A megoldás kulcsa ismét ugyanaz, mint a sorozatok körében már látott hasonló feladatnál: számlálóból és nevezőből is kiemeljük a nevező legnagyobb kitevőjű x hatványát. Először persze a nevezőben elvégezzük a négyzetre emelést és a kivonást.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{(2x+1)^2 - 4x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{4x^2 + 4x + 1 - 4x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(-x + 2 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 2 - \frac{1}{x}}{4 + \frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

Itt a számláló $-\infty$ -be tart, ($[-\infty] + [2] - [0] = [-\infty]$), a nevező $4 + 0 = 4$ -be, tehát

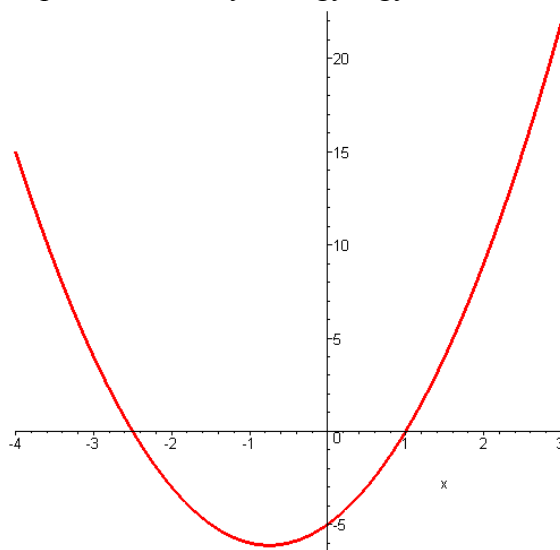
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{(2x+1)^2 - 4x^2} = -\infty,$$

felhasználva, hogy $[-\infty] \div [4] = [-\infty]$.

26. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x - 5}$ határértéket.

Megoldás: Külön-külön a számláló és a nevező is mindenütt folytonos függvényeket, a véges 1 helyen vett két- és egyoldali limeszeik is a helyettesítési értékek. Ezért a számláló 2-be, a nevező nullába tart, az $\frac{1}{0}$ problémás esettel van dolgunk. $\left(\frac{2}{0} = 2 \cdot \frac{1}{0} \right)$

Ilyenkor az a döntő, hogy a nevező hogyan tart nullába. Ezt legegyszerűbben a nevező grafikonjának felrajzolásával tisztázhatjuk. Ez most könnyű, mert a nevező két gyöke $-\frac{5}{2}$ és 1, a grafikonja felfelé nyíló parabola, amely átmegy a gyökökön. Az ábrája alább látható.

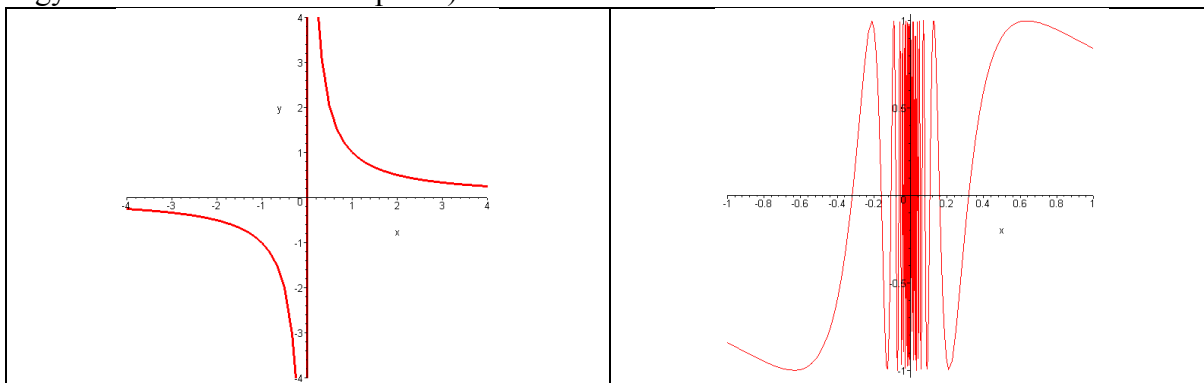


Erről látjuk, hogy ha x tart az 1-be balról, akkor a nevező a negatív számokon keresztül tart nullába. Ezek alapján, felhasználva a $[1] \div [0^-] = [-\infty]$ tételt,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x - 5} = -\infty.$$

Könnyen meggondolhatjuk, hogy a jobb oldali limesz ∞ , azaz $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x - 5} = \infty$.

A kétoldali $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x - 5}$ határérték pedig nem létezik, amiről egy kis numerikus kísérlettel meg is győződhetünk. (Kiszámolva a tört értékét például $x = 0.999$ és $x = 1.00001$ esetén, két nagyon különböző értéket kapunk.)



A fenti ábra két függvényt mutat, amelyeknek a nullában nem létezik a kétoldali limesze, a második, oszcilláló függvénynek még az egyoldali limeszei sem léteznek.

27. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + x + 6}{x^2 + 2x - 8}$ határértéket.

Megoldás: Kettőben a számláló és a nevező helyettesítési értéke is nulla, a $\frac{0}{0}$ határozatlan alakkal van dolgunk. Ilyen esetben a másodfokú polinomok gyöktényezős felbontása segít. A számláló gyökei $-\frac{3}{2}$ és 2 , ezért gyöktényezős felbontása $-2x^2 + x + 6 = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 2)$.

A nevező gyökei -4 és 2 , az ő gyöktényezős felbontása $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$. Így a törtünket egyszerűsíteni tudjuk $x - 2$ -vel, ami után a limesz már leolvashatóvá válik. Tehát

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + x + 6}{x^2 + 2x - 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 2)}{(x + 4)(x - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2\left(x + \frac{3}{2}\right)}{x + 4} = \frac{-2 \cdot \frac{7}{2}}{6} = -\frac{7}{6}. \end{aligned}$$

28. feladat: Tekintsük az $f(x) = \begin{cases} 4 - x, & \text{ha } x < 2, \\ \sqrt{x - 1} + 1, & 2 < x \end{cases}$ függvényt. Létezik-e a $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ határérték, és ha igen, akkor mennyi az értéke?

Megoldás: Látjuk, hogy a 2 jobb és bal oldalán más formula definiálja f -et. Ilyenkor úgy járhatunk el, hogy kiszámoljuk 2 -ben az egyoldali limeszeket. Ha azok léteznek és egyenlők, akkor létezik a kétoldali limesz is, és a közös értékkel egyenlő. De most az egyoldali limeszek egyszerűek:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4 - x) = 2,$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \sqrt{x-1} + 1 = 2.$$

Ezekből már következik, hogy $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$.

$$29. \text{ feladat: Tekintsük az } f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2, & \text{ha } x < 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0, \\ e^x + \cos x + 1, & \text{ha } 0 < x \end{cases} \text{ függvényt. Létezik-e a } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

határérték, és ha igen, akkor mennyi az értéke?

Megoldás: Ismét az egyoldali limeszekkel kezdünk.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x^2 + x + 2) = 2.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (e^x + \cos x + 1) = 3.$$

Külön-külön létezik a bal és a jobb oldali határérték, de nem egyenlők, így a kétoldali $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ limesz nem létezik.

$$30. \text{ feladat: Számoljuk ki a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{x} \text{ határértéket.}$$

Megoldás: A számláló és a nevező is nullához tart nullában, a $\frac{0}{0}$ határozatlan alakkal van

dolgunk. És mivel a számlálóban lévő gyökök különbsége ($\sqrt{4-x} - \sqrt{4}$) is szerepet játszik ebben, ismét a sorozatokhoz hasonlóan, gyöktelenítjük a számlálót. Ezt követően egyszerűsítés után a limesz megállapítható.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4-x} - \sqrt{4})(\sqrt{4-x} + \sqrt{4})}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4-x) - 4}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{4-x} + \sqrt{4}} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$31. \text{ feladat: Számoljuk ki a } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{10-x} - 3} \text{ határértéket.}$$

Megoldás: Ismét nullához tart a számláló és a nevező is, de most a a gyökök különbsége a számlálóban és a nevezőben is hozzájárul a $\frac{0}{0}$ határozatlan alak kialakulásához. Ezért gyöktelenítjük a számlálót és a nevezőt is. Elvégezve és a kínálkozó egyszerűsítéseket

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{10-x} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{4}}{\sqrt{10-x} - \sqrt{9}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(\sqrt{5-x} - \sqrt{4})(\sqrt{5-x} + \sqrt{4})}{\sqrt{5-x} + \sqrt{4}}}{\frac{(\sqrt{10-x} - \sqrt{9})(\sqrt{10-x} + \sqrt{9})}{\sqrt{10-x} + \sqrt{9}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(5-x) - 4}{\sqrt{5-x} + \sqrt{4}}}{\frac{(10-x) - 9}{\sqrt{10-x} + \sqrt{9}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1-x}{\sqrt{5-x} + \sqrt{4}}}{\frac{1-x}{\sqrt{10-x} + \sqrt{9}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10-x} + 3}{\sqrt{5-x} + 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

32. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{5x}$ határértéket.

Megoldás: Először is a limesz $\frac{0}{0}$ típusú, és a tört szerkezetéről eszünkbe jut a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nevezetes limesz. Átalakítjuk úgy a törtünket, hogy ez felhasználható legyen,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{5x} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x}.$$

Ha a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x}$ limeszben elvégezzük a $3x = u$ helyettesítést, akkor, mivel $3x \rightarrow 0$

pontosan akkor igaz, ha $u \rightarrow 0$, azt kapjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$. Ezt felhasználva

tehát a végeredmény $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{5x} = \frac{3}{5} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{3}{5}$.

33. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{\sin(3x)}$ határértéket.

Megoldás: Az világos, hogy a limesz $\frac{0}{0}$ típusú. Felhasználva, hogy $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{\sin(3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(4x)} \frac{\sin(4x)}{\sin(3x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(4x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(3x)}.\end{aligned}$$

De itt, mivel a $\cos x$ függvény mindenütt folytonos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(4x)} = \frac{1}{\cos 0} = 1$, így elég a

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(3x)}$ határértéket kiszámolni. Ezt a törtet is át fogjuk alakítani, úgy, hogy a fenti nevezetes limesz felhasználható legyen.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin(4x) \frac{1}{\sin(3x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(4x \frac{\sin(4x)}{4x} \frac{3x}{\sin(3x)} \frac{1}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{3} \frac{\sin(4x)}{4x} \frac{3x}{\sin(3x)} \right) = \\ &= \frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(3x)}.\end{aligned}$$

Most már, az előző feladatban látott helyettesítést alkalmazva látjuk, hogy itt mindkét limesz eggyel egyenlő, ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{\sin(3x)} = \frac{4}{3}.$$

34. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{2x}$ határértéket.

Megoldás: Ebben a $\frac{0}{0}$ típusú limeszben a számlálóban gyökök különbsége áll, ezért gyöktelenítünk, és átalakítás után a másodiknak említett nevezetes trigonometrikus limesz felhasználható.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{2x(1 + \sqrt{\cos x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2(1 + \sqrt{\cos x})} \cdot \frac{1 - \cos x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1 + \sqrt{\cos x})} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

35. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)(1 - \cos x)}{x^2}$ határértéket.

Megoldás: Ebben a $\frac{0}{0}$ típusú limeszben mindkét említett nevezetes trigonometrikus limesz felbukkan alkalmas átalakítások után.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)(1 - \cos x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x} \right) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Ellenőrző kérdések:

13. kérdés: Mennyi a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 1}{2x^2 + x + 2}$ határérték?

0

$-\infty$

$-\frac{1}{2}$ (X)

14. kérdés: Mennyi a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 1}{2x^2 + x - 3}$ határérték?

$-\frac{2}{5}$ (X)

$\frac{2}{5}$

$\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$

15. kérdés: Mennyi a $\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ határérték?

0

6

4 (X)

-4

16. kérdés: Mennyi a $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin^2 x}{x}$ határérték?

∞

0 (X)

$-\infty$

1

17. kérdés: Mennyi a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x}$ határérték?

0 (X)

1

-1

nem létezik

2. Függvénytan

2.4. Modulzáró ellenőrző kérdések

1. kérdés: Az $f(x) = \frac{\ln(x^2 + x - 12)}{x - 5}$ függvény értelmezési tartománya

$$(-\infty; -4) \cup (3; 5) \cup (5; \infty). \text{ (X)}$$

$$(-4; 3).$$

$$(-\infty; -4] \cup [3; 5) \cup (5; \infty).$$

$$\mathbb{R} \setminus ((-4; 3) \cup \{5\}).$$

2. kérdés: Mi az $f(x) = \ln(\ln(3 - x))$ függvény értelmezési tartománya?

$$D_f = (2, \infty)$$

$$D_f = (3, \infty)$$

$$D_f = (-\infty, 3)$$

$$D_f = (-\infty, 2) \text{ (X)}$$

3. kérdés: Tekintsük az $f(x) = x - (2x)^2$ függvényt. Ekkor az $f(f(x))$ függvény képlete

$$f(f(x)) = x + 8x^2 - 32x^3 + 64x^4.$$

$$f(f(x)) = x - 8x^2 + 32x^3 - 64x^4. \text{ (X)}$$

$$f(f(x)) = x - 8x^2 - 32x^3 - 64x^4.$$

$$f(f(x)) = x + 8x^2 + 32x^3 + 64x^4.$$

4. kérdés: Ha $g(f(x)) = \frac{4}{4x^2 - 1}$ és $f(x) = 2x$, akkor $g(x) =$

$$\frac{4}{2x^2 - 1}.$$

$$\frac{4}{(x+1)(x+1)}.$$

$$\frac{4}{(x-1)(x+1)}. \text{ (X)}$$

$$\frac{4}{(2x-1)(x+1)}.$$

5. kérdés: Melyik az $f(x) = \frac{4}{x+3}$ függvény inverz függvénye?

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{4} + 3$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{4} - 3$$

$$f^{-1}(x) = \frac{4}{x} + 3$$

$$f^{-1}(x) = \frac{4}{x} - 3 \text{ (X)}$$

6. kérdés: Az $f(x) = 1 - 4\arccos\left(\frac{9}{5-x}\right)$ függvény értelmezési tartománya

$$D_f = (-\infty; -4] \cup [14; \infty). \text{ (X)}$$

$$D_f = (-\infty; -4) \cup (14; \infty).$$

$$D_f = [-4; 14].$$

$$D_f = (-4; 14).$$

7. kérdés: Az $f(x) = 4\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - 8$ függvény inverze

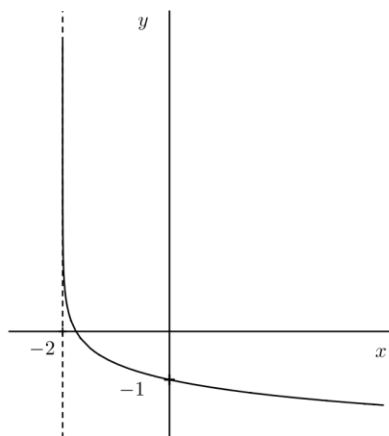
$$f^{-1}(x) = 2\sin\left(\frac{x}{4}\right) + 8.$$

$$f^{-1}(x) = 2\sin\left(\frac{x-8}{4}\right).$$

$$f^{-1}(x) = 2\sin\left(\frac{1}{4}x + 2\right). \text{ (X)}$$

$$f^{-1}(x) = -2\sin\left(\frac{x+8}{4}\right).$$

8. kérdés: Melyik hozzárendelési utasítás tartozik a következő függvényábrához?



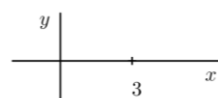
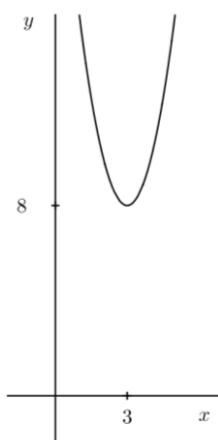
$$f(x) = -\lg(4x+8) \quad (\text{X})$$

$$f(x) = \lg(x+2)$$

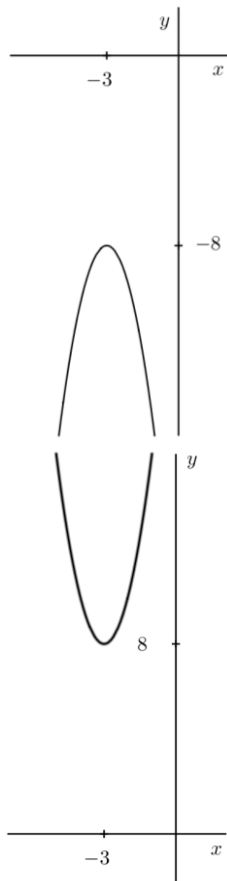
$$f(x) = -10^{x+2}$$

$$f(x) = 10^{4x+8}$$

9. kérdés: Melyik ábra tartozik az $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$ függvényhez?



(X)



10. kérdés: Hol van aszimptotája az $f(x) = \frac{3+x}{x+8}$ függvénynek?

$x = -8$ -ban függőleges aszimptotája, $y = 1$ -ben vízszintes aszimptotája (X)

$x = 8$ -ban függőleges aszimptotája, $y = -1$ -ben vízszintes aszimptotája

$x = -8$ -ban függőleges aszimptotája, $y = 3$ -ban vízszintes aszimptotája

$x = 8$ -ban függőleges aszimptotája, $y = -3$ -ban vízszintes aszimptotája

11. kérdés: Legyen $a_n = \frac{2n}{n+1}$. Mi a sorozat legjobb alsó és legjobb felső korlátja?

$k = 0$, és $K = 2$

$k = 1$, és $K = 2$ (X)

$k = 1$, és $K = 3$

$k = 1$, és $K = \infty$

12. kérdés: Legyen $a_n = \frac{2n-1}{4n+1}$. Mennyi a sorozat esetén az $\varepsilon = 0.01$ -hez tartozó legkisebb küszöbindex?

38 (X)

37

75

74

13. kérdés: Mennyi az $a_n = \sqrt{2n^2 - 2n + 2} - \sqrt{2n^2 + 3n - 1}$ sorozat limesze?

$-\frac{5\sqrt{2}}{4}$ (X)

$-\frac{4\sqrt{2}}{5}$

$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$

$-\frac{5\sqrt{2}}{3}$

14. kérdés: Mivel egyenlő a $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 5x - 3}$ határérték?

$-\frac{2}{7}$

$\frac{2}{7}$ (X)

$\frac{2}{5}$

$\frac{4}{7}$

15. kérdés: Mivel egyenlő a $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4x} - 4}{x - 4}$ határérték?

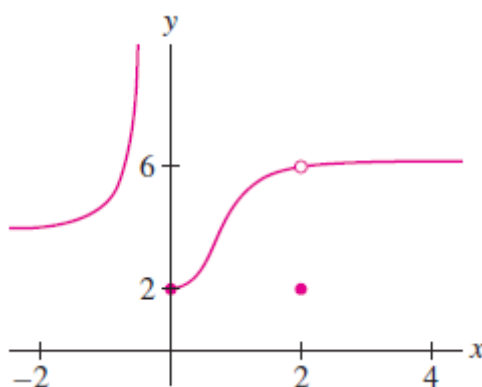
$\frac{1}{3}$

$\frac{3}{4}$

$$\frac{1}{2} \text{ (X)}$$

$$\frac{2}{3}$$

16. kérdés: Egy $f(x)$ függvény grafikonja az alábbi ábrán látható. Olvassuk le az ábráról a $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ és a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ határértékeket.



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6 \text{ és } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty \text{ (X)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \text{ és } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6 \text{ és } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \text{ és } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

17. kérdés: Mivel egyenlő a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x}{\sin(5x)}$ határérték?

$$0.8125$$

$$0.8 \text{ (X)}$$

$$0.7875$$

$$0.8001$$

18. kérdés: Mivel egyenlő a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1-x} - \sqrt{1-2x})$ határérték?

∞
nem létezik a limesz

$$-\infty \text{ (X)}$$

19. kérdés: Mivel egyenlő a $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 4}{3x^2 - 2} \right)^{2n^2 + 3}$ határérték?

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e^4}} \text{ (X)}$$

$$e^{-\frac{3}{4}}$$

$$e^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$$

3. Differenciálszámítás

3.1. A differenciálhatóság fogalma, geometriai jelentése, deriválási szabályok

Tanulási cél: megismerni a differenciálhatóság fogalmát, begyakorolni az érintő felírást és a linearizált használatát. Megismerkedni a deriválási szabályokkal és begyakorolni használatukat a derivált függvény meghatározására.

Követelmények

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha

- ismeri a differencia és differenciálhányados fogalmát,
- ismeri a deriválhatóság fogalmát,
- ismeri a derivált függvény fogalmát,
- ismeri az elemi függvények deriváltjait
- fel tudja írni adott pontbeli érintő egyenletét,
- fel tudja írni adott meredekségű érintő egyenletét,
- fel tudja írni adott ponton átmenő érintő egyenletét,
- képes az érintő felhasználásával közelítő értékek kiszámolására.

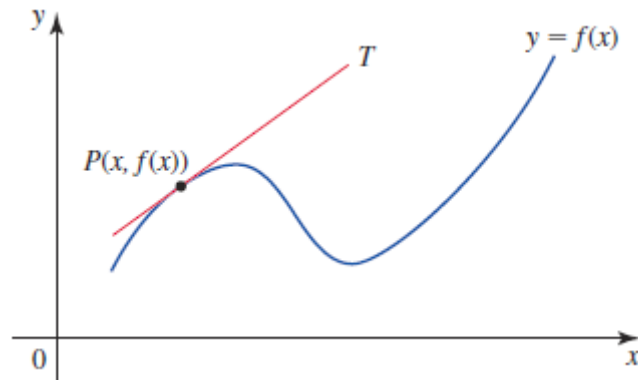
Kulcsfogalmak

- differencia és differenciálhányados
- deriválhatóság
- derivált függvény
- érintő, linearizált

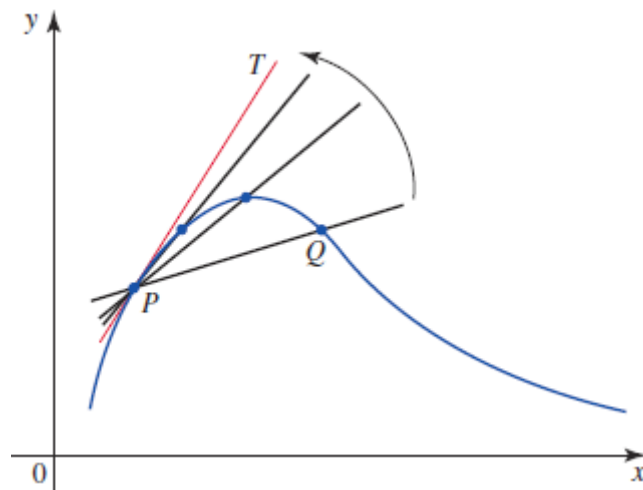
Elméleti összefoglaló

Azt szokták mondani, hogy semmi sem állandó csak a változás. Valóban, a minket körülvevő világban minden folyamatosan átalakul, minden sok minden mással kapcsolatban van, azoktól függ. Ezeknek a viszonyoknak a felderítése a természettudományok fő feladata. A különféle függések egyik matematikai modellje a **függvény** fogalma. A változások sok jellemzője közül az egyik nagyon fontos a változás „sebessége”. A gyorsan változó folyamatok veszélyt hordozhatnak magukban azáltal, hogy nem adnak időt a reagálásra. A változások gyorsaságát a matematika a **derivált** fogalmával ragadja meg.

Az analízis fejlődése, amint az gyakran máskor is előfordult, szorosan kötődött problémák megoldásához. A mi esetünkben az egyik ilyen probléma az **érintő** meghatározása volt.

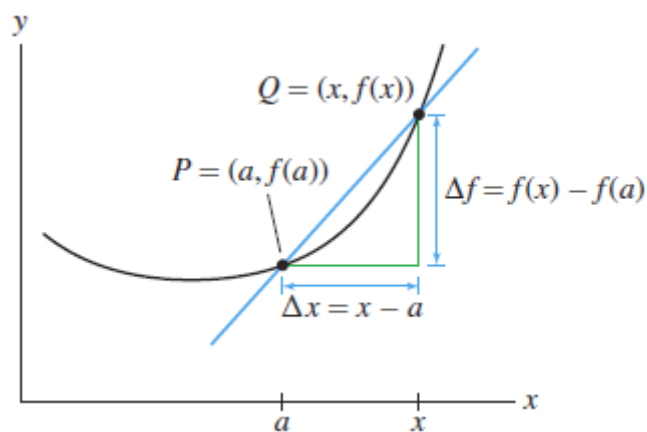


A fenti ábrán egy $f(x)$ függvény grafikonját és annak a $P(x, f(x))$ pontban megrajzolt „érintőjét” látjuk. Érezzük, hogy az $f(x)$ függvény megadása és a P pont lerögzítése meghatározza az ábrán pirossal jelölt egyenest. Ennek az egyenesnek is $y = mx + b$ az egyenlete, csak az a kérdés, hogy az m meredekség és a b konstans hogyan függ az $f(x)$ függvénytől és a $P(x, f(x))$ ponttól.



Ez az ábra azt mutatja, hogy az érintő a szelők határhelyzetének tekinthető: a P és Q pontokon átmenő szelő egyre „közelebb” van az érintőhöz, ahogy a Q pont egyre közelebb kerül P -hez. Ezek motiválják a következő definíciókat.

Legyen $a, x \in D_f$ az f függvény értelmezési tartományának két különböző elem, és tekintsük az f függvény grafikonján a $P(a, f(a))$ és a $Q(x, f(x))$ pontokat.



Definíció: Az $a \in D_f$ és $x \in D_f$ helyekhez tartozó **különbségi hányados** vagy **difference hányados** a

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

tört.

Tevékenység: Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény $a=1$ és x helyekhez tartozó különbségi hányadosát.

Definíció: Ha az $a \in D_f$ helyen **létezik** és **véges** az a és x helyekhez tartozó különbségi hányadosnak a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határértéke, akkor az f függvény **differenciálható** az $a \in D_f$ helyen. Ekkor a fenti határérték értékét $f'(a)$ jelöli, és ezt az $a \in D_f$ helyhez tartozó **differenciálmáhányadosnak** hívjuk, így tehát

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ha létezik $f'(a)$, akkor a fenti határérték létezése miatt, és azért, mert $f(a)$ is létezik, az a hely csak belső pontja lehet a D_f -nek.

Definíció: Azt az f' függvényt, amelyik az f függvény értelmezési tartományának azokban az a pontjaiban van értelmezve, ahol az f függvény differenciálható, és minden ilyen helyen az értéke az a -beli $f'(a)$ differenciálmáhányados, az f függvény **derivált függvényének** hívjuk.

A derivált függvény értelmezési tartomány tehát részhalmaza az eredeti függvény értelmezési tartományának.

A differenciálmáhányados segítségével az érintő problémája már megoldható.

Definíció: Ha f differenciálható az $a \in D_f$ helyen, akkor az f grafikonjához a $P(a, f(a))$ pontban húzható érintő **meredeksége** $f'(a)$, és az **érintő egyenes egyenlete**

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) = \underbrace{f'(a) \cdot x}_m + \underbrace{f(a) - a \cdot f'(a)}_b.$$

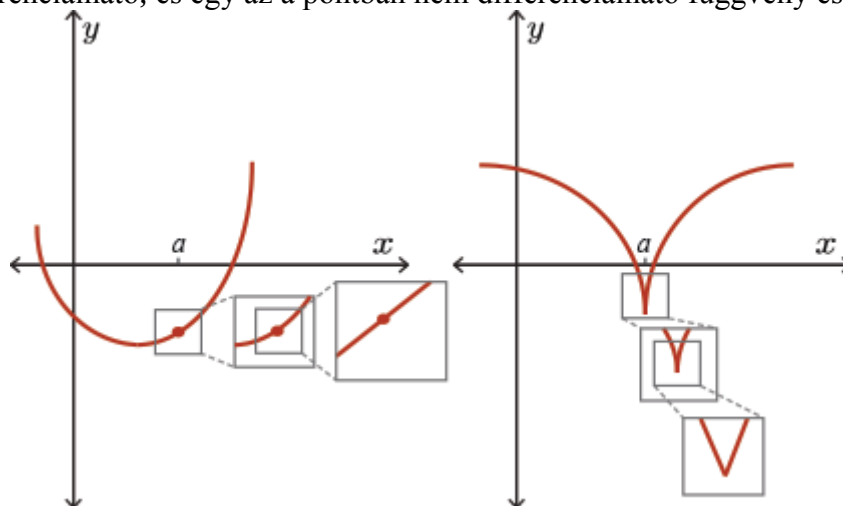
Ebből látható, hogy $f'(a) = 0$ esetén az érintő vízszintes, $f'(a) > 0$ esetén az érintő emelkedő egyenes, vagyis az a hely közelében a függvény növekszik, és $f'(a) < 0$ esetén pedig az érintő süllyedő egyenes, vagyis az a hely közelében a függvény csökken.

Tevékenység: Keressünk olyan elemi függvényt, amelynek minden érintője süllyedő.

Az érintő egyenes tekinthető egy lineáris $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ függvény grafikonjának. Ezt a g függvényt hívjuk az **f függvény a -beli linearizáltjának**. Elég egy pillantást vetni egy függvényre és annak egy érintőjét mutató ábrára, hogy világos legyen: a linearizált jól közelíti az érintési pontban a függvényt. Sőt, bármilyen bonyolult is az f függvény, egy nagyon egyszerű lineáris függvény szolgáltatja ezt a jó közelítést. Ez lehetőséget ad függvényértékek közelítő meghatározására.

Tétel: Ha az f függvény differenciálható a -ban, akkor folytonos is a -ban.

Sőt, ennél több is igaz. Az a pontbeli differenciálhatóság azt jelenti, hogy a függvény grafikonja sima az a pont környékén, nincs szakadása és nincs töréspontja. Ha közelről nézzük a grafikont, akkor az egyenesnek tűnik. Az alábbi ábrásor ezt szemlélteti egy a pontban differenciálható, és egy az a pontban nem differenciálható függvény esetén:



Az analízisben a fő célunk, hogy egy függvényről a hozzárendelési utasítás ismeretében minél több információt megismerjünk. Ki fog derülni, hogy ebben a fő segédeszköz a derivált függvény. Az f' derivált függvény vizsgálatával az eredeti f függvény számos, minket érdeklő tulajdonsága felderíthető. (Például a növekedés vagy fogyás, maximális vagy minimális értékek, a grafikon görbülésének jellege, stb.)

Tehát mindennek előtt arra van szükség, hogy minél több függvény derivált függvényét egyszerűen és gyorsan elő tudjuk állítani.

Az analízisben olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek az elemi függvényekből épülnek fel a különböző műveletek segítségével. Ebből is látható, hogy a későbbiekben az elemi függvények deriváltjainak alapvető jelentőségük lesz. A következő táblázatban megadjuk az elemi függvények deriváltjait.

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ konstans $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, n pozitív egész $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^{-n}$, n pozitív egész $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -nx^{-n-1}$ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$, n páros pozitív egész $D_f = [0, \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $D_{f'} = (0, \infty)$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$, n páratlan pozitív egész $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $D_{f'} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $D_f = (0, \infty)$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ $D_{f'} = (0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{x}$ $D_f = [0, \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $D_{f'} = (0, \infty)$
$f(x) = e^x$, $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$, $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \ln x$ $D_f = (0, \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$ $D_{f'} = (0, \infty)$
$f(x) = a^x$, $a > 0$ $D_f = (0, \infty)$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$ $D_f = (0, \infty)$
$f(x) = \log_a x$, $a > 0$ $D_f = (0, \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $D_f = (0, \infty)$
$f(x) = \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$, $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$, $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$, $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$f(x) = \arcsin x$ $D_f = [-1, 1]$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D_{f'} = (-1, 1)$
$f(x) = \arccos x$ $D_f = [-1, 1]$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D_{f'} = (-1, 1)$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$ $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$ $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = \operatorname{ch} x$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = \operatorname{sh} x$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $D_f = [1, \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $D_{f'} = (1, \infty)$
$f(x) = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $D_f = (-1, 1)$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $D_{f'} = (-1, 1)$
$f(x) = \operatorname{arch} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvénynek az $a = 1$ és az $x \in \mathbb{R}$ helyekhez tartozó különbségi hányadosát.

Megoldás: Mivel az f függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, létezik a fenti különbségi hányados, és:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1.$$

A különbségi hányadosnak általában kiszámoljuk a határértékét, így azt célszerű a legegyszerűbb formában felírni.

2. feladat: Számoljuk ki az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $a = 4$ helyhez tartozó differenciálhányadosát.

Megoldás: Tudjuk, hogy $D_f = [0, \infty)$, aminek a 4 belső pontja, és

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

így tehát $f'(4) = \frac{1}{4}$.

3. feladat: Hol veszi fel a nulla értéket az $f(x) = x - x^2$ függvény deriváltja.

Megoldás: Először elkészítjük a derivált függvényt. Legyen $a \in D_f$ tetszőleges valós szám.

Mivel $D_f = \mathbb{R}$ ez egyben belső pontja is D_f -nek. Ekkor

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - x^2 - (a - a^2)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) - (x^2 - a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) - (x + a)(x - a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (1 - (x + a)) = 1 - 2a. \end{aligned}$$

Mivel ez tetszőleges a számra igaz, azt kaptuk, hogy $f'(x) = 1 - 2x$, és a derivált függvény is az egész valós számok halmazán van értelmezve.

$f'(x) = 0$, ha $x = \frac{1}{2}$, tehát a derivált függvény egyedül az $\frac{1}{2}$ helyen veszi fel a nulla értéket.

4. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A függvényünk értelmezési tartománya $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, aminek minden pontja belső pont. Legyen $a \in D_f$ tetszőleges, ekkor

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{a - x}{ax}}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(x - a)}{ax(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-1}{ax} = -\frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

Ebből az következik, hogy $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, és $D_{f'} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, ugyan az, mint a D_f .

5. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x}$ derivált függvényét.

Megoldás: Most a $D_f = [0, \infty)$, aminek a 0 nem belső pontja, itt tehát f biztosan nem deriválható. Ha azonban $0 \neq a \in D_f$, azaz a pozitív szám, akkor

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(\sqrt{x} - \sqrt{a})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Tehát $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ és $D_{f'} = (0, \infty)$.

Az előző két feladatban szereplő függvények elemi függvények. Az elemi függvények deriváltjait tartalmazó táblázatban lévő deriváltak közül néhányat hasonlóan lehetne levezetni. A többséghez azonban további nevezetes határértékek tételek és egyéb tételek is szükségesek lennének.

6. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjának érintőjét az $a = 3$ helyen.

Megoldás: Határozzuk meg a függvény értékét az $a = 3$ helyen: $f(a) = f(3) = 9$. Az érintési pont koordinátái tehát $(3, 9)$.

Meghatározzuk $f'(a) = f'(3)$ értékét: az $a = 3$ belső pontja a $D_f = \mathbb{R}$ -nek, és

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a.$$

A differenciálhányados értéke az $a = 3$ helyen, azaz a keresett érintő meredeksége:

$$m = f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

Helyettesítsünk ezután az érintőt megadó $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ képletbe.

$$y = 6(x - 3) + 9$$

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy az érintő egyenlete: $y = 6x - 9$.

7. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^2 - 2x - 2$ függvény $a = 2$ -beli érintőjének egyenletét.

Megoldás: Helyettesítsük a függvénybe a megadott $a = 2$ értéket:

$f(a) = f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 2 = -2$. Az érintő tehát a $(2, -2)$ pontban érinti a függvény grafikonját.

A meredekség meghatározásához szükségünk van a derivált függvényre. (Valójában most is elég lenne $f'(2)$ értéke, de azt kiszámolni nem sokkal egyszerűbb, mint meghatározni a derivált függvényt, és venni annak 2-ben a helyettesítési értékét.) Az $a = 2$ belső pontja a $D_f = \mathbb{R}$ -nek, és

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x - 2 - (a^2 - 2a - 2)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 - a^2) - (2x - 2a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a) - 2(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} ((x + a) - 2) = 2a - 2. \end{aligned}$$

A derivált függvény tehát $f'(x) = 2x - 2$.

Helyettesítsünk ebbe $a = 2$ -t, így megkapjuk a meredekséget:

$$m = f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$

Részeredményeinket írjuk be az érintő $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ képletébe:

$$y = 2(x - 2) + (-2).$$

Végezzük el a műveleteket, és így megkapjuk az érintő egyenletének alábbi alakját:

$$y = 2x - 6.$$

8. feladat: Írjuk fel az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $m = 2$ meredekségű érintőjének egyenletét.

Megoldás: Most az érintőt nem azzal határozzuk meg, hogy melyik pontban érinti a grafikont, hanem azzal, hogy mennyi a meredeksége. Mivel az érintő felírásához szükség van az érintési pont két koordinátájára, először ezeket kell meghatározni.

Tudjuk, hogy a derivált függvény $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Azt az $a > 0$ számot keressük, amelyre a meredekség, azaz $f'(a)$ éppen 2. Ehhez megoldjuk az

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} = 2$$

egyenletet a -ra: a fenti képletből $\sqrt{a} = \frac{1}{4}$, amiből $a = \frac{1}{16}$. Tehát valójában az $a = \frac{1}{16}$ -beli

érintőről van szó. Mivel $f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4}$, az érintési pont két koordinátája $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$. Az érintő

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ képletébe helyettesítve

$$y = 2\left(x - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{4},$$

rendezve

$$y = 2x + \frac{1}{8}.$$

9. feladat: Írjuk fel az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek az $y = 4x - 9$ egyenesre merőleges érintőjének egyenletét.

Megoldás: Ismét az a helyzet, hogy nem ismerjük az érintési pont első koordinátáját. Azt meg kell határoznunk. Az érintő meredekségéről van információnk, hiszen, ha a keresett érintő merőleges a megadott $m^* = 4$ meredekségű egyenesre, akkor a meredeksége $m = -\frac{1}{4}$.

Ehhez arra kell emlékezni, hogy a síkon két egyenes akkor merőleges egymásra, ha a meredekségeik szorzata -1 . Így tehát azt az $a \neq 0$ számot keressük, amelyre $f'(a) = -\frac{1}{4}$.

Tudjuk, hogy $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, így az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4},$$

amiből $a^2 = 4$, azaz $a = \pm 2$, két megoldást kaptunk, tehát két ilyen érintő is van.

Ha az érintési pont első koordinátája $a = 2$, akkor az érintési pont második koordinátája $f(2) = \frac{1}{2}$, és ennek az első érintőnek az egyenlete

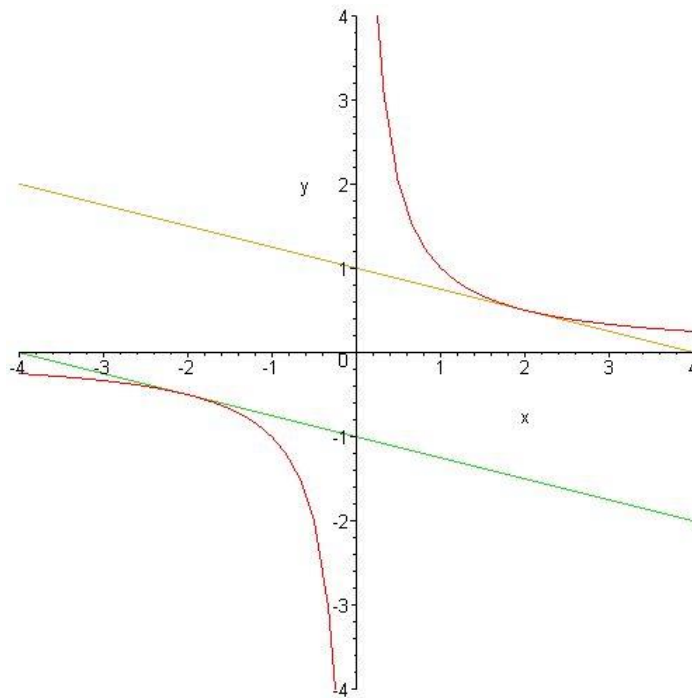
$$y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{x}{4} + 1.$$

Ha az érintési pont első koordinátája $a = -2$, akkor az érintési pont második koordinátája $f(-2) = -\frac{1}{2}$, és ennek a második érintőnek az egyenlete:

$$y = -\frac{1}{4}(x - (-2)) + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$y = -\frac{x}{4} - 1.$$



A fenti ábrán a függvényünket és a két érintőjét láthatjuk.

10. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvénynek azt az érintőjét, amelyik átmegy a $Q(-1, -3)$ ponton.

Megoldás: Ismét az érintési pont meghatározásával kell kezdenünk. Tudjuk, hogy az érintő egyenlete

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

szerkezetű, ha figyelembe vesszük f képletét is, akkor, mivel $f'(x) = 2x$,

$$y = 2a(x - a) + a^2.$$

Azt az a számot, vagy azokat az a számokat keressük, amelyekre ez az egyenes átmegy a Q ponton. Elvégezve az $x = -1$, $y = -3$ helyettesítést és rendezve

$$-3 = 2a(-1 - a) + a^2$$

$$-3 = -2a - a^2$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0.$$

Megoldva a kapott másodfokú egyenlete a -ra két értéket kapunk: $a = 1$ vagy $a = -3$.

Az $a = 1$ -beli érintő egyenlete az $y = 2a(x - a) + a^2$ képletből

$$y = 2(x - 1) + 1$$

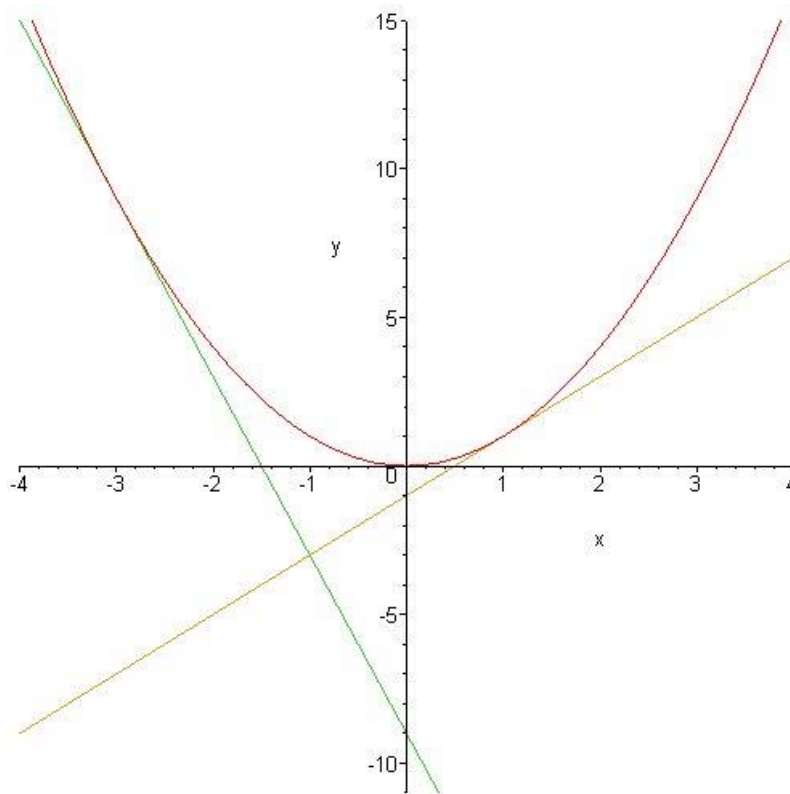
$$y = 2x - 1.$$

Ugyanígy az $a = -3$ -beli érintő egyenlete

$$y = -6(x - (-3)) + 9 = -6(x + 3) + 9$$

$$y = -6x - 9.$$

A függvényünket és a két érintőjét mutatja az alábbi ábra.



11. feladat: Az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény alkalmas linearizáltját felhasználva számoljuk ki közelítően $\sqrt[3]{8.12}$ értékét.

Megoldás: A linearizált az érintési pont közelében közelít jól. A 8 közel van 8.12-höz, ezért az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény $a=8$ -beli linearizáltját fogjuk használni $\sqrt[3]{8.12}$ közelítő értékének kiszámolására.

Szükségünk van az érintési pont második koordinátájára is: $f(a) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$, az érintési

pont tehát $(8, 2)$. Mivel $f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$, azt kapjuk, hogy a

meredekség $f'(a) = f'(8) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}$. Így az $a=8$ -beli linearizált

$$g(x) = \frac{1}{12}(x-8) + 2 = \frac{x}{12} + \frac{4}{3}$$

Ennek a függvénynek a 8.12 helyen vett értékével közelíthetjük $\sqrt[3]{8.12}$. Azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt[3]{8.12} \approx g(8.12) = \frac{8.12}{12} + \frac{4}{3} = 2.01.$$

Ha ezek után számológéppel is kiszámoljuk $\sqrt[3]{8.12}$ -t, akkor a 2.009950413 értéket kapjuk. Látható, hogy a linearizált felhasználásával kapott közelítésünk meglehetősen pontos.

12. feladat: Alkalmas linearizáltat felhasználva számoljuk ki közelítően $\sin(33^\circ)$ értékét.

Megoldás: Az analízisben a trigonometrikus függvények argumentumát radiánban kell megadni. Ezért először a 33° -ot átszámoljuk radiánra az $x_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180} x_{\text{fok}}$ képletet használva. De mivel a 33° radiánban megadott értékéhez közeli a érték is kell, hogy fel tudjuk írni az ottani linearizáltat, az átírást a következőképp csináljuk:

$$33^\circ = 30^\circ + 3^\circ = \frac{\pi}{180} (30 + 3) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60} = \frac{11\pi}{60} = 0.576,$$

(a radián mértékegységet nem írjuk ki). Innen már látjuk, hogy, mivel $\frac{\pi}{60}$ kicsi, az

$f(x) = \sin x$ függvény a $\frac{\pi}{6}$ -beli linearizáltját használhatjuk a közelítéshez. Mivel

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \text{ és } f'(x) = \cos x, \text{ a meredekség } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Ezután már}$$

felírhatjuk a linearizált képletét:

$$g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{12}.$$

Ezután a keresett közelítő érték:

$$\sin\left(\frac{11\pi}{60}\right) \approx g\left(\frac{11\pi}{60}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{11\pi}{60} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{12} = 0.5453449841.$$

Ha számológéppel számoljuk $\sin(33^\circ)$ -ot, akkor a 0.544639035 értéket kapjuk. Látható, hogy a közelítésünk most is elég pontos.

13. feladat: Hol metszi az $f(x) = x^2 - 8x + 19$ függvény a $a = 5$ -beli érintője az x tengelyt?

Megoldás: Először felírjuk az érintő egyenletét. Mivel $f(a) = f(5) = 4$, az érintési pont az $(5, 4)$ koordinátájú pont. Szükségünk van $f'(5)$ értékére. Mivel f nem elemi függvény még nem ismerjük a deriváltját. Később a derivált függvény egy adott helyen vett értékét mindig úgy fogjuk kiszámolni, hogy meghatározzuk a derivált függvényt, és vesszük annak a szóban forgó helyettesítési értékét. Ehhez azonban a deriválási szabályok ismeretére van szükség, ami a következő fejezet témája. Ezért most a definíciót használva számoljuk ki $f'(5)$ értékét:

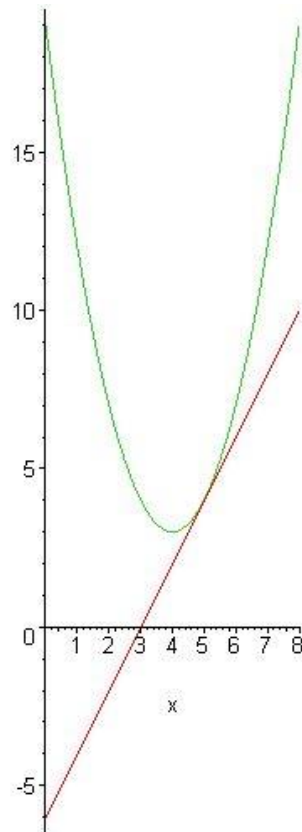
$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 19 - 4}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 3)(x - 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x - 3) = 2, \end{aligned}$$

így az érintő meredeksége $m = f'(a) = f'(5) = 2$.

Ezek felhasználásával az érintő egyenlete:

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x - a) + f(a) = \\ &= 2(x - 5) + 4 = 2x - 6. \end{aligned}$$

Az $y = 2x - 6$ egyenes ott metszi az x tengelyt, ahol az $y = 0$. A $2x - 6 = 0$ egyenletből $x = 3$. Tehát az $f(x) = x^2 - 8x + 19$ függvény a $a = 5$ -beli érintője az $(3, 0)$ koordinátájú pontban metszi az x tengelyt. Az alábbi ábrán a függvényünket és az érintőjét láthatjuk.



14. feladat: Hol metszi az $f(x) = \sqrt{x+3}$ függvény a $a = -2$ -beli érintője az x és az y tengelyt?

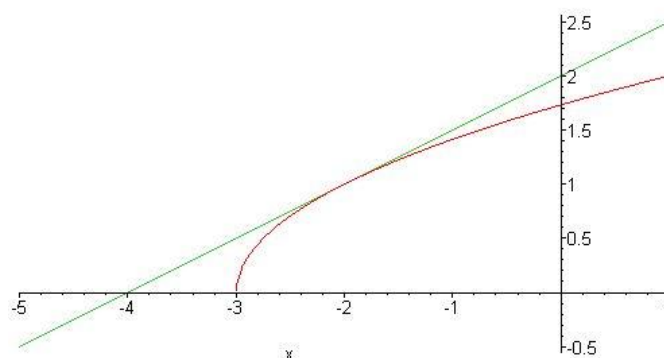
Megoldás: Úgy, mint az előző feladatban, az érintő egyenletének felírásával kezdünk. Mivel $f(-2) = 1$, az érintési pont $(-2, 1)$. Ezen kívül az érintő felírásához $f'(-2)$ értékére van szükségünk, amit most is a definíció alapján határozzunk meg. (f összetett függvény, deriválásával a következő fejezetben foglalkozunk.)

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3} - 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{x+3} - 1)(\sqrt{x+3} + 1)}{(x + 2)(\sqrt{x+3} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)}{(x + 2)(\sqrt{x+3} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Az érintő meredeksége tehát $m = f'(a) = f'(-2) = \frac{1}{2}$. Ezeket felhasználva az érintő egyenlete

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x - a) + f(a) = \\ &= \frac{1}{2}(x - (-2)) + 1 = \frac{x}{2} + 2. \end{aligned}$$

Az $y = 0$ egyenletből, azaz az $\frac{x}{2} + 2 = 0$ egyenletből $x = -4$, vagyis az érintő az x tengelyt a $(-4, 0)$ koordinátájú pontban metszi. Az y tengellyel való metszéspontot megkapjuk, ha az érintő $y = \frac{x}{2} + 2$ képletében az x helyére nullát írunk, így $y = 2$ adódik, tehát az érintő az y tengelyt a $(0, 2)$ koordinátájú pontban metszi. A függvényünket és az érintőjét mutatja az alábbi ábra.



Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Mi az $f(x) = \frac{3}{x}$ függvény $x_0 = 2$ -beli érintőjének egyenlete?

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$y = \frac{3}{4}x + 3$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 3 \text{ (X)}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

2. kérdés: Mi az $f(x) = e^x + x$ függvény $x_0 = 0$ -beli érintőjének egyenlete?

$$y = 2x + 1 \text{ (X)}$$

$$y = x + 2$$

$$y = 2x - 1$$

$$y = ex + 1$$

3. kérdés: Mi az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény $m = -2$ meredekségű érintőjének egyenlete?

$$y = -x + 2$$

$$y = -x + 2$$

$$y = -2x + 3 \text{ (X)}$$

$$y = -2x + 4$$

4. kérdés: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ függvény $x_0 = 4$ -beli linearizáltját, és ezt

felhasználva adjuk meg $\frac{1}{\sqrt{5}}$ közelítő értékét.

$$\text{A linearizált } y = -\frac{1}{4}x + \frac{55}{32}, \text{ s ebből } \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.46875.$$

$$\text{A linearizált } y = -\frac{1}{4}x + \frac{27}{16}, \text{ s ebből } \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4375.$$

$$\text{A linearizált } y = -\frac{1}{16}x + \frac{25}{32}, \text{ s ebből } \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.46875.$$

$$\text{A linearizált } y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}, \text{ s ebből } \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4375. \text{ (X)}$$

5. kérdés: Határozzuk meg az $f(x) = \ln x$ függvény $x_0 = e$ -beli linearizáltját, és ezt felhasználva adjuk meg $\ln 3$ közelítő értékét 4 tizedesre kerekítve.

$$\text{A linearizált } y = \frac{x}{2e} + \frac{1}{2}, \text{ s ebből } \ln 3 \approx 1.0518.$$

$$\text{A linearizált } y = \frac{x}{e}, \text{ s ebből } \ln 3 \approx 1.1036. \text{ (X)}$$

$$\text{A linearizált } y = \frac{2x}{e} - 1, \text{ s ebből } \ln 3 \approx 1.2073.$$

$$\text{A linearizált } y = \frac{x}{4e} + \frac{3}{4}, \text{ s ebből } \ln 3 \approx 1.0259.$$

Elméleti összefoglaló

Amikor meghatározzuk egy függvény derivált függvényét úgy is gondolhatunk erre a folyamatra, mint egy új függvényműveletre, amelyik az eredeti $f(x)$ függvényből elkészíti az $f'(x)$ derivált függvényt. És sokszor hasznos így, függvényműveletként gondolni a deriválásra. Persze ekkor rögtön adódik a kérdés, hogy ennek az új függvényműveletnek mi a kapcsolata a korábban megismert függvényműveletekkel. Ezeket a kapcsolatokat megfogalmazó tételeket hívjuk **deriválási szabályoknak**. Ebben a leckében megismerkedünk a deriválási szabályokkal, és begyakoroljuk a derivált függvény ezeken alapuló meghatározását. Ez sokkal gyorsabb és egyszerűbb, mint a definíció alkalmazása, és nagyon fontos lesz a későbbiek során.

Tétel: Legyen c tetszőleges konstans, az f függvény pedig differenciálható az x helyen, ekkor a $c \cdot f$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

Úgy szoktunk hivatkozni erre a tételre, hogy a konstans szorzó deriváláskor kiemelhető.

Tétel: Legyen az f és a g függvény differenciálható az x helyen, ekkor a az $f + g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Ennek a tételnek a tömör megfogalmazása az, hogy összeg tagonként deriválható. A tétel nem csak két függvény, hanem tetszőleges számú, véges sok függvény összegének deriválásakor is érvényben marad: ha az $f_1, f_2, \dots, f_n$ függvények mindegyike differenciálható az x helyen, akkor az $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x).$$

Ezekből a tételekből könnyen következik, hogy f és a g függvény differenciálható az x helyen, ekkor a az $f - g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Sőt, a legáltalánosabban ezek a tételek így fogalmazhatók meg egy tételben: ha az $f_1, f_2, \dots, f_n$ függvények mindegyike differenciálható az x helyen, $c_1, c_2, \dots, c_n$ pedig tetszőleges konstansok, akkor $c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + \dots + c_n \cdot f_n$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \dots + c_n \cdot f_n(x))' = c_1 \cdot f_1'(x) + c_2 \cdot f_2'(x) + \dots + c_n \cdot f_n'(x).$$

Ezek a tételek együtt azt jelentik, hogy a **deriválás lineáris művelet**.

Tétel: Legyen az f és a g függvény differenciálható az x helyen, ekkor az $f \cdot g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Ez a tétel is általánosítható, például három tényező esetén így néz ki:

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x).$$

Figyeljük meg, hogy mivel az összeadás és a szorzás kommutatív művelet, az eddigi képletek nem változnak, ha azokban a függvényeket tetszőleges sorrendben írjuk.

Az osztás nem kommutatív művelet, ezért a törtfüggvény deriválására vonatkozó képlet nem is szimmetrikus a számlálóban és a nevezőben.

Tétel: Legyen az f és a g függvény differenciálható az x helyen, és $g(x) \neq 0$, Ekkor a az $\frac{f}{g}$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

A legfontosabb deriválási szabály az összetett függvény deriválási szabálya, ezt használjuk a leggyakrabban.

Tétel: Legyen az f függvény differenciálható az x helyen, a g függvény differenciálható az $f(x)$ helyen. Ekkor a $g \circ f$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Természetesen ez is általánosítható többtenyezős kompozíciókra. Három tényező esetén a tétel a következő: ha az f függvény differenciálható az x helyen, a g függvény differenciálható az $f(x)$ helyen, a h függvény pedig differenciálható a $g(f(x))$ helyen, akkor a $h \circ g \circ f$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(h(g(f(x))))' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ezt, és az előző tételt is, **láncszabálynak** hívják.

A függvény inverzének a képzése is tekinthető függvenyműveletnek, így persze van az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel is. A gyakorlatban azonban ezt ritkán alkalmazzuk, helyette elkészítjük az inverz függvényt, és alkalmazzuk a korábbi deriválási szabályokat.

Egy f függvény f' deriváltja maga is egy függvény. Amennyiben ez deriválható, akkor tekinthetjük ennek a deriváltját, amit f'' fog jelölni, és ezt f **második deriváltjának** hívjuk. Ennek deriváltja f harmadik deriváltja, és így tovább. Ezeknek a magasabb rendű deriváltaknak fontos szerepe van a felsőbb matematikában.

Kidolgozott feladatok

A következő feladatokban csak a derivált függvény képletének az előállításával foglalkozunk, és nem vizsgáljuk annak értelmezési tartományát. Fel fogjuk használni az elemi függvények korábban már megismert deriváltjait.

15. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 5x^4$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Az f függvény egy konstans és egy hatványfüggvény szorzata, ezért a konstans szorzó a deriválás művelete élé kiemelhető:

$$f'(x) = (5x^4)' = 5(x^4)' = 5(4x^3) = 20x^3.$$

16. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + \ln x$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Az f függvény kéttagú összeg, amit tagonként deriválhatunk, így:

$$f'(x) = (x^2 + \ln x)' = (x^2)' + (\ln x)' = 2x + \frac{1}{x}.$$

17. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \sin x - \cos x$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: $f'(x) = (\sin x)' - (\cos x)' = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x.$

18. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} + 2e^x + \frac{3}{x}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Felhasználjuk, hogy a deriválás lineáris, a gyököt és a törtet pedig felírjuk hatványként, így minden derivált könnyen felismerhető elemi függvény deriváltja lesz:

$$f'(x) = \left(x^3 - 3\sqrt{x} + 2e^x + \frac{3}{x} \right)' = (x^3)' - 3 \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' + 2(e^x)' + 3(x^{-1})' =$$

$$\begin{aligned}
&= 3x^2 - 3 \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) + 2e^x + 3(-x^{-2}) = \\
&= 3x^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + 2e^x - \frac{3}{x^2}.
\end{aligned}$$

Deriváláskor gyakori, hogy a törteket és a gyököket hatványokként kezeljük.

19. feladat: Határozzuk meg az $f(t) = (2t - 1)^2$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Végezzük el a négyzetre emelést. Ekkor kapjuk, hogy $f(t) = 4t^2 - 4t + 1$. Ezt felhasználva

$$f'(t) = (4t^2 - 4t + 1)' = 4(t^2)' - 4(t)' + (1)' = 8t - 4.$$

Később ezt a függvény a szorzatfüggvény és az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva is deriválni fogjuk.

20. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 2^x - \ln 2 - \sqrt[4]{x^3}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Persze majd tagonként fogunk deriválni, de először a negyedik gyököt hatványként írjuk fel. Azután vegyük figyelembe, hogy $\ln 2$ konstans, így a deriváltja 0, és nem $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2^x - \ln 2 - \sqrt[4]{x^3})' = (2^x)' - (\ln 2)' - \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \\
&= 2^x \ln 2 - \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}},
\end{aligned}$$

felhasználva az a^x és az x^a elemi függvények deriváltjait.

Ellenőrző kérdések:

6. kérdés: Mi az $f(x) = 3x^4$ függvény derivált függvénye?

$$3x^3.$$

$$12x^4.$$

$$12x^3 \text{ (X).}$$

$$34x^3.$$

7. kérdés: Mi az $f(t) = \frac{1}{t} - \operatorname{ctgt}$ függvény derivált függvénye?

$$\ln t - \frac{1}{\sin^2 t}.$$

$$-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{\sin^2 t} \text{ (X).}$$

$$-\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2 t}.$$

$$\frac{1}{t^2} - \operatorname{tgt}.$$

8. kérdés: Mi az $f(x) = e^{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ függvény derivált függvénye?

$$e^{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

$$e^{x+1} - 4\sqrt{x}.$$

$$ee^x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$ee^x + \frac{1}{\sqrt{x^3}} \text{ (X).}$$

9. kérdés: Mi az $f(x) = x^3 - 2 \cdot 3^x - 4x^{2.1}$ függvény derivált függvénye?

$$3x^2 - 2x \cdot 3^{x-1} - 8.2x^{1.1}.$$

$$3x^2 - 2 \cdot 3^{x-1} \ln 3 - 8.2x^{1.1}.$$

$$3x^2 - 2 \cdot 3^{x-1} \ln 3 - 8.2x^{1.1}.$$

$$3x^2 - 2 \cdot 3^x \ln 3 - 8.2x^{1.1} \text{ (X).}$$

10. kérdés: Mi az $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - x^{-2}$ függvény derivált függvénye?

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^3} \text{ (X).}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{2}{x^3}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{2}{x^3}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{3}{x^2}.$$

Kidolgozott feladatok:

21. feladat: Határozzuk meg az $f(t) = (2t - 1)^2$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A függvényünk így is írható: $f(t) = (2t - 1)(2t - 1)$. Így, a szorzatfüggvény deriválási szabálya alapján

$$\begin{aligned} f'(t) &= (2t - 1)'(2t - 1) + (2t - 1)(2t - 1)' = 2(2t - 1) + (2t - 1)2 = \\ &= 8t - 4. \end{aligned}$$

22. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = (x^2 + x)(1 - 2x^2)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Mivel a függvényünk szorzatfüggvény, alkalmazhatjuk a szorzatfüggvény deriválási szabályát:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + x)'(1 - 2x^2) + (x^2 + x)(1 - 2x^2)' = \\ &= (2x + 1)(1 - 2x^2) + (x^2 + x)(-4x) = \\ &= 1 + 2x - 6x^2 - 8x^3, \end{aligned}$$

De eljárhatunk úgy is, hogy először elvégezzük a függvényünket definiáló képletben a szorzást: $f(x) = x + x^2 - 2x^3 - 2x^4$. Ezután deriválás szempontjából már egyszerűbb a helyzet.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x + x^2 - 2x^3 - 2x^4)' = (x)' + (x^2)' - 2(x^3)' - 2(x^4)' = \\ &= 1 + 2x - 6x^2 - 8x^3. \end{aligned}$$

Természetesen ugyanaz a végeredmény, mint az előbb. Látjuk, gyakran előfordul, hogy egy deriválás több úton is elvégezhető.

A továbbiakban az összegek deriváltját, ha a tagok már elemi függvények, a deriválások kijelölése nélkül, közvetlenül felírjuk.

23. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = (3x - \sqrt{x})(e^x + 1)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Most nem célszerű elvégezni a beszorzást, mert a keletkezett szorzatok nem egyszerűsíthetők, és így kétszer is alkalmazni kéne a szorzatfüggvény deriválási szabályát.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x - \sqrt{x})'(e^x + 1) + (3x - \sqrt{x})(e^x + 1)' = \\ &= \left(3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(e^x + 1) + (3x - \sqrt{x})e^x. \end{aligned}$$

Felmerül, hogy az utolsó képletben el kell-e végezni a beszorzásokat. Amikor csak az a feladat, hogy határozzuk meg egy függvény derivált függvényét, a deriválás elvégzése után nem fogjuk a lehetséges összevonásokat elvégezni. Ez így gyorsabb és egyszerűbb. Később, amikor a derivált függvénnyel további számításokat fogunk végezni, más lesz a helyzet.

24. feladat: Határozzuk meg az

$f(x) = (\operatorname{tg} x + \sin 30 - x)(\sqrt[3]{x} - 2^x)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Először is a $\sin 30$ egy konkrét szám, konstans, és a 30 radiánban értendő; az analízisben a trigonometrikus függvények argumentuma mindig radián van megadva. Így $\sin 30 \approx -0.9880316241$, és nem 0.5, amennyi a 30° szinusza. Tehát $\sin 30$ deriváltja nulla, továbbá

$$f'(x) = (\operatorname{tg} x + \sin 30 - x)' (\sqrt[3]{x} - 2^x) + (\operatorname{tg} x + \sin 30 - x) (\sqrt[3]{x} - 2^x)' =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) (\sqrt[3]{x} - 2^x) + (\operatorname{tg} x + \sin 30 - x) \left(\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - 2^x \ln 2 \right).$$

25. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \lg x$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A függvényünk három tényezős szorzat, de már ismerjük egy ilyen függvény deriváltjára vonatkozó képletet, az alapján

$$f'(x) = (x^2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \lg x)' = (x^2)' \cdot \operatorname{sh} x \cdot \lg x + x^2 \cdot (\operatorname{sh} x)' \cdot \lg x + x^2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot (\lg x)' =$$

$$= 2x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \lg x + x^2 \cdot \operatorname{ch} x \cdot \lg x + x^2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10}.$$

26. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = (x^e + 1)(x + \operatorname{arctg} x)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Ebben a feladatban elkerülhetetlen a szorzatfüggvény deriválási szabályának többszöri alkalmazása. Figyeljük meg, ahogyan először csak kijelöljük a szükséges deriválásokat.

$$f'(x) = (x^e + 1)' (x + \operatorname{arctg} x) + (x^e + 1) (x + \operatorname{arctg} x)' =$$

$$= (x^e)' (x + \operatorname{arctg} x) + (x^e + 1) (x + \operatorname{arctg} x)' =$$

$$= \left((x)' e^x + x (e^x)' \right) (x + \operatorname{arctg} x) + (x^e + 1) (x + \operatorname{arctg} x)'.$$

Ezután már könnyen elvégezhetjük a kijelölt deriválásokat, és azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = (e^x + x e^x) (x + \operatorname{arctg} x) + (x^e + 1) \left(1 + \frac{1}{1 + x^2} \right).$$

Ellenőrző kérdések:

11. kérdés: Mi az $f(x) = x(\sin x + 1)$ függvény derivált függvénye?

$$\sin x + x \cos x.$$

$$\cos x + 1 + x \cos x.$$

$$\sin x + x + x \cos x$$

$$\sin x + 1 + x \cos x (X).$$

12. kérdés: Mi az $f(x) = (x^2 - 2x)(1 - 3x^2)$ függvény derivált függvénye?

$$-12x^3 + 18x^2 - 2x - 2.$$

$$-12x^3 + 18x^2 + 2x - 2 (X).$$

$$-12x^3 + 18x^2 + 2x + 2.$$

$$-18x^3 + 12x^2 + 2x - 2.$$

13. kérdés: Mi az $f(x) = (\ln x - x)(x - \ln x)$ függvény derivált függvénye?

$$2 - \frac{2 \ln x}{x} - 2x + 2 \ln x (X).$$

$$2 - \frac{\ln x}{x} - 2x + 2 \ln x.$$

$$2 - \frac{2\ln x}{x} - 2x + \ln x.$$

$$2 - \frac{2\ln x}{x} - x + 2\ln x.$$

14. kérdés: Mi az $f(x) = (\sqrt{x} + 2)(x^2 - 1)$ függvény derivált függvénye?

$$\frac{5\sqrt{x^3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 4x \text{ (X).}$$

$$\frac{5\sqrt{x^3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 4x.$$

$$\frac{5\sqrt{x^3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x.$$

$$\frac{5\sqrt{x^3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4x.$$

15. kérdés: Mi az $f(x) = (2x + 1)x^4(1 - x^2)$ függvény derivált függvénye?

$$4x^3 + 10x^4 + 6x^5 - 14x^6.$$

$$4x^3 + 10x^4 - 6x^5 + 14x^6.$$

$$4x^3 + 10x^4 - 6x^5 - 14x^6 \text{ (X).}$$

$$4x^3 - 10x^4 - 6x^5 - 14x^6.$$

16. kérdés: Mi az $f(x) = (3x - 1)(x \ln x + 2)$ függvény derivált függvénye?

$$6x \ln x - \ln x + 5 + 2x$$

$$6x \ln x - \ln x + 5 + 3x \text{ (X).}$$

$$6x \ln x - \ln x - 5 + 3x.$$

$$6 \ln x - x \ln x + 5 + 3x.$$

Kidolgozott feladatok:

27. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A törtfüggvény deriválási szabályát kell alkalmazni:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x}{3x+1} \right)' = \frac{(2x)'(3x+1) - (2x)(3x+1)'}{(3x+1)^2} = \\ &= \frac{2(3x+1) - (2x)3}{(3x+1)^2} = \frac{2}{(3x+1)^2}. \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy a számlálóban elvégeztük az összevonásokat, de a nevezőben a négyzetre emelést nem, ezt máskor sem fogjuk elvégezni, csak ha egytagú a nevező, így jobban kezelhető a kapott formula.

28. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A konstans számlálójú törtet, mint hamarosan látni fogjuk, gyakran célszerűbb összetett függvényként deriválni. De persze lehet törtként is, mint most is.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{3}{\sqrt{x}+1} \right)' = \frac{(3)'(\sqrt{x}+1) - 3(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2} = \\ &= \frac{0 \cdot (\sqrt{x}+1) - 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{-3}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}. \end{aligned}$$

Általában is

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}.$$

29. feladat: Számoljuk ki $f'(1)$ értékét, ha $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2}$.

Megoldás: Először meghatározzuk f derivált függvényét, majd vesszük annak a helyettesítési értékét az 1 helyen. Hogy ne kelljen kétszer alkalmazni a tört deriválási szabályt közös

nevezőre hozzuk a függvényünk: $f(x) = \frac{x^2 + (x+1)^2}{(x+1)x^2} = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2}$. Most már a derivált

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2} \right)' = \frac{(2x^2 + 2x + 1)'(x^3 + x^2) - (2x^2 + 2x + 1)(x^3 + x^2)'}{(x^3 + x^2)^2} = \\ &= \frac{(4x + 2)(x^3 + x^2) - (2x^2 + 2x + 1)(3x^2 + 2x)}{(x^3 + x^2)^2} = \\ &= \frac{4x^4 + 2x^3 + 4x^3 + 2x^2 - (6x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 4x^3 + 4x^2 + 2x)}{(x^3 + x^2)^2} = \\ &= \frac{-2x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 2x}{x^4(x+1)^2} = \frac{-2x^3 - 4x^2 - 5x - 2}{x^3(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Ebből pedig $f'(1) = -\frac{13}{4}$.

30. feladat: Számoljuk ki $g'(2)$ értékét ha $f(2) = -1$, $f'(2) = 2$, és $g(x) = \frac{2x+1}{f(x)}$.

Megoldás: A g deriváltjával kezdünk:

$$g'(x) = \left(\frac{2x+1}{f(x)} \right)' = \frac{(2x+1)'f(x) - (2x+1)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{2f(x) - (2x+1)f'(x)}{f^2(x)}$$

Ebből pedig, x helyére 2 -t írva, a keresett $g'(2)$ helyettesítési értékre kapjuk, hogy

$$g'(2) = \frac{2(-1) - 5 \cdot 2}{(-1)^2} = -12.$$

31. feladat: Legyen $h(x) = \frac{f(x)+1}{g(x)-1}$. Számoljuk ki $h'(1)$ értékét, ha $f(1)=1$, $f'(1)=2$ és $g(1)=-2$, $g'(1)=-1$.

Megoldás: Mivel $h'(x) = \left(\frac{f(x)+1}{g(x)-1} \right)' = \frac{f'(x) \cdot (g(x)-1) - (f(x)+1) \cdot g'(x)}{(g(x)-1)^2}$, azt kapjuk, hogy

$$h'(1) = \frac{2(-3) - 2(-1)}{(-3)^2} = -\frac{4}{9}.$$

Ellenőrző kérdések:

17. kérdés: Mi az $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ függvény derivált függvénye?

$$\begin{aligned} & \frac{-2}{(x+1)^2} \\ & \frac{2}{x^2+1} \\ & \frac{2}{x^2-1} \\ & \frac{2}{(x+1)^2} \quad (X) \end{aligned}$$

18. kérdés: Mi az $f(x) = \frac{-2}{1-\sqrt{x}}$ függvény derivált függvénye?

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2} \quad (X) \\ & -\frac{\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})^2} \\ & \frac{x}{(1-\sqrt{x})^2} \\ & \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2} \end{aligned}$$

19. kérdés: Mennyi $f'(0)$ értéke, ha $f(x) = \frac{x}{e^x + x}$?

- 0
- 1 (X)
- 1
- 2

20. kérdés: Mennyi $g'(1)$ értéke ha $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, és $g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + x}$.

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{4}$ (X)
- $-\frac{1}{4}$
- $\frac{3}{4}$

21. kérdés: Legyen $h(x) = \frac{f(x) + x}{g(x) + 1}$. Számoljuk ki $h'(1)$ értékét, ha $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$ és $g(1) = 2$, $g'(1) = 2$.

- $\frac{5}{9}$ (X)
- $\frac{4}{9}$
- $-\frac{4}{9}$
- $-\frac{5}{9}$

Kidolgozott feladatok:

32. feladat: Határozzuk meg az $h(t) = (2t - 1)^2$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Vegyük észre, hogy $h(t)$ összetett függvény: $h(t) = g(f(t))$, ha $f(t) = 2t - 1$ és $g(t) = t^2$. Ezzel a választással $f'(t) = 2$, $g'(t) = 2t$. Ezért az összetett függvény deriválási szabály alapján

$$\begin{aligned} h'(t) &= (g(f(t)))' = g'(f(t)) \cdot f'(t) = \\ &= 2 \cdot f(t) \cdot 2 = 2 \cdot (2t - 1) \cdot 2 = 8t - 4. \end{aligned}$$

33. feladat: Határozzuk meg az $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: $h(x)$ most is összetett függvény, hiszen $h(x) = g(f(x))$, ha $f(x) = 1-x^2$, és $g(x) = \sqrt{x}$. Tudjuk, hogy $f'(x) = -2x$ és $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Így tehát

$$\begin{aligned} h'(x) &= (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

34. feladat: Határozzuk meg az $h(x) = \sin(x^2 - x)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: $h(x)$ ismét $h(x) = g(f(x))$ szerkezetű összetett függvény az $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = \sin x$ választással. Mivel $f'(x) = 2x - 1$ és $g'(x) = \cos x$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} h'(x) &= (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \\ &= \cos(f(x)) \cdot (2x - 1) = \cos(x^2 - x) \cdot (2x - 1). \end{aligned}$$

35. feladat: Határozzuk meg az $h(x) = \ln(x + \sqrt{x})$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Most $h(x) = g(f(x))$, ha $f(x) = x + \sqrt{x}$ és $g(x) = \ln x$. De mint tudjuk $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, továbbá $g'(x) = \frac{1}{x}$. Ezeket felhasználva

$$\begin{aligned} h'(x) &= (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \\ &= \frac{1}{f(x)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

36. feladat: Határozzuk meg az $h(x) = \frac{1}{\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^2}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Ahogy említettük, a konstans számlálójú törteket célszerűbb összetett függvényként deriválni. Ennek érdekében átírjuk a függvényünket

$$h(x) = \frac{1}{\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^2} = \left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{-2}$$

alakba. Innen leolvasható, hogy $h(x) = g(f(x))$ szerkezetű összetett függvény az

$f(x) = x^3 - \frac{2}{x}$, $g(x) = x^{-2}$ választással. Ekkor $f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^2}$, és $g'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

Ezek alapján

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = \\
 &= -\frac{2}{(f(x))^3} \cdot \left(3x^2 + \frac{2}{x^2}\right) = \\
 &= -\frac{2}{\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^3} \cdot \left(3x^2 + \frac{2}{x^2}\right).
 \end{aligned}$$

37. feladat: Legyen $h(x) = (x^2 - 2x)^{12}$. Milyen x -re lesz $h'(x) = 0$?

Megoldás: Az összetett függvény deriválási szabályát addig célszerű gyakorolni, hogy a kompozíció tényezőinek felírására már ne is legyen szükség. Most például a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \left((x^2 - 2x)^{12}\right)' = 12(x^2 - 2x)^{11} \cdot (x^2 - 2x)' = \\
 &= 12(x^2 - 2x)^{11} \cdot (2x - 2).
 \end{aligned}$$

Most még kicsit átalakítjuk $h'(x)$ képletét, hogy a gyökeket könnyen leolvashassuk.

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= 12(x^2 - 2x)^{11} \cdot (2x - 2) = \\
 &= 12(x(x - 2))^{11} \cdot 2 \cdot (x - 1) = \\
 &= 24x^{11}(x - 2)^{11}(x - 1).
 \end{aligned}$$

Mivel egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője az, azt kapjuk, hogy $h'(x) = 0$, ha $x = 0$, vagy $x = 2$, vagy $x = 1$. Mivel a h függvény mindenütt értelmezve van, mind a három szám megoldás. (A nulla és a kettő tizenegyszeres gyök, az egy egyszeres.)

38. feladat: Legyen $h(x) = \ln^2(x^2 - 1)$. Milyen x -re lesz $h'(x) = 0$?

Megoldás: Kezdjük a derivált függvénnyel. Mivel

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= 2\ln(x^2 - 1) \cdot (\ln(x^2 - 1))' = \\
 &= 2\ln(x^2 - 1) \cdot \frac{1}{x^2 - 1} \cdot (x^2 - 1)' = 2\ln(x^2 - 1) \cdot \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x = 4x \frac{\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $\ln 1 = 0$, így ennek a szorzatnak három gyöke van: a $-\sqrt{2}$, a nulla és a $\sqrt{2}$. De azt is tudjuk, hogy a derivált függvény értelmezési tartománya, a definíció alapján, az eredeti függvény értelmezési tartományának részhalmaza. Akkor is, ha a derivált képletének lehetséges legbővebb értelmezési tartománya ennél bővebb.

Mivel a h függvény nincs értelmezve a nullában, ezért a feladat kérdésére az a válasz, hogy $h'(x) = 0$, ha $x = \pm\sqrt{2}$.

39. feladat: Határozzuk meg az $s(x) = \sqrt{\ln(1 - 2x^3)}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Ez a függvény egy háromszorosan összetett függvény: $s(x) = h(g(f(x)))$, ha $h(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln x$, és $f(x) = 1 - x^3$. Ezeknek a deriváltja rendre:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad g'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -3x^2.$$

A láncszabály alapján $s'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Vegyük azt is figyelembe, hogy, leolvasva az s képletéről, $g(f(x)) = \ln(1 - x^3)$. Ezek alapján:

$$\begin{aligned} s'(x) &= h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g(f(x))}} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\ln(1-x^3)}} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot (-3x^2). \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy az utolsó képletben zárójelbe tettük a $-3x^2$ tényezőt. Ha ezt nem tettük volna, és a pontot sem írtuk volna ki, amit amúgy nem is kötelező, a képlet hibás lenne.

40. feladat: Határozzuk meg az $s(x) = \sin(\sqrt{e^x - x})$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Most is egy háromszorosan összetett függvénnyel van dolgunk, persze újra a láncszabályt fogjuk alkalmazni. Mivel $(\sin x)' = \cos x$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, és végül

$(e^x - x)' = e^x - 1$, kapjuk, hogy

$$s'(x) = \cos(\sqrt{e^x - x}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{e^x - x}} \right) \cdot (e^x - 1).$$

41. feladat: Legyen $f(x) = -2x^3 + x^2 - 6x - 3$. Határozzuk meg $f''(x)$ -et.

Megoldás: Először meghatározzuk az $f'(x)$ derivált függvényt.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x^3 + x^2 - 6x - 3)' = \\ &= -6x^2 + 2x - 6. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = \\ &= (-6x^2 + 2x - 6)' = \\ &= -12x + 2. \end{aligned}$$

42. feladat: Legyen $f(x) = x^2 \cos(2x)$. Határozzuk meg $f''(x)$ -et.

Megoldás: Most, a szorzat deriválási szabályát alkalmazva,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x^2 \cos(2x))' = \\
 &= (x^2)' \cos(2x) + x^2 (\cos(2x))' = \\
 &= 2x \cos(2x) + x^2 (-\sin(2x) \cdot 2) = \\
 &= 2x \cos(2x) - 2x^2 \sin(2x).
 \end{aligned}$$

Ez alapján, még kétszer alkalmazva a szorzat deriválási szabályát, és elvégezve a lehetséges összevonásokat

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= (2x \cos(2x) - 2x^2 \sin(2x))' = \\
 &= (2x)' \cos(2x) + 2x (\cos(2x))' - \left[(2x^2)' \sin(2x) + 2x^2 (\sin(2x))' \right] = \\
 &= 2 \cos(2x) + 2x (-\sin(2x) \cdot 2) - \left[4x \sin(2x) + 2x^2 \cos(2x) \cdot 2 \right] = \\
 &= 2 \cos(2x) - 4x \sin(2x) - 4x \sin(2x) - 4x^2 \cos(2x) = \\
 &= (2 - 4x^2) \cos(2x) - 8x \sin(2x).
 \end{aligned}$$

Ellenőrző kérdések:

22. kérdés: Mi az $h(x) = (1-3x)^3$ függvény derivált függvénye?

$$-9(1-3x)^2 \text{ (X)}$$

$$-9(1-3x)^3$$

$$9(1-3x)^2$$

$$-9(1-3x)$$

23. kérdés: Mi az $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ függvény derivált függvénye?

$$\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$\frac{x-1}{2\sqrt{x^2-2x}}$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \text{ (X)}$$

24. kérdés: Mi az $h(x) = \cos(1 - \sin x)$ függvény derivált függvénye?

$$(1 - \cos x) \sin(x - \sin x)$$

$$(1 - \cos x) \sin(x + \sin x)$$

$$-(1 - \cos x) \sin(x - \sin x) \text{ (X)}$$

$$(1 + \cos x) \sin(x - \sin x)$$

25. kérdés: Mi az $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - x\right)$ függvény derivált függvénye?

$$\frac{-\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{1}{x} - x} \text{ (X)}$$

$$\frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{1}{x} - x}$$

$$\frac{-\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)}{\frac{1}{x} - x}$$

$$\frac{-\left(-\frac{1}{x^2} - 1\right)}{\frac{1}{x} - x}$$

26. kérdés: Mi az $h(x) = \frac{-1}{xe^x - x^2}$ függvény derivált függvénye?

$$\frac{-e^x - xe^x + 2x}{(xe^x - x^2)^2} \text{ (X)}$$

$$\frac{e^x - xe^x + 2x}{(xe^x - x^2)^2}$$

$$\frac{-e^x - xe^x - 2x}{(xe^x - x^2)^2}$$

$$\frac{-xe^x + 2x}{(xe^x - x^2)^2}$$

27. kérdés: Legyen $h(x) = (2x^3 + 3x^2)^3$. Milyen x -re lesz $h'(x) = 0$?

$$-1, 0, \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2}, -1, 0 \text{ (X)}$$

$$0, 1, \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2}, 0, 1$$

28. kérdés: Legyen $h(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$. Milyen x -re lesz $h'(x) = 0$?

$$-1, 1 \text{ (X)}$$

$$-1, 0$$

$$0, 1$$

$$-1, 0, 1$$

29. kérdés: Mi az $s(x) = \cos^2(x^2)$ függvény derivált függvénye?

$$-4\cos(x^2)\sin^2(x) \cdot x$$

$$-4\cos^2(x)\sin(x^2) \cdot x$$

$$-4\cos(x^2)\sin(x^2) \cdot x \text{ (X)}$$

$$-2\cos(x^2)\sin(x^2) \cdot x$$

30. kérdés: Mi az $s(x) = e^{\sqrt{x^2-1}}$ függvény derivált függvénye?

$$\frac{e^{\sqrt{x^2-1}}}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{x^2 e^{\sqrt{x^2-1}}}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}} \quad (\text{X})$$

$$\frac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{2\sqrt{x^2-1}}$$

31. kérdés: Legyen $f(x) = xe^{-x}$. Mi f második deriváltja?

$$(x^2 + 4x - 2)e^{-x}$$

$$(x^2 - 4x + 2)e^{-x} \quad (\text{X})$$

$$(x^2 - 4x - 2)e^{-x}$$

$$(x^2 + 4x + 2)e^{-x}$$

32. kérdés: Legyen $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \sqrt[4]{x^3}$. Mi f második deriváltja?

$$\frac{1}{16}(77x^2 - 3) \cdot x^{-\frac{5}{4}} \quad (\text{X})$$

$$16(77x^2 - 3) \cdot x^{-\frac{5}{4}}$$

$$\frac{1}{16}(77x^2 + 3) \cdot x^{-\frac{5}{4}}$$

$$\frac{1}{16}(77x^2 - 3) \cdot x^{\frac{5}{4}}$$

3. Differenciálszámítás

3.2. Taylor polinomok és a L'Hospital-szabály

Tanulási cél: Megismerni a Taylor- és Maclaurin polinom fogalmát, és ezek alkalmazását közelítő értékek kiszámolására, valamint egy újabb, hatékony határértékszámítási módszer, a L'Hospital-szabály megismerése, és alkalmazásának elsajátítása egyszerűbb esetekben.

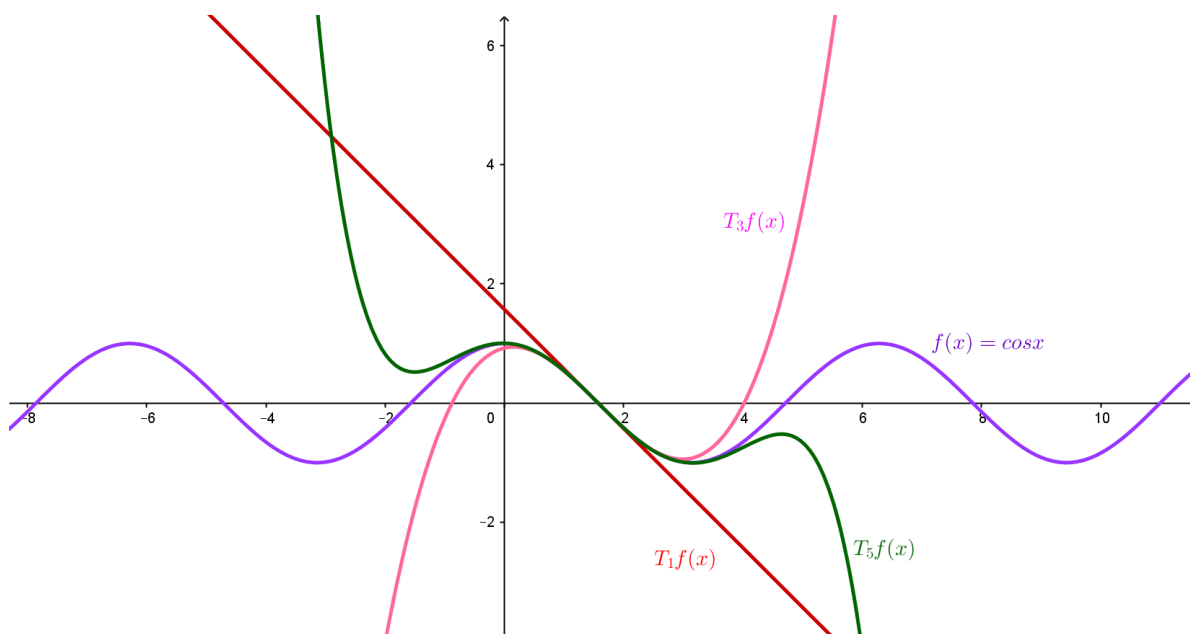
Elméleti összefoglaló:

Sokszor találkozunk a gyakorlatban olyan bonyolult függvényekkel, melyekkel a számolás nehézkes. Ilyenkor érdemes a bonyolult függvényt egyszerűbbel közelíteni, amely valamilyen értelemben jól közelíti az eredetit. Célszerűnek tűnik a hatványfüggvényekkel való közelítés, mivel azokkal könnyű dolgozni.

Egy függvény lineáris közelítésére egy adott pont környezetében már láttunk példát egy függvény adott pontjába húzott érintő egyenesen kapcsán.

A lineáris közelítésnél (érintő egyenesnél) jobb közelítést nyerhetünk egy adott pont környezetében magasabbfokú polinomokkal. Erre mutat példát a következő ábra, melyen a

$\cos x$ függvényt közelítettük első-, harmad-, ötödfokú polinommal a $\frac{\pi}{2}$ környezetében.



1. ábra: A $\cos x$ függvény közelítése első-, harmad-, ötödfokú polinommal a $\frac{\pi}{2}$ környezetében

Definíció: Ha az f függvény deriváltja folytonos az $a \in D_f$ helyen, akkor azt mondjuk, hogy f az a helyen **folytonosan differenciálható**.

Definíció: Legyen az f olyan függvény, mely értelmezett az $a \in \mathbb{R}$ rögzített hely egy környezetében, s ott n -szer folytonosan differenciálható. Ekkor a

$$T_n f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!} f''(a) \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n$$

polinomot az f függvényt a helyen vett n -edfokú **Taylor-polinom**jának nevezzük.

(A nulladik derivált magát a függvényt jelenti, azaz $f^{(0)}(a) = f(a)$, és $0! = 1$.)

Észrevehetjük, hogy az elsőfokú Taylor-polinom pontosan az f függvényt a helyen vett érintő egyenesének egyenletét adja: $T_1 f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$. (Az érintő egyenes egyenletét lásd Matematika 1. tárgy Differenciálszámítás bevezetése című leckében.)

A Taylor-polinom közelíti az eredeti függvényt. Minél közelebb van x az a -hoz, és minél magasabb a polinom rendje, a közelítés általában annál jobb.

Ha $a = 0$, azaz a függvényt $a = 0$ környezetében közelítjük, akkor **Maclaurin-polinom**ról beszélünk.

$$\begin{aligned} M_n f(x) &= f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot (x-0) + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot (x-0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot (x-0)^n = \\ &= f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot x^n \end{aligned}$$

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Írjuk fel az $f(x) = e^{-2x}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinomját!

Megoldás: A megoldásban induljunk el a Maclaurin-polinom definíciójából, miszerint egy függvény n -edfokú Maclaurin-polinomjának nevezzük, a 0 helyen vett n -edfokú Taylor-polinomot, mely az alábbi módon írható fel.

$$M_n f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot x^n$$

Mivel feladatunkban másodfokú polinomot kell felírunk, így $n = 2$, s így a polinomban csupán három tag fog szerepelni.

$$M_2 f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2$$

Természetesen a konkrét Maclaurin-polinom felírásához meg kell határoznunk a képletben szereplő $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket.

Elsőként helyettesítsük a függvénybe a 0 -t.

$$f(0) = e^{-2 \cdot 0} = e^0 = 1$$

Ezután állítsuk elő a függvény deriváltját, és határozzuk meg a derivált helyettesítési értékét is a 0 helyen.

$$f'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$$

A deriválás során ne feledkezzünk el arról, hogy összetett függvényt deriválunk, így a külső függvény deriválása után szoroznunk kell még a belső függvény deriváltjával is.

Hajtsuk végre a 0 behelyettesítést.

$$f'(0) = -2e^{-2 \cdot 0} = -2e^0 = -2$$

Állítsuk elő a második deriváltat.

$$f''(x) = -2e^{-2x} \cdot (-2) = 4e^{-2x}$$

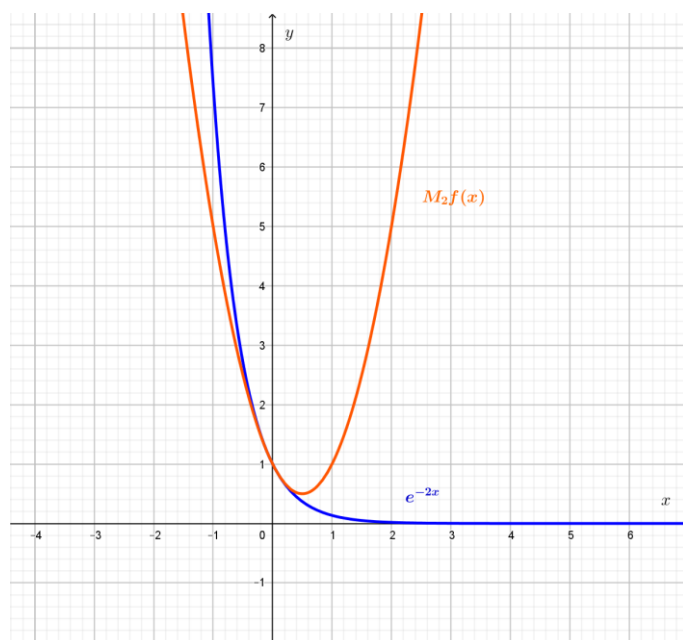
Helyettesítsük ebbe is a 0-t.

$$f''(0) = 4e^{-2 \cdot 0} = 4e^0 = 4$$

Utolsó lépésként helyettesítsük be a meghatározott $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket a másodfokú Maclaurin-polinom képletébe. A behelyettesítés után határozzuk meg a faktoriálisok értékét, és egy-egy tagban szorozva a konstansokat, hozzuk egyszerűbb alakra a polinomot.

$$\begin{aligned} M_2 f(x) &= 1 + \frac{1}{1!} \cdot (-2) \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 4 \cdot x^2 = 1 + \frac{1}{1} \cdot (-2) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x^2 = \\ &= 1 - 2x + 2x^2 \end{aligned}$$

Az alábbi ábra jól szemlélteti, hogy milyen módon közelíti az eredeti függvényt a számolt másodfokú Maclaurin polinom.



2. ábra: Az $f(x) = e^{-2x}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinommal való közelítése

2. feladat: Írjuk fel az $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinomját!

Megoldás: Itt is elindulhatunk a másodfokú Maclaurin-polinom definíciójából.

$$M_2 f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2$$

Most is elő kell állítanunk az $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket.

Helyettesítsük be elsőként a függvénybe a 0 -t.

$$f(0) = \sqrt[3]{0+1} = 1$$

Ezután állítsuk elő a függvény deriváltját. A deriválás előtt célszerű átalakítani a függvényt. A gyök helyett írjunk törtkitevős hatványt.

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$$

Ebből az alakból már egyszerű a deriválás.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$$

Helyettesítsük be a deriváltba a 0 -t.

$$f'(0) = \frac{1}{3}(0+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

Állítsuk elő a második deriváltat is.

$$f''(x) = \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} \right) (x+1)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9} (x+1)^{-\frac{5}{3}}$$

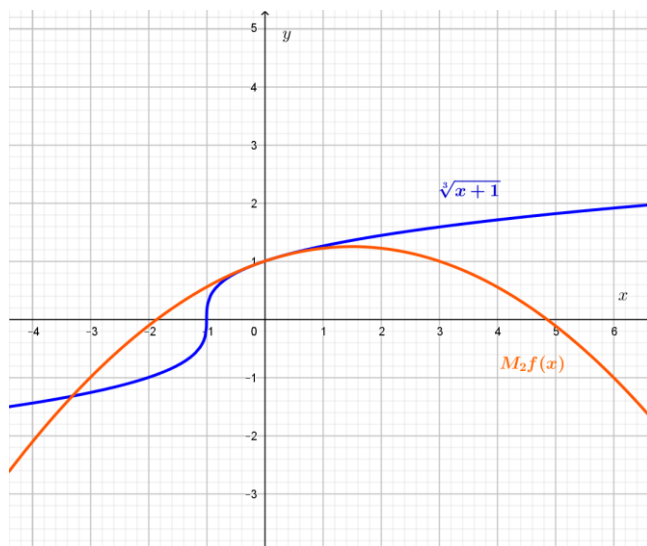
Határozzuk meg a második derivált 0 helyen vett helyettesítési értékét.

$$f''(0) = -\frac{2}{9} (0+1)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}$$

Végül a meghatározott $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket helyettesítsük be a másodfokú Maclaurin-polinom képletébe. A behelyettesítés után hozzuk egyszerűbb alakra a polinomban az együtthatókat.

$$\begin{aligned} M_2 f(x) &= 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{2}{9} \right) \cdot x^2 = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{9} \right) \cdot x^2 = \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \end{aligned}$$

A másodfokú Maclaurin polinommal való közelítést szemlélteti a következő ábra.



3. ábra: Az $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinommal való közelítése

3. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{3-2x}$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomját!

Megoldás: Induljunk ki a Maclaurin-polinom definíciójából.

$$M_3 f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0) \cdot x^3$$

Állítsuk elő a szükséges deriváltakat, és határozzuk meg a függvény, valamint a deriváltak értékét a nulla helyen. A deriválások egyszerűbbek ha a függvényt átalakítjuk, mert akkor tört helyett összetett függvényünk lesz.

$$f(x) = \frac{1}{3-2x} = (3-2x)^{-1} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = (-1) \cdot (3-2x)^{-2} \cdot (-2) = 2 \cdot (3-2x)^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 2 \cdot 3^{-2} = \frac{2}{9}$$

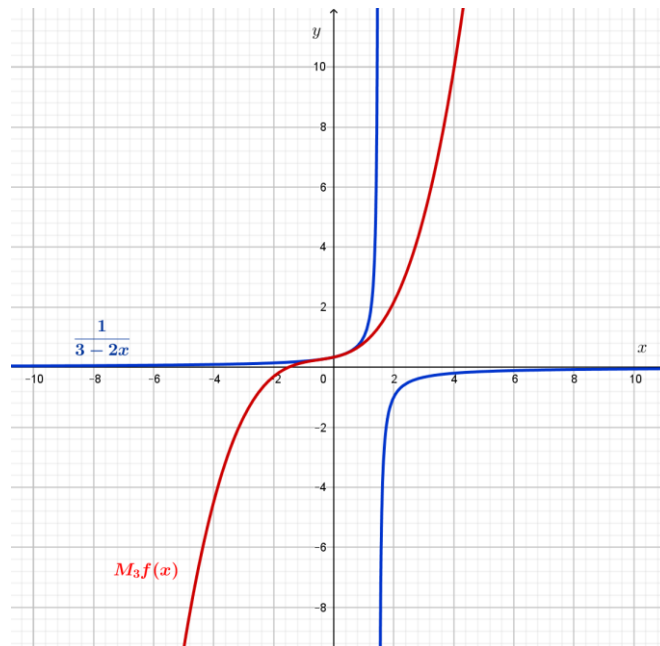
$$f''(x) = (-4) \cdot (3-2x)^{-3} \cdot (-2) = 8 \cdot (3-2x)^{-3} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 8 \cdot 3^{-3} = \frac{8}{27}$$

$$f'''(x) = (-24) \cdot (3-2x)^{-4} \cdot (-2) = 48 \cdot (3-2x)^{-4} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 48 \cdot 3^{-4} = \frac{48}{81}$$

A kapott értékeket helyettesítsük be a polinomba.

$$M_3 f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{2}{9} x + \frac{1}{2!} \cdot \frac{8}{27} x^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{48}{81} x^3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} x + \frac{4}{27} x^2 + \frac{8}{81} x^3$$

A közelítést a következő ábra szemlélteti.



4. ábra: Az $f(x) = \frac{1}{3-2x}$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinommal való közelítése

4. feladat: Írjuk fel az $f(x) = \sin 2x$ függvény $a = \frac{\pi}{4}$ helyen vett másodfokú Taylor-polinomját!

Megoldás: A definícióból indulunk el, mely szerint az $f(x)$ függvény a helyen vett n -edfokú Taylor-polinomja a következő:

$$T_n f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!} f''(a) \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n.$$

Mivel másodfokú polinom a kérdés, így $n=2$.

$$T_2 f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!} f''(a) \cdot (x-a)^2$$

Annyiban változik tehát csak a dolgunk az előzőekhez képest, hogy nem a 0 helyen kell meghatároznunk a függvény, valamint első és második deriváltjának értékét, hanem az $a = \frac{\pi}{4}$ helyen.

Helyettesítsünk először a függvénybe.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Állítsuk elő a függvény deriváltját. Figyeljünk oda, mert összetett függvényről van szó, ne felejtünk el szorozni a belső függvény deriváltjával.

$$f'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x$$

Helyettesítsünk most a deriváltba is.

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Ezután deriváljunk még egyszer.

$$f''(x) = 2(-\sin 2x) \cdot 2 = -4 \sin 2x$$

A második deriváltba is helyettesítsük be az $a = \frac{\pi}{4}$ értéket.

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin \frac{\pi}{2} = -4$$

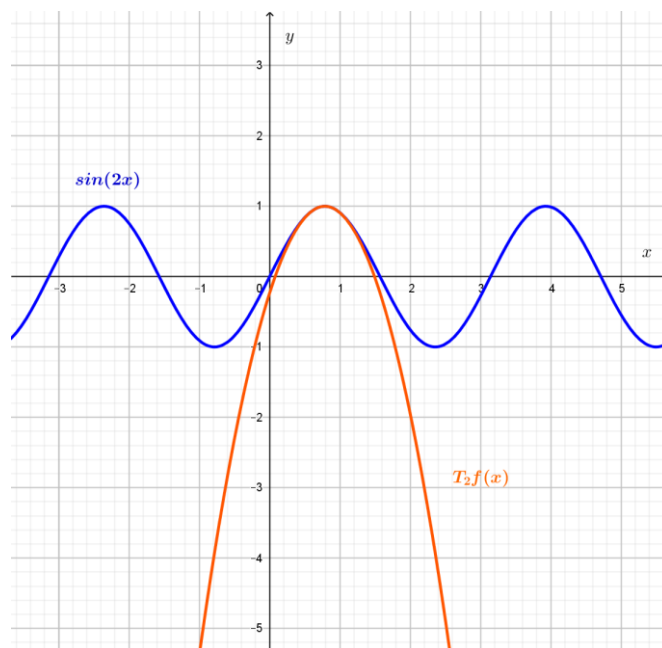
Az előzőekben meghatározott $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ értékeket írjuk be a Taylor-polinom képletébe, s egyben helyettesítsünk a helyére is.

$$T_2 f(x) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2!} \cdot (-4) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

Végül hozzuk egyszerűbb alakra a polinom együtthatóit.

$$T_2 f(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 - 2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

A szemléltetést a következő ábra segíti.



5. ábra: Az $f(x) = \sin 2x$ függvény másodfokú Taylor-polinommal való közelítése az $a = \frac{\pi}{4}$ környezetében

5. feladat: Írjuk fel az $f(x) = \ln 3x$ függvény $a = \frac{1}{3}$ helyen vett másodfokú Taylor-polinomját!

Megoldás: Most is a másodfokú Taylor-polinom definícióját használjuk fel.

$$T_2 f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!} f''(a) \cdot (x-a)^2$$

Határozzuk meg a polinomban szereplő, egyelőre ismeretlen $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ értékeket.

Helyettesítsük elsőként a függvénybe az $a = \frac{1}{3}$ -ot.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = \ln 1 = 0$$

Deriváljuk a függvényt.

$$f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$$

Helyettesítsünk be a deriváltba is a helyére $\frac{1}{3}$ -ot.

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Állítsuk elő a második deriváltat.

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Helyettesítsük a második deriváltba is az $a = \frac{1}{3}$ -ot.

$$f''(x) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -9$$

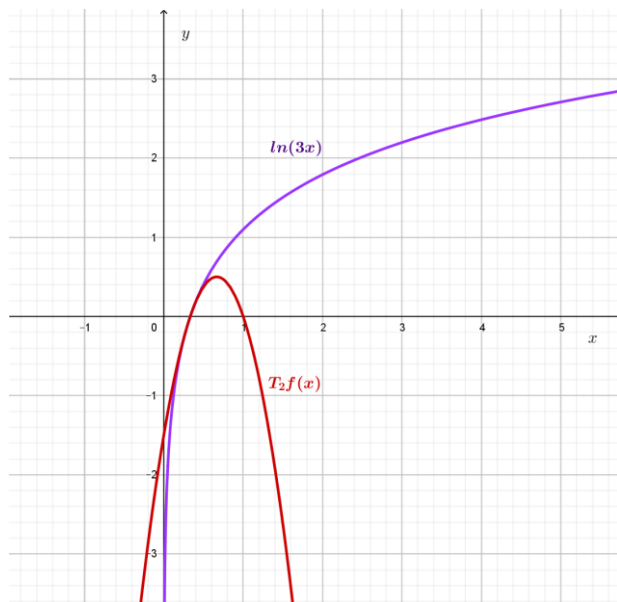
Majd a Taylor-polinom képletében helyettesítsünk a , $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ helyére.

$$T_2 f(x) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot 3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2!} \cdot (-9) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

Végül írjuk egyszerűbb alakban a polinom együtthatóit.

$$T_2 f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{9}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

Jelen esetben a Taylor polinommal való közelítést a következő ábra szemlélteti.



6. ábra: Az $f(x) = \ln 3x$ függvény másodfokú Taylor-polinommal való közelítése az $a = \frac{1}{3}$ környezetében

6. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 20$ függvény $a = 3$ hely körüli harmadfokú Taylor-polinomját!

Megoldás: Induljunk ki a Taylor-polinom definíciójából, eszerint

$$T_3 f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!} f''(a) \cdot (x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a) \cdot (x-a)^3$$

Ebben a sorban kell most a helyére 3-at helyettesítenünk.

$$T_3 f(x) = f(3) + \frac{1}{1!} f'(3) \cdot (x-3) + \frac{1}{2!} f''(3) \cdot (x-3)^2 + \frac{1}{3!} f'''(3) \cdot (x-3)^3$$

Ehhez először az $f(3)$, $f'(3)$, $f''(3)$, $f'''(3)$ értékeket kell meghatároznunk és behelyettesítenünk.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 20 \quad \Rightarrow \quad f(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 3 + 20 = 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 1 = -2$$

$$f''(x) = 6x - 10 \quad \Rightarrow \quad f''(3) = 6 \cdot 3 - 10 = 8$$

$$f'''(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad f'''(3) = 6$$

Tehát

$$T_3 f(x) = 5 + \frac{1}{1!}(-2)(x-3) + \frac{1}{2!}8(x-3)^2 + \frac{1}{3!}6(x-3)^3 = 5 - 2(x-3) + 4(x-3)^2 + (x-3)^3$$

Ha elvégeznénk a hatványozásokat és összevonnánk az azonos fokszámú tagokat, természetesen visszakapnánk az eredeti polinomot, ezzel tudnánk ellenőrizni a megoldást.

7. feladat: Melyik az a harmadfokú polinom, melyre a következők igazak:
 $p(0)=3, \quad p'(0)=-1, \quad p''(0)=-6, \quad p'''(0)=12$?

Megoldás: Mivel a függvény és deriváltjainak értéke a nulla helyen adott és a polinom harmadfokú, ezért a harmadfokú Maclaurin-polinom felírásából indulunk ki.

$$p(x) = p(0) + \frac{1}{1!} p'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} p''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!} p'''(0) \cdot x^3.$$

Nincs más dolgunk, mint a függvény és a derivált megadott értékeit behelyettesíteni.

$$p(x) = 3 + \frac{1}{1!}(-1)x + \frac{1}{2!}(-6)x^2 + \frac{1}{3!}12x^3 = 3 - x - 3x^2 + 2x^3$$

Ha a tagokat a szokott sorrendben írjuk, akkor $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 3$.

8. feladat: Hogyan határozhatjuk meg $\frac{1}{\sqrt[10]{e}}$ közelítő értékét, ha csak négy alpműveletes számológépünk van?

Megoldás: Mivel $\frac{1}{\sqrt[10]{e}} = e^{-0.1}$, ezért a feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy adjuk meg közelítőleg az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = -0.1$ helyen vett helyettesítési értékét. Mivel a -0.1 "közel van" a nullához, ezért az $f(x)$ függvény egy tetszőleges fokszámú Maclaurin-polinomjának segítségével határozhatjuk meg a közelítő értéket. Vegyük ezen függvény másodfokú Maclaurin-polinomját, melybe majd x helyére a megadott x_0 értéket kell behelyettesítenünk.

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f''(0) = e^0 = 1$$

Ebből

$$M_2 f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2$$

$$e^{-0.1} \approx 1 + \frac{1}{1!}(-0.1) + \frac{1}{2!}(-0.1)^2 = 1 - 0.1 + 0.005 = 0.905.$$

Minél minél magasabbfokú polinomot veszünk figyelembe, a közelítő érték annál pontosabb lesz.

Ha például a harmadfokú Maclaurin-polinomba helyettesítünk, akkor

$$e^{-0.1} \approx 1 + \frac{1}{1!}(-0.1) + \frac{1}{2!}(-0.1)^2 + \frac{1}{3!}(-0.1)^3 = 1 - 0.1 + 0.005 - 0.00016 = 0.9049$$

Ha a negyedfokú polinomba, akkor

$$e^{-0.1} \approx 1 + \frac{1}{1!}(-0.1) + \frac{1}{2!}(-0.1)^2 + \frac{1}{3!}(-0.1)^3 + \frac{1}{4!}(-0.1)^4 = \\ = 1 - 0.1 + 0.005 - 0.00016 + 0.0000041\dot{6} = 0.9048375.$$

Ha nem csak négy alpműveletes számológépünk van, akkor egy lépésben kaphatunk közelítő értéket, s így $e^{-0.1} \approx 0.904837418$. Amint látható a negyedfokú polinomból kapott érték már 6

tizedesjegyre pontos. Ha ennél is pontosabb értékre van szükség, további tagokat figyelembe véve tetszőleges pontosság érhető el.

9. feladat: Adjunk közelítést $\cos 0.1$ -re, ha csak négy alpműveletes számológépünk van.

Megoldás: A feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy adjuk meg közelítőleg az $f(x) = \cos x$ függvény $x_0 = 0.1$ helyen vett helyettesítési értékét. Mivel a 0.1 "közel van" a nullához, ezért az $f(x)$ függvény egy tetszőleges fokszámú Maclaurin-polinomjának segítségével határozhatjuk meg a közelítő értéket.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & \Rightarrow & f(0) = \cos 0 = 1 \\ f'(x) &= -\sin x & \Rightarrow & f'(0) = -\sin 0 = 0 \\ f''(x) &= -\cos x & \Rightarrow & f''(0) = -\cos 0 = -1 \end{aligned}$$

Ebből

$$M_2 f(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$\cos 0.1 \approx 1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 = 0.99500$$

Ha nem csak négy alpműveletes számológépünk van, akkor egy lépésben kaphatunk közelítő értéket, s így $\cos 0.1 \approx 0.995004$. Amint látható a másodfokú polinomból kapott érték már 5 tizedesjegyre pontos.

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Melyik az $f(x) = \frac{1}{5-2x}$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomja?

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{25}x + \frac{4}{125}x^2 + \frac{8}{625}x^3 \quad (\text{X})$$

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{25}x + \frac{4}{125}x^2 - \frac{8}{625}x^3$$

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{25}x + \frac{4}{125}x^2 + \frac{16}{625}x^3$$

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{25}x + \frac{4}{125}x^2 - \frac{16}{625}x^3$$

2. kérdés: Melyik az $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$ negyedfokú Maclaurin-polinomja?

$$1 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4$$

$$-1 + 2x^2 - \frac{1}{3}x^4$$

$$1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$$

$$-1 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 \quad (\text{X})$$

3. kérdés: Az alábbiak közül melyik az $f(x) = \cos^2 x$ negyedfokú Maclaurin-polinomja?

$$1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4$$

$$1 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4$$

$$1 - x^2 + \frac{2}{3}x^4$$

$$1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 \quad (\text{X})$$

4. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 2$ függvény $a = 2$ hely körüli harmadfokú Taylor-polinomja?

$$f(x) = 4 - (x-2) + 3(x-2)^2 + 2(x-2)^3$$

$$f(x) = 4 - 3(x-2) + (x-2)^2 + 2(x-2)^3 \quad (\text{X})$$

$$f(x) = 2 - 3(x-2) + 4(x-2)^2 + 2(x-2)^3$$

$$f(x) = 2 - 4(x-2) + 3(x-2)^2 + 2(x-2)^3$$

5. kérdés: Melyik az a harmadfokú $p(x)$ polinom, melyre a következők igazak:

$$p(0) = 5, \quad p'(0) = -3, \quad p''(0) = 4, \quad p'''(0) = 18?$$

$$p(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4x + 18$$

$$p(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x + 3$$

$$p(x) = 18x^3 + 4x^2 - 3x + 5$$

$$p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad (\text{X})$$

6. kérdés: Ha $\sqrt{e}$ közelítő értékét az $f(x) = e^x$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomjából számoljuk, akkor mit kapunk?

$$1.6443\dot{6}$$

$$1.6458\dot{3} \quad (\text{X})$$

$$1.6465\dot{3}$$

$$1.6481\dot{6}$$

7. kérdés: Ha $\sin 0.1$ értékét az $f(x) = \sin x$ harmadfokú Maclaurin-polinomjából számoljuk, akkor mit kapunk?

$$0.1001\dot{6}$$

$$0.0998\dot{3} \quad (\text{X})$$

$$0.0017453283$$

$$-0.1001\dot{6}$$

Elméleti összefoglaló:

Korábban foglalkoztunk már határértékszámítási feladatokkal. Gyakran találkozhatunk olyan határértékszámítási problémákkal, melyek nem oldhatóak meg a korábban tanult módszerekkel, így például a $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértékek, valamint az ezekre visszavezethetők. Ezen típusok meghatározására ad hatékonyt módszert a L'Hospital-szabály.

Tegyük fel, hogy a

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték $\frac{\infty}{\infty}$ vagy $\frac{0}{0}$ típusú,

és c egy környezetében, esetleg c -től eltekintve, f is és g is differenciálható, továbbá $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0$.

Ha a $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik és véges, akkor az is teljesül, hogy

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A c jelölhet egy véges értéket, valamint mindkét végtelent is.

A tétel rövid és pontatlan megfogalmazása: a tört limesze a deriváltak hányadosának a limeszével egyenlő.

Fontos, hogy csak határozatlan alakú határértékek kiszámolására próbáljuk a tételt alkalmazni, különben hibás eredményt ad.

Előfordulhat olyan eset, amikor a szabály egyszeri alkalmazása nem elegendő, mert a deriváltak hányadosa újra határozatlan alakot ad. Ekkor (ha a feltételek teljesülnek) újra alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt. Ilyenkor az újabb deriválás előtt célszerű a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezni.

A feladatmegoldások során először mindig megvizsgáljuk, hogy milyen típusú határértékről van szó. A $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan esetekben közvetlenül alkalmazható a L'Hospital-szabály. Ezen túlmenően foglalkozunk „ $0 \cdot \infty$ ” típusú határértékekkel, melyekre bizonyos átalakítások után a szabály alkalmazható.

Ha az $f(x) \cdot g(x)$ szorzat, (a szóbanforgó helyen) „ $0 \cdot \infty$ ” típusú, akkor az

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

vagy az

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

formulák valamelyikét felhasználva, a kérdéses határérték átalakítható $\frac{\infty}{\infty}$, vagy $\frac{0}{0}$ típusúvá, aztán alkalmazható a L'Hospital-szabály.

Gyakran a kétféle átírási lehetőség közül csak az egyik használható. Azzal érdemes először próbálkozni, amelyik a deriválás szempontjából egyszerűbbnek tűnik.

Kidolgozott feladatok

10. feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ határértéket.

Megoldás: Most egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértékkel van dolgunk, így a L'Hospital-szabályt közvetlenül tudjuk alkalmazni. Ennek érdekében külön deriváljuk a számlálót és külön deriváljuk a nevezőt, s ennek a hányadosnak vesszük az eredeti helyen vett határértékét. Ez most

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x})'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}.$$

Ebben a formájában ez egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték, látszólag nem jutottunk előre. De az utóbbi határérték átalakítható (megszüntetjük az emeletes törtet), és ezután könnyen kiszámolható a határérték:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = \infty.$$

A deriváltak hányadosának plusz végtelen a limesze, így tételünk értelmében ennyi az eredeti limesz is, azaz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \infty.$$

11. feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$ határértéket.

Megoldás: Egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértéket kell kiszámolni. Tekintjük a deriváltak hányadosának a határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^{2x})'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x}.$$

Ez is egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték. Kiszámolásához a L'Hospital-szabályt újra alkalmazzuk.

A deriváltak hányadosának határértéke most

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^{2x})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2e^{2x}) = \infty.$$

A tételünk értelmében ekkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x} = \infty$$

is teljesül, majd még egyszer alkalmazva a tételt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = \infty$$

is fennáll. Tehát ebben az esetben kétszer alkalmaztuk egymás után a L'Hospital-szabályt.

12. feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + e^x}$ határértéket.

Megoldás: A limesz $\frac{\infty}{\infty}$ típusú. Tekintjük a deriváltak hányadosának limeszét:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3)'}{(x^2 + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{2x + e^x}.$$

Ez még mindig $\frac{\infty}{\infty}$ típusú. Nézzük tehát a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2)'}{(2x + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{2 + e^x}$$

határértéket, de ez még mindig $\frac{\infty}{\infty}$ típusú. Végül, még egyszer képezve a deriváltak hányadosának határértékét, kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x)'}{(2 + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0,$$

ezért sorban minden limesz nullával egyenlő, így az eredeti is, azaz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + e^x} = 0.$$

Tehát ebben az esetben háromszor alkalmaztuk egymás után a L'Hospital-szabályt.

13. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$ határértéket.

Megoldás: A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\frac{0}{0}$ típusú. Tehát tekintjük a deriváltak hányadosának limeszét, ami

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1.$$

Ennyi tehát az eredeti limesz is:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1.$$

14. feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{1 - e^{2x}}$ határértéket.

Megoldás A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\frac{0}{0}$ típusú. Vesszük a deriváltak hányadosának limeszét:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(xe^x)'}{(1 - e^{2x})'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x}{-2e^{2x}} = \frac{1 + 0}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

Tehát az eredeti határértékre is fennáll, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{1-e^{2x}} = -\frac{1}{2}.$$

15. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos 3x}$ határértéket.

Megoldás: A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\frac{0}{0}$ típusú. Most a deriváltak hányadosának limesze:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{3 \sin 3x},$$

ami a 0-t való behelyettesítést követően újra $\frac{0}{0}$ típusú. Ebből kapjuk a deriváltak hányadosát képezve a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x}{9 \cos 3x} = \frac{2-0}{9} = \frac{2}{9}$$

eredményt, s így ennyi az eredeti limesz is,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos 3x} = \frac{2}{9}.$$

Akár eszünkbe juthatott volna az első deriválás után egy trigonometrikus azonosság ($\cos 0 = 1$) is, mely alapján

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{3 \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3 \sin 3x}.$$

Ez persze így is egy $\frac{0}{0}$ típusú limesz, de ha most vesszük a deriváltak hányadosának limeszét,

azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{9 \cos 3x} = \frac{2}{9},$$

és ismét hivatkozhatunk arra, hogy a tételünk alapján az eredeti határérték is ennyi. Ezen az úton a deriválás némileg egyszerűbb volt.

Az ilyenféle átalakítások gyakran jelentős egyszerűsödést tudnak eredményezni.

16. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{\sin x - x}$ határértéket.

Megoldás: A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\frac{0}{0}$ típusú. A deriváltak hányadosának limesze így:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x - 1} = \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 0}}{\cos 0 - 1}.$$

Ez továbbra is $\frac{0}{0}$ típusú, de átalakítható a következő módon:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x (\cos x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x + 1)(\cos x - 1)}{\cos^2 x (\cos x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

A tétel alapján az eredeti limesz is ennyi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{\sin x - x} = 2.$$

Ha a fenti átalakítási lehetőséget nem vesszük észre, akkor ismét a L'Hospital-szabály alkalmazásával próbálkozhatnánk, ekkor azt kapnánk, hogy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)'}{(\cos x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos^3 x} = 2.$$

Most tehát így is célhoz értünk. Néha azonban az egyszerűsítések elvégzése nélkül nem számítható ki a limesz.

17. feladat: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{e}{x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{x}\right)} = ?$

Megoldás: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{e}{x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{x}\right)} = \frac{\ln(1+0)}{\sin(0)} = \frac{0}{0}$

Tehát újra egy $\frac{0}{0}$ típusú limesszel van dolgunk. Most a deriváltak hányadosának limesze:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{e}{x}} \left(-\frac{e}{x^2}\right)}{\cos\left(\frac{3}{x}\right) \left(-\frac{3}{x^2}\right)}.$$

Ez továbbra is $\frac{0}{0}$ típusú. Vegyük észre azonban, hogy a problémát okozó $-\frac{1}{x^2}$ tényezővel egyszerűsíthetünk. Ekkor kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{e}{x}} \left(-\frac{e}{x^2}\right)}{\cos\left(\frac{3}{x}\right) \left(-\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{e}{x}} (e)}{\cos\left(\frac{3}{x}\right) (3)} = \frac{e}{3}.$$

Persze az eredeti limesz is ezzel egyenlő:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{e}{x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{x}\right)} = \frac{e}{3}.$$

Ha most a deriváltak hányadosában nem egyszerűsítünk a $-\frac{1}{x^2}$ tényezővel, hanem ismét tekintünk a deriváltak hányadosának limeszt, akkor az továbbra is $\frac{0}{0}$ típusú maradna, és ez történne akárhányszor vennénk, az egyébként egyre bonyolultabb deriváltak hányadosának limeszt. Ezért, ha lehet, akkor mindig egyszerűsítsünk!

18. feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{-2x})$ határértéket.

Megoldás: Ez a határérték egy $0 \cdot \infty$ típusú szorzat. A negatív kitevőjű hatvány miatt kínálkozik a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{-2x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}}$$

tört alakú átírás.

Így egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú tört határértékének a kiszámítására vezettük vissza a feladatot, melyre már alkalmazható a L'Hospital szabály. Véve a deriváltak hányadosának határértékét, arra jutunk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0.$$

Tehát az eredeti limesz is ennyi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{-2x}) = 0.$$

19. feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x \cdot \ln x)$ határértéket.

Megoldás: A feladat egyoldali határértékszámítással kapcsolatos ismeretekre épül (lásd Matematika 1. tárgy 8. Határérték című lecke).

Az egyoldali határértékeket megvizsgálva kapjuk, hogy a szorzatunk limesze $0 \cdot \infty$ típusú.

Mivel $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$ elemi alapfüggvény, a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$$

átírást választjuk.

Így egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték kiszámítása a feladatunk, melyre alkalmazható a L'Hospital szabály. Tekintsük a deriváltak hányadosának határértékét:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\sin^2 x}{x} \right).$$

Ez egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték. Alkalmazhatjuk ismét a L'Hospital-szabályt, és egy lépésben

célhoz jutunk, de talán még egyszerűbb, ha felhasználjuk a nevezetes $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ határértéket. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\sin^2 x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sin x) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Ezzel egyenlő az eredeti limesz is:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x \cdot \ln x) = 0.$$

Ellenőrző kérdések:

8. kérdés: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} =$

1.

∞ .

0. (X)

$\frac{1}{2}$.

9. kérdés: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{2x}} =$

0. (X)

6.

∞ .

$\frac{3}{2}$.

10. kérdés: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{x^2} =$

∞ . (X)

0.

$\frac{1}{2}$.

1.

11. kérdés: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$

0.

$-\frac{1}{2}$.

-1.

$\frac{1}{2}$. (X)

12. kérdés: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2x}}{x^2 + 3x} =$

0.

$\frac{2}{3}$. (X)

$-\frac{2}{3}$.

1.5.

13. kérdés: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(5x-4)}{\ln(3-2x)} =$

$-\frac{5}{2}$. (X)

$\frac{5}{2}$.

1 .

-1 .

14. kérdés: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 e^{-x}) =$

∞ .

1 .

0 . (X)

2 .

15. kérdés: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{x} \right) \right) =$

0 .

$-\pi$.

∞ .

π . (X)

3. Differenciálszámítás

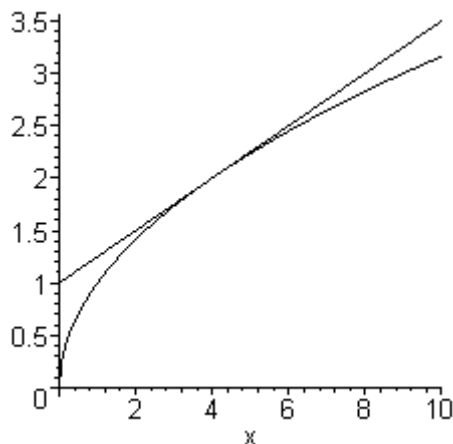
3.3. Monotonitás és szélsőérték vizsgálata

Tanulási cél: Olyan eljárás megismerése, melynek segítségével a függvények növekedés, csökkenés és szélsőérték szempontjából vizsgálhatók, valamint az eljárás alkalmazása szöveges feladatokban minimum vagy maximum keresésére.

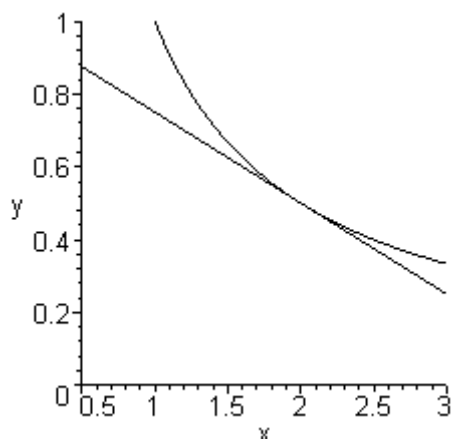
Motivációs példa: Egy telep üresjárási feszültsége U_0 , belső ellenállása R_b . Mekkora R_k külső ellenállást kell a telepre kapcsolni, hogy a külső ellenállás teljesítménye P_k maximális legyen? Mekkora ez a maximális teljesítmény?

A gyakorlati életben nagyon sok ehhez hasonló problémával találkozunk, amiben valamilyen fizikai, kémiai, közgazdasági mennyiségnek maximumát vagy minimumát, azaz szélsőértékét keressük, egy másik mennyiség függvényében. Jelen esetben a P_k teljesítmény függ a külső ellenállástól, azaz R_k -től. A két mennyiség közötti kapcsolat egy függvénnyel írható le. Ha sikerül megállapítanunk, hogy ez a függvény mikor nő, és mikor csökken, akkor azt is meg tudjuk mondani, hogy hol veszi fel a legnagyobb értékét, tehát a maximumát. Az ehhez hasonló problémák megoldásához fontos számunkra, hogy a függvényeket növekedés és csökkenés, azaz monotonitás szempontjából tudjuk jellemezni. Az alábbiakban olyan módszerrel ismerkedünk meg, aminek segítségével el tudjuk dönteni, hogy egy függvény mely intervallumokon nő, és mely intervallumokon csökken, valamint hol és milyen típusú szélsőértéke van.

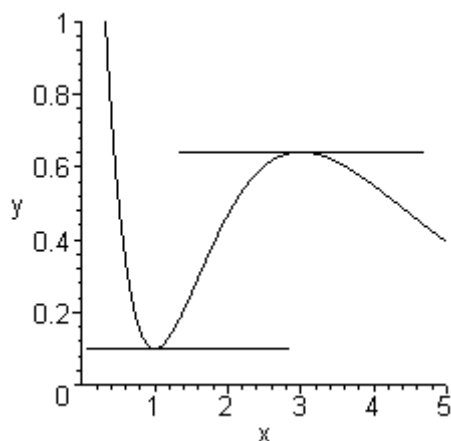
Elméleti összefoglaló: Mivel a derivált értéke minden pontban megadja a grafikon érintőjének meredekségét, ezért a derivált előjeléből következtethetünk arra, hogy hol nő és hol csökken a függvény, valamint hol van szélsőértéke. Szemléletesen ugyanis arra gondolhatunk, hogy ha egy pontban a derivált pozitív, akkor ott az érintő meredeksége pozitív, tehát az érintő úgymond felfelé halad, s mivel ő jól közelíti a függvényt, így a függvény is növekedni fog. Erre látunk példát az alábbi ábrán.



Hasonlóan okoskodhatunk akkor, ha egy pontban a derivált negatív. Ekkor az érintő nyilván lefelé halad, s ekkor a függvény csökkenni fog. Erre mutat példát az alábbi ábra.



Ha pedig egy függvénynek valahol szélsőértéke, azaz maximuma vagy minimuma van, akkor ott az érintőnek vízszintesnek kell lennie, tehát meredeksége 0, s így a derivált értéke itt 0 kell legyen. Erre láthatunk két példát is az alábbi ábrán.



Hangsúlyozzuk, hogy ez csak szemléletes okoskodás. A pontos megfogalmazás majd a most következő definíciókban és tételekben szerepel majd. Elsőként definiáljuk pontosan a lokális növekedés és csökkenés, valamint a szélsőértékek fogalmát.

Definíció: Az f függvény az $x_0 \in D_f$ helyen lokálisan növekvő, ha létezik az x_0 -nak olyan környezete, amelybe eső minden $x_1 < x_0 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Az f függvény az $x_0 \in D_f$ helyen lokálisan csökkenő, ha létezik az x_0 -nak olyan környezete, amelybe eső minden $x_1 < x_0 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$.

Definíció: Az f függvénynek az x_0 helyen helyi, másképpen lokális maximuma van, ha megadható x_0 -nak olyan környezete, amelybe eső minden x esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

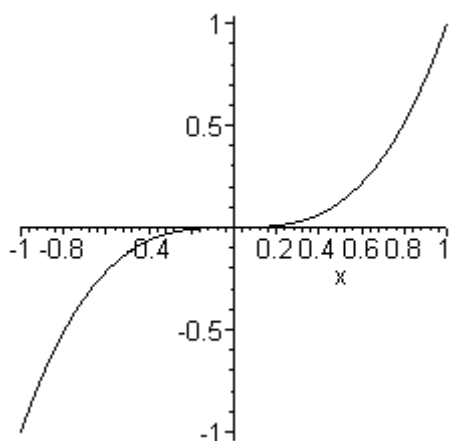
Az f függvénynek az x_0 helyen helyi, másképpen lokális minimuma van, ha megadható x_0 -nak olyan környezete, amelybe eső minden x esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Ezek után kimondható az alábbi tétel, melyre a szemléletes okoskodással utaltunk.

Tétel: Ha az f függvény az x_0 helyen differenciálható és $f'(x_0) > 0$, akkor a függvény az x_0 helyen lokálisan növekvő.

Ha az f függvény az x_0 helyen differenciálható és $f'(x_0) < 0$, akkor a függvény az x_0 helyen lokálisan csökkenő.

A tétel megfordítása azonban sajnos nem igaz. Gondoljunk ugyanis az $f(x) = x^3$ függvényre, amely az $x_0 = 0$ helyen nyilván lokálisan növekvő, azonban deriváltja ott nem pozitív, hanem 0-val egyenlő. Az alábbi ábrán látható az $f(x) = x^3$ függvény grafikonja, amiről teljesen egyértelmű, hogy a függvény nő az $x_0 = 0$ helyen.



Így nem egészen megfordításként, következő tétel mondható ki.

Tétel: Ha az f függvény az x_0 helyen differenciálható és ott lokálisan növekedő, akkor $f'(x_0) \geq 0$.

Ha az f függvény az x_0 helyen differenciálható és ott lokálisan csökkenő, akkor $f'(x_0) \leq 0$.

A feladatok megoldása során a lokális növekedés és csökkenés helyett, az intervallumon növekedés és csökkenés fogalmát használjuk.

Definíció: Az f függvény az (a, b) intervallumon növekvő, ha minden $x \in (a, b)$ esetén lokálisan növekvő.

Az f függvény az (a, b) intervallumon csökkenő, ha minden $x \in (a, b)$ esetén lokálisan csökkenő.

Ezek után feladatokban leginkább a tétel alábbi megfogalmazásra hivatkozunk.

Tétel: Ha f az (a, b) intervallumon differenciálható és minden $x \in (a, b)$ esetén $f'(x) > 0$, akkor f az (a, b) intervallumon növekvő.

Ha f az (a, b) intervallumon differenciálható és minden $x \in (a, b)$ esetén $f'(x) < 0$, akkor f az (a, b) intervallumon csökkenő.

A lokális szélsőértékekre is több tétel mondható ki. Az első a szélsőérték létezésének szükséges feltétele.

Tétel: Ha f differenciálható az x_0 hely valamely környezetében, és f -nek x_0 -ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.

Gondoljunk bele, a tétel nem azt mondja ki, hogy ahol a derivált 0, ott szélsőérték van. Ez a tétel megfordítása lenne, és ez nem igaz. Példaként megint az $f(x) = x^3$ függvényt említhetjük, amelynek deriváltja az $x_0 = 0$ helyen 0-val egyenlő, de ott nincs szélsőértéke a függvénynek, mert ott lokálisan növekvő. Tehát csak annyit mondhatunk, ahol a derivált 0, ott könnyen elképzelhető, hogy van szélsőérték. Ezért van szükségünk egy másik tételre is, ami már elégséges feltétel a szélsőérték létezésére.

Tétel: Ha az f függvény differenciálható az x_0 helyen és $f'(x_0) = 0$, valamint f' előjele megváltozik az x_0 -ban, akkor f -nek az x_0 helyen lokális szélsőértéke van.

A fenti tételek birtokában a következő módon vizsgálhatjuk majd a folytonosan differenciálható függvényeket növekedés, csökkenés és szélsőérték szempontjából.

1. Megvizsgáljuk, mi a legbővebb halmaz, amelyen a függvény értelmezhető.
2. Deriváljuk a függvényt.
3. Megoldjuk az $f'(x) = 0$ egyenletet. Ezzel megkapjuk azokat a helyeket, ahol szélsőérték lehet.
4. Az értelmezési tartományt a szakadási helyekkel és a derivált zérushelyeivel részekre bontjuk, s a részeken vizsgáljuk a derivált előjelét. Ezt például úgy hajtjuk végre, hogy mindegyik részből választunk egy számot, melyet a deriváltba helyettesítünk.
5. Az értelmezési tartomány egyes részein a derivált előjeléből következtetünk a növekedésre, csökkenésre.

Az utolsó két pontban leírtakat célszerű egy táblázatban összefoglalni, mert akkor tömörebben írhatjuk a dolgokat.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Vizsgáljuk meg növekedés és csökkenés, azaz monotonitás, valamint szélsőérték szempontjából az $f(x) = 3x^4 - 8x^3$ függvényt.

Megoldás: A függvény minden valós számra értelmezhető, azaz $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 24x^2 = 0$$

Emeljünk ki amit csak lehet, így alakítsunk szorzattá.

$$12x^2(x - 2) = 0$$

Szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Két eset lesz, vagy $x^2 = 0$, amiből $x = 0$ következik, vagy $x - 2 = 0$, amiből $x = 2$ következik. A derivált zérushelyei tehát most a 0 és a 2.

Készítsünk ezután egy táblázatot. Az első sorban az értelmezési tartomány részeit tüntessük fel. A derivált zérushelyei bontják részekre a valós számok halmazát. A zérushelyeknek is készítsünk külön oszlopot, mert ezeket a helyeket kell vizsgálnunk, hogy van-e bennük szélsőérték. A második sorban majd azt jelezzük, hogy az adott részen milyen előjelű a derivált. A harmadik sorban pedig majd azt, hogy azon a részen hogyan viselkedik a

függvény. Most egyelőre azonban csak az első sort töltjük ki. Így az induló táblázatunk az alábbi.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Most vegyünk egy számot a $(-\infty, 0)$ intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. a -1 .

$$f'(-1) = 12(-1)^3 - 24(-1)^2 = -36$$

Negatív számot kaptunk, tehát a derivált negatív értékeket vesz fel a $(-\infty, 0)$ intervallumon.

Most vegyünk egy számot a $(0, 2)$ intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. az 1 .

$$f'(1) = 12 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1^2 = -12$$

Negatív számot kaptunk, tehát a derivált negatív értékeket vesz fel a $(0, 2)$ intervallumon.

Végül vegyünk egy számot a $(2, \infty)$ intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. a 3 .

$$f'(3) = 12 \cdot 3^3 - 24 \cdot 3^2 = 108$$

Pozitív számot kaptunk, tehát a derivált pozitív értékeket vesz fel a $(2, \infty)$ intervallumon.

Töltsük ki ezután a táblázat második sorát, beírva a derivált előjelét. A zérushelyeken természetesen azt írjuk be, hogy a derivált ott 0 .

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$
$f(x)$					

Ezután töltjük ki a harmadik sort is. Ahol a második sorban negatív a derivált, ott a függvény csökken, ahol pedig pozitív a derivált ott a függvény nő. Amelyik zérushelynél nem vált előjelet a derivált, ott nincs szélsőérték, de ahol megváltozik a derivált előjele ott van. Ha negatívból pozitívba vált a derivált, akkor lokális minimum van, hiszen a függvény a szélsőérték előtt csökken, azután pedig nő. Míg ha pozitívból negatívba megy át a derivált, akkor lokális maximum van, mert a függvény a szélsőérték előtt nő, utána pedig csökken.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$
$f(x)$	csökk. $\searrow$	nincs SZÉ. $\searrow$	csökk. $\searrow$	lokális minimum	nő $\nearrow$

A függvény tehát csökken a $(-\infty, 2)$ intervallumon, nő a $(2, \infty)$ intervallumon, és lokális minimuma van az $x = 2$ helyen.

Az $x = 0$ helyen nincs szélsőérték, mert ott nem vált előjelet a derivált, s mert a függvény előtte és utána is csökken. Ebből következik, hogy az $x = 0$ helyen is lokálisan csökkenő a függvény.

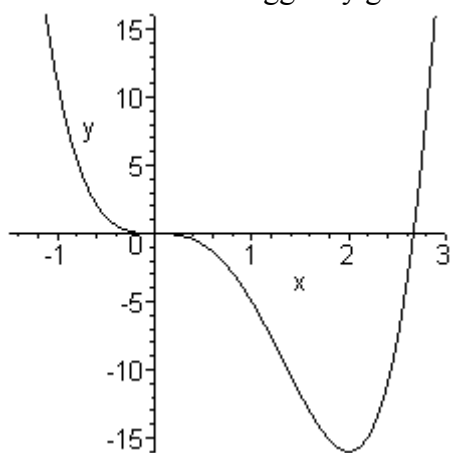
A táblázat alapján bármilyen növekedéssel, csökkenéssel és szélsőértékkel kapcsolatos kérdésre választ tudunk adni.

A szélsőérték nagyságát is megkaphatjuk, ha helyét behelyettesítjük az eredeti függvénybe. Jelen esetben tehát 2-t helyettesítünk az f -be.

$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 = -16$$

A függvény minimumának értéke tehát -16 .

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.



2. feladat: Vizsgáljuk meg növekedés és csökkenés, azaz monotonitás, valamint szélsőérték szempontjából az $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ függvényt.

Megoldás: A törtek miatt kikötést kell tennünk, $x \neq 0$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)' = (x^{-1} + x^{-2})' = (-1) \cdot x^{-2} + (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = 0$$

Célszerű -1 -gyel szorozni, és közös nevezőre hozni. Így az alábbi kapjuk:

$$\frac{x+2}{x^3} = 0.$$

Egy tört akkor 0, ha számlálója 0. Így az $x+2=0$ egyenletet kapjuk, amiből $x = -2$.

A deriváltnak tehát most csak egy zérushelye van. A táblázat készítésekor azonban ne feledkezzünk meg arról, hogy 0-ban nem értelmezett a függvény. Így a 0-t is vegyük be a táblázatba ugyanúgy, mint a derivált zérushelyét. Így az induló táblázat a következő.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$				X	
$f(x)$				X	

A 0 oszlopában az X-ekkel azt jelöltük, hogy ott a függvény nincs értelmezve.

Vegyük egy számot a $(-\infty, -2)$ -ből, mondjuk a -3 -at, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(-3) = -\frac{1}{(-3)^2} - \frac{2}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$$

Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.

Vegyük egy számot a $(-2, 0)$ -ből, mondjuk a -1 -et, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} - \frac{2}{(-1)^3} = 1$$

Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.

Végül vegyük egy számot a $(0, \infty)$ -ből, mondjuk a 1 -et, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(1) = -\frac{1}{1^2} - \frac{2}{1^3} = -3$$

Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.

Mivel -2 előtt negatív a derivált, utána azonban pozitív, így az $x = -2$ helyen a függvénynek lokális minimuma van.

Töltsük ki ezután egyből a táblázat második és harmadik sorát is.

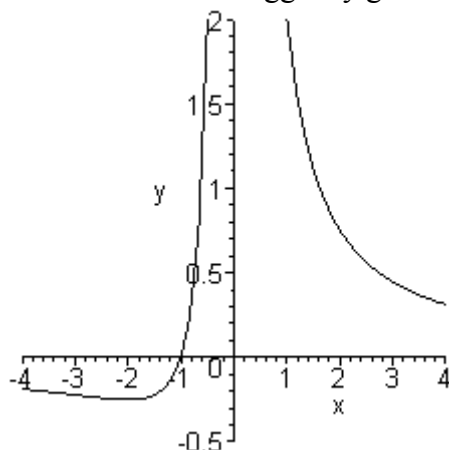
x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$	X	neg. $(-)$
$f(x)$	csökk. $\searrow$	lokális minimum	nő $\nearrow$	X	csökk. $\searrow$

A függvény tehát csökken a $(-\infty, -2)$ és $(0, \infty)$ intervallumokon, nő a $(-2, 0)$ intervallumon, és lokális minimuma van az $x = -2$ helyen.

A minimum értéke $f(-2) = \frac{1}{(-2)} + \frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$.

Bár az $x = 0$ helyen megváltozik a derivált előjele, ez mégsem szélsőérték, hiszen itt a függvény nincs értelmezve.

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.



3. feladat: Hol növekvő az f függvény, ha deriváltja $f'(x) = (x+2)(x-5)^2$? Az f ugyanott értelmezhető ahol f' .

Megoldás: Első lépésként meg kell vizsgálnunk, mi a legbővebb halmaz, amelyen f' értelmezhető. Mivel nem kell semmilyen kikötést tennünk $D_{f'} = \mathbb{R}$, s ugyanitt értelmezhető f is.

Mivel most ismerjük a függvény deriváltját, így az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásával folytatjuk.

$$(x+2)(x-5)^2 = 0$$

Mivel szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így az egyenlet két egyszerűbb egyenletre bontható. Vagy $x+2=0$, amiből $x=-2$, vagy $(x-5)^2=0$, amiből $x=5$.

Készítsük most táblázatot, aminek első sorában feltüntetjük az értelmezési tartomány részeit. Most a derivált két zérushelye a -2 és az 5 bontja részekre a valós számok halmazát.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 5)$	5	$(5, \infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Vegyünk egy számot a $(-\infty, -2)$ -ből, mondjuk a -3 -at, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(-3) = (-3+2)(-3-5)^2 = -64$$

Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.

Vegyünk egy számot a $(-2, 5)$ -ből, mondjuk a 0 -t, s helyettesítsük a deriváltba. (Egy pozitív és egy negatív szám között mindig a 0 -t célszerű választani, mert azt a legegyszerűbb helyettesíteni.)

$$f'(0) = (0+2)(0-5)^2 = 50$$

Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.

Végül vegyünk egy számot az $(5, \infty)$ -ből, mondjuk a 10 -et, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(10) = (10+2)(10-5)^2 = 300$$

Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.

Mivel -2 előtt negatív a derivált, utána azonban pozitív, így az $x = -2$ helyen a függvénynek lokális minimuma van.

Az $x = 5$ helyen nem változik a derivált előjele, és a függvény 5 előtt és után is nő, így ezen a helyen nincs szélsőérték. A függvény az $x = 5$ helyen is lokálisan nő.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 5)$	5	$(5, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$	0	poz. $(+)$

$f(x)$	csökk. $\searrow$	lokális minimum	nő $\nearrow$	nincs SZÉ. $\nearrow$	nő $\nearrow$
--------	-------------------	--------------------	---------------	--------------------------	---------------

A kész táblázat alapján már csak válaszolnunk kell a kérdésre. Látható, hogy a függvény a $(-2, \infty)$ intervallumon nő.

4. feladat: Hol csökkenő az f függvény, ha deriváltja $f'(x) = \frac{3-x}{x+4}$? Az f ugyanott értelmezhető ahol f' .

Megoldás: A feladat nagyon hasonlít az előzőhöz, így ugyanúgy járhatunk el. Első lépésként határozzuk meg, mely halmazon értelmezhető a függvény deriváltja. A nevező nem lehet zérus, így $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Ezután oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$\frac{3-x}{x+4} = 0 \Rightarrow 3-x = 0 \Rightarrow x = 3$$

Nézzük ezután, milyen részekre kell bontanunk az értelmezési tartományt. Az előzőekben szerepelt, hogy a derivált zérushelyei bontják részekre az értelmezési tartományt, mert általában ezeken a helyeken változik meg a derivált előjele. De nem csak zérushelyen változhat egy függvény előjele, hanem olyan helyen is, ahol nincs értelmezve. Gondoljunk pl.

az $\frac{1}{x}$ függvényre, amely nincs értelmezve az $x=0$ helyen. A negatív x értékekre negatív ez a függvény, a pozitív x -ekre pedig pozitív. Nincs tehát zérushely a 0-ban, hisz a függvény itt nem is értelmezett, de a függvény előjele mégis változik. Amikor készítjük a táblázatot, akkor tehát nem csak a derivált zérushelyével kell részekre bontani az értelmezési tartományt, hanem az értelmezési tartományban levő szakadási hellyel is. Készítsük el most a táblázatot, egyelőre az első sorát kitöltve. A szakadási helyen azonban a második és a harmadik sorban jelölhetjük, hogy ott a derivált nem értelmezett, így a függvényről sem tudunk semmit mondani.

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 3)$	3	$(3, \infty)$
$f'(x)$		X			
$f(x)$		X			

Ezután vizsgáljuk meg az értelmezési tartomány részein a derivált előjelét, és ebből határozzuk meg, nő vagy csökken ott a függvény.

Vegyünk egy -4 -nél kisebb számot. Legyen pl. -5 , s helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(-5) = \frac{3-(-5)}{-5+4} = -8$$

Negatív értéket kaptunk, tehát $x < -4$ esetén negatív a derivált, ebből következően itt csökken a függvény.

Vegyünk egy -4 és 3 közé eső számot. Legyen pl. 0 , s ezt is helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(0) = \frac{3-0}{0+4} = \frac{3}{4}$$

Pozitív értéket kaptunk, tehát ha $-4 < x < 3$, akkor pozitív a derivált, s így itt nő a függvény.

Végül vegyünk egy 3-nál nagyobb számot is. Legyen pl. 4, és helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(4) = \frac{3-4}{4+4} = -\frac{1}{8}$$

Negatív értéket kaptunk, így ha $3 < x$ akkor negatív a derivált, tehát ekkor csökken függvény. Mivel a derivált értéke az $x = 3$ helyen előjelet vált, így ezen a helyen van lokális szélsőértéke a függvénynek. Mert a derivált pozitívból negatívba megy át, így ezen a helyen lokális maximum van.

Ezután kitölthetjük a táblázat második és harmadik sorát is.

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 3)$	3	$(3, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	X	poz. $(+)$	0	neg. $(-)$
$f(x)$	csökk. $\searrow$	X	nő $\nearrow$	lokális maximum	csökk. $\searrow$

A kitöltött táblázat alapján válaszolhatunk a feladat kérdésére. A függvény csökken a $(-\infty, -4)$ és $(3, \infty)$ intervallumokon.

5. feladat: Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az f függvénynek, ha deriváltja

$$f'(x) = (x-2)^2 \ln x? \text{ Az } f \text{ ugyanott értelmezhető ahol } f'.$$

Megoldás: Az előző feladatok megoldásából láthattuk, hogy egy függvény szélsőértékeinek meghatározásához is azokra a lépésekre van szükség, mint a növekedés és a csökkenés vizsgálatához. Így járunk el hasonlóan, mint az előzőekben. Elsőként vizsgáljuk meg, mely halmazon értelmezhető a függvény deriváltja. Most a $\ln x$ miatt ki kell kötnünk, hogy x csak pozitív értékeket vehet fel, így $D_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Ezután oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$(x-2)^2 \ln x = 0$$

Arra hivatkozunk, hogy szorzat csak akkor lehet zérus, ha valamelyik tényezője 0. Így az egyenletet egyszerűbb egyenletekre bontjuk.

$$(x-2)^2 = 0 \text{ vagy } \ln x = 0$$

Az első egyenlet megoldása nyilván $x = 2$.

A második egyenlet mindkét oldalát tekintsük úgy mint kitevőt, s az e számot emeljük fel ezen kitevőkre. Így a bal oldalon olyan kompozíciót kapunk, amiben egy függvény és inverze szerepel, így ott egyszerűen x áll.

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$$

A derivált zérushelyei tehát az 1 és a 2.

Ezután elkészíthetjük a táblázatot, egyelőre csak az első sort kitöltve. Figyeljünk oda, hogy az értelmezési tartomány most csak a pozitív valós számok halmaza. Így az első részben nem a $(-\infty, 1)$ intervallum áll, hanem ott a $(0, 1)$ intervallumnak kell szerepelni.

x	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Ezután vizsgáljuk a derivált előjelét az egyes részekben, s ebből következtessünk a növekedésre vagy a csökkenésre.

A $(0,1)$ intervallumban található pl. az 0.5 . Helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(0.5) = (0.5 - 2)^2 \ln 0.5 \approx -1.56$$

A derivált értéke itt negatív, tehát ezen az intervallumon csökken a függvény.

Az $(1,2)$ intervallumban található pl. az 1.5 , amit behelyettesítünk a deriváltba.

$$f'(1.5) = (1.5 - 2)^2 \ln 1.5 \approx 0.101$$

A derivált értéke ezen a helyen pozitív, ebből következően ezen az intervallumon nő a függvény.

Végül a $(2,\infty)$ intervallumban van pl. az 3 , amit a deriváltba helyettesítünk.

$$f'(3) = (3 - 2)^2 \ln 3 \approx 1.10$$

A derivált pozitív ezen a helyen, így itt is nő a függvény.

Az $x=1$ helyen a derivált előjele megváltozik, így itt a függvénynek lokális szélsőértéke van.

Mivel a derivált negatívból pozitívba megy át ezen a helyen, így itt lokális minimuma van a függvénynek.

Az $x=2$ helyen a derivált nem vált előjelet, így ezen a helyen nincs szélsőértéke a függvénynek. Mivel előtte és utána is növekvő a függvény, így ezen a helyen is lokálisan növekvő a függvény.

Töltsük ki ezután a táblázat második és harmadik sorát is.

x	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$	0	poz. $(+)$
$f(x)$	csökk. $\searrow$	lokális minimum	nő $\nearrow$	nincs SZÉ. $\nearrow$	nő $\nearrow$

A függvénynek tehát csak az $x=1$ helyen van lokális szélsőértéke, ahol lokális minimuma van.

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Hol növekvő az $f(x) = 3x^4 + 12x^3$ függvény?

A $(-\infty, -3)$ intervallumon.

A $(-\infty, 0)$ intervallumon.

A $(-3, \infty)$ intervallumon. (X)

A $(0, \infty)$ intervallumon.

2. kérdés: Hol csökkenő az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvény?

A $(-\infty, -1)$ és $(1, \infty)$ intervallumokon.

A $(-\infty, -1)$ és $(0,1)$ intervallumokon.

A $(-1,0)$ és $(1,\infty)$ intervallumokon.

A $(-1,0)$ és $(0,1)$ intervallumokon. (X)

3. kérdés: Hol növekvő az f függvény, ha deriváltja $f'(x) = (x-1)^3(x+8)$? Az f ugyanott értelmezhető ahol f' .

A $(-\infty,-8)$ és $(1,\infty)$ intervallumokon. (X)

A $(-\infty,1)$ intervallumon.

A $(-8,\infty)$ intervallumon.

A $(-8,1)$ intervallumon.

4. kérdés: Hol csökkenő az f függvény, ha deriváltja $f'(x) = \frac{x-5}{(x+2)^2}$? Az f ugyanott értelmezhető ahol f' .

A $(-\infty,-2)$ és $(2,5)$ intervallumokon. (X)

A $(-\infty,5)$ intervallumon.

A $(-2,5)$ és $(5,\infty)$ intervallumokon.

A $(-2,\infty)$ intervallumon.

5. kérdés: Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az f függvénynek, ha deriváltja $f'(x) = (x-7)^3 \ln x$? Az f ugyanott értelmezhető ahol f' .

Az $x=1$ és $x=7$ helyeken lokális minimuma van.

Az $x=1$ helyen lokális minimuma, az $x=7$ helyen lokális maximuma van.

Az $x=1$ és $x=7$ helyeken lokális maximuma van.

Az $x=1$ helyen lokális maximuma, az $x=7$ helyen lokális minimuma van. (X)

Elméleti összefoglaló: Az eddigiekben megismertük azt a módszert, mellyel függvényeket monotonitás és szélsőérték szempontjából vizsgálni tudunk. Most foglalkozunk azzal, hogyan tudjuk alkalmazni ezt a módszert a lecke elején vázolt problémákhoz hasonló esetekben, melyeket szöveges szélsőérték feladatoknak nevezhetünk. Az ilyen feladatokban első lépésként fel kell írunk, egy általunk választott független változó függvényében azt a mennyiséget, aminek a szélsőértékét keressük. Ezután meg kell határozni a feladat feltételeiből, hogy a független változó milyen értékeket vehet fel. Az így kapott, szöveg szerinti értelmezési tartományon kell aztán megkeresnünk a függvény szélsőértékeit a korábban megismert módon. A módszerrel az alábbi kidolgozott feladatokon keresztül ismerkedünk meg. Megoldjuk majd a lecke elején vázolt problémát is, de előbb egyszerűbb feladatokkal foglalkozunk.

Kidolgozott feladatok:

6. feladat: Mekkora kell választani egy 20 cm kerületű téglalap oldalait, hogy területe maximális legyen? Mekkora ez a maximális terület?

Megoldás: Jelöljük a téglalap egyik oldalát x -szel, a másikat pedig y -nal.

Ekkor a téglalap területe: $T = xy$.

Így felírva a területet, két változó mennyiség szerepel. Azonban a két változó között kapcsolat van, hiszen a kerület 20 cm. Írjuk fel a kerületet az oldalakkal.

$$K = 20 = 2x + 2y$$

Ebből az összefüggésből az egyik változó, pl. y kifejezhető.

$$y = 10 - x$$

Ha pedig ezután behelyettesítünk y helyére a területet leíró összefüggésben, akkor már egyváltozós függvényt kapunk. Ekkor már jelölhetjük azt is, hogy a terület az x változó függvénye.

$$T(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$$

Ezzel olyan függvényt kaptunk, ami a terület változását írja le az egyik oldal függvényében. Határozzuk meg ezután, hogy milyen határok között vehet fel értékeket a változó.

Nyilvánvaló, hogy az $x > 0$ feltételnek teljesülni kell, hiszen egy téglalap oldala csak pozitív lehet. Az x -nek azonban 10-nél kisebbnek is kell lennie, hiszen a téglalap másik oldala $10 - x$, és ennek is pozitívnak kell lenni. Így a változóra a $0 < x < 10$ feltételt kapjuk. Ezen a halmazon kell keresnünk a fenti $T(x)$ függvény maximumát. Ehhez állítsuk elő a függvény deriváltját.

$$T'(x) = 10 - 2x$$

Megoldjuk a $T'(x) = 0$ egyenletet.

$$10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

A deriváltak a zérushelye a $(0,10)$ intervallumba esik, így szóba jöhet, mint lehetséges maximum hely. Annak eldöntésére, hogy az $x = 5$ helyen valóban maximuma van-e a területnek, célszerű elkészíteni a szokásos táblázatot.

Az első sor kitöltésekor vegyük figyelembe a $0 < x < 10$ feltételt.

A derivált előjelének vizsgálatát immár nem részletezzük, mert nyilvánvaló, hogy melyik intervallumon pozitív ill. negatív a derivált.

x	$(0,5)$	5	$(5,10)$
$T'(x)$	+	0	-
$T(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Az $x = 5$ helyen tehát lokális maximuma van a függvénynek. Sőt ez a $0 < x < 10$ feltétel mellett nem csak lokális maximum, hanem ezen a halmazon ez globális maximum is, hiszen $x < 5$ esetén végig nő a függvény, $x > 5$ esetén pedig végig csökken.

A terület tehát akkor lesz maximális, ha az egyik oldal 5 cm hosszúságú. Persze ekkor a másik oldal hossza is 5 cm, azaz a téglalap ekkor négyzet.

A maximális területet kell még meghatároznunk. Helyettesítsük be a maximum helyét a függvénybe.

$$T_{\max} = T(5) = 5(10 - 5) = 25$$

A terület maximumának értéke tehát 25 cm^2 .

Megjegyzés: Az ilyen feladatokban nem egyértelmű, hogy mit lesz majd a legjobb független változónak tekinteni. Jelen feladatban elég egyértelmű volt, hogy a téglalap egyik oldalát célszerű választani, de eljárhattunk volna más módon is. Mivel a két oldal összege 10, így az egyik oldal ugyanannyival rövidebb 5-nél, mint amennyivel a másik hosszabb 5-nél. Választhattuk volna változónak ezt a mennyiséget is, amivel az oldalak az 5-től eltérnek. Természetesen ekkor másik függvény írja le területet, és más a szöveg szerinti értelmezési tartomány is. Ennek megmutatása végezt megoldjuk most a feladatot másik módon is.

Jelölje a téglalap két oldalát a és b . Tegyük fel, hogy a a nem rövidebb oldal, b pedig a nem hosszabb oldal, azaz $a \geq b$.

Jelölje x az oldalak hosszának 5-től való eltérését.

Ekkor $a = 5 + x$, $b = 5 - x$.

A téglalap terület: $T = ab$, amibe behelyettesítve a fentieket, egy függvényt kapunk, aminek változója x lesz.

$$T(x) = (5 + x)(5 - x) = 25 - x^2$$

Ne feledkezzünk el annak vizsgálatáról, hogy a szöveg milyen értékeket enged meg a változóra. Jelen esetben $0 \leq x$, hiszen egy eltérés nem lehet negatív, $x < 5$, mert a b oldálnak, azaz $5 - x$ -nek is pozitívnak kell lenni. Ez együttesen $0 \leq x < 5$, vagy $x \in [0, 5)$ formában írható. Amint látható, most olyan intervallumon keressük a maximumot, aminek egyik vége zárt, másik vége nyitott.

Vegyük a területfüggvény deriváltját.

$$T'(x) = -2x$$

Itt kell felhívunk azonban a figyelmet arra, hogy a derivált csak a T függvény értelmezési tartományának belső pontjaiban értelmezhető, így a derivált esetén már $0 < x < 5$, azaz $x \in (0, 5)$.

Ha megoldjuk a $T'(x) = 0$ egyenletet, ami $-2x = 0$, akkor abból $x = 0$ következik.

Ez azonban nem eleme T' értelmezési tartományának. Ennek ellenére olyan érzésünk támadhat, hogy ha van szélsőérték, akkor az most csak az $x = 0$ esetén lehet. Ennek igazolására készítsünk táblázatot. Az $x = 0$ értéket kezeljük külön, és itt a derivált sorában azt tüntetjük fel, hogy az nem értelmezett.

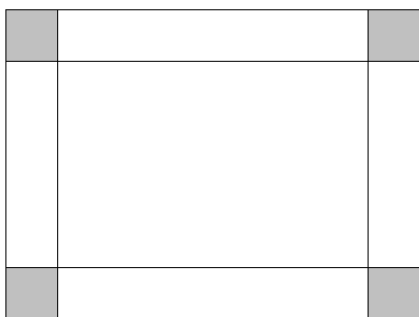
x	0	$(0, 5)$
$T'(x)$	nem értelmezett	neg. $(-)$
$T(x)$	maximum	$\searrow$

A táblázatból leolvasható, hogy a függvény végig csökken, s ebből következően a maximumát az értelmezési tartomány alsó határán, azaz $x = 0$ esetén veszi fel. Megkaptuk tehát most is, hogy akkor van szélsőérték, ha a téglalap négyzet.

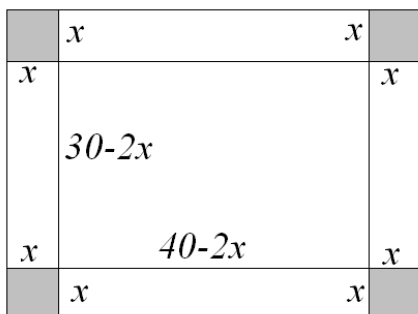
Megjegyezzük, hogy ha a második megoldásunk során nem éltünk volna az $a \geq b$ feltevessel, akkor x negatív értékeket is felvehetett volna. Ekkor egyrészt a $-5 < x$ feltételnek kellett volna teljesülni amiatt, hogy az a oldálnak, azaz $x + 5$ -nek pozitívnak kell lenni. Másrészt az $x < 5$ feltételnek kell fennállni, mert a b oldálnak, azaz $5 - x$ -nek pozitívnak kell lenni. A kettőből együttesen kapjuk, hogy $-5 < x < 5$, azaz $x \in (-5, 5)$. Ekkor ugyanúgy az értelmezési tartomány belső pontjában kapjuk a szélsőértéket, mint az első megoldásunkban. A fentiekből jól látható, hogy a független változó megválasztása nagyban befolyásolja a

feladat megoldásának további részét. Arra is felhívjuk a figyelmet, hogy a szélsőértéket nagyon sok esetben a derivált alkalmazása nélkül is meghatározhatjuk. Ha például a második megoldásunkban kapott területet leíró függvényt $T(x) = 25 - x^2$ vizsgáljuk, akkor egyértelműen $x = 0$ esetén van maximuma a függvénynek. Ennek oka, hogy egy konstansból vonunk x^2 -et, aminek legkisebb értéke a 0, az $x = 0$ esetben. Így amikor x^2 a legkisebb, akkor lesz $25 - x^2$ a legnagyobb. Sok esetben viszont nem találunk ilyen elemi megoldást, s így ilyenkor nem tudjuk elkerülni a derivált alkalmazását.

7. feladat: Egy téglalap alakú lemezből, melynek oldalai 30 cm és 40 cm hosszúak, mindegyik sarkánál négyzet alakú darabokat vágunk ki az ábrán látható módon. A megmaradt lemez füleit felhajtjuk, és az éleket összehegesztve felül nyitott téglatest alakú dobozt kapunk. Mekkora legyen a kivágott négyzetek oldalát, ha azt szeretnénk, hogy a doboz térfogata maximális legyen?



Megoldás: Jelöljük a kivágott kis négyzetek oldalát x -szel, és tekintsük az alábbi ábrát.



Ezen láthatjuk, hogy dobozunk alapja egy $30 - 2x$, és $40 - 2x$ oldalú téglalap, magassága pedig x . Téglatest térfogata a három oldal szorzatából kapható, így felírhatjuk a doboz térfogatát az x változó függvényében.

$$V(x) = (30 - 2x)(40 - 2x)x = 1200x - 140x^2 + 4x^3$$

Határozzuk meg, hogy milyen intervallumon belül mozoghat x értéke. Egyrészt nyilván $0 < x$, másrészt $x < 15$, mert a doboz alapjának rövidebb oldala, azaz $30 - 2x$ pozitív kell legyen. A függvényünk szöveg szerinti értelmezési tartománya tehát $0 < x < 15$, azaz $x \in (0, 15)$. A szélsőértéket csak ezen a halmazon keressük.

Deriváljuk a függvényt.

$$V'(x) = 1200 - 280x + 12x^2$$

Oldjuk meg a $V'(x) = 0$ egyenletet.

$$1200 - 280x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 70x + 300 = 0$$

Ez egy másodfokú egyenlet, melynek gyökei az alábbiak.

$$x_{1,2} = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 3 \cdot 300}}{2 \cdot 3} = \frac{70 \pm \sqrt{1300}}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{35 + \sqrt{325}}{3} = \frac{35 + 5\sqrt{13}}{3} \approx 17.68 \\ x_2 = \frac{35 - \sqrt{325}}{3} = \frac{35 - 5\sqrt{13}}{3} \approx 5.66 \end{cases}$$

A két megoldás közül csak $x_2 = \frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}$ esik a $(0, 15)$ intervallumba ezt kell vizsgálni.

Készítsük el a szokásos táblázatot.

x	$\left(0, \frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}\right)$	$\frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}$	$\left(\frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}, 15\right)$
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

A $V'(x)$ sorában az előjeleket például a következő módon kaphattuk meg. Választunk egy számot a $\left(0, \frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}\right)$ intervallumból, mondjuk az 1-et, mert azzal könnyű lesz számolni.

Ezt behelyettesítjük $V'(x)$ -be.

$$V'(1) = 1200 - 280 \cdot 1 + 12 \cdot 1^2 = 932 > 0$$

Hasonlóan választunk egy számot a $\left(\frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}, 15\right)$ intervallumból. Legyen ez mondjuk a

10, mert ezzel is könnyű lesz számolni.

$$V'(10) = 1200 - 280 \cdot 10 + 12 \cdot 10^2 = -2800 < 0$$

Ezután már kijelenthetjük, hogy az $x = \frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}$ helyen lokális maximuma van a $V(x)$

függvénynek. A $(0, 15)$ intervallumon ez nem csak lokális, hanem globális maximum is,

hiszen $x = \frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}$ előtt végig nő a függvény, $x = \frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}$ után pedig végig csökken.

8. feladat: Két pozitív szám szorzata 100. Melyik ez a két szám, ha összegük minimális? Mekkora a minimális összeg?

Megoldás: Legyen a két szám x és y . Tudjuk, hogy $xy = 100$. Fejezzük ki ebből y -t.

$$y = \frac{100}{x}$$

Írjuk a két szám összegét ezután x függvényeként.

$$f(x) = x + \frac{100}{x}$$

Ennek a függvénynek kell keresnünk a minimumát a $(0, \infty)$ intervallumon.

Deriváljuk a függvényt.

$$f'(x) = \left(x + \frac{100}{x}\right)' = (x + 100x^{-1})' = 1 + 100(-1)x^{-2} = 1 - \frac{100}{x^2}$$

Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$1 - \frac{100}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 10$$

Minimum szempontjából nyilván csak az $x = 10$ esettel kell foglalkoznunk, hiszen most $x > 0$.

Készítsük el a már jól ismert táblázatot.

x	$(0,10)$	10	$(10,\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Az $f'(x)$ sorában az előjeleket például $x = 1$ és $x = 100$ deriváltba történő helyettesítésével kaphatjuk.

$$f'(1) = 1 - \frac{100}{1^2} = -99 < 0$$

$$f'(100) = 1 - \frac{100}{100^2} = 0.99 > 0$$

Amint látható, a függvénynek az $x = 10$ helyen lokális minimuma van, ami pozitív x -ekre egyben globális minimum is.

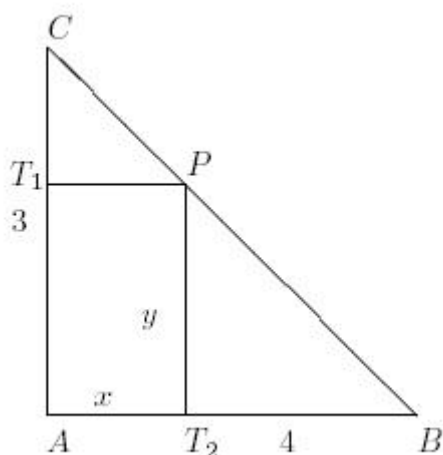
Határozzuk meg ezután a másik számot, tehát y -t is.

$$y = \frac{100}{x} = \frac{100}{10} = 10$$

Az összeg tehát akkor lesz minimális, ha mindkét szám 10. Ekkor az összegük 20, ez a minimális összeg.

9. feladat: Adott egy 3 és 4 egység befogójú derékszögű háromszög. Tekintsük azokat a háromszögbe írható téglalapokat, amelyeknek egyik csúcsa a háromszög derékszöge, az ezzel szemközti csúcs pedig az átfogóra esik. A legnagyobb területű ilyen téglalapnak mekkorák az oldalai?

Megoldás: Készítsünk egy ábrát a háromszögről és a belé írt téglalapról.



A téglalap x -szel és y -nal jelölt oldala között most hasonlóság alapján lehet összefüggést találni. A PT_2B és CAB derékszögű háromszögek hasonlóak, ezért

$$\frac{y}{4-x} = \frac{3}{4}$$

Rendezzük ezt y -ra.

$$y = \frac{3}{4}(4-x) = 3 - \frac{3}{4}x$$

Ezt felhasználva felírhatjuk a téglalap területét az x függvényében.

$$T(x) = x \left(3 - \frac{3}{4}x \right) = 3x - \frac{3}{4}x^2$$

Az x változó most nyilván a $(0, 4)$ intervallumba esik, így ezen a halmazon keressük a függvény maximumát.

Deriváljuk a függvényt.

$$T'(x) = 3 - \frac{3}{2}x$$

Megoldjuk a $T'(x) = 0$ egyenletet.

$$3 - \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

A szokásos táblázat segítségével megvizsgáljuk, hogy ezen a helyen valóban van-e maximuma a függvénynek.

x	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$
$T'(x)$	$+$	0	$-$
$T(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

A második sorban T' előjelét például $x=1$ és $x=3$ helyettesítésével vizsgálhattuk.

$$T'(1) = 3 - \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} > 0$$

$$T'(3) = 3 - \frac{3}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2} < 0$$

Amint látható, az $x = 2$ helyen lokális maximuma van a függvénynek, ami egyben globális maximum is.

Már csak a téglalap másik oldalát kell kiszámolnunk.

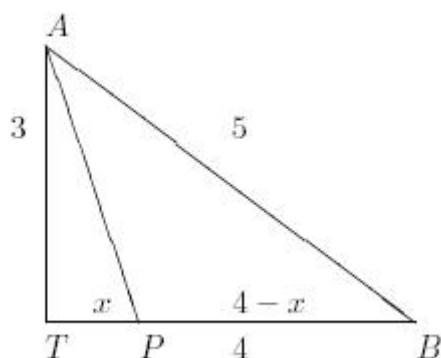
$$y = 3 - \frac{3}{4}x = 3 - \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$$

A maximális területű téglalap oldalai tehát 2 és $\frac{3}{2}$ hosszúságúak.

10. feladat: Egy ember ^3km -re van egy csónakban az egyenes tóparttól. Egy parton elhelyezkedő, tőle ^5km távolságban lévő helyre akar a lehető legrövidebb idő alatt eljutni.

Evezni $v_1 = 3\text{ km/h}$, gyalogolni $v_2 = 6\text{ km/h}$ sebességgel tud. Mennyi az a legrövidebb idő, ami alatt eljuthat a céljába?

Megoldás: Készítsünk egy ábrát!



Az ember helyét a csónakkal a tavon A jelöli, az egyenes tópart a T és B pontok által meghatározott egyenes, melynek B pontjába szeretne emberünk eljutni. Egy lehetőség a B pontba jutásra, hogy emberünk az AB szakasz mentén egyenes odaevev B -be. De valószínűleg nem ez lesz időben a legrövidebb. Mivel a parton gyorsabban halad mint a vízben, várhatóan jobban jár, ha a partnak valamilyen közelebbi P pontjáig evez, majd onnan gyalog folytatja az utat. A partra érkezés helye, azaz a P pont a legrövidebb idő esetén nyilvánvalóan a T és B pontok közé esik.

Válasszuk független változónak a P pont T -től való távolságát, és jelöljük ezt x -szel.

Próbáljuk meg ezzel kifejezni az A pontból B pontba jutás idejét.

Elsőként határozzuk meg a TB szakasz hosszát. Ez a Pitagorasz-tétel alapján nyilván 4 km . (A $3, 4, 5$ a legismertebb pitagorasz-i számhármass.)

Bontsuk az utat két szakaszra, első az evezés, a második a gyaloglás.

Az első szakasz hosszát ismét a Pitagorasz-tételből kapjuk, amit az ATP derékszögű háromszögben az AP átfogóra írunk fel. AP hosszát jelölje s_1 .

$$s_1 = \sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}$$

Az ennek megtételéhez szükséges időt, amit jelöljünk t_1 -gyel, megkapjuk, ha ezt osztjuk az evezés sebességével.

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3}$$

Ezzel órában mérve kapjuk meg AP szakaszon végigevezés idejét.

Most nézzük az út második szakaszát. Az itt megtett távolság a PB szakasz hossza, amit jelöljön s_2 , nyilván $4-x$ km. Az ennek megtételéhez szükséges időt jelölje t_2 . Az út gyalogos részének megtételéhez szükséges idő is az út és sebesség hányadosként kapható, de nyilván most a gyaloglás sebességével kell osztanunk.

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{4-x}{6}$$

A két időt összeadva felírhatjuk a teljes út megtételéhez szükséges időt az x változó függvényében.

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{4-x}{6}$$

Ennek a függvénynek keressük a minimumát a $0 \leq x < 4$ halmazon.

Állítsuk elő a függvény deriváltját.

$$\begin{aligned} t'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{4-x}{6} \right)' = \left(\frac{1}{3}(x^2+9)^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6}x \right)' = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Megoldjuk $t'(x) = 0$ egyenletet.

$$\frac{1}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow$$

$$4x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

A $-\sqrt{3}$ hamis gyök, így csak a $\sqrt{3}$ -mal kell foglalkoznunk.

Elkészítjük a szokásos táblázatot.

x	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, 4)$
$t'(x)$	$-$	0	$+$
$t(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

A második sorban az előjeleket például $x=1$ és $x=2$ helyettesítésével kapjuk.

$$t'(1) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1^2+9}} - \frac{1}{6} \approx -0.06 < 0$$

$$t'(2) = \frac{1}{3} \frac{2}{\sqrt{4^2+9}} - \frac{1}{6} \approx 0.018 > 0$$

A függvénynek tehát lokális minimuma van az $x = \sqrt{3}$ helyen, ami egyben globális minimum is a $(0, 4)$ intervallumon.

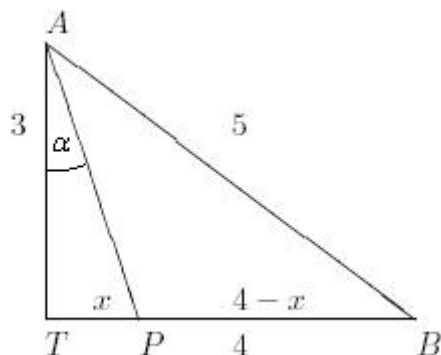
Még a legrövidebb időt kell kiszámolnunk.

$$t_{\min} = t(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2+9}}{3} + \frac{4-\sqrt{3}}{6} \approx 1.53$$

Tehát emberünknek az A pontból B pontba eljutás legalább 1.53 óráig tart.

Vázlatosan megoldjuk a feladatot egy másik úton is.

Válasszuk most független változónak az *ATP* derékszögű háromszög *A* csúcsnál lévő szögét, és jelöljük ezt α -val.



A *TP* szakasz hossza, ami az evezéssel megtett út, ekkor $s_1 = \frac{3}{\cos \alpha}$. Az ennek megtételéhez

$$\text{szükséges idő } t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{\frac{3}{\cos \alpha}}{3} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

A *PB* szakasz hossza, ami a gyalogolva megtett út, ekkor $s_2 = 4 - 3 \tan \alpha$. (Az x távolság az *ATP* derékszögű háromszögből kifejezhető, s $x = 3 \tan \alpha$.)

$$\text{A gyaloglásra fordított idő } t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{4 - 3 \tan \alpha}{6} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \tan \alpha.$$

Az út megtételéhez szükséges teljes idő az alábbi.

$$t(\alpha) = t_1 + t_2 = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \tan \alpha$$

Az α radiánban mért szög nyilván 0 és a $TAB \angle = \arctg \frac{4}{3} \approx 0.93$ közé esik. Ezen értékek

között keressük a $t(\alpha)$ függvény minimumát.

Deriváljuk a függvényt.

$$\begin{aligned} t'(\alpha) &= \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \tan \alpha \right)' = \frac{0 \cdot \cos \alpha - 1(-\sin \alpha)}{(\cos \alpha)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\cos \alpha)^2} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{(\cos \alpha)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\cos \alpha)^2} = \frac{\sin \alpha - \frac{1}{2}}{(\cos \alpha)^2} \end{aligned}$$

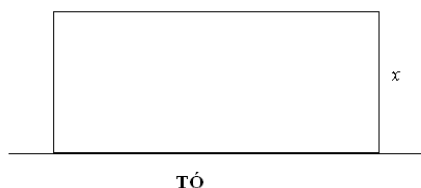
Ebből következik, hogy $t'(\alpha) = 0$ akkor teljesül, ha $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, amiből $\alpha = \frac{\pi}{6}$ következik.

A megoldás befejezéshez el kell készíteni a táblázatot, amelyből megállapítható, hogy ezen a helyen valóban minimuma van a függvénynek, majd kiszámolható a legrövidebb idő is.

Ezeket a lépéseket már nem hajtjuk végre, hanem az olvasóra bízunk. Természetesen így is ugyanarra az eredményre jutunk.

Ellenőrző kérdések:

6. kérdés: Egy tó egyenes partján szeretnénk elkeríteni egy téglalap alakú telket. Ehhez 200 m drótfonat áll rendelkezésünkre. A legnagyobb területű téglalapot szeretnénk elkeríteni úgy, hogy a tó felőli oldalon nem lesz kerítés.



Ha a téglalap tópartra merőleges oldalát választjuk változónak, és x -szel jelöljük, akkor az alábbi függvénnyel írható le a terület:

$$T(x) = 200x - x^2$$

$$T(x) = 200x - 2x^2 \quad (\text{X})$$

$$T(x) = 200x + x^2$$

$$T(x) = 200x + 2x^2$$

7. kérdés: Az előző kérdésben a maximális területű telek oldalai az alábbiak:

A partra merőleges oldal 40 m, a parttal párhuzamos oldal 120 m.

A partra merőleges oldal 50 m, a parttal párhuzamos oldal 100 m. (X)

A partra merőleges oldal 55 m, a parttal párhuzamos oldal 90 m.

A partra merőleges oldal $\frac{200}{3}$ m, a parttal párhuzamos oldal $\frac{200}{3}$ m.

8. kérdés: Két pozitív szám összege 1. A szorzatuk maximumát keressük. Ekkor a következő függvényt kell vizsgálnunk:

$$f(x) = (x-1)x$$

$$f(x) = x - x^2 \quad (\text{X})$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$$

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$$

9. kérdés: Az előző kérdésben a két szám szorzatának maximuma az alábbi:

$$\frac{1}{4} \quad (\text{X})$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

10. kérdés: A $[0,1]$ intervallumot egy belső pontjával két részre bontjuk, és mindegyik rész fölé négyzetet emelünk. A négyzetek területösszegének minimumát szeretnénk meghatározni. Melyik függvényt kell vizsgálnunk, ha független változónak az egyik szakasz hosszát választjuk?

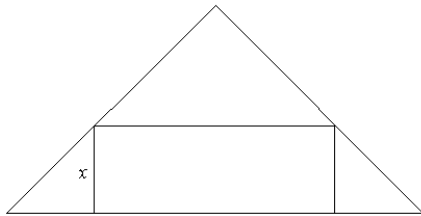
$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$f(x) = 2x^2 - 2x + 2$$

$$f(x) = 2x^2 - 2x + 1 \text{ (X)}$$

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

11. kérdés: Egy egységnyi befogójú, egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogójára téglalapot írunk úgy, hogy két csúcsa az átfogóra, a másik két csúcsa pedig egy-egy befogóra esik.



Keressük a legnagyobb területű ilyen téglalapot. Ha a téglalap átfogóra merőleges oldalát választjuk független változónak, és jelöljük x -szel, akkor melyik függvényt kell vizsgálnunk?

$$f(x) = (1-x)x$$

$$f(x) = (1-2x)x$$

$$f(x) = (\sqrt{2} - x)x$$

$$f(x) = (\sqrt{2} - 2x)x \text{ (X)}$$

12. kérdés: Az előző kérdésben a téglalap maximális területe:

$$\frac{1}{4} \text{ (X)}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}$$

További kidolgozott feladatok:

11. feladat: Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$ függvényt!

Megoldás: Amikor egy függvényt valamilyen szempontból vizsgálunk, akkor elsőként mindig az értelmezési tartományt kell meghatároznunk. Jelen esetben ki kell kötnünk, hogy a nevező nem lehet 0, s ebből az következik, hogy $x \neq -1$. A függvény értelmezési tartománya tehát: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

A monotonitás vizsgálata azt jelenti, hogy meghatározzuk, hol nő, hol csökken a függvény. Ehhez elő kell állítanunk a függvény deriváltját. Alkalmazzuk a törtekre vonatkozó deriválási szabályt.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1)^2 - x^2 \cdot 2(x+1)}{((x+1)^2)^2}$$

Ez ilyen formában nagyon csúnyán néz ki, ezért próbáljunk alakítani rajta. Emeljünk ki a számlálóban, amit csak lehet, a nevezőt pedig írjuk egyetlen hatványként.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)[(x+1) - x]}{(x+1)^4}$$

Ezután egyszerűsítsünk, és a szögletes zárójelen belül vonjunk össze.

$$f'(x) = \frac{2x}{(x+1)^3}$$

A derivált minél egyszerűbb alakra hozása azért fontos, mert ezután meg kell oldanunk az $f'(x) = 0$ egyenletet, valamint vizsgálnunk kell majd a derivált előjelét. Ha a derivált bonyolult alakban van felírva, akkor mind az egyenlet megoldása, mind az előjel vizsgálata nehézségekbe ütközik. Általában elmondhatjuk, hogy ha lehetőség van kiemelésre, akkor ezzel a lehetőséggel élni kell, s törtek esetében egyszerűsítsünk, ha erre lehetőség van. Most oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet, hogy megkapjuk, hol lehet szélsőértéke a függvénynek.

$$\frac{2x}{(x+1)^3} = 0$$

Tört csak úgy lehet egyenlő 0-val, ha számlálója 0, így egyszerűbb egyenletet kapunk.

$$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ezután a szokásos módon táblázatot készíthetünk. Elsőként csak az első sort töltjük ki, melyben feltüntetjük az értelmezési tartomány részeit, melyeken belül már nem változik a derivált előjele. Az értelmezési tartományt a derivált zérushelye és az értelmezési tartományban levő szakadás bontja részekre. A szakadási hely oszlopában X-ekkel jelölhetjük, hogy ott a függvény nem értelmezett.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$		X			
$f(x)$		X			

Most vizsgáljuk meg a derivált előjelét az egyes részekben. A derivált tört, így külön vizsgálhatjuk a számláló és a nevező előjelét, amiből következtethetünk a tört előjelére.

Ha $x < -1$, akkor a számláló, azaz $2x$ negatív, és a nevező, azaz $(x+1)^3$ is negatív, így a derivált ekkor pozitív. Ebben az esetben tehát nő a függvény.

Ha $-1 < x < 0$, akkor $2x$ negatív, de $(x+1)^3$ pozitív, így negatív lesz a derivált. A függvény tehát ekkor csökken.

Ha $0 < x$, akkor $2x$ is pozitív, és $(x+1)^3$ is pozitív, azaz pozitív lesz a derivált. Ebből következően itt nő a függvény.

Az $x=0$ helyen a derivált előjele megváltozik, így itt szélsőértéke van a függvénynek. Mivel a derivált negatívból pozitívba megy át ezen a helyen, így itt lokális minimuma van a függvénynek.

Készítsük el a teljes táblázatot.

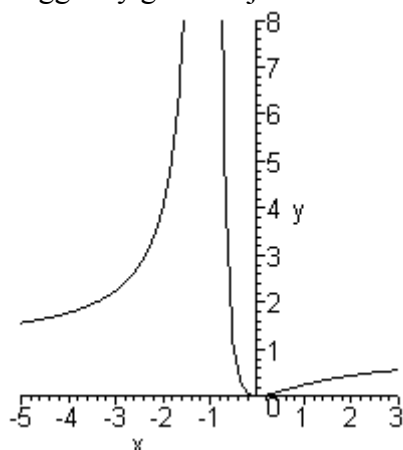
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	X	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	X	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

A táblázattal így megadtuk, hogy hol nő, és hol csökken a függvény, valamint hol, milyen jellegű szélsőértéke van. Már csak egyetlen feladatunk van, megadni a szélsőérték nagyságát. Helyettesítsük be a függvénybe azt a helyet, ahol szélsőértéke van.

$$f(0) = \frac{0^2}{(0+1)^2} = 0$$

A lokális minimum értéke tehát 0.

A függvény grafikonja az alábbi ábrán látható.



12. feladat: Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x) = x^2 e^{-2x}$ függvényt!

Megoldás: Határozzuk meg a legbővebb halmazt, amin értelmezhető a függvény. Nem kell kikötést tennünk, így $D_f = \mathbb{R}$.

Deriváljuk a függvényt. Alkalmazzuk a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt, és ne feledkezzünk el arról, hogy szorzat második tényezője összetett függvény.

$$f'(x) = 2xe^{-2x} + x^2 e^{-2x} \cdot (-2)$$

Emeljük ki amit lehet.

$$f'(x) = 2xe^{-2x} (1 - x)$$

Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$2xe^{-2x} (1 - x) = 0$$

Egy három tényezős szorzat egyenlő 0 -val, ami csak úgy lehetséges, ha valamelyik tényező 0. Így három egyszerűbb egyenletet kapunk.

$$x = 0, \text{ vagy } e^{-2x} = 0, \text{ vagy } (1-x) = 0.$$

Az első egyenlettel semmit sem kell tenni, a harmadiknak pedig $x=1$ megoldása.

A második egyenletnek nincs megoldása, mert exponenciális függvény csak pozitív értékeket vesz fel, azaz $e^{-2x} > 0$ minden x esetén, így $e^{-2x} \neq 0$.

A derivált zérushelyeinek ismertében készítsük el a táblázatot, egyelőre csak az első sort kitöltve.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Vizsgáljuk meg a derivált előjelét az egyes intervallumokon.

$$(-\infty, 0): f'(-1) = 2(-1)e^{-2(-1)}(1-(-1)) = -4e^2 < 0$$

$$(0, 1): f'(0.5) = 2 \cdot 0.5e^{-2 \cdot 0.5}(1-0.5) = 0.5e^{-1} > 0$$

$$(1, \infty): f'(2) = 2 \cdot 2e^{-2 \cdot 2}(1-2) = -4e^{-4} < 0$$

Megjegyezzük, hogy a derivált előjelét a szorzat egyes tényezőinek előjeléből is könnyen vizsgálhatjuk. Például a $(-\infty, 0)$ intervallumon x nyilván negatív, az e^{-2x} mindig pozitív, az $1-x$ szintén pozitív. Mivel a három tényezőtől csak egy negatív, így negatív lesz a szorzat is. Hasonlóan járhatunk el a másik két intervallumon is.

Most töltsük az egész táblázatot.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

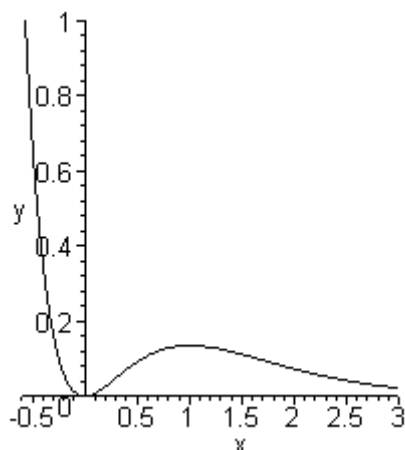
A táblázatból látható, hogy a függvény a $(-\infty, 0)$ és $(1, \infty)$ intervallumokon csökken, a $(0, 1)$ intervallumon pedig nő. Az $x=0$ helyen lokális minimuma, az $x=1$ helyen pedig lokális maximuma van.

Határozzuk meg a minimum és maximum értékét is.

$$\text{A lokális minimum értéke: } f(0) = 0^2 e^{-2 \cdot 0} = 0.$$

$$\text{A lokális maximum értéke: } f(1) = 1^2 e^{-2 \cdot 1} = e^{-2} \approx 0.135.$$

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.



13. feladat: Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x) = x^2 \ln(x^2)$ függvényt!

Megoldás: Határozzuk meg a legbővebb halmazt, amin értelmezhető a függvény. A logaritmus miatt kell kikötést tennünk. Mivel csak pozitív számoknak létezik logaritmusa, így kikötjük, hogy $x^2 > 0$. Ez minden 0-tól különböző szám esetén teljesül, így $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Előállítjuk a függvény deriváltját. Szorzatot deriválunk, melynek második tényezője összetett függvény.

$$f'(x) = 2x \ln(x^2) + x^2 \frac{1}{x^2} 2x = 2x \ln(x^2) + 2x$$

Emeljük ki amit lehet.

$$f'(x) = 2x(\ln(x^2) + 1)$$

Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$2x(\ln(x^2) + 1) = 0$$

Vizsgáljuk külön a szorzat tényezőit, hogy mikor egyenlők 0-val.

Első tényező: $x = 0$. Ez nem eleme a függvény értelmezési tartományának.

Második tényező: $\ln(x^2) + 1 = 0$. Ez átrendezve $\ln(x^2) = -1$ lesz.

A -1 -et írjuk fel $\ln(e^{-1})$ formában, így az $\ln(x^2) = \ln(e^{-1})$ egyenletet kapjuk.

A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt elhagyhatjuk az egyenlet két oldaláról a logaritmust. Így kapjuk $x^2 = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Ennek megoldásai: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Most készítsük el a szokásos táblázatunkat. Ez most egy kicsit hosszabb lesz mint az eddigiek, hiszen a deriválnak két zérushelye is van, és a függvény értelmezési tartományában is van szakadás. Egyelőre csak az első sort töltjük ki, és a szakadást jelöljük.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$
$f'(x)$				X			

$f(x)$				X			
--------	--	--	--	---	--	--	--

Határozzuk meg f' előjelét az egyes intervallumokon.

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right): f'(-1) = 2 \cdot (-1) \left(\ln((-1)^2) + 1 \right) = -2(0+1) = -2 < 0$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right): f'\left(-\frac{1}{e}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{e}\right) \left(\ln\left(\left(-\frac{1}{e}\right)^2\right) + 1 \right) = -\frac{2}{e}(-2+1) = \frac{2}{e} > 0$$

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right): f'\left(\frac{1}{e}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{e}\right) \left(\ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^2\right) + 1 \right) = \frac{2}{e}(-2+1) = -\frac{2}{e} < 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right): f'(1) = 2 \cdot 1 \left(\ln(1^2) + 1 \right) = 2(0+1) = 2 > 0$$

Most töltsük ki a teljes táblázatot.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+	X	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	X	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

A táblázatból látható, hogy a függvény csökken a $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ és $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ intervallumokon,

nő a $\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$ intervallumokon. Két lokális minimuma van az $x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}}$

helyeken.

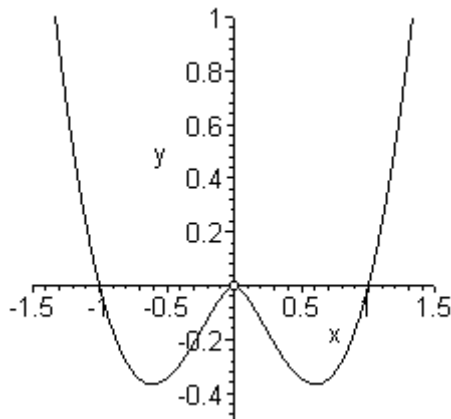
Határozzuk meg a lokális minimumok értékét is.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e} \approx -0.368$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e} \approx -0.368$$

A két minimum értéke megegyezik.

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható. Az origóban az üres karika jelzi a függvény szakadását.

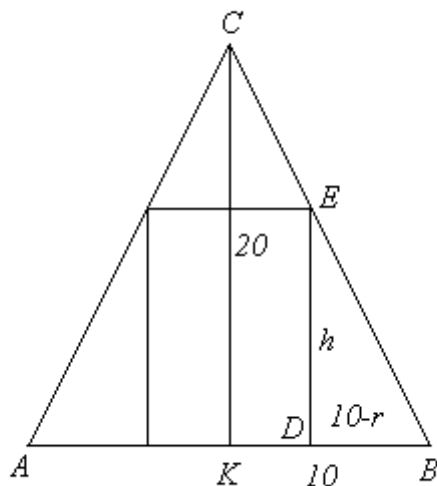


14. feladat: Egy 10 cm sugarú, 20 cm magasságú egyenes körkúpba hengert írunk úgy, hogy forgástengelye megegyezik a kúp forgástengelyével, alapköre a kúp alapkörére esik, fedőköre pedig érinti a kúp palástját. Mekkora legyen a henger sugara és magassága, hogy térfogata maximális legyen? Mekkora a maximális térfogat?

Megoldás: Jelöljük a henger sugarát r -rel, magasságát pedig h -val. Ekkor a henger térfogata, aminek szélsőértéke kell, hogy legyen, az alábbi módon írható fel:

$$V_{\text{henger}} = \pi r^2 h$$

Ebben két változó van, hiszen ha változik a henger sugara, akkor a magasság is változik. Amint azt korábbi feladatban tettük, itt is összefüggést keresünk a két változó között. Ehhez szükségünk lesz egy ábrára. Képzeletben vágjuk el a kúpot és a hengert egy a közös forgástengelyre illeszkedő síkkal, és a síkmetszetről készítsünk ábrát. Ezen metszeten a kúp nyilván egyenlő szárú háromszögnek látszik majd, a henger pedig egy olyan téglalapnak, amely ezen háromszögbe van írva úgy, hogy két csúcsa az alapra, másik két csúcsa pedig egy-egy szárra esik.



Az ábráról nyilvánvaló, hogy a KBC derékszögű háromszög hasonló a DBE derékszögű háromszöghöz, így a két háromszögben megegyezik a befogók aránya. Írjuk ezt fel.

$$\frac{h}{10-r} = \frac{20}{10} = 2$$

Fejezzük ki ebből h -t az r -rel.

$$h = 20 - 2r$$

Helyettesítsük be ezt a henger térfogatába, s így olyan függvényt kapunk, amiben már csak r lesz a változó.

$$V(r) = \pi r^2(20 - 2r) = 20\pi r^2 - 2\pi r^3$$

Ennek a függvénynek kell keresnünk a maximumát. A változóra nyilván a $0 < r < 10$ feltételnek kell teljesülni. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy szigorú egyenlőtlenségek vannak, mert egyenlőség esetén a henger elfajulna. Az $r = 0$ esetben egy szakasszá, a kúp magasságává válna a henger, az $r = 10$ esetben pedig egy körlappá, a kúp alapkörévé válna. Ezután a szokott módon határozzuk meg a szélsőértéket. Állítsuk elő a térfogatfüggvény deriváltját.

$$V'(r) = 40\pi r - 6\pi r^2$$

Oldjuk meg a $V'(r) = 0$ egyenletet. Ehhez célszerű a deriváltat szorzattá alakítani.

$$V'(r) = 2\pi r(20 - 3r) = 0$$

Így nyilvánvaló, hogy az egyenletnek két megoldása van, az egyik $r = 0$, a másik pedig

$r = \frac{20}{3}$. Az $r = 0$ nem felel meg a $0 < r < 10$ feltételnek, így csak a másik zérushellyel kell

foglalkoznunk. Készítsük el a megszokott táblázatot, melyet töltsünk most ki egyből teljesen. A derivált előjelét például a következő módon kaphatjuk meg a két intervallumon.

$$\left(0, \frac{20}{3}\right): V'(1) = 40\pi \cdot 1 - 6\pi \cdot 1^2 = 34\pi > 0$$

$$\left(\frac{20}{3}, 10\right): V'(8) = 40\pi \cdot 8 - 6\pi \cdot 8^2 = -64\pi < 0$$

x	$\left(0, \frac{20}{3}\right)$	$\frac{20}{3}$	$\left(\frac{20}{3}, 10\right)$
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Látható, hogy az $r = \frac{20}{3}$ helyen lokális maximuma van a függvénynek, ami a $0 < r < 10$ feltétel mellett globális maximum is.

A henger térfogat tehát akkor maximális, ha $r = \frac{20}{3}$.

Ekkor a henger magassága a következő:

$$h = 20 - 2 \cdot \frac{20}{3} = \frac{20}{3}.$$

Végül a maximális térfogat:

$$V_{\max} = V\left(\frac{20}{3}\right) = \pi \left(\frac{20}{3}\right)^2 \cdot \frac{20}{3} = \pi \frac{8000}{27} \approx 930.84.$$

Utolsó feladatként pedig, amint azt korábban ígértük, visszatérünk a lecke elején vázolt probléma megoldásához.

15. feladat: Egy telep üresjárási feszültsége U_0 , belső ellenállása R_b . Mekkora R_k külső ellenállást kell a telepre kapcsolni, hogy a külső ellenállás teljesítménye P_k maximális legyen? Mekkora ez a maximális teljesítmény?

Megoldás: Amint az a középiskolai fizika anyagból ismert, az R_k külső ellenállás teljesítménye a rajta átfolyó áram erősségének négyzete szorozva az ellenállással, azaz $P = I^2 R_k$.

Az áram erősségét az Ohm-törvényből kapjuk.

$$I = \frac{U_0}{R_k + R_b}$$

Ezután a külső ellenállás teljesítménye:

$$P = \left(\frac{U_0}{R_k + R_b} \right)^2 R_k = U_0^2 \frac{R_k}{(R_k + R_b)^2}$$

Mivel U_0 és R_b konstansok, ebben csak az R_k külső ellenállás a változó, azaz a fenti összefüggés pontosan a teljesítményt írja le az R_k függvényében. Ezt jelölésben is hangsúlyozzuk.

$$P(R_k) = U_0^2 \frac{R_k}{(R_k + R_b)^2}$$

Az R_k külső ellenállás nyilván a $(0, \infty)$ intervallumba esik, így itt keressük ennek a függvénynek a maximumát.

Mivel a feladatban most nem szerepelnek konkrét szám adatok, kicsit jobban kell figyelni arra, hogy melyik betű jelenti a változót az összefüggésben, és melyek konstansok. Ha valakit zavar ilyen formában a jelölés, akkor változtassa meg, és közelítse a szokásos matematika jelölésekhez. A R_k helyett használjon x -et, $P(R_k)$ helyett $f(x)$ -et, az U_0 és R_b konstansok

helyett pedig a -t és b -t. Így a következőt kapja: $f(x) = a^2 \frac{x}{(x+b)^2}$. Mi most nem kívánunk

élni ezzel, hanem szeretnénk az eredeti jelöléssel végigvinni a megoldást.

Deriváljuk most a $P(R_k)$ függvényt az R_k változó szerint. A konstans szorzót emeljük ki a deriválás során, s alkalmazzuk a törtekre vonatkozó deriválási szabályt.

$$\begin{aligned} P'(R_k) &= \left(U_0^2 \frac{R_k}{(R_k + R_b)^2} \right)' = U_0^2 \left(\frac{R_k}{(R_k + R_b)^2} \right)' = \\ &= U_0^2 \frac{R_k' \cdot (R_k + R_b)^2 - R_k \cdot ((R_k + R_b)^2)'}{((R_k + R_b)^2)^2} = \\ &= U_0^2 \frac{1 \cdot (R_k + R_b)^2 - R_k \cdot 2(R_k + R_b)}{(R_k + R_b)^4} \end{aligned}$$

Emeljük ki a számlálóban $(R_k + R_b)$ -t, és egyszerűsítsünk.

$$P'(R_k) = U_0^2 \frac{(R_k + R_b)((R_k + R_b) - 2R_k)}{(R_k + R_b)^4} = U_0^2 \frac{R_b - R_k}{(R_k + R_b)^3}$$

Ezután határozzuk meg, hogy a $P'(R_k)$ derivált mikor 0.

$$U_0^2 \frac{R_b - R_k}{(R_k + R_b)^3} = 0 \Leftrightarrow R_b - R_k = 0 \Leftrightarrow R_k = R_b$$

A megszokott táblázatunk segítségével ellenőrizzük le, hogy ezen a helyen a $P(R_k)$ függvénynek valóban maximuma van. Töltsük ki egyből a teljes táblázatot. A második sorban az előjeleket például az alábbiakból kaphatjuk.

$$(0, R_b): P'\left(\frac{R_b}{2}\right) = U_0^2 \frac{R_b - \frac{R_b}{2}}{\left(\frac{R_b}{2} + R_b\right)^3} = U_0^2 \frac{\frac{1}{2} R_b}{\left(\frac{3}{2} R_b\right)^3} = U_0^2 \frac{\frac{1}{2} R_b}{\frac{27}{8} R_b^3} = \frac{4}{27} \frac{U_0^2}{R_b^2} > 0$$

$$(R_b, \infty): P'(2R_b) = U_0^2 \frac{R_b - 2R_b}{(2R_b + R_b)^3} = U_0^2 \frac{-R_b}{(3R_b)^3} = U_0^2 \frac{-R_b}{27R_b^3} = -\frac{1}{27} \frac{U_0^2}{R_b^2} < 0$$

R_k	$(0, R_b)$	R_b	(R_b, ∞)
$P'(R_k)$	+	0	-
$P(R_k)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Amint látható, amikor a külső ellenállás megegyezik a belső ellenállással akkor valóban maximuma lesz a külső ellenállás teljesítményének.

A maximális teljesítmény a következő:

$$P_{\max} = P(R_b) = U_0^2 \frac{R_b}{(R_b + R_b)^2} = U_0^2 \frac{R_b}{4R_b^2} = \frac{U_0^2}{4R_b}.$$

Ellenőrző kérdések:

13. kérdés: Hol nő az $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$ függvény?

A $(-\infty, -2)$ és $(0, 2)$ intervallumokon.

A $(-2, 0)$ és $(2, \infty)$ intervallumokon.

A $(-2, 0)$ és $(0, 2)$ intervallumokon.

A $(-\infty, -2)$ és $(2, \infty)$ intervallumokon. (X)

14. kérdés: Hol van szélsőértéke az $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 2}$ függvénynek?

Az $x = -2$ és az $x = 2$ helyeken.

Az $x = -\sqrt{2}$ és az $x = 0$ helyeken.

Az $x = 0$ és az $x = \sqrt{2}$ helyeken.

Az $x = -\sqrt{2}$ és az $x = \sqrt{2}$ helyeken. (X)

15. kérdés: Hol és milyen szélsőértéke van az $f(x) = xe^x$ függvénynek?

Az $x = -\frac{1}{2}$ helyen minimuma van. (X)

Az $x = -\frac{1}{2}$ helyen maximuma van.

Az $x = 2$ helyen minimuma van.

Az $x = 2$ helyen maximuma van.

16. kérdés: Hol csökken az $f(x) = x \ln(x^2)$ függvény?

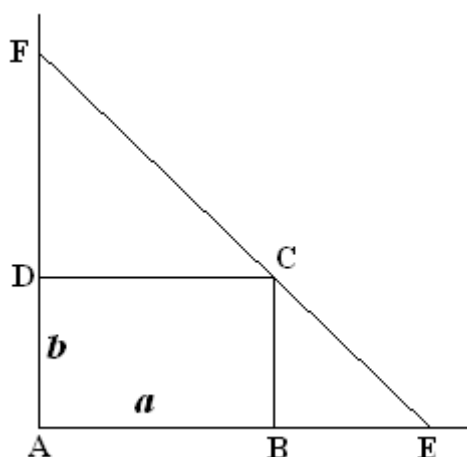
A $\left(-\infty, -\frac{1}{e}\right)$ és $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$ intervallumokon.

A $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ és $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ intervallumokon. (X)

A $(-\infty, -e)$ és (e, ∞) intervallumokon.

A $(-e, 0)$ és $(0, e)$ intervallumokon.

17. kérdés: Tekintsük a koordináta-rendszerben azt a téglalapot, melynek csúcsai: $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C(a;b)$, $D(0;b)$. A C csúcson áthaladó egyenessel derékszögű háromszöget vágunk le az első síknegyed sarkánál. (AEF háromszög)



Azt szeretnénk, hogy a háromszög területe minimális legyen. Ha az AE oldal hosszát választjuk független változónak, és x -szel jelöljük, akkor az alábbi függvényt kell vizsgálnunk szélsőérték szempontjából:

$$f(x) = \frac{a}{2} \frac{x^2}{x-b}$$

$$f(x) = \frac{a}{2} \frac{(x-b)^2}{x}$$

$$f(x) = \frac{b}{2} \frac{x^2}{x-a} \quad (\text{X})$$

$$f(x) = \frac{b(x-a)^2}{2x}$$

18. kérdés: Az előző kérdésben a minimális területű háromszög AE oldalának hossza:

$$\sqrt{2}a$$

$$2a \text{ (X)}$$

$$\sqrt{2}(a+b)$$

$$2(a+b)$$

3. Differenciálszámítás

3.4. Függvény konvexitásának vizsgálata, teljes függvényvizsgálat

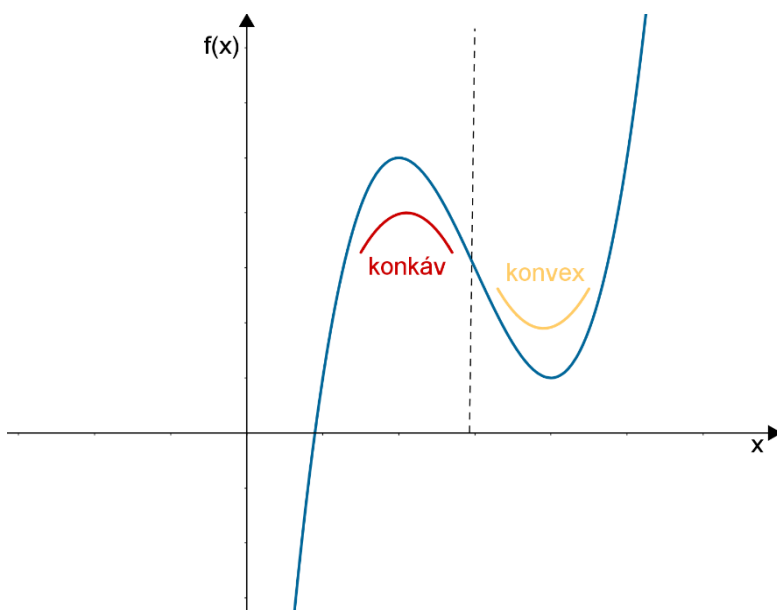
Tanulási cél: A másodrendű derivált és a konvexitás közötti kapcsolat megismerése, a függvények konvexitás és inflexiós pont szempontjából való jellemzése. A teljes függvényvizsgálat lépéseinek megismerése és gyakorlása

Elméleti összefoglaló:

A Matematika 1. tantárgy A derivált alkalmazásai című leckéjében láttuk, hogy az elsőrendű derivált előjele meghatározza a függvény monotonitását. A másodrendű derivált előjeléből is következtetéseket vonhatunk le a függvény görbéjének alakjáról, ebben az esetben a függvény konvexitására vonatkozóan.

Elsőként definiáljuk a konvexitás fogalmát szemléletes módon.

Definíció: Egy intervallumon értelmezett valós függvény **konvex**, ha a függvénygörbe két pontját összekötő húr a függvénygörbe fölött halad. Egy intervallumon értelmezett valós függvény **konkáv**, ha a függvénygörbe két pontját összekötő húr a függvénygörbe alatt halad.



Tétel: Legyen az f függvény az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos és az (a, b) nyílt intervallumon differenciálható. Az f függvény az $[a, b]$ -n akkor és csak akkor konvex, ha $f'(x)$ az (a, b) -n szigorúan monoton nő, illetve az f függvény az $[a, b]$ -n akkor és csak akkor konkáv, ha $f'(x)$ az (a, b) -n szigorúan monoton csökkenő.

Tétel: Legyen az f függvény kétszer differenciálható (a,b) -n. Az f függvény akkor és csak akkor konvex az $[a,b]$ -n, ha $f''(x) > 0$ (a,b) -n, illetve az f függvény akkor és csak akkor konkáv az $[a,b]$ -n, ha $f''(x) < 0$ (a,b) -n.

Definíció: Legyen f folytonos (a,b) -n és $c \in (a,b)$. Ha f konvex (a,c) -n és konkáv (c,b) -n, vagy konkáv (a,c) -n és konvex (c,b) -n, akkor c **inflexiós pontja** f -nek.

Tétel: Legyen f a c hely környezetében kétszer differenciálható. Ha a c pontban f -nek inflexiós pontja van, akkor $f''(c) = 0$.

Fontos megjegyezni, hogy a tétel megfordítása nem igaz. Abból, hogy az $f''(c) = 0$, még nem következik, hogy c inflexiós pont.

Tétel: Ha f kétszer differenciálható c -ben és $f''(c) = 0$, továbbá (a,c) -n $f'' > 0$ és (c,b) -n $f'' < 0$, vagy (a,c) -n $f'' < 0$ és (c,b) -n $f'' > 0$, azaz f'' c -ben előjelet vált, akkor c inflexiós pontja f -nek.

A fenti tételek birtokában a következő módon vizsgálhatjuk a függvényeket konvexitás és inflexiós pont szempontjából.

1. Megvizsgáljuk, hogy mi a legbővebb halmaz, amelyen a függvény értelmezhető.
2. Kétszer deriváljuk a függvényt (amennyiben lehetséges).
3. Megoldjuk az $f''(x) = 0$ egyenletet. Ezzel megkapjuk azokat a helyeket, ahol inflexiós pont lehet.
4. Az értelmezési tartományt a szakadási helyekkel és a másodrendű derivált zérushelyeivel részekre bontjuk, s az adott részeken megvizsgáljuk a derivált előjelét. Ezt például úgy hajtjuk végre, hogy mindegyik részből választunk egy számot, melyet a deriváltba behelyettesítünk.
5. Az értelmezési tartomány egyes részein a másodrendű derivált előjeléből következtetünk a konvexitásra.

Az utolsó két pontban leírtakat célszerű egy táblázatban összefoglalni, mert akkor tömörebben írhatjuk le az adatokat.

Ez a fenti módszer ismerős lehet, mivel hasonló módon végeztük a függvények monotonitására és szélsőértékére vonatkozó vizsgálatot (lásd Matematika 1. A derivált alkalmazásai című leckében).

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}$. Hol konvex az $f(x)$ függvény, ha második deriváltja $f''(x) = (x-1)(x+6)^3$?

Megoldás: Amikor egy függvényt olyan szempontból vizsgálunk, hogy hol konvex, illetve hol konkáv, akkor ugyanúgy járhatunk el, mint a növekedés és csökkenés vizsgálatánál (lásd Matematika 1. tárgyban A derivált alkalmazásai című leckében). Ilyenkor azonban a második derivált előjelével kell foglalkoznunk. Ahol ugyanis pozitív egy függvény második deriváltja, ott konvex a függvény, ahol pedig negatív a második derivált, ott konkáv a függvény. Természetesen ilyenkor azzal kell kezdenünk, hogy megállapítjuk, hol értelmezhető a második derivált, és ezen a halmazon vizsgáljuk az előjelét. Jelen esetben minden valós számra értelmezhető a második derivált, azaz $D_{f''} = \mathbb{R}$.

Ezután határozzuk meg a második derivált zérushelyeit, azaz oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet.

$$(x-1)(x+6)^3 = 0$$

Egy szorzat akkor egyenlő 0-val, ha valamelyik tényezője 0, így ez a szorzat két egyenletre bontható.

$$x-1=0 \text{ vagy } (x+6)^3 = 0$$

Ezen egyenletek megoldásai: $x=1$ és $x=-6$.

Most hasonló táblázatot célszerű készítenünk, mint amikor növekedés és csökkenés, azaz monotonitás szempontjából vizsgáltunk egy függvényt. Annyi csak a változás, hogy a második sorban nem az első, hanem a második derivált előjelét tüntetjük majd fel. Természetesen az értelmezési tartományt most a második derivált zérushelyei bontják részekre, hiszen ezeken a helyeken változhat meg a második derivált előjele. Ha egyenlőre csak az első sort töltjük ki, akkor táblázatunk az alábbi lesz.

x	$(-\infty, -6)$	-6	$(-6, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$					
$f(x)$					

Ezután vizsgáljuk meg a második derivált előjelét az értelmezési tartomány egyes részein. Ezt végrehajthatjuk úgy, ahogyan a korábbiakban vizsgáltunk előjelet, azaz mindegyik részből kiválasztottunk egy számot, és azt behelyettesítettük. Mivel azonban a második derivált egy szorzat, így megtehetjük azt is, hogy külön vizsgáljuk az egyes tényezők előjelét, és ebből következtetünk a szorzat előjelére.

Ha pl. $x < -6$, akkor nyilván $x-1 < 0$, azaz a derivált első tényezője negatív. Persze ekkor $x+6 < 0$ is teljesül, amiből $(x+6)^3 < 0$ is következik, tehát a második tényező is negatív. Két negatív szám szorzata pedig pozitív, azaz $x < -6$ esetén pozitív a második derivált, s ebből következően itt konvex a függvény.

Hasonlóan, ha $-6 < x < 1$, akkor $x-1 < 0$, és $x+6 > 0 \Leftrightarrow (x+6)^3 > 0$, azaz a szorzat egyik tényezője negatív, másik tényezője pedig pozitív, tehát ekkor negatív a második derivált. Ez azt jelenti, hogy ezen az intervallumon konkáv a függvény.

Végül ha $1 < x$, akkor $x-1 > 0$, és $x+6 > 0 \Leftrightarrow (x+6)^3 > 0$, tehát mindkét tényező pozitív, s így a második derivált is pozitív. Ennek következtében ezen az intervallumon konvex a függvény.

Mivel mindkét zérushelyén ($x = -6, x = 1$) megváltozik a második derivált előjele, így mindkét helyen inflexiós pontja van a függvénynek.

Ezek alapján már kitölthetjük a táblázat második és harmadik sorát is.

x	$(-\infty, -6)$	-6	$(-6, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	konvex ($\cup$)	inflexiós pont	konkáv ($\cap$)	inflexiós pont	konvex ($\cup$)

Legvégül adjunk választ a feladat kérdésére. Amint a táblázatból látható, a függvény konvex, ha $x < -6$ vagy ha $1 < x$. Ugyanezt úgy is írhatjuk, hogy a függvény a $(-\infty, -6) \cup (1, \infty)$ halmazon konvex.

2. feladat: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 4\}$. Hol konkáv az $f(x)$ függvény, ha második deriváltja $f''(x) = \frac{5^x}{(x+3)(x-4)}$?

Megoldás: Az előző feladat megoldásában ismertettük szerint járunk el. Vizsgáljuk meg, hogy mely halmazon értelmezhető a függvény második deriváltja. Mivel a nevezőben nem állhat 0, így $(x+3)(x-4) \neq 0$, melyből $x+3 \neq 0$ és $x-4 \neq 0$. Ezekből következik, hogy $x \neq -3$ és $x \neq 4$.

A második derivált értelmezési tartománya tehát: $D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 4\}$.

Ezután oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet.

$$\frac{5^x}{(x+3)(x-4)} = 0$$

Tört csak úgy lehet zérus, ha a számlálója zérus, így egyszerűbb egyenletet kapunk.

$$5^x = 0$$

Ennek az egyenletnek azonban nincs megoldása, hiszen 5^x értéke pozitív minden valós x esetén. A második deriválnak tehát nincs zérushelye, azaz nem lesz inflexiós pontja a függvénynek.

Mivel egy függvény előjele ott is változhat, ahol a függvény nincs értelmezve, így bár nincs a második deriválnak zérushelye, de az értelmezési tartományt a szakadási helyek mégis részekre bontják. Ha elkezdjük kitölteni a szokásos táblázatot, akkor most a következőt kapjuk.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 4)$	4	$(4, \infty)$
$f''(x)$		X		X	
$f(x)$		X		X	

A szakadási helyeken egyből jelölhettük, hogy mivel ott nem létezik a második derivált, így a függvényről semmit sem mondhatunk.

Vizsgáljuk meg ezután az egyes részekben a második derivált előjelét. Most olyan törtünk van, melynek számlálója minden x esetén pozitív, így csak a nevezőt kell vizsgálnunk, ami egy szorzat. Itt megtehetjük, hogy külön vizsgáljuk a tényezők előjelét.

Ha $x < -3$, akkor $x+3 < 0$ és $x-4 < 0$, tehát a nevező pozitív, így a második derivált is pozitív. Ebből következően a függvény konvex.

Ha $-3 < x < 4$, akkor $x+3 > 0$ és $x-4 < 0$, tehát a nevező negatív, így a második derivált is negatív. Ebből következően a függvény konkáv.

Ha pedig $4 < x$, akkor $x+3 > 0$ és $x-4 > 0$, tehát a nevező pozitív, így a második derivált is pozitív. Ebből következően a függvény konvex.

Immáron kitölthetjük a teljes táblázatot.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 4)$	4	$(4, \infty)$
$f''(x)$	$+$	X	$-$	X	$+$
$f(x)$	$\cup$	X	$\cap$	X	$\cup$

A táblázatból kiolvasható, hogy a függvény a $(-3, 4)$ intervallumon konkáv.

3. feladat: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}$. Hol van inflexiós pontja az $f(x)$ függvénynek, ha második deriváltja $f''(x) = (x-7)^6 \cdot (e^x - 1)$?

Megoldás: Most is a második derivált értelmezési tartományának vizsgálatával kezdjük. Jelen esetben ez az összes valós szám, azaz $D_{f''} = \mathbb{R}$.

Oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet. Egy függvénynek ugyanis ott lehet inflexiós pontja, ahol a második deriváltja 0.

$$(x-7)^6 \cdot (e^x - 1) = 0$$

Mivel a derivált szorzat, ezt egyszerűbb egyenletekre bontjuk.

$$(x-7)^6 = 0 \text{ vagy } e^x - 1 = 0$$

Az első egyenlet megoldása nyilván $x = 7$. A második egyenletet rendezzük át.

$$e^x - 1 = 0 \iff e^x = 1$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát.

$$\ln(e^x) = \ln 1$$

Mivel a bal oldalon egy függvény és az inverze áll egy összetételben, így ott valójában egyszerűen x szerepel.

$$x = \ln 1 = 0$$

A második egyenlet megoldása így $x = 0$.

Két zérushelye van tehát a második deriválnak, az $x = 0$ és az $x = 7$.

Ezek után a táblázat első sora kitölthető.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 7)$	7	$(7, \infty)$
$f''(x)$					
$f(x)$					

Vizsgáljuk meg ezután a második derivált előjelét. Mivel a derivált olyan szorzat, aminek első tényezője nem vesz fel negatív értéket, hiszen páros kitevőjű hatvány, így csak a második tényező előjelével kell foglalkoznunk.

Ha $x < 0$, akkor $e^x < 1$, ezért $e^x - 1 < 0$. Ekkor tehát negatív a második derivált, s itt konkáv a függvény.

Ha $0 < x < 7$, akkor $e^x > 1$, ezért $e^x - 1 > 0$. Így itt pozitív a második derivált, tehát konvex a függvény.

Ha $7 < x$, akkor $e^x > 1$, ezért $e^x - 1 > 0$. Így itt is pozitív a második derivált, tehát itt is konvex a függvény.

Amint látható, a második derivált zérushelyei közül az $x = 0$ helyen előjelet vált a második derivált, így itt inflexiós pontja van a függvénynek. Viszont az $x = 7$ helyen a második derivált nem vált előjelet, így itt nincs inflexiós pont.

Töltsük ki a teljes táblázatot.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 7)$	7	$(7, \infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	inflexiós pont	$\cup$	nincs inflexiós pont	$\cup$

A függvénynek tehát az $x = 0$ helyen van inflexiós pontja.

4. feladat: Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz (pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = x^3 + x \ln x$$

Megoldás: Elsőként most is a függvény értelmezési tartományát kell megvizsgálnunk. A logaritmus argumentumában kizárólag pozitív valós számok szerepelhetnek, tehát a kikötés $x > 0$, azaz $D_f = (0, \infty)$.

Először az első derivált függvényt határozzuk meg. Az összeg második tagja egy szorzat (itt a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt alkalmazzuk).

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 + \ln x + 1$$

A második derivált előállítás:

$$f''(x) = 6x + \frac{1}{x}$$

Oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet.

$$6x + \frac{1}{x} = 0$$

Mivel az értelmezési tartományból tudjuk, hogy x csak pozitív szám lehet, ezért az egyenlet a következő alakra hozható:

$$6x^2 + 1 = 0$$

Ennek az egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása, ami azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvénynek nincs inflexiós pontja. A $(0, \infty)$ intervallumon $6x^2 + 1 > 0$, tehát a függvény ezen az intervallumon konvex.

5. feladat: Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szempontjából az $f(x) = \ln(4x^2 + 2)$ függvényt.

Megoldás: Először az értelmezési tartományt kell meghatároznunk. Tudjuk, hogy a logaritmus argumentumában kizárólag pozitív valós számok szerepelhetnek, tehát a kikötés $4x^2 + 2 > 0$. Ez az egyenlőtlenség bármely valós számra fennáll, azaz a függvény minden valós számra értelmezhető, $D_f = \mathbb{R}$.

Ezt követően meghatározzuk a másodrendű deriváltat, melyhez először az elsőrendű deriváltat kell kiszámolnunk. Az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{1}{4x^2 + 2} \cdot 8x = \frac{8x}{4x^2 + 2}.$$

Erre a deriválási hányadosszabályt alkalmazva kapjuk, hogy

$$f''(x) = \frac{8(4x^2 + 2) - (8x \cdot 8x)}{(4x^2 + 2)^2} = \frac{32x^2 + 16 - 64x^2}{(4x^2 + 2)^2} = \frac{-32x^2 + 16}{(4x^2 + 2)^2}.$$

Ezt követően megkeressük a másodrendű derivált zérushelyeit, azaz megoldjuk a $f''(x) = 0$ egyenletet.

$$\frac{-32x^2 + 16}{(4x^2 + 2)^2} = 0$$

Egy tört értéke akkor 0, ha a számlálója 0. Ez alapján

$$-32x^2 + 16 = 0$$

$$32x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ezek lehetnek a függvény inflexiós pontjai. Hogy valóban azok-e, ahhoz ellenőriznünk kell, hogy a másodrendű derivált előjelet vált-e ezekben a pontokban. Ehhez az értelmezési tartományt és a lehetséges inflexiós pontokat tüntetjük fel a táblázat első sorában. Ez alapján a következő táblázatot kell kitöltenünk.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$
$f''(x)$					
$f(x)$					

A táblázat második sorában a másodrendű derivált előjeleit vizsgáljuk meg az adott tartományokon, s ebből határozzuk meg a konvexitást a következő sorban. Vegyünk egy $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ -nél kisebb számot.

Legyen pl. -1 , s helyettesítsük ezt a másodrendű deriváltba.

$$f''(-1) = \frac{-32 \cdot (-1)^2 + 16}{(4 \cdot (-1)^2 + 2)^2} = -\frac{32}{36}$$

Negatív értéket kaptunk, tehát $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén negatív a másodrendű derivált, ebből következően itt konkáv a függvény.

Ezt követően vegyünk egy $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}$ közé eső számot. Legyen pl. 0 , s ezt is helyettesítsük be a másodrendű deriváltba.

$$f''(0) = \frac{-32 \cdot 0 + 16}{(4 \cdot 0 + 2)^2} = \frac{16}{4} = 4$$

Pozitív értéket kaptunk, tehát ha $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor pozitív a másodrendű derivált, s így itt konvex a függvény.

Végül vegyünk egy $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -nél nagyobb számot is. Legyen pl. 1 , és helyettesítsük ezt a másodrendű deriváltba.

$$f''(1) = \frac{-32 + 16}{(4 + 2)^2} = -\frac{16}{36}$$

Negatív értéket kaptunk, így ha $\frac{1}{\sqrt{2}} < x$ akkor negatív a másodrendű derivált, tehát ekkor konkáv a függvény.

Mivel a másodrendű derivált értéke az $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ helyen előjelet vált ($x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ -nél

negatívból pozitívba, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ -nél pozitívból negatívba), így ezeken a helyeken inflexiós pontja van a függvénynek.

Mindezeket az összefüggéseket tartalmazza az alábbi táblázat, mellyel válaszoltunk a feladatra.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	konkáv $\cap$	inflexiós pont	konvex $\cup$	inflexiós pont	konkáv $\cap$

6. feladat: Vizsgáljuk meg konvexitás szempontjából az $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ függvényt. Adjuk meg az inflexiós pont(ok) koordinátáit is!

Megoldás: Elsőként most is a függvény értelmezési tartományát kell vizsgálnunk. Mivel nevező nem lehet zérus, így ki kell kötnünk, hogy a kitevőben $x \neq 0$, azaz $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ezután állítsuk elő a függvény második deriváltját, mert a konvexitás vizsgálatához erre lesz szükségünk. Az első derivált előállításakor egy összetett függvényt deriválunk. A külső függvény az e^x , a belső függvény pedig az $\frac{1}{x}$.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = e^{\frac{1}{x}} \cdot (x^{-1})' = e^{\frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2})$$

A második deriválás során a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt használjuk.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \cdot (-x^{-2}) + e^{\frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2})' = \\ &= e^{\frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2}) \cdot (-x^{-2}) + e^{\frac{1}{x}} \cdot (2x^{-3}) = e^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-4} + 2e^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-3} \end{aligned}$$

Amint az korábban már szerepelt, ilyenkor célszerű kiemelni, amit csak lehet. Figyeljünk oda, hogy a hatványokból azt emeljük ki, ahol kisebb a kitevő, s ez most az x^{-4} . Ha pedig az x^{-3} -ból kiemelünk x^{-4} -t, akkor ott x fog maradni.

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-4} \cdot (1 + 2x)$$

A negatív kitevős hatvány helyett törtet is írhatunk. Így a második derivált a következő alakot ölti:

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 + 2x}{x^4}$$

Miután a második deriváltat sikerült egyszerűbb alakra hozni, oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet.

$$e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1+2x}{x^4} = 0$$

Tudjuk, hogy egy szorzat akkor zérus, ha valamelyik tényezője zérus. Az első tényező nem lehet egyenlő 0 -val, hiszen az exponenciális függvény csak pozitív értékeket vesz fel. Ennek következtében elég csak a második tényezőben levő törtet vizsgálnunk.

$$\frac{1+2x}{x^4} = 0$$

De a tört csak úgy lehet 0, ha a számlálója 0, így az egyenlet még tovább egyszerűsödik.

$$1+2x=0$$

Ennek megoldása pedig $x = -0.5$.

Ezután elkészíthetjük a táblázatot, kitöltve az első sort. Az értelmezési tartományt egyrészt a második derivált zérushelye, másrészt az értelmezési tartományban levő szakadási hely osztja részekre.

x	$(-\infty, -0.5)$	-0.5	$(-0.5, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$				X	
$f(x)$				X	

Vizsgáljuk meg ezután a második derivált előjelét a különböző részekben. Ehhez a kiemelést követően kapott szorzattá alakított formát célszerű használni. Az $e^{\frac{1}{x}}$, valamint az x^{-4} csak pozitív értékeket vehet fel, így elég csak az $1+2x$ előjelét vizsgálnunk.

Ha $x < -0.5$, akkor $1+2x < 0$, így a derivált negatív, s ebből következően itt konkáv a függvény.

Ha $-0.5 < x < 0$, akkor $1+2x > 0$, s ezért itt konvex a függvény.

Ha pedig $0 < x$, akkor $1+2x > 0$ ismét, így itt is konvex a függvény.

Az $x = -0.5$ helyen előjelet vált a második derivált, így ezen a helyen inflexiós pontja van a függvénynek.

Töltsük ki a teljes táblázatot.

x	$(-\infty, -0.5)$	-0.5	$(-0.5, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+	X	+
$f(x)$	$\cap$	inflexiós pont	$\cup$	X	$\cup$

Ezután már csak az inflexiós pont második koordinátáját kell meghatároznunk. Ehhez helyettesítsük be a függvénybe az $x = -0.5$ értéket, ahol az inflexiós pont van.

$$f(-0.5) = e^{\frac{1}{-0.5}} = e^{-2}$$

Az inflexiós pont koordinátái tehát: $(-0.5, e^{-2})$

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}$. Mely intervallumo(ko)n konkáv az $f(x)$ függvény, ha $f''(x) = (x-2)^4(x+1)$?

$(-\infty, -1)$ (X)

$(-1, 2)$

$(2, \infty)$

$(-1, 2)$ és $(2, \infty)$

2. kérdés: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R} \setminus \{8, -5\}$. Mely intervallumo(ko)n

konvex az $f(x)$ függvény, ha $f''(x) = \frac{2e^x}{(x-8)(x+5)^2}$?

$(-5, 8)$

$(-\infty, -5)$ és $(-5, 8)$

$(8, \infty)$ (X)

$(-\infty, -5)$ és $(8, \infty)$

3. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x)$ függvénynek, ha $f''(x) = (\ln x - 1)(x+3)^5$?

0

1 (X)

2

3

4. kérdés: A következő intervallumo(ko)n konkáv az $f(x)$ függvény, ha $f''(x) = 1 - \lg(x^2 + 6)$

$(-\infty, -2)$.

$(-2, 2)$.

$(2, \infty)$.

$(-\infty, -2)$ és $(2, \infty)$. (X)

5. kérdés: Az $f(x) = \ln(1 + 3x^2)$ függvény inflexiós pontjának (pontjainak) koordinátái:

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \ln 2\right)$.

$(-\sqrt{3}, \ln 10)$.

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \ln 2\right)$ és $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \ln 2\right)$. (X)

$$(-\sqrt{3}, \ln 10) \text{ és } (\sqrt{3}, \ln 10).$$

6. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = x^5 - 30x^3 + 2$ függvénynek?

0

1

2

3 (X)

7. kérdés: Az $f(x) = e^x(x-1)$ függvény inflexiós pontjának függvényértéke

$$-e^2$$

$$e^2 - 1$$

$$-\frac{2}{e}$$

$$2e \text{ (X)}$$

8. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = 4x^3 + x \ln x$ függvénynek?

0 (X)

1

2

3

9. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = \frac{3}{2}x^3 + x - x \ln x$ függvénynek?

0

1

2 (X)

3

Elméleti összefoglaló:

Függvénydiszkusszió annak vizsgálatát értjük, hogy egy függvény az értelmezési tartományának mely pontjaiban, vagy mely részhalmazain rendelkezik a függvényekre jellemző tulajdonságok valamelyikével.

A jellemző tulajdonságokat két csoportba oszthatjuk.

Az első csoportba az úgynevezett globális tulajdonságok tartoznak. Ide soroljuk azokat, amelyekkel egy függvény az értelmezési tartományának egy egész részintervallumán rendelkezik vagy nem rendelkezik, pl. növekedés vagy konvexitás.

A másik csoportba a lokális tulajdonságok tartoznak. Ezek azok, amelyek az értelmezési tartomány egy pontjában lépnek fel, pl. lokális szélsőérték, zérushely, stb.

A függvények diszkusszióját a következő lépésekben végezzük:

1) Értelmezési tartomány meghatározása.

2) Alaki tulajdonságok (tengelymetszetek, paritás).

3) Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

- 4) Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték(ek) meghatározása.
- 5) Konvexitás vizsgálata, inflexiós pont(ok) meghatározása.
- 6) Grafikon rajzolása.
- 7) Értékkészlet meghatározása.

Kidolgozott feladatok

7. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = x^3 - 3x^2$ függvényen.

Megoldás:

- 1) Értelmezési tartomány.

Egyszerű most a helyzetünk, mert látható, hogy a függvény mindenütt értelmezve van, ezért

$$D_f = \mathbb{R}.$$

- 2) Alaki tulajdonságok.

Ezen értjük egyrészt annak meghatározását, hogy a függvény grafikonja hol metszi az x tengelyt. Ezeket a pontokat az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásai adják. Megoldjuk tehát az

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

egyenletet. Az x^2 kiemelésével

$$x^2(x - 3) = 0,$$

ami akkor teljesül, ha $x_1 = 0$ vagy ha $x_2 = 3$. Ebben a két pontban metszi tehát a grafikon az x tengelyt.

Másrészt ide tartozik annak megállapítása, hogy a grafikon hol metszi az y tengelyt. Ilyen persze csak akkor van, ha a nulla eleme az értelmezési tartománynak, ebben az esetben $f(0)$ adja a keresett pontot. A mi esetünkben

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0,$$

a grafikon tehát átmegy az origón.

Továbbá ebben a lépésben vizsgáljuk meg, hogy a függvény páros-e vagy páratlan-e. Mindkettő az $f(-x)$ összetett függvény képletének előállításával kezdődik.

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 = -x^3 - 3x^2.$$

A függvény akkor páros, ha $f(-x) = f(x)$ (tehát szimmetrikus az y tengelyre), ez most nem teljesül, mivel

$$-x^3 - 3x^2 \neq x^3 - 3x^2.$$

A függvény akkor páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$ (tehát szimmetrikus az origóra), most ez sem teljesül, mivel

$$-x^3 - 3x^2 \neq -(x^3 - 3x^2).$$

Függvényünk tehát se nem páros, se nem páratlan.

3) Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

Egy függvény értelmezési tartománya általában diszjunkt (véges vagy végtelen) intervallumok uniója. Ezeknek az intervallumoknak a végpontjaiban kell az intervallum felőli egyoldali határértékeket kiszámítani.

Mivel a feladatunkban az értelmezési tartomány a valós számok halmaza, ezért két limeszt kell kiszámolnunk:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 3x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x}\right) = \infty.$$

4) Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték(ek) meghatározása.

Tudjuk, hogy lokális szélsőérték ott lehet, ahol $f'(x) = 0$. Elkészítjük tehát a derivált függvényt:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x,$$

és megoldjuk az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$3x^2 - 6x = 0,$$

$$3x(x - 2) = 0,$$

aminek a két gyöke $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 2$.

A derivált gyökei közül az értelmezési tartományba is beletartozók a lehetséges szélsőértékek. Mivel most a teljes valós számok halmaza az értelmezési tartomány, mindkét gyököt meg kell vizsgálnunk.

Tudjuk, hogy a jelöltek közül azok valóban szélsőérték helyek, ahol a derivált függvény előjelet vált.

A jelöltek az értelmezési tartományt (további) darabokra bontják, és ezeken a darabokon a derivált függvény állandó előjelű, ezeket az előjeleket kell először meghatározni. Ezeket egy-

egy, a darabokba eső számnak a derivált függvénybe való behelyettesítésével kaphatjuk meg. Az egész eljárást célszerű egy táblázatba foglalni.

A táblázat első sora a szélsőérték jelölteket és az értelmezési tartomány általuk létrehozott darabjait tartalmazza (a valós számok természetes rendezésében).

A második sorban az $f'(x)$ egyes darabokbeli előjele szerepel, (és az, hogy a derivált a jelöltekben nulla).

Az értelmezési tartományunk egy darabból áll, és két jelöltünk van, ezek tehát három darabra bontják az értelmezési tartományt.

A $(-\infty, 0)$ darabból vesszük mondjuk a -1 -et, s ekkor azt kapjuk, hogy $f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 9 > 0$, ezért az egész darabon pozitív az első derivált előjele.

A $(0, 2)$ darabból vegyük például az 1 -et, ekkor $f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3 < 0$, ezért az egész darabon negatív az előjel.

Végül a $(2, \infty)$ darabból válasszuk a hármat, ekkor $f'(3) = 3(3)^2 - 6(3) = 9 > 0$, ezért az egész darabon pozitív az első derivált előjele.

Az alábbi táblázat első két sorában látjuk ezeket feltüntetve.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Látjuk azt is, hogy mindkét jelöltünk esetén megvan a szükséges előjelváltás, tehát mindkettő valóban szélsőérték hely.

Mivel nullában a derivált pozitívból vált negatívba, itt lokális maximum van. A kettőben a derivált előjele negatívból vált pozitívba, itt tehát lokális minimum van.

Ki kell még számolni a maximum és a minimum értékét:

$$f(0) = 0, \text{ illetve } f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4.$$

Tudjuk, hogy ahol az első derivált pozitív, ott növekvő a függvény, ahol negatív, ott csökkenő.

Az előző táblázat harmadik sora ezeket az információkat tartalmazza, felfelé mutató nyíllal jelölve a növekedést, illetve lefelé mutatóval a csökkenést. A növekedési viszonyokból is leolvasható, hogy egy adott szélsőérték hely maximum hely, vagy minimum hely.

5) Konvexitás vizsgálata, inflexiós pont(ok) meghatározása.

Tudjuk, hogy inflexiós pont ott lehet, ahol $f''(x) = 0$. Elkészítjük tehát a második deriváltat:

$$f''(x) = 6x - 6.$$

Megoldva az

$$f''(x) = 0, \text{ azaz a } 6x - 6 = 0$$

egyenletet megoldásként $x_1 = 1$ adódik. Mivel ez a gyök benne van az értelmezési tartományban, ez az inflexiós pont jelölt.

Tudjuk, hogy a jelöltek közül az(ok) valóban inflexiós pont(ok), ahol a második derivált előjelet vált. Ezt a szélsőértékeknél használt eljáráshoz hasonlóan lehet megvizsgálni. Az eredményeket most is egy táblázatba foglaljuk.

Az első sor most az inflexiós pont jelölteket, és az értelmezési tartomány általuk létrehozott darabjait tartalmazza.

A második sor a második derivált előjelét tartalmazza a keletkezett darabokon, és azt, hogy a jelöltünkben az értéke nulla. Egy jelöltünk van, ami az értelmezési tartományt két részre bontja.

Az első darabból vegyük a nullát, itt $f''(0) = 6(0) - 6 = -6 < 0$, ezért az egész darabon negatív a második derivált.

A második darabból vegyük a kettőt, ekkor $f''(2) = 6(2) - 6 = 6 > 0$, tehát az egész darabon pozitív a második derivált.

Az alábbi táblázatban láthatjuk ezeket.

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inf. pont	konvex

Megvan tehát a szükséges előjelváltás, az 1 inflexiós pont. Ki kell még számítanunk az inflexiós pont második koordinátáját:

$$f(1) = 1^3 - 3(1)^2 = -2.$$

Tudjuk, hogy ahol a második derivált pozitív, ott konvex a függvény, ahol negatív, ott konkáv. A második táblázat harmadik sora ezeket az információkat tartalmazza.

6) Grafikon.

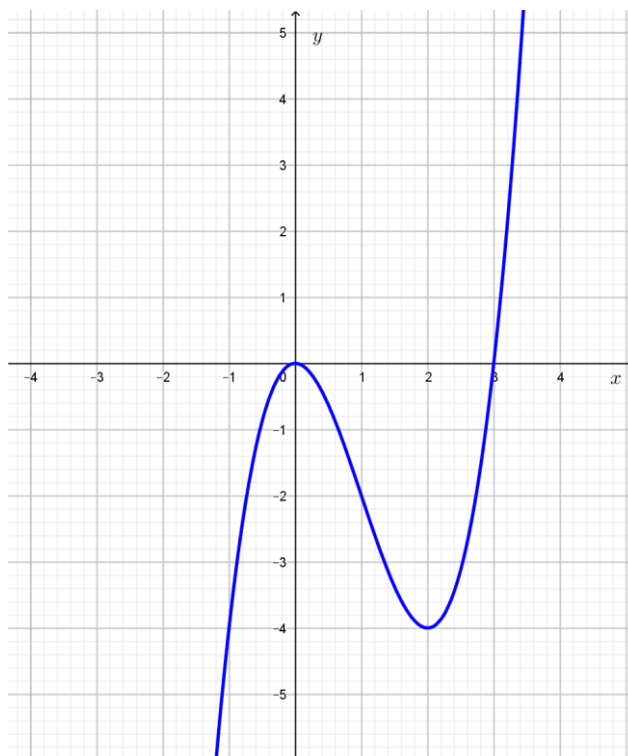
Az eddig megszerzett információkat felhasználva felvázolható a függvény grafikonja.

Felvéve egy koordináta-rendszert először a nevezetes pontokat jelöljük meg, (tengelymetszetek, szélsőértékek, inflexiós pontok.)

Ezután vegyük figyelembe a határértékeket és a monotonitási viszonyokat.

Végül, a konvexitási információkat is figyelembe véve, rajzoljuk meg a grafikont.

Ezt látjuk az alábbi ábrán.



7) Értékkészlet.

A (helyes) grafikonról leolvasható az értékkészlet.

Most azt kapjuk, hogy

$$R_f = \mathbb{R}.$$

8. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ függvényen.

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány.

A nevező $x^2 + 1$, soha nem lehet nulla. Azt látjuk, hogy minden valós számra teljesül ez az egyenlet, így

$$D_f = \mathbb{R}.$$

2) Alaki tulajdonságok.

Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása $x_1 = 0$, ami az x tengellyel vett metszetet adja, azonban $f(0) = 0$ miatt, itt metszi a grafikon a függőleges tengelyt is.

A függvény paritását vizsgálva látjuk, hogy

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -f(x),$$

tehát a függvény páratlan.

3) Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

Ismét csak a végtelenekben kell kiszámolni a határértékeket. A számlálóból is és a nevezőből is kiemelve x^2 -et kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Teljesen hasonlóan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0.$$

4) Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték(ek) meghatározása.

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

A derivált nulla, ha a tört számlálója nulla, ez nyilván $x_1' = -1$ és $x_2' = 1$ esetén teljesül. Mindkét gyök az értelmezési tartományban van, meg kell ezért őket vizsgálni.

Elkészítjük a táblázatot.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
--------	------------	-----------	------------	-----------	------------

Az első darabból a -2 -t helyettesítve $f'(-2) = -\frac{3}{25} < 0$.

A második darabból 0 -t helyettesítve $f'(0) = 1 > 0$.

Végül a harmadik darabból 2 -t helyettesítve $f'(2) = -\frac{3}{25} < 0$.

Így kaptuk a második sor előjeleit. Látjuk, hogy mindkét jelölt esetén megvan az előjelváltás, ezért mindkettő szélsőérték hely, mégpedig a -1 lokális minimum hely, az 1 lokális maximum hely.

A minimum értéke $f(-1) = -\frac{1}{2}$, a maximum értéke (a páratlanság miatt is) $f(1) = \frac{1}{2}$.

A fenti táblázat harmadik sorában megjelöltük a monotonitási szakaszokat. Látjuk, hogy a szélsőértékek között a függvény növekvő, különben csökkenő.

5) Konvexitás vizsgálata, inflexiós pont(ok) meghatározása.

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

Az $f''(x) = 0$ egyenletnek most három megoldása van: $x_1'' = -\sqrt{3}$, $x_2'' = 0$, $x_3'' = \sqrt{3}$. Mindhárom az értelmezési tartományban van, ezért meg kell őket vizsgálni. Most az alábbi táblázatot készíthetjük el.

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inf.pont	konvex	inf.pont	konkáv	inf.pont	konvex

Az előjeleket, például, a következő számok behelyettesítésével kaphatjuk:

az első tartományból válasszuk a -2 -t, ekkor $f''(-2) = -\frac{4}{125} < 0$,

a második tartományból a -1 -et, ekkor $f''(-1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0$,

a harmadikból az 1 -et, ekkor $f''(1) = -\frac{1}{2} < 0$,

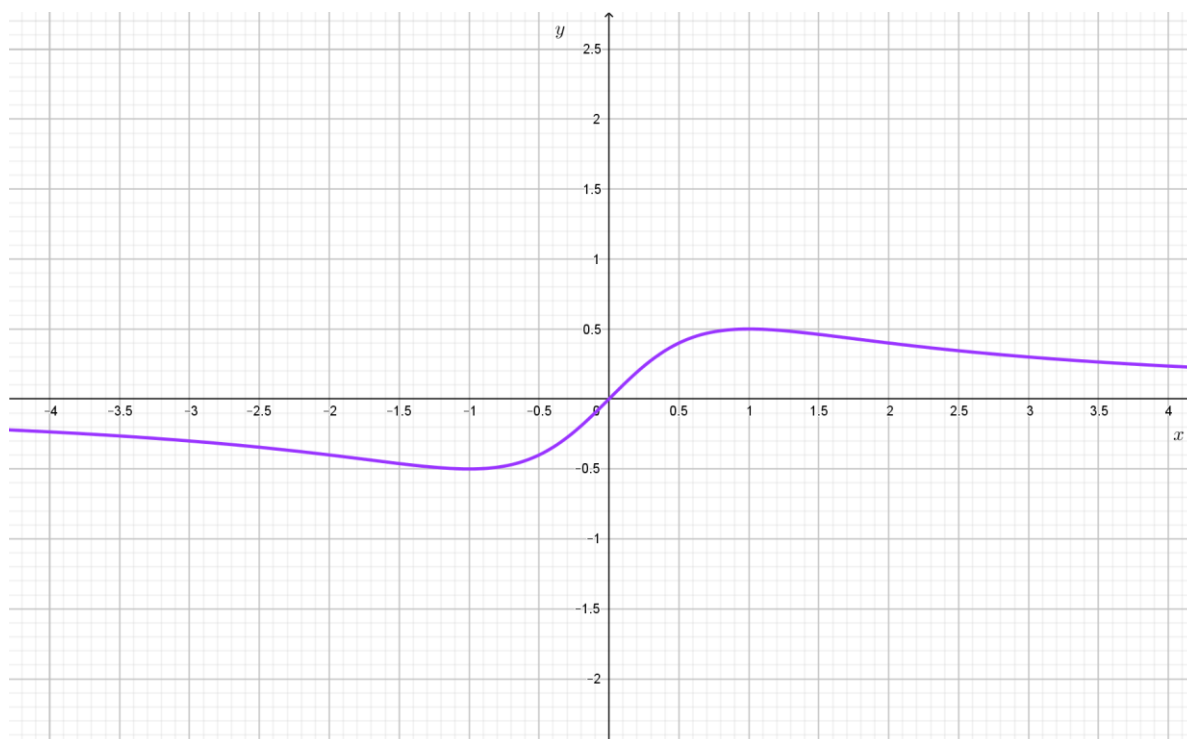
a negyedikből 2 -t, ekkor $f''(2) = \frac{4}{125} > 0$.

Látjuk, hogy mindhárom jelölt esetén megvan az előjelváltás, mind a három valóban inflexiós pont. Az inflexiós pontok második koordinátái: $f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, $f(0) = 0$ és $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

A második táblázat harmadik sorában szerepelnek ezek az információk. Látjuk, hogy most az inflexiós pontok választják el a konkáv és konvex szakaszokat.

6) Grafikon.

A grafikon most is a nevezetes pontok berajzolásával kezdjük. A határértékek azt mondják, hogy a függvény a végtelenek felé hozzásimul az x tengelyhez, vagyis $y = 0$ vízszintes aszimptota. Figyelembe véve a monotonitási és konvexitási viszonyokat is, az alábbi ábrát kaphatjuk:



Ügyeljünk a páratlanság érzékeltetésére, azaz arra, hogy a grafikon az origóra szimmetrikus.

7) Értékkészlet.

Az ábra alapján világos, hogy a függvény a lokális minimuma és a lokális maximuma közötti értékeket veszi fel, beleértve azokat is, tehát

$$R_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

9. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$ függvényen.

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány.

Mivel a nevezőben nulla nem lehet, így

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

2) Alaki tulajdonságok.

Az $f(x) = 0$ egyenletnek most két gyöke van: $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$. Mivel a nulla nem eleme az értelmezési tartománynak, a grafikon nem metszi a függőleges tengelyt.

A paritást vizsgálva:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^3} = \frac{x^2 - 1}{-x^3} = -\frac{x^2 - 1}{x^3} = -f(x),$$

a függvény tehát páratlan.

3) Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

Az értelmezési tartomány két darabból áll, ezeknek négy széle van, négy limeszt kell tehát kiszámolnunk. (Valójában a páratlanság miatt csak kettőt.)

Ezek:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \infty,$$

hiszen a számláló -1 -hez tart, a nevező pedig nullához, de mindig negatív.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^3} = -\infty,$$

a páratlanság miatt persze az előző limesz mínusz egyszerese, és végül

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = 0,$$

most is igaz, hogy ez a mínusz végtelenben vett határérték mínusz egyszerese.

4) Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték(ek) meghatározása.

$$f'(x) = \frac{2x(x^3) - (x^2 - 1)3x^2}{x^6} = \frac{2x^4 - 3x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{-x^4 + 3x^2}{x^6} = -\frac{x^2 - 3}{x^4}.$$

Az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásai: $x_1' = -\sqrt{3}$, $x_2' = \sqrt{3}$.

Mindkét jelölt az értelmezési tartományba esik, meg kell őket vizsgálnunk. Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza.

Figyeljünk arra, hogy most a D_f eleve két darabból áll. Ezeket vágja ketté a két jelölt, mivel különböző darabokba esnek. A táblázat fejlécében ezért négy darabot kell szerepeltetni.

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	X	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	X	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

Az $f'(x)$ előjeleit rendre a következő helyettesítésekkel kaptuk:

$$f'(-2) = -\frac{1}{16} < 0,$$

$$f'(-1) = 2 > 0,$$

$$f'(1) = 2 > 0,$$

$$f'(2) = -\frac{1}{16} < 0.$$

Mindkét jelöltben előjelet vált a derivált, ezért mindkettő szélsőérték hely, mégpedig $-\sqrt{3}$ lokális minimum hely, $\sqrt{3}$ lokális maximum hely. A lokális minimum értéke

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{2}{-\sqrt{27}} \approx -0.38, \text{ a lokális maximum, a páratlanság miatt, ennek mínusz egyszerese,}$$

$$f(\sqrt{3}) \approx 0.38.$$

A táblázatunk harmadik sorából láthatjuk, hogy mik a monotonitási viszonyok.

5) Konvexitás vizsgálata, inflexiós pont(ok) meghatározása.

$$f''(x) = -\frac{2x(x^4) - (x^2 - 3)4x^3}{x^8} = -\frac{2x^5 - 4x^5 + 12x^3}{x^8} = -\frac{-2x^5 + 12x^3}{x^8} = \frac{2(x^2 - 6)}{x^5}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x_1'' = -\sqrt{6}$, $x_2'' = \sqrt{6}$. Mindkét jelölt az értelmezési tartományba esik. A táblázatunk most az alábbi:

x	$(-\infty, -\sqrt{6})$	$-\sqrt{6}$	$(-\sqrt{6}, 0)$	0	$(0, \sqrt{6})$	$\sqrt{6}$	$(\sqrt{6}, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+	X	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inf.pont	konvex	X	konkáv	inf.pont	konvex

Az előjeleket, alkalmas számok behelyettesítésével ellenőrizze le most az olvasó.

Az előjelek megkaphatók a következő okoskodással is.

Egy tört előjelét kell kiszámolnunk. Ez akkor pozitív, ha a számláló és a nevező egyforma előjelű, akkor negatív, ha különböző előjelűek.

A számlálóban egy másodfokú kifejezés áll, amelynek képe egy felfelé nyíló parabola, ez tehát a gyökein kívül pozitív, a gyökei között pedig negatív. A nevezőben álló hatvány, a páratlan kitevő miatt, negatív x -ekre negatív, pozitívakra pozitív.

Ezek alapján is megkaphatjuk a fenti előjeleket.

Mindkét jelölt inflexiós pont tehát. Az inflexiós pontok második koordinátái:

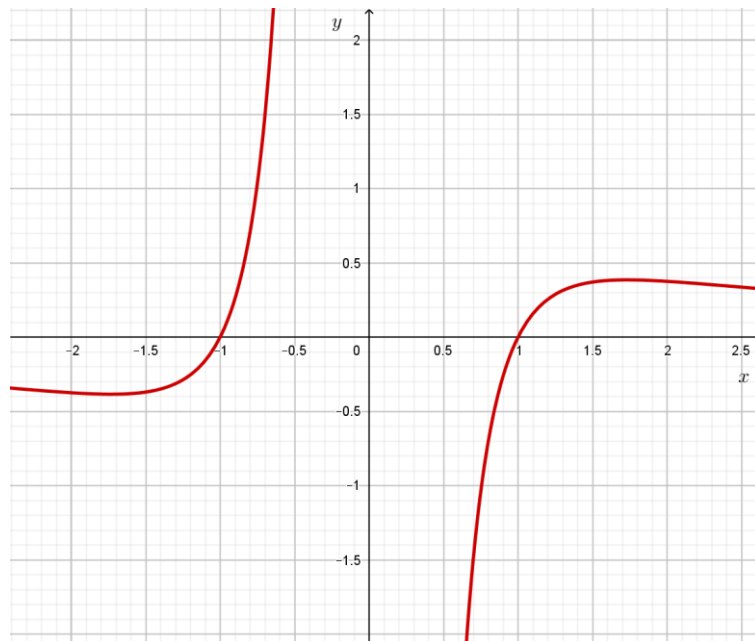
$$f(-\sqrt{6}) = -\frac{5}{6\sqrt{6}} \approx -0.34, \quad f(\sqrt{6}) = 0.34.$$

A nulla előtti és utáni darabon is más előjelű a második derivált, de a nulla persze nem inflexiós pont, hiszen ott értelmezve sincs a függvény. Jól mutatja ez azonban azt, hogy a $-\sqrt{6}$ és $\sqrt{6}$ közötti részt nem lehet egy darabként szerepeltetni a fejlécben.

A táblázat harmadik sorában szerepelnek az erre vonatkozó információk.

6) Grafikon.

Az eddigiek figyelembevételével az alábbi ábrát rajzolhatjuk fel:



7) Az ábráról látszik, hogy

$$R_f = \mathbb{R}.$$

Ellenőrző kérdések:

10. kérdés: Hány lokális szélsőértéke van az $f(x) = x^3 - x^2 + x$ függvénynek?

0. (X)

1.

2.

3.

11. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = x^3 - x^2 + x$ függvénynek?

0.

1. (X)

2.

3.

12. kérdés: Van-e olyan harmadfokú polinom, amelynek nincs inflexiós pontja?

Van.

Nincs. (X)

13. kérdés: Az $f(x) = x + \frac{4}{x}$ függvény lokális minimumának értéke

4. (X)

2.

-4.

$-\infty$.

14. kérdés: Az $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 2}$ függvény lokális szélsőérték helyei

-2, 2.

0, $\sqrt{2}$.

$-\sqrt{2}$, 0.

$-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$. (X)

15. kérdés: Az $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ függvény

páros. (X)

páratlan.

se nem páros, se nem páratlan.

16. kérdés: Az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvény

páros.

páratlan. (X)

se nem páros, se nem páratlan.

Összetettebb feladatok

Kidolgozott feladatok:

10. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ függvényen.

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány.

A logaritmus argumentumára kell kikötést tennünk. Mivel $x^2 + 1 > 0$ minden x -re, ezért $D_f = \mathbb{R}$.

2) Alaki tulajdonságok.

Megoldjuk először az

$$\ln(x^2 + 1) = 0$$

egyenletet. Mivel a logaritmus egyedül 1-ben nulla, az kell, hogy

$$x^2 + 1 = 1$$

legyen, ami $x = 0$ esetén teljesül. Persze ekkor $f(0) = 0$ is fennáll, a grafikon tehát áthalad az origón.

A paritást vizsgálva:

$$f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) = f(x),$$

most tehát páros függvénnel van dolgunk.

3) Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2 + 1) = \infty.$$

A párosság miatt ezek nem is lehetnek eltérők.

4) Lokális szélsőértékek.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

$\frac{2x}{x^2 + 1} = 0$ akkor és csak akkor, ha $x_1' = 0$, egy szélsőérték jelöltünk van tehát. A szokásos táblázat elkészítésével megvizsgáljuk, hogy valóban szélsőérték-e.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Látjuk, hogy a jelöltünk valóban szélsőérték hely, mégpedig lokális minimum hely, a minimum értéke: $f(0) = 0$.

5) Monotonitási szakaszok.

A harmadik sorból látszik, hogy a minimum hely előtt csökken, utána nő a függvény.

6) Inflexiós pontok.

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x_1'' = -1$ vagy $x_2'' = 1$.

Az alábbi táblázatban mindkét jelöltet megvizsgáljuk.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	konkáv	inf. pont	konvex	inf. pont	konkáv

Mindkét jelölt valóban inflexiós pont. Az inflexiós pontok második koordinátái:
 $f(-1) = f(1) = \ln 2 \approx 0.69$.

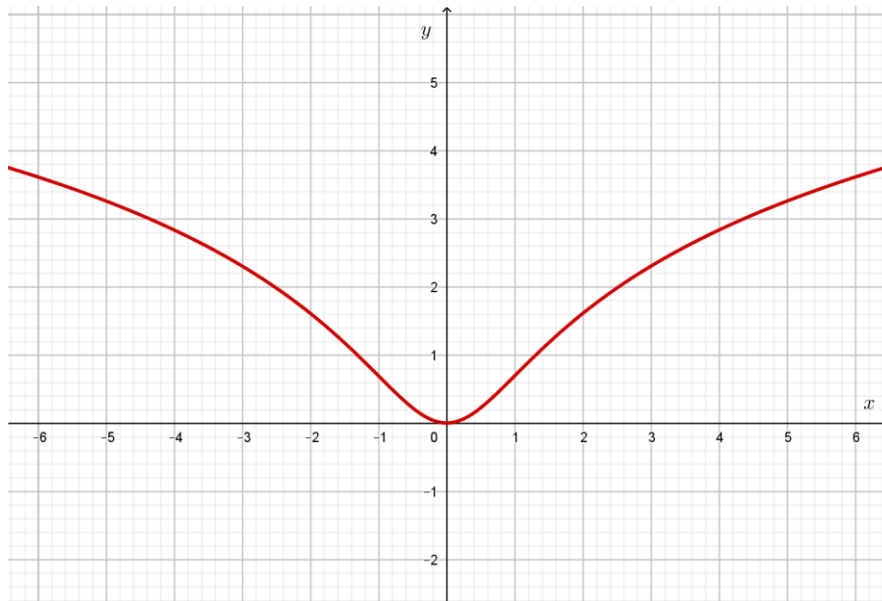
7) Konvex, konkáv szakaszok.

Látjuk a harmadik sorból, hogy a függvény az inflexiós pontok között konvex, azokon kívül konkáv.

8) Grafikon.

Figyelembe véve az eddig megszerzett információkat, most az alábbi grafikont kapjuk.

Most is ügyeljünk arra, hogy a párosság, azaz a grafikon y tengelyre való szimmetrikussága, látszódjon.



9) Értékkészlet.

Látjuk, hogy $R_f = [0, \infty)$.

11. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = xe^{-x}$ függvényen.

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány.

Mivel nem kell kikötést tennünk, így $D_f = \mathbb{R}$.

2) Alaki tulajdonságok.

A tengelymetszeteket vizsgálva:

$f(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x_1 = 0$, a grafikon átmegy az origón.

A paritást vizsgálva:

$$f(-x) = (-x)e^{-(-x)} = -xe^x.$$

Ez nem az $f(x)$, és nem is annak mínusz egyszerese, tehát a függvény se nem páros, se nem páratlan.

3) Limeszek az értelmezési tartomány széléin.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{-x}) = -\infty,$$

hiszen a szorzat első tényezője mínusz végtelenbe, a második tényezője plusz végtelenbe tart.

A $\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{-x})$ határérték $0 \cdot \infty$ típusú, de átírható $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$ alakban törtté, és ez a $\frac{\infty}{\infty}$ típusú limesz a L'Hospital-szabály segítségével könnyen kiszámolható. A deriváltak hányadosának limesze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

ezért

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{-x}) = 0.$$

4) Lokális szélsőértékek.

A deriválásnál a szorzat szabályt alkalmazva:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

$f'(x) = 0$ pontosan akkor, ha a szorzat valamelyik tényezője 0. Mivel $e^{-x} > 0$, ezért ez csak $x=1$ esetén lehetséges.

A szokásos táblázatban megvizsgáljuk a jelöltet.

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Az 1-ben tehát szélsőérték van, mégpedig lokális maximum, aminek értéke $f(1) = \frac{1}{e} \approx 0.37$.

5) Monotonitási viszonyok.

A harmadik sor alapján a függvény 1-ig nő, utána csökken.

6) Inflexiós pontok.

$$f''(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}.$$

$f''(x) = 0$ pontosan akkor, ha a szorzat valamelyik tényezője 0. Mivel $e^{-x} > 0$, ezért ez csak $x=2$ esetén lehetséges.

Megvizsgáljuk a jelöltünket. A táblázat most

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, \infty)$
-----	----------------	---	---------------

$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	konkáv	inf. pont	konvex

A második derivált előjele az $x-2$ tényező előjelével azonos. Ez 2 előtt negatív, utána pozitív.

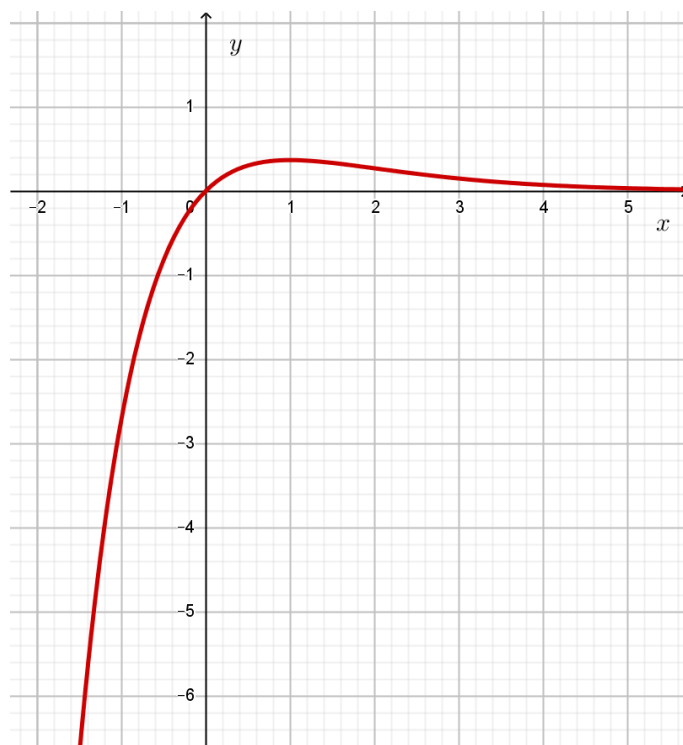
A 2-ben tehát inflexiós pont van. $f(2) = 2e^{-2} \approx 0.27$ az inflexiós pont második koordinátája.

7) Konvex, konkáv szakaszok.

A második sor alapján az inflexiós pont előtt konkáv a függvény, utána konvex.

8) Grafikon.

Figyelembe véve az eddigieket a függvény ábrája:



9) Értékkészlet.

Az ábra alapján a függvény a lokális maximumát, és az annál kisebb értékeket veszi fel, (a lokális maximum most globális maximum is).

$$R_f = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right].$$

12. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \frac{e^x}{x}$ függvényen.

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány.

A nevezőbeli x miatt

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

2) Alaki tulajdonságok.

A függvény sehol sem nulla, hiszen a számláló minden x -re pozitív, a grafikon nem metszi a vízszintes tengelyt.

Mivel $0 \notin D_f$, a grafikon nem metszi a függőleges tengelyt sem.

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} = -\frac{e^{-x}}{x},$$

amiből látszik, hogy a függvény se nem páros, se nem páratlan.

3) Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

Négy határértéket kell kiszámolnunk.

Alkalmazva a L'Hospital-szabályt az eredeti $\frac{\infty}{\infty}$ típusú limeszre:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty,$$

hiszen a számláló 1-hez, a nevező pedig nullához tart, de mindig negatív.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \infty,$$

mivel most a nevező a pozitív számokon keresztül tart nullához.

Végül, ismét felhasználva a L'Hospital-szabályt,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

4) Lokális szélsőértékek.

$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}.$$

$f'(x) = 0$ pontosan akkor, ha a tört számlálója 0. Mivel a számláló szorzat, így valamelyik tényezőjének kell 0-nak lennie, amiből $x=1$.

Figyeljünk most arra, hogy a jelölt a D_f jobb oldali felébe esik, azt vágja ketté, ezért a fejléc az alábbi három intervallumot tartalmazza.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	–	X	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	X	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Az 1-ben tehát lokális minimum van, amelynek értéke: $f(1) = e$.

5) Monotonitási viszonyok.

Figyeljük meg, hogy - összhangban a nulla körüli limeszekkel - a nulla bal és jobb oldali környezetében is csökkenő a függvény.

6) Inflexiós pontok

$$f''(x) = \frac{\left((x-1)e^x\right)' x^2 - (x-1)e^x (x^2)'}{x^4} = \frac{(e^x + (x-1)e^x)x^2 - 2x(x-1)e^x}{x^4} =$$

$$= \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x}{x^3}.$$

Újra egy törtet kell vizsgálnunk, hogy az hol 0, mely akkor lehetséges, ha a tört számlálója 0. Mivel a számláló szorzat, így valamelyik tényezőjének kell 0-nak lennie. Azt látjuk, hogy az $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$ és $e^x > 0$, amiből $f''(x) \neq 0$, tehát nincs inflexiós pont.

7) Konvex, konkáv szakaszok.

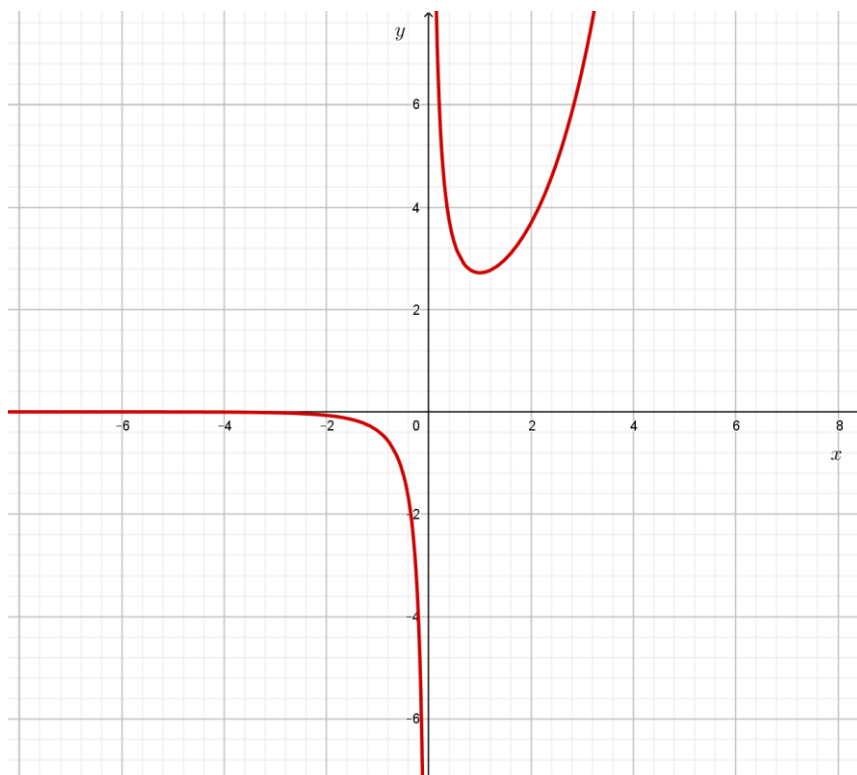
Nincs ugyan inflexiós pont, de a második táblázatot most is el kell készíteni, mert a konvex és konkáv szakaszok abból olvashatók ki.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$	–	X	+
$f(x)$	konkáv	X	konvex

Az előjelekkel kapcsolatban jegyezzük meg, hogy most $f''(x)$ előjele (mivel a számlálója mindig pozitív) a nevezője előjelével egyezik meg, az pedig negatív x -ekre negatív, pozitívakra pozitív.

8) Grafikon.

Ezek után elkészíthetjük a függvény ábráját, ami az alábbi:



9) Az ábra alapján

$$R_f = (-\infty, 0) \cup (e, \infty).$$

Ellenőrző kérdések:

17. kérdés: Az $f(x) = x^3 - 12x + 1$ függvény csökken az alábbi intervallum(ok)on

$(2, \infty).$

$(-2, 2).$ (X)

$(-\infty, -2).$

$(-\infty, -2)$ és $(2, \infty).$

18. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvénynek?

0.

1.

2 .

3 . (X)

19. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ függvénynek?

0 .

1.

2 . (X)

3.

20. kérdés: Hány lokális szélsőérték helye van az $f(x) = x^2 e^{-x}$ függvénynek?

0 .

1.

2 . (X)

3.

21. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = x^4$ függvénynek?

0 . (X)

1.

2 .

3.

22. kérdés: Az $f(x) = x^6 - 10x^4$ függvény konkáv a $(-2, 2)$ intervallumon.

Igaz. (X)

Nem igaz.

3. Differenciálszámítás

3.5. Modulzáró ellenőrző kérdések

1. kérdés: Mi az $f(x) = \frac{2}{x^3}$ függvény $x_0 = -1$ -beli érintőjének egyenlete?

$$y = -6x - 8 \text{ (X)}$$

$$y = -2x + 1$$

$$y = 8x - 10$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 10$$

2. kérdés: Mi az $f(x) = x^2 + 3x + 1$ függvény $m = -5$ meredekségű érintőjének egyenlete?

$$y = 5x + 4$$

$$y = -5x + 13$$

$$y = -5x - 15 \text{ (X)}$$

$$y = -5x + 4$$

3. kérdés: Mi az $f(x) = (2x + \sin x)(x^2 + 3)$ függvény derivált függvénye?

$$(2 - \cos x)(x^2 + 3) + 2x(2x + \sin x).$$

$$(2 - \cos x)2x.$$

$$(2 + \cos x) \cdot 2x$$

$$(2 + \cos x)(x^2 + 3) + 2x(2x + \sin x) \text{ (X)}.$$

4. kérdés: Mi az $f(x) = \frac{2e^x + \sqrt{x}}{\cos x}$ függvény derivált függvénye?

$$\frac{\left(2e^x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos x - (2e^x + \sqrt{x})\sin x}{\cos^2 x}.$$

$$\frac{\left(2e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cos x + (2e^x + \sqrt{x})\sin x}{\cos^2 x} \cdot \text{(X)}$$

$$\frac{2e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sin x}$$

$$-\frac{2e^x + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sin x}$$

5. kérdés: Mi az $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$ függvény derivált függvénye?

$$\frac{1}{2\sqrt{3x^2 - 3}}.$$

$$\frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{3x^2 - x}}.$$

$$\frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x}}. \text{ (X)}$$

$$\frac{3x^2}{\sqrt{x^3 - 3x}}.$$

6. kérdés: Mi az $f(x) = xe^x$ függvény másodrendű derivált függvénye?

$$(x+1)e^x.$$

$$(x+2)e^x. \text{ (X)}$$

$$e^x$$

$$2xe^x$$

7. kérdés: Az $f(x) = \sqrt{5-x}$ függvény $a=1$ hely körüli elsőfokú Taylor-polinomja

$$y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{4}. \text{ (X)}$$

$$y = -\frac{x}{4} - \frac{9}{4}.$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}.$$

$$y = -\frac{x}{4} + \frac{7}{4}.$$

8. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $f(x) = x^3 - 10x^2 + 32x - 37$ függvény $a = 4$ helyen vett harmadfokú Taylor-polinomja?

$$5 + 2(x-4) + (x-4)^3$$

$$-5 + 2(x-4) + (x-4)^3$$

$$5 + 2(x-4)^2 + (x-4)^3$$

$$-5 + 2(x-4)^2 + (x-4)^3 \text{ (X)}$$

9. kérdés: Melyik az $f(x) = \frac{1}{2+x}$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomja?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 \text{ (X)}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{128}x^3$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{128}x^3$$

10. kérdés: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sin(x-1)} =$

$$\frac{1}{2} \cdot \text{(X)}$$

$$1 \cdot$$

$$0 \cdot$$

$$-\frac{1}{2} \cdot$$

11. kérdés: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{x^2} =$

$\frac{1}{9}.$

$\frac{1}{3}.$

3.

9. (X)

12. kérdés: $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{arctg} x =$

-1.

0.

1. (X)

$\infty.$

13. kérdés: Legyen $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 6$. Milyen x -re lesz $f'(x) = 0$?

0 ; 2 (X)

-2 ; 2

-2 ; 0

-1 ; 3

14. kérdés: Legyen $C(t) = \frac{3}{t^3 - 6t}$. Milyen t -re lesz $C'(t) = 0$?

0 ; $\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ (X)

-2 ; 2

$-\sqrt{2}$; 1

15. kérdés: Hol csökkenő az f függvény, ha deriváltja $f'(x) = \frac{x+7}{(x-8)^3}$? Az f ugyanott értelmezhető, ahol f' .

A $]-\infty, -7[$ és $]-7, 8[$ intervallumokon.

A $]-\infty, -7[$ intervallumon.

A $]-7, 8[$ és $]8, \infty[$ intervallumokon.

A $]-7, 8[$ intervallumon. (X)

16. kérdés: Hol nő az $f(x) = \frac{x^3 - 16}{x}$ függvény?

A $]-\infty, -2[$ és $]0, \infty[$ intervallumokon.

A $]-2, 0[$ és $]2, \infty[$ intervallumokon.

A $]-2, 0[$ és $]0, \infty[$ intervallumokon. (X)

A $]-\infty, 0[$ és $]2, \infty[$ intervallumokon.

17. kérdés: Hol és milyen szélsőértéke van az $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ függvénynek?

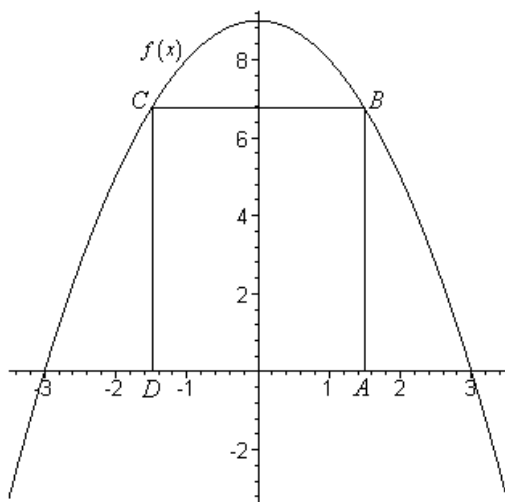
Az $x = -1$ helyen minimuma van.

Az $x = -1$ helyen maximuma van. (X)

Az $x = 1$ helyen minimuma van.

Az $x = 1$ helyen maximuma van.

18. kérdés: Tekintsük azokat a téglalapokat, melyeknek két csúcsa az x -tengelyen, másik két csúcsa pedig az x -tengely fölött az $f(x) = 9 - x^2$ függvény grafikonján van.



Mi az A csúcs első koordinátája, ha a téglalap területe maximális?

1

$\sqrt{2}$

$\sqrt{3}$ (X)

2

19. kérdés: Az $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ függvény

páros. (X)

páratlan.

se nem páros, se nem páratlan.

20. kérdés: Hol konvex az $f(x) = \ln^2 x$ függvény?

$(0,1)$

$(0,e)$ (X)

$(1,\infty)$

(e,∞)

21. kérdés: A következő intervallumo(ko)n konkáv az $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$ függvény

$(-1,1)$.

$(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$. (X)

$(-\infty,-1)$.

$(-1,1) \cup (1,\infty)$

22. kérdés: Az $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ függvénynek az $x=1$ helyen

minimuma van.

maximuma van.

inflexiós pontja van. (X)

nincs sem szélsőértéke, sem inflexiós pontja.

4. Integrálszámítás

4.1. Határozatlan és határozott integrál

Tanulási cél: Megismerni a határozatlan és határozott integrál fogalmát. Elsajátítani az alapintegrálokat, és az egyszerűbb integrálási tételeket, valamint a Newton-Leibniz-formulát. Ezen ismereteket alkalmazni területszámítási és forgástestek térfogatára vonatkozó feladatokban.

Motivációs példa: Egy ház h_0 magasságban lévő ablakán kinyúlva elhajítunk egy testet függőlegesen felfelé v_0 kezdeti sebességgel. Adjuk meg a test sebességét és talajtól való távolságát az idő függvényében. A légellenállást hanyagoljuk el, tekintsük úgy, hogy csak a gravitációs erő hat a testre.

A megoldás során Newton II. törvényéből indulhatunk ki, mely szerint $F = ma$. Mivel a testre most csak a gravitációs erő hat, így $F = mg$. Ezt felhasználva $mg = ma$, amiből kapjuk, hogy $a = g$, azaz a gyorsulás állandó, és értéke minden pillanatban a gravitációs gyorsulással egyenlő. Így lényegében egy függvényünk van, ami a gyorsulást írja le az idő függvényében. Fizikai tanulmányainkból tudjuk, hogy a gyorsulás-idő függvény a sebesség idő függvény deriváltja. Ha tehát a gyorsulás ismeretében szeretnénk leírni a sebességet, akkor olyan függvényt kell keresnünk, aminek az ismert gyorsulás-idő függvény a deriváltja. Ha sikerül ilyen függvényt találnunk, akkor továbbléphetünk, mert azt is tudjuk fizikából, hogy a sebesség-idő függvény az elmozdulás-idő függvénynek a deriváltja. A sebesség-idő függvény ismeretében tehát olyan függvényt kell keresnünk, aminek a sebesség idő függvény a deriváltja. Amint látható, kétszer is olyan problémával találjuk magunkat szembe, melyben ismerünk egy függvényt, és olyan függvényt kell keresnünk, aminek ez az ismert függvény a deriváltja. Az alábbiakban ezzel a problémával foglalkozunk majd.

Elméleti összefoglaló:

Definíció: A $F(x)$ függvényt a $f(x)$ függvény primitív függvényének nevezzük, ha $F'(x) = f(x)$.

Egy $f(x)$ függvénynek nem csak egy primitív függvénye van. Tekintsük például a $f(x) = \cos x$ függvényt. Ennek nyilván primitív függvénye a $F(x) = \sin x$ függvény, hiszen $(\sin x)' = \cos x$. De primitív függvény lesz a $F_1(x) = \sin x + 1$ függvény is, mert $(\sin x + 1)' = (\sin x)' + 1' = \cos x + 0 = \cos x$.

Sőt, ha ezt így meggondoltuk, akkor azt mondhatjuk, $f(x)$ -nek végtelenül sok primitív függvénye van, mert bármilyen konstans hozzáadhatunk $\sin x$ -hez, mindenképpen olyan függvényt kapunk, aminek deriváltja $\cos x$, hiszen a konstans deriváltja 0 lesz. Ezek alapján az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg.

Tétel: Ha az $f(x)$ függvénynek primitív függvénye a $F(x)$ függvény, akkor bármely $F(x)+c$ függvény is primitív függvénye, ahol $c \in \mathbb{R}$.

Felvetődik azonban a kérdés, hogy ilyen módon megkaphatunk-e minden olyan függvényt, ami primitív függvénye $f(x)$ -nek? A válasz erre igen, ezt is megfogalmazhatjuk egy tételben.

Tétel: Ha $F_1(x)$ és $F_2(x)$ is primitív függvénye $f(x)$ -nek, akkor $F_1(x)-F_2(x)$ konstans függvény.

Amint láthatjuk, egy $f(x)$ függvény primitív függvényei egy halmazt alkotnak, s ezen halmaz bármely két eleme csak egy konstansban tér el egymástól. Elég tehát egy elemet ismernünk ebből a halmazból, mert akkor az összes elemet megkaphatjuk ezen elemből különböző konstansok hozzáadásával. Mivel a primitív függvények halmazát ilyen egyszerűen megkaphatjuk, ezért egy fogalmat definiálunk.

Definíció: Az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek halmazát az $f(x)$ függvény határozatlan integráljának nevezzük, és $\int f(x)dx$ -szel jelöljük.

Ha $F(x)$ egy primitív függvénye $f(x)$ -nek, akkor $\int f(x)dx = F(x) + c$, ahol c tetszőleges konstans.

Amint a fentiekből látható, a határozatlan integrálás vagy másképp a primitív függvény keresés a deriválás megfordításának tekinthető. Ezért a továbbiakban úgy haladhatunk, hogy tekintjük az alapderiváltakat, és azokat megfordítva az úgynevezett alapintegrálokat kapjuk.

Például azt az alapderiváltat, hogy $(\sin x)' = \cos x$ az $\int \cos x dx = \sin x + c$ formában fordítjuk meg, és írjuk alapintegrálként. Néhány esetben a megfordításon egy kicsit alakítunk. Például ha a $(\cos x)' = -\sin x$ alapderiváltból indulunk ki, akkor az egyszerű megfordítás

$\int -\sin x dx = \cos x + c$ lenne, de ezt inkább $\int \sin x dx = -\cos x + c$ formában írjuk, hiszen nyilván $(-\cos x)' = \sin x$ is igaz. Hasonlóan a $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ alapderiváltból az

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$ alapintegrált kapjuk.

Vannak olyan elemi alapfüggvényeink, melyeknek deriváltja csak előjelben különbözik. Ilyen például az $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ és az $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Ilyenkor nem szükséges

mindkettőt megfordítanunk, hanem elég csak az egyiket. Az $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

alapintegrál mellé nem szükséges még az $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$ is. Ugyanígy elegendő

az $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$ és $(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ alapderiváltak megfordításából az

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c \text{ alapintegrált írni.}$$

Az így kapott alapintegrálokat egy táblázatban foglaljuk össze. Ez lényegében az alapderiváltak táblázatának megfordítása, olyan apróbb változtatásokkal, amikről fentebb írtunk.

Az alapintegrálok táblázata:

$\int k dx = kx + c, k \in \mathbb{R}$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	
$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c$
$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + c$	$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arsh} x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arch} x + c, x > 1$
$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arth} x + c, & \text{ha } x < 1 \\ \operatorname{arch} x + c, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$	

Néhány alapintegrállal kapcsolatban szeretnénk megjegyzést tenni. Az egyik a hatványok

integrálásra vonatkozó $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ alapintegrál. Itt arra hívjuk fel

nyomatékosan a figyelmet, hogy a -1 -edik hatvány kivétel. Bár a hatványokat általában úgy integráljuk, hogy a kitevőt eggyel megnöveljük, és osztunk az új kitevővel, a -1 -edik hatvány

esetén nem ez történik. Mivel $x^{-1} = \frac{1}{x}$ a természetes alapú logaritmus, azaz $\ln x$ deriváltja,

ezért az $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ alapintegrált kapjuk. Ez csak pozitív x -ekre igaz, hiszen a logaritmus csak ekkor értelmezhető. Belátható azonban, hogy negatív x -ek esetén $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + c$ igaz, s ezt együttesen $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ formában foglalhatjuk össze. Ez így már pozitív és negatív x -ekre is igaz.

Az utolsó alapintegrál $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arth} x + c, & \text{ha } |x| < 1 \\ \operatorname{arch} x + c, & \text{ha } |x| > 1 \end{cases}$, azért ilyen bonyolult, mert az

$\operatorname{arth} x$ -nek és $\operatorname{arch} x$ -nek megegyezik a deriváltja, mindegyiknek $\frac{1}{1-x^2}$. A két függvény azonban máshol értelmezhető, ezért szerepel az integrálás eredményében x értékétől függően vagy az egyik, vagy a másik függvény. Szerencsére ez a bonyolult alapintegrál ki is kerülhet. A későbbiekben megismerünk majd egy olyan módszert, aminek segítségével másképp tudjuk integrálni ezt a függvényt.

Az alapintegrálok megismerése után jó lenne, ha ahhoz hasonló szabályokat is megfogalmazhatnánk, mint amilyenek a deriválásnál szerepeltek, mert akkor az alapintegrálokból műveletekkel képezett függvényeket is tudnánk integrálni. Nézzük milyen szabályok igazak a primitív függvényekre.

Tétel: Ha az $f(x)$ függvénynek létezik primitív függvénye, akkor a $k \cdot f(x)$, $k \in \mathbb{R}$ függvénynek is létezik primitív függvénye, és $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$.

Bizonyítás: Legyen $F(x)$ egy primitív függvénye $f(x)$ -nek, azaz $F'(x) = f(x)$, vagy másképp $\int f(x) dx = F(x) + c$. Ekkor nyilván $k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$, ami azt jelenti, hogy $k \cdot F'(x)$ egy primitív függvénye $k \cdot f(x)$ -nek, azaz $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot F(x) + c = k \cdot \int f(x) dx$.

A tétel másképp úgy fogalmazható, hogy integrálás során konstans szorzó kiemelhető az integrálból.

Tétel: Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor az $f(x) + g(x)$ függvénynek is létezik primitív függvénye, és $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

Bizonyítás: Legyen $F(x)$ az $f(x)$ és $G(x)$ a $g(x)$ egy-egy primitív függvénye, tehát $F'(x) = f(x)$ és $G'(x) = g(x)$, vagy $\int f(x) dx = F(x) + c$ és $\int g(x) dx = G(x) + c$. Ekkor nyilván $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$, azaz $F(x) + G(x)$ primitív függvénye $f(x) + g(x)$ -nek, tehát

$$\int f(x) + g(x) dx = F(x) + G(x) + c = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Ezt a tételt fogalmazhatjuk meg úgy is, hogy függvények összegét tagonként integrálhatjuk. A fenti két tételből nyilván az is következik, hogy függvények különbsége esetén

$$\int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$$

A deriválásnál ezután az következett, hogy a függvények szorzatára, hányadosára és az összetett függvényekre is sikerült deriválási szabályt találnunk. Ezek a deriválási szabályok bármilyen szorzat, tört vagy összetett függvény esetén alkalmazhatóak voltak. Sajnos az integrálásnál ilyen szabályok nincsenek. Nem lehet kimondani olyan összefüggést, amelynek segítségével bármilyen függvények szorzata, vagy hányadosa, vagy kompozíciója integrálható lenne. A későbbiekben megismerünk majd szabályokat, melyek segítségével függvények szorzatát integrálhatjuk, de ezek a szabályok nem alkalmazhatók bármilyen függvények szorzata esetében, csak bizonyos speciális esetekben. Megismerünk majd olyan szabályt is, amit függvények hányadosának integrálására használhatunk, de csak bizonyos speciális törtekre alkalmazható. Speciális összetett függvényekre is lesz majd integrálási szabály, de azt sem lehet általánosan alkalmazni minden összetett függvényre. Éppen ezért az integrálás több találékonyságot igényel majd, mint amire a deriválásnál szükség volt.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 3x^4 - 2\sin x + 8e^x$ függvény határozatlan integrálját, azaz $\int 3x^4 - 2\sin x + 8e^x dx$ -et!

Megoldás: Mivel függvények összegét illetve különbségét kell integrálnunk, ezért tagonként végezhetjük el az integrálást. Így három integrált kapunk.

$$\int 3x^4 - 2\sin x + 8e^x dx = \int 3x^4 dx - \int 2\sin x dx + \int 8e^x dx$$

Az egyes integrálokból a konstans szorzókat kiemelhetjük.

$$\int 3x^4 dx - \int 2\sin x dx + \int 8e^x dx = 3\int x^4 dx - 2\int \sin x dx + 8\int e^x dx$$

Már csak alapintegrálok szerepelnek, melyeket egyszerűen behelyettesítünk. Az első részben

egy hatványfüggvényt kell integrálnunk, így itt az $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

alapintegrálra hivatkozva eggyel megnöveljük a kitevőt, s osztunk az új kitevővel. A második részben az $\int \sin x dx = -\cos x + c$, a harmadikban pedig az $\int e^x dx = e^x + c$ alapintegrálra hivatkozunk.

$$3\int x^4 dx - 2\int \sin x dx + 8\int e^x dx = 3\frac{x^5}{5} - 2(-\cos x) + 8e^x + c = \frac{3}{5}x^5 + 2\cos x + 8e^x + c$$

Nem írjuk ki mindegyik rész integrálásánál külön-külön a c integrációs konstans, mert c bármilyen valós értéket felvehet. Ha többször szerepelne, akkor a konstansok összege is egy konstans lenne, ami bármilyen valós értéket felvehetne. Ezért elég mindig csak egyetlen konstans írunk a primitív függvény után.

2. feladat: $\int \sqrt[4]{x} dx$

Megoldás: Első lépésként a konstans szorzót emeljük ki az integrálból.

$$\int \sqrt[4]{x} dx = 7\int \sqrt[4]{x} dx$$

Az alapintegrálok között a különböző gyökök a hatványokban szerepelnek. A deriválásnál is az történt, hogy a gyököket törtkitevős hatványként írtuk, és hatványként felírt alakot deriváltuk. Most ugyanígy járunk el az integrálás során is.

$$7 \int \sqrt[4]{x} \, dx = 7 \int x^{\frac{1}{4}} \, dx$$

Ezután már hivatkozhatunk az $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ alapintegrálra.

$$7 \int x^{\frac{1}{4}} \, dx = 7 \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + c = 7 \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + c = \frac{28}{5} x^{\frac{5}{4}} + c = \frac{28}{5} \sqrt[4]{x^5} + c.$$

Az eredményt írhatjuk törtkitevős hatványként, vagy gyökös formában is.

3. feladat: $\int \frac{6}{x^5} \, dx$

Megoldás: Kezdjük most is a konstans szorzó kiemelésével.

$$\int \frac{6}{x^5} \, dx = 6 \int \frac{1}{x^5} \, dx$$

Az integrálandó függvényben, amit integrandusnak is szoktak hívni, most egy hatvány reciprokát látjuk. Ezt felírhatjuk negatív kitevős hatvány formájában, s így ismét csak egy hatványt kell majd integrálnunk. Ugyanígy járhattunk el az ilyen függvények deriválásakor is.

$$6 \int \frac{1}{x^5} \, dx = 6 \int x^{-5} \, dx$$

A hatvány integrálásakor most is növeljük eggyel a kitevőt, és osztunk az új kitevővel.

$$6 \int x^{-5} \, dx = 6 \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = 6 \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{6}{4} x^{-4} + c = -\frac{3}{2} \frac{1}{x^4} + c$$

Az eredményt most írhatjuk negatív kitevős hatvány, vagy tört formájában is.

4. feladat: $\int \sqrt[5]{x \cdot \sqrt{x}} \, dx$

Megoldás: Az integrálást ebből az alakból nyilván nem tudjuk végrehajtani, ezért először átalakítjuk az integrálandó függvényt. A gyököket írjuk át törtkitevős hatvánnyá, amint azt egy korábbi feladatban tettük.

$$\int \sqrt[5]{x \cdot \sqrt{x}} \, dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} \, dx$$

Végezzük el a zárójelen belül a szorzást. Azonos alapú hatványok szorzása esetén egyetlen hatványt kapunk, melyben a kitevők összeadódnak.

$$\int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} \, dx = \int \left(x^{1+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} \, dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} \, dx$$

Most egy hatványt tovább hatványozunk. Ha ezt egyetlen hatványként írjuk, akkor a kitevők szorzódnak.

$$\int \left(x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} \, dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5}} \, dx = \int x^{\frac{3}{10}} \, dx$$

Az integrandust sikerült egyetlen hatvánnyá alakítunk, így végre tudjuk hajtani az integrálást.

$$\int x^{\frac{3}{10}} dx = \frac{x^{\frac{3}{10}+1}}{\frac{3}{10}+1} + c = \frac{x^{\frac{13}{10}}}{\frac{13}{10}} + c = \frac{10}{13} x^{\frac{13}{10}} + c = \frac{10}{13} \sqrt[10]{x^{13}} + c$$

Az eredmény most is több alakban írható. Hagyhatjuk törtkitevős hatványként, de írhatjuk gyökös formában is.

A feladatból látható, hogy az integrandus megadott alakjából nem lehet elvégezni az integrálást. De az átalakítások után már olyan formában kapjuk meg a függvényt, ami egyetlen alapintegrál. Az integrálási feladatokban nagyon sokszor nem az okozza a fejtörést, hogy magát az integrálási lépést hogyan hajtsuk végre, hanem hogyan készítsük elő az integrálást, azaz milyen módon alakítsuk át az integrandust az integrálás előtt. Az átalakítások során nagyon gyakran olyan azonosságokra hivatkozunk, amelyek a középiskolából ismertek. Különösen szeretnénk kiemelni a hatványozás azonosságait, mert a hatványok gyakran fordulnak elő, s átalakításukra több azonosságot is ismerünk.

5. feladat: $\int \sqrt{x} (8x - 5\sqrt[3]{x}) dx$

Megoldás: Az integrandusunk most egy szorzat. Amint az korábban szerepelt, ilyen esetben nincs általánosan alkalmazható integrálási szabály. Át kellene ezért alakítanunk úgy a függvényt, hogy már ne szerepeljen szorzás. Amint a korábbiakban, írjuk át most is a gyököket törtkitevős hatvánnyá, majd végezzük el a szorzást, azaz bontsuk fel a zárójelet.

$$\int \sqrt{x} (8x - 5\sqrt[3]{x}) dx = \int x^{\frac{1}{2}} \left(8x - 5x^{\frac{1}{3}} \right) dx = \int 8x^{\frac{1}{2}} x - 5x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} dx$$

Az integrandus mindkét tagjában azonos alapú hatványok szorzata áll, melyeket egyetlen hatványként is írhatunk. A kitevők ekkor összeadódnak.

$$\int 8x^{\frac{1}{2}} x - 5x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} dx = \int 8x^{\frac{1}{2}+1} - 5x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} dx = \int 8x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{5}{6}} dx$$

Sikerült elérnünk, hogy már nincs függvények szorzása, hanem csak különbsége. Ekkor tagonként integrálhatunk. Az egyes tagokból a konstans szorzókat kiemelhetjük.

$$\int 8x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{5}{6}} dx = \int 8x^{\frac{3}{2}} dx - \int 5x^{\frac{5}{6}} dx = 8 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 5 \int x^{\frac{5}{6}} dx$$

A két hatványt immár külön-külön integráljuk.

$$8 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 5 \int x^{\frac{5}{6}} dx = 8 \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 5 \frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} + c = \frac{16}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{30}{11} x^{\frac{11}{6}} + c = \frac{16}{5} \sqrt{x^5} - \frac{30}{11} \sqrt[6]{x^{11}} + c$$

Mivel törtkitevős hatványokat integráltunk, az eredmény most is írható hatványként és gyökös alakban is.

6. feladat: $\int \frac{4x - 9\sqrt{x} + 6}{x^2} dx$

Megoldás: Az integrálandó függvény most egy tört. Sajnos a törtekre sincsen minden esetben használható integrálási szabály. A függvényt ezért ismét átalakítjuk az integrálás előtt. Első lépésben a gyököt írjuk hatványként.

$$\int \frac{4x - 9\sqrt{x} + 6}{x^2} dx = \int \frac{4x - 9x^{\frac{1}{2}} + 6}{x^2} dx$$

Mivel a tört számlálójában összeg illetve különbség áll, a törtet több törtre bonthatjuk úgy, hogy az egyes tagokat külön-külön osztjuk a nevezővel.

$$\int \frac{4x - 9x^{\frac{1}{2}} + 6}{x^2} dx = \int \frac{4x}{x^2} dx - \int \frac{9x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + \int \frac{6}{x^2} dx$$

A konstans szorzókat ezután kiemelhetjük az egyes integrálokból.

$$\int \frac{4x}{x^2} dx - \int \frac{9x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + \int \frac{6}{x^2} dx = 4 \int \frac{x}{x^2} dx - 9 \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + 6 \int \frac{1}{x^2} dx$$

Az első két tagban azonos alapú hatványok hányadosa áll, amiket egyetlen hatvánnyá alakíthatunk. Ekkor a kitevők különbségét kell vennünk. A harmadik tagban egy hatvány reciproka szerepel, amit negatív kitevős hatványként írhatunk.

$$4 \int \frac{x}{x^2} dx - 9 \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + 6 \int \frac{1}{x^2} dx = 4 \int x^{1-2} dx - 9 \int x^{\frac{1}{2}-2} dx + 6 \int x^{-2} dx =$$

$$= 4 \int x^{-1} dx - 9 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{-2} dx$$

Már csak egy-egy hatványt kell integrálnunk. Vigyázzunk azonban, mert az első tagban éppen x^{-1} áll, aminek integrálása különbözik a többi hatvány integrálásától. Éppen ezért, ez ne is írjuk hatványként, hanem inkább $\frac{1}{x}$ alakban.

$$4 \int \frac{1}{x} dx - 9 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{-2} dx$$

Most hajtsuk végre az integrálásokat.

$$4 \int \frac{1}{x} dx - 9 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{-2} dx = 4 \ln|x| - 9 \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 6 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c =$$

$$= 4 \ln|x| - 9 \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 6 \frac{x^{-1}}{-1} + c = 4 \ln|x| + 18x^{-\frac{1}{2}} - 6x^{-1} + c = 4 \ln|x| + \frac{18}{\sqrt{x}} - \frac{6}{x} + c$$

Mint általában az ilyen feladatoknál, az eredmény most is több alakban adható meg.

Most pedig térjünk vissza ahhoz a motivációs példához, amivel a lecke indult, és adjunk választ az abban feltett kérdésekre.

7. feladat: Egy ház h_0 magasságban lévő ablakán kinyúlva elhajítunk egy testet függőlegesen felfelé v_0 kezdeti sebességgel. Adjuk meg a test sebességét és talajtól való távolságát az idő függvényében. A légellenállást hanyagoljuk el, tekintsük úgy, hogy csak a gravitációs erő hat a testre.

Megoldás: Amint azt a korábbiakban megállapítottuk, a test gyorsulását az idő függvényében az $a(t) = g$ konstans függvény írja le. A fizikai példában a megszokott jelölésekhez képest annyi az eltérés, hogy a függvényt nem f jelöli hanem a , a változót pedig nem x jelöli

hanem t . (Természetesen ha valakit ez zavar, akkor használja az $f(x) = g$ jelölést.) Mivel a gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja, így ezt integrálnunk kell a sebesség-idő függvény meghatározásához. Az integrálás során t lesz a változó, így most nem dx szerepel majd az integrálban hanem dt .

$$v(t) = \int a(t) dt = \int g dt$$

Mivel g konstans, hivatkozunk az $\int k dx = kx + c$, $k \in \mathbb{R}$ alapintegrálra, s így az alábbi kapjuk:

$$\int g dt = gt + c$$

Megkaptuk tehát a sebességet időben leíró függvényt, mely $v(t) = gt + c$ lett.

Ez azonban nem egyetlen függvényt jelent, hanem végtelen sokat, hiszen a c integrációs konstans bármilyen valós értéket felvehet. Ez így nyilván nincs rendben, hiszen mi egy konkrét függvényt keresünk most, ami ennek a konkrét mozgásnak a sebességét írja le. Itt ne feledkezzünk el arról, hogy a test sebessége adott a mozgás kezdetén, azaz tudjuk, hogy a $t = 0$ időpillanatban v_0 a sebesség felfelé. Ezt úgy is írhatjuk, hogy $v(0) = -v_0$. A negatív előjel azért van, mert amikor azt mondtuk a gyorsulás g , akkor hallgatólagosan kijelöltük a mozgás leírásában a pozitív irányt. Mivel a gyorsulást vettük pozitívnak, ami lefelé mutat, így a felfelé irány negatív lesz. Ezért a felfelé irányuló v_0 nagyságú kezdeti sebességet $-v_0$ -ként kell írunk.

Helyettesítsünk a sebességet leíró függvénybe t helyére 0 -t.

$$v(0) = g \cdot 0 + c = c$$

Tegyük egyenlővé a kétféle módon kapott $v(0)$ -t, s kapjuk $c = -v_0$.

Ezután felírhatjuk azt a konkrét függvényt, ami az adott mozgás sebességét leírja.

$$v(t) = gt - v_0$$

Egy középiskolából ismert összefüggést kaptunk, melyet ott a függőleges hajítások kinematikája során ismertünk meg.

Ha most továbbmegyünk, és le szeretnénk írni a test talajtól való távolságát is az idő függvényében, akkor ezt a függvényt is integrálnunk kell, hiszen a sebesség az elmozdulás idő szerinti deriváltja.

$$s(t) = \int v(t) dt = \int gt - v_0 dt$$

Az integrálást természetesen tagonként hajtjuk végre, s az első tagból a konstans g szorzó kiemelhető.

$$\int gt - v_0 dt = g \int t dt - \int v_0 dt = g \frac{t^2}{2} - v_0 t + c^*$$

Megkaptuk tehát az elmozdulást az időben leíró függvényt, ami $s(t) = g \frac{t^2}{2} - v_0 t + c^*$ lett.

Ebben is szerepel azonban egy integrációs konstans, amit most c^* -gal jelöltünk, hogy megkülönböztessük az előző konstanstól. Nyilván most ennek a konstansnak is konkrét értéke kell legyen. Tudjuk, hogy kezdetben h_0 magasságban van test, azaz ennek a függvénynek $t = 0$ esetén h_0 az értéke. Jelölésben $s(0) = h_0$. De $s(0)$ -t úgy is megkaphatjuk, hogy az $s(t)$ függvényben t helyére 0 -t helyettesítünk.

$$s(0) = g \frac{0^2}{2} - v_0 \cdot 0 + c^* = c^*$$

Tegyük egyenlővé a kettőt, s azt kapjuk: $c^* = h_0$.

Ezek után felírhatjuk azt a konkrét függvényt, amely az adott mozgás során a test helyét írja le az idő függvényében.

$$s(t) = g \frac{t^2}{2} - v_0 t + h_0$$

Ismét olyan összefüggést kaptunk, ami már a középiskolából ismert.

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: $\int 9x^5 - 7^x dx$

$$45x^4 - \frac{7^x}{\ln 7} + c$$
$$\frac{3}{2}x^6 - \frac{7^x}{\ln 7} + c \text{ (X)}$$
$$45x^4 - 7^x \cdot \ln 7 + c$$
$$\frac{3}{2}x^6 - 7^x \cdot \ln 7 + c$$

2. kérdés: $\int 4\sqrt[5]{x^3} dx$

$$\frac{12}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} + c$$
$$\frac{12}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + c$$
$$\frac{5}{2} \sqrt[5]{x^8} + c \text{ (X)}$$
$$\frac{5}{2} \sqrt[8]{x^5} + c$$

3. kérdés: $\int \frac{3}{x^4} dx$

$$-\frac{1}{x^3} + c \text{ (X)}$$
$$\frac{1}{x^3} + c$$
$$-\frac{3}{5} \frac{1}{x^5} + c$$
$$\frac{3}{5} \frac{1}{x^5} + c$$

4. kérdés: $\int \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} dx$

$$\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5} + c$$

$$\frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3} + c$$

$$\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c \text{ (X)}$$

$$\frac{3}{5}\sqrt[5]{x^3} + c$$

5. kérdés: $\int x(5\sqrt{x} + 4) dx$

$$2\sqrt{x^5} + 2x^2 + c \text{ (X)}$$

$$\frac{10}{3}\sqrt{x^3} + 2x^2 + c$$

$$2\sqrt{x^5} + 4x^2 + c$$

$$\frac{10}{3}\sqrt{x^3} + 4x^2 + c$$

6. kérdés: $\int \frac{x^3 + 6x - 3}{2x^2} dx$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{3}{4x^2} + \frac{3}{x^3} + c$$

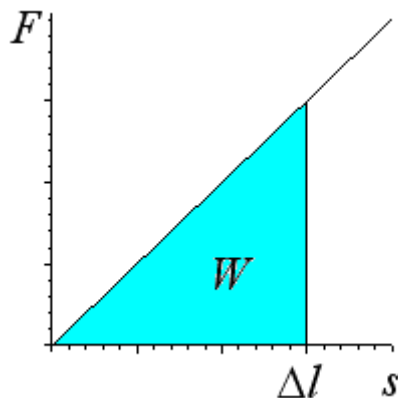
$$x^2 + 3\ln|x| + \frac{3}{x^3} + c$$

$$x^2 - \frac{3}{4x^2} + \frac{3}{x^3} + c$$

$$\frac{x^2}{4} + 3\ln|x| + \frac{3}{2x} + c \text{ (X)}$$

Motivációs példa: Mennyi munkát kell végeznünk ahhoz, hogy egy m tömegű űrhajót h távolságra juttassunk a Föld felszínétől?

Egy látszólag egyszerű feladattal állunk szemben, hiszen a munkát, amint azt középiskolában fizikából tanultuk, az erő és az erő irányába eső elmozdulás szorzataként számolhatjuk. Ezért először arra gondolhatunk, hogy meghatározzuk az űrhajóra ható gravitációs erőt, és ezt megszorozzuk h -val, hiszen a gravitációs erővel párhuzamos elmozdulás pontosan az, amennyivel az űrhajó eltávolodik a Föld felszínétől. De van egy kis gond, ami miatt ez mégsem ilyen egyszerű. Mivel h nagy, ezért az űrhajóra ható gravitációs erő nem tekinthető állandónak, hanem változik a Föld középpontjától való távolság függvényében. Márpedig a munkát csak akkor számolhatjuk a fenti egyszerű módon, ha az erő állandó. Változó erő munkájáról középiskolában azt tanultuk, hogy az erő-elmozdulás grafikon alatti alakzat területe adja meg az ilyen erő munkáját. Ennek jól ismert esete a rugó nyújtása. Ekkor tudjuk, hogy a rugó nyújtásához szükséges erő egyenesen arányos a rugó megnyúlásával. Ezt írja le az $F_{\text{rugó}} = D \cdot \Delta l$ összefüggés, melyben D a rugóállandó, Δl pedig a rugó megnyúlása. Ha ábrázoljuk az erőt megnyúlás függvényében, akkor egyszerű lineáris függvényt kapunk.



Ha a rugót nyújtatlan állapotból Δl -el megnyújtjuk, akkor a közben végzett munka az ábrán kézzel jelzett alakzat területe. Ez most könnyen meghatározható, hiszen egy derékszögű háromszög területét kell kiszámolni.

$$W = \frac{1}{2} F_{\text{rugó}} \cdot \Delta l = \frac{1}{2} (D \cdot \Delta l) \cdot \Delta l = \frac{1}{2} D \cdot \Delta l^2$$

Az űrhajó esetén azonban a Föld által az űrhajóra kifejtett gravitációs erő nem lineáris a távolság függvényében, hanem a Föld középpontjától mért távolság négyzetével fordítva arányos. A gravitációs erőre az alábbi törvény ismert:

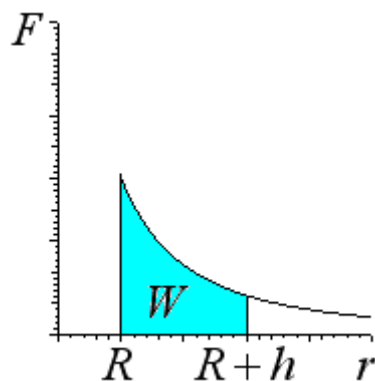
$$F_{\text{grav}} = k \frac{Mm}{r^2}.$$

Ebben k a gravitációs állandó $\left(k = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \right)$, M a Föld tömege $(M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg})$,

m az űrhajó tömege, r az űrhajónak a Föld középpontjától mért távolsága. Most r tölti be a változó szerepét, azaz a gravitációs erő r -nek a függvénye. Jelölésben ezt az alábbi módon fejezhetjük ki:

$$F_{\text{grav}} = F_{\text{grav}}(r) = k \frac{Mm}{r^2}.$$

Ha most ábrázoljuk az erőt a Föld középpontjától mért távolság függvényében, akkor az alábbiakat kapjuk.

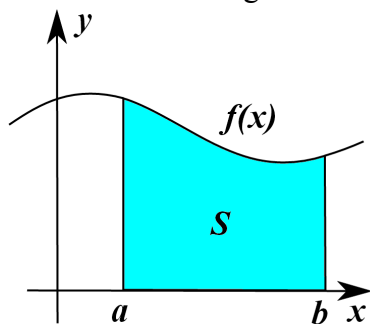


Ezen az ábrán a kézzel jelzett alakzat területe adja meg azt a munkát, ami ahhoz szükséges, hogy az űrhajó a Föld felszínétől h magasságra távolodjon el. Most egy olyan alakzat területét kell meghatároznunk, melyet egyik oldaláról a vízszintes tengely egy szakasza, két másik oldaláról a függőleges tengellyel párhuzamos szakaszok, negyedik oldaláról pedig egy függvény grafikonja határol. Mivel például változó erő munkájának számolásához szükség volt

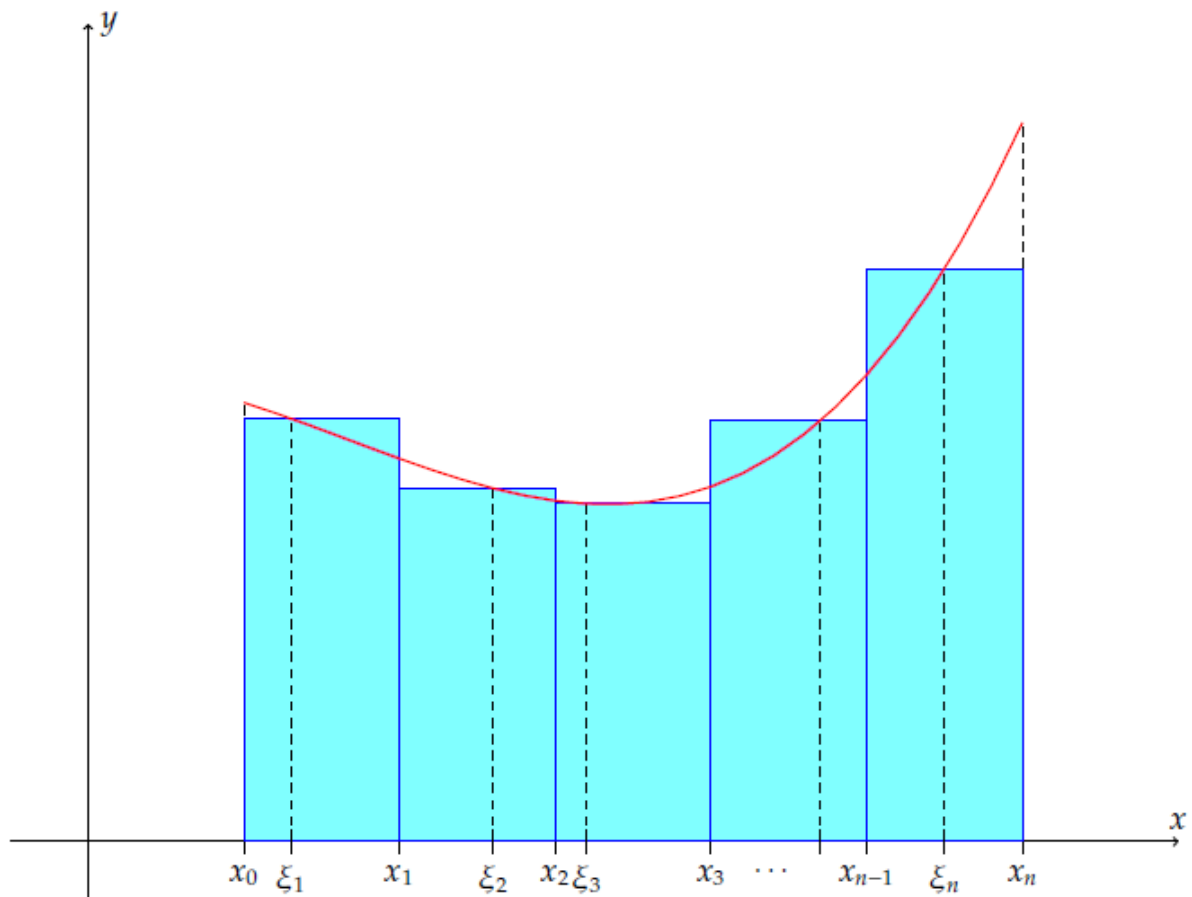
ilyen alakzatok területének meghatározására, ki kellett dolgozni egy módszert, amivel ilyen görbe vonalú alakzatok területe egzakt módon meghatározható. Ez vezetett el a határozott integrál fogalmához, amivel az alábbiakban ismerkedünk meg.

Elméleti összefoglaló:

Induljunk ki tehát abból, hogy adott egy $[a, b]$ -n értelmezett folytonos $f(x)$ függvény, melyre $f(x) > 0$ teljesül az $[a, b]$ -n, és szeretnénk meghatározni az $y = f(x)$, az $y = 0$, az $x = a$ és az $x = b$ görbék által határolt alakzat területét. Ez az alakzat látható az alábbi ábrán.



Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n részre valamilyen $F_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ halmazzal, amelyre $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ teljesül. Ezt az F_n halmazt az $[a, b]$ intervallum egy felosztásának nevezzük. Egy-egy részintervallum hosszát a szomszédos osztópontok különbségeként kaphatjuk meg. Az i -edik részintervallum hossza például $x_i - x_{i-1}$, melyet Δx_i -vel is jelölünk. (A részintervallumok nem feltétlenül egyforma hosszúak.) A felosztás finomságának nevezzük a leghosszabb részintervallum hosszát, azaz $\max \Delta x_i$ -t. Válasszunk ki mindegyik $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumból egy ξ_i számot. Emeljünk mindegyik részintervallum fölé $f(\xi_i)$ magasságú téglalapot.



Ezen téglalapok területének összegével közelítjük a meghatározandó területet. Ezt az összeget az adott felosztáshoz tartozó közelítő összegnek nevezzük, és σ_n -nel jelöljük. Írjuk fel ezt az összeget. Az első téglalap területe: $T_1 = f(\xi_1) \cdot (x_1 - x_0) = f(\xi_1) \cdot \Delta x_1$, a második téglalap

területe $T_2 = f(\xi_2) \cdot (x_2 - x_1) = f(\xi_2) \cdot \Delta x_2$, az i -edik téglalap területe

$T_i = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Ezek alapján a közelítő összeg a következő:

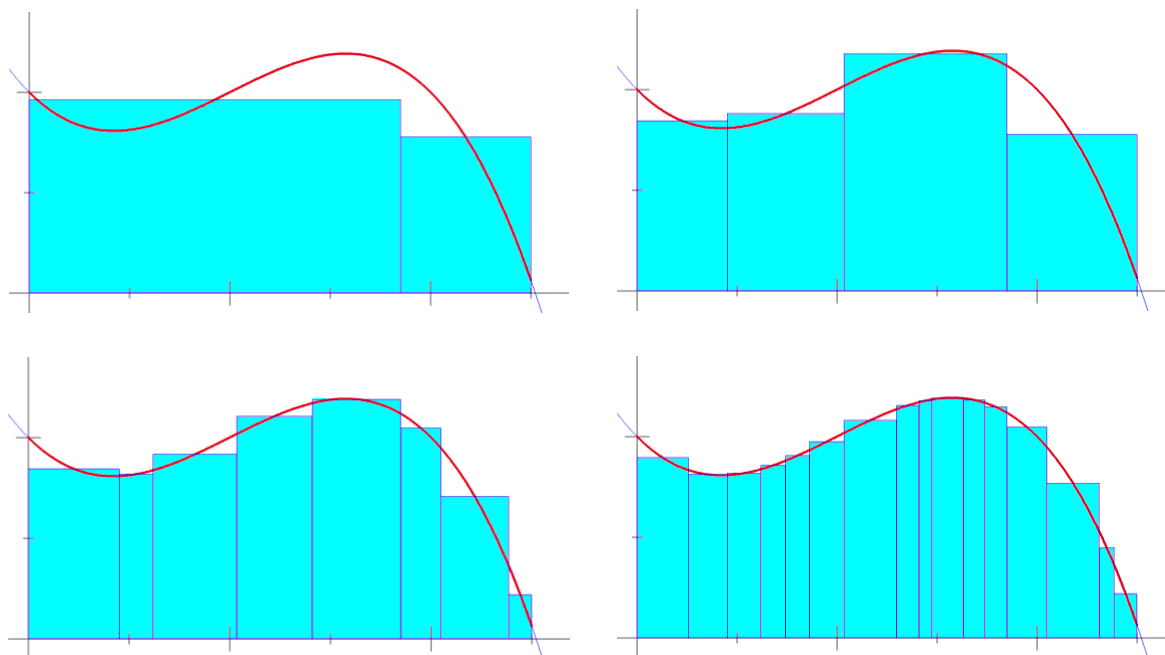
$$\begin{aligned} \sigma_n &= T_1 + T_2 + \dots + T_n = f(\xi_1) \cdot (x_1 - x_0) + f(\xi_2) \cdot (x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) = \\ &= f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n. \end{aligned}$$

Ugyanezt rövidebben is írhatjuk:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Növeljük a felosztásban a részintervallumok számát, így újabb és újabb felosztásokat kapunk. Ha az osztópontok számát minden határon túl növeljük akkor így felosztásoknak egy sorozatát kapjuk. Várhatóan az egyre több osztóponttal rendelkező felosztások egyre pontosabban fogják közelíteni az alakzatot, melynek területét meghatározni szeretnénk. Ez azonban csak akkor lesz igaz, ha a felosztás az osztópontok számának növelésével egyre finomodik is, azaz nem marad benne sehol túl hosszú részintervallum. Ezt fejezzük ki azzal, hogy olyan felosztássorozatot készítünk, amiben a felosztás finomsága nullához tart, azaz $\max \Delta x_i \rightarrow 0$. Nem történhet meg olyan a felosztássorozatban, hogy az $[a, b]$ intervallum egyik részén egyre sűrűsödik a felosztás, de valahol máshol benne marad egy hosszabb

részintervallum. Az ilyen felosztássorozatot végtelenül finomodó felosztássorozatoknak nevezzük. Az alábbi ábrákon ilyen egyre finomodó felosztások láthatók.



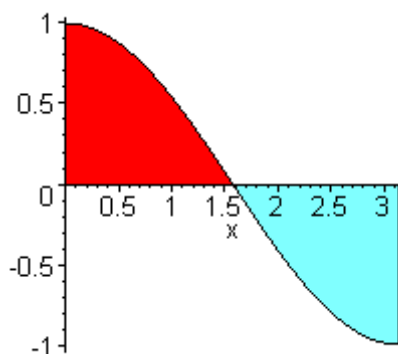
Definíció: Azt mondjuk, hogy az $[a, b]$ -n értelmezett $f(x)$ függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ -n, ha a σ_n közelítő összegek sorozata minden végtelenül finomodó felosztássorozat estén konvergens, és ugyanahhoz a számhoz tart. Ekkor ezt a számot az $f(x)$ függvény

$[a, b]$ -n vett Riemann-integráljának, vagy határozott integráljának nevezzük és $\int_a^b f(x) dx$ -szel jelöljük. Ez rövidebben az alábbi jelölésekkel írható:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Itt kell megjegyeznünk, hogy az egyszerűség kedvéért az elején olyan függvényről beszéltünk, ami az $[a, b]$ -n pozitív értékeket vesz fel. Ekkor a fenti definíció valóban a függvény grafikonja és az x -tengely között elhelyezkedő alakzat területét adja meg az $[a, b]$ -n. Ha azonban a függvény negatív értékeket is felvehet, akkor a téglalapokkal történő közelítésben $f(\xi_i)$ is lehet negatív, így az $f(\xi_i) \Delta x_i$ szorzat az i -edik téglalap területét előjelesen adja meg. Ha $f(\xi_i) > 0$, a közelítésben a téglalap az x -tengely felett helyezkedik el. Ekkor $f(\xi_i) \Delta x_i$ pozitív, tehát valóban a téglalap területét kapjuk. De ha $f(\xi_i) < 0$, a téglalap az x -tengely alatt helyezkedik el. Ekkor $f(\xi_i) \Delta x_i$ negatív, s a téglalap területének -1 -szeresével egyenlő. Ebből következően, az integrál a függvény grafikonja és az x -tengely között elhelyezkedő alakzat területét előjelesen adja meg. Ha a függvény pozitív, azaz grafikonja az x -tengely felett halad, akkor valóban területet kapunk, de ha a függvény negatív, akkor a terület -1 -szeresét kapjuk. Ezért kapjuk azt, hogy ha egy függvény előjele megváltozik az $[a, b]$ belsejében, és a pozitív illetve negatív részen egyenlő nagyságú a

terület a függvény grafikonja és az x -tengely között, akkor nulla a függvény integrálja az $[a, b]$ intervallumon. Erre példa mondjuk az $f(x) = \cos x$ függvény a $[0, \pi]$ -n.



Amint az ábrán látható, a pirossal illetve kékkel jelölt alakzatok szimmetria miatt egyenlő területűek, de míg a piros az x -tengely felett, a kék az x -tengely alatt helyezkedik el. Az integrálás így a piros alakzat területét, a kék alakzat területének pedig -1 -szeresét adja. Így a függvény integrálja a teljes $[0, \pi]$ intervallumon ezek összeg, azaz nulla lesz.

A Riemann-integrál hosszadalmas definíciója után felvetődik az a kérdés, hogy milyen függvények integrálhatóak. Ezzel kapcsolatban két tételt mondunk ki bizonyítás nélkül.

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f(x)$ ezen az intervallumon korlátos. A korlátosság tehát szükséges feltétele az integrálhatóságnak. (Nem minden $[a, b]$ -n korlátos függvény integrálható $[a, b]$ -n.)

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor integrálható is $[a, b]$ -n. A folytonosság tehát elégséges feltétele az integrálhatóságnak. (Nem minden $[a, b]$ -n integrálható függvény folytonos $[a, b]$ -n.)

A határozott integrálra vonatkozóan sok tétel bizonyítható. Ezeket szokták a határozott integrál tulajdonságainak nevezni. Vannak köztük olyanok, melyek hasonlóak, mint a határozatlan integrál tulajdonságai.

Tétel: Ha $f(x)$ és $g(x)$ integrálhatóak az $[a, b]$ -n, k pedig tetszőleges valós szám, akkor a $k \cdot f(x)$, $f(x) + g(x)$ és $f(x) - g(x)$ függvények is integrálhatóak $[a, b]$ -n, és

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Tehát amint a határozatlan integrálnál, úgy a határozott integrálnál is konstans szorzó kiemelhető az integrálból, valamint összeget és különbséget tagonként integrálhatunk. A különbségre vonatkozó állítás a másik kettőből már egyszerűen következik.

A határozott integrálnak vannak olyan tulajdonságai is, amelyekben az integrálási intervallumnak fontos szerepe van. A határozatlan integrálnál ilyen tulajdonságok nyilván nem voltak.

Tétel: Ha $f(x)$ integrálható a -tól b -ig, akkor integrálható b -tól a -ig is, és

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Azaz ha felcseréljük az integrálási határokat, az integrál -1 -szeresét kapjuk.

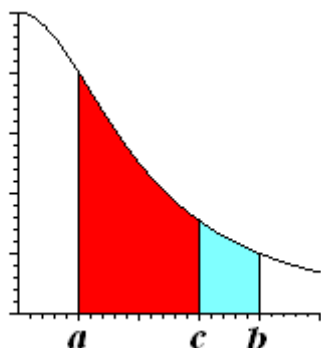
Tétel: Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ -n, akkor integrálható $[a, b]$ bármely részintervallumán is.

Tétel: Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ -n, és $a < c < b$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Ezt fogalmazhatjuk úgy is, hogy az integrálás az $[a, b]$ -n részletekben is végrehajtható.

Pozitív értékű függvény esetén szemléletesen arról van szó, hogy a függvény grafikonja és az x -tengely közti terület az $[a, b]$ -n úgy is meghatározható, hogy vesszük a területet az $[a, c]$ -n, és hozzáadjuk a területet $[c, b]$ -n. (Az $[a, b]$ intervallumon a terület a piros és kék alakzat területének összege.)



Tétel: Ha $f(x)$ integrálható az $[a, c]$ és $[c, b]$ intervallumokon, akkor integrálható az $[a, b]$ intervallumon is, és

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Tétel: Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ -n, és $f(x) \geq 0$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Ha nem negatív függvényt integrálunk, akkor az integrál sem negatív.

Tétel: Ha $f(x)$ és $g(x)$ integrálhatóak az $[a, b]$ -n, valamint $f(x) \geq g(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor

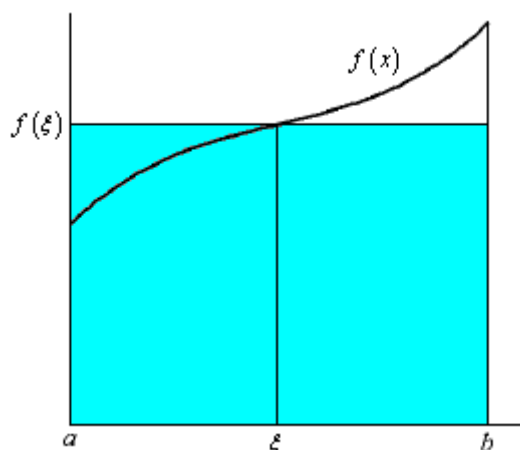
$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Más megfogalmazásban azt mondhatjuk, hogy a nem kisebb értékű függvény integrálja sem kisebb.

Tétel: (Az integrálszámítás középértéktétele) Ha $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ -n, akkor létezik legalább egy $\xi \in [a, b]$, melyre igaz, hogy

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$

Pozitív értékű függvény esetén szemléletes arról van szó, hogy az $f(x)$ függvény grafikonját tudjuk metszeni olyan vízszintes egyenessel, ami alatt az $[a, b]$ -n pontosan akkora területű téglalap van, mint a függvény és az x -tengely közti alakzat területe az $[a, b]$ -n. Az ábrán kékkel jelölt téglalap területe $f(\xi) \cdot (b - a)$, mely megegyezik a függvény grafikonja és az x -tengely közti területtel.



Tétel: (Newton-Leibniz-formula) Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ -n, és $F(x)$ egy tetszőleges primitív függvénye $f(x)$ -nek, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

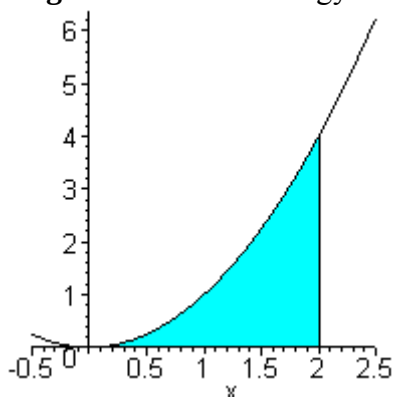
Az $F(b) - F(a)$ különbség rövidebb írására gyakran használatos az $[F(x)]_a^b$ jelölés.

Ezt a tételt gyakran nevezik az integrálszámítás alaptételének is, mert a határozott integrál és a primitív függvény közötti kapcsolatot mondja ki. Ezzel lehetővé teszi számunkra a határozott integrál pontos kiszámolását olyan esetekben, amikor a definíció alapján ezt nem tudnánk elvégezni. Márpedig a definíció alapján csak nagyon kevés esetben számolható ki pontosan a határozott integrál, s általában akkor is nagyon nehézkes.

Kidolgozott feladatok:

8. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja és az x -tengely közötti alakzat területét a $[0, 2]$ intervallumon.

Megoldás: Készítsünk egy ábrát az alakzatról.



Amint látható, egy olyan háromszöghöz hasonló alakzat területe a kérdés, amit felülről az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja, azaz egy parabola határol. Mivel a függvény a $[0, 2]$ intervallumon nem vesz fel negatív értéket, így a területet megkapjuk, ha a függvényt integráljuk ezen az intervallumon.

$$T = \int_0^2 x^2 dx$$

Meg kell határoznunk $f(x)$ egy primitív függvényét, így először határozatlanul integrálunk. Hatványt integrálunk, tehát eggyel növeljük a kitevőt, és osztunk az új kitevővel.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

Mivel csak egy primitív függvényre van szükségünk, így c -t tetszőlegesen megválaszthatjuk. Legegyszerűbb a $c = 0$ választás. Így kapjuk, hogy $f(x) = x^2$ egy primitív függvénye

$$F(x) = \frac{x^3}{3}.$$

Ezután helyettesítünk a Newton-Leibniz-formulába.

$$T = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

A kért terület tehát $\frac{8}{3}$ egységnyi.

A későbbiekben az ehhez hasonló feladatok megoldását rövidebben írjuk majd. A primitív függvényt nem határozzuk meg külön, hanem a határozott integrál után egyből írjuk a primitív függvényt $[]$ -ben, feltüntetve a zárójel után az integrálási határokat. Így a megoldás lényegében csak az utolsó sorból áll majd. Ha a primitív függvény meghatározása nem ilyen egyszerű mint most, akkor célszerű lehet külön elvégezni a határozatlan integrálást, és utána visszatérni a határozott integrálhoz.

9. feladat: Határozzuk meg az $\int_1^4 x\sqrt{x} dx$ határozott integrált!

Megoldás: A megoldás során először primitív függvényt kell keresnünk, amihez alakítsuk át az integrandust úgy, hogy egyetlen hatványt kapjunk.

$$\int_1^4 x\sqrt{x} \, dx = \int_1^4 x \cdot x^{\frac{1}{2}} \, dx = \int_1^4 x^{1+\frac{1}{2}} \, dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} \, dx$$

Adjuk meg a primitív függvényt, hivatkozva a hatványok alapintegráljára, azaz növeljük eggyel a kitevőt, és osztunk az új kitevővel. A primitív függvényt tegyük a $\left[\right]$ -be, és tüntessük fel mögötte az integrálási határokat. A primitív függvényt írjuk minél egyszerűbb alakban.

$$\int_1^4 x\sqrt{x} \, dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} \, dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^4 = \left[\frac{2}{5} \sqrt{x^5} \right]_1^4$$

Helyettesítsük be a primitív függvénybe a felső integrálási határt, majd vonjuk ki belőle az alsó határ helyettesítési értékét, és végezzük el a műveleteket.

$$\int_1^4 x\sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{5} \sqrt{x^5} \right]_1^4 = \frac{2}{5} \sqrt{4^5} - \frac{2}{5} \sqrt{1^5} = \frac{2}{5} \cdot 32 - \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{62}{5} = 12.4$$

10. feladat: $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx$

Megoldás: Járjunk el úgy mint az előző feladatban, azaz írjuk hatványként az integrálandó függvényt.

$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}} \, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt, s hozzuk minél egyszerűbb alakra.

$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}} \, dx = \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_1^8 = \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right]_1^8$$

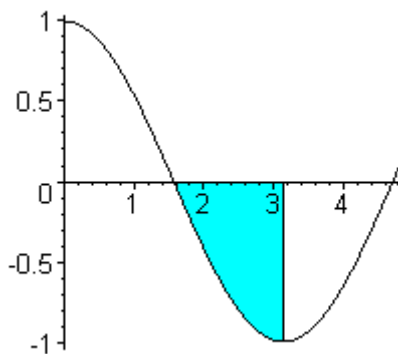
Helyettesítsük be az integrálási határokat, és vegyük a két helyettesítési érték különbségét. A felső határ helyettesítési értékéből vonjuk az alsó határ helyettesítési értékét. A műveleteket ezután végezzük el.

$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right]_1^8 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{8^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{1^2} = \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{9}{2} = 4.5$$

Ha a primitív függvényben szerepel valamilyen konstans szorzó, mint jelen esetben a $\frac{3}{2}$, akkor azt határok behelyettesítéskor rögtön kiemelhetjük, így nem kell kétszer leírunk.

11. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \cos x$ függvény grafikonja és az x -tengely közötti alakzat területét a $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ intervallumon.

Megoldás: Készítsünk ábrát a függvényről és a kérdéses alakzatról.



Amint látható, a függvény a megadott intervallumon negatív értékeket és a 0-t veszi fel, így az alakzat területe a függvény integráljának -1 -szerese lesz. Persze ezt úgy is mondhatnánk, hogy az integrál abszolút értéke lesz a terület.

$$T = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx \right| = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

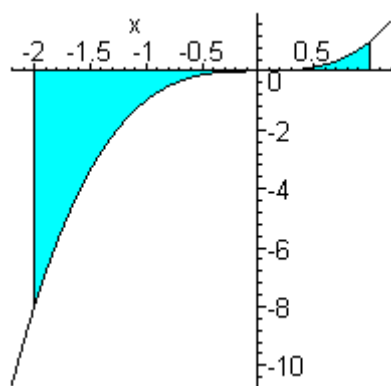
Helyettesítsük a felső integrálási határt, majd vonjuk ki belőle az alsó határ helyettesítési értékét, és végezzük el a műveleteket.

$$T = - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = - \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) = -(0 - 1) = 1$$

A kért terület tehát pontosan 1 egységnyi.

12. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^3$ függvény grafikonja és az x -tengely közötti alakzat területét a $[-2, 1]$ intervallumon.

Megoldás: Most is egy ábrával célszerű kezdenünk a megoldást.



Amint látható, a függvénynek az $x = 0$ -nál zérushelye van, s a $[-2, 0)$ intervallumon negatív, a $(0, 1]$ pedig pozitív. A területet így két részletben kell számolnunk. Integráljuk egyrészt a

függvényt a $[-2, 0]$ intervallumon, és ennek az integrálnak vesszük az abszolút értékét, mert itt a függvény negatív vagy 0. Ezzel megkapjuk a függvény és az x -tengely közti területet $[-2, 0]$ intervallumon. Valamint vesszük a függvény integrálját a $[0, 1]$ intervallumon, ami megegyezik itt a függvény és az x -tengely közti területtel, mert a függvény itt pozitív vagy 0. A teljes területet pedig a két terület összegeként kapjuk.

$$T = \left| \int_{-2}^0 x^3 dx \right| + \int_0^1 x^3 dx = - \int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = - \int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = - \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

Mindkét esetben helyettesítsük az integrálási határokat, és felső határ helyettesítési értékéből vonjuk ki az alsó határ helyettesítési értékét. A számolásokat ezután végezzük el.

$$T = - \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} \right) + \left(\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) = -(0 - 4) + \left(\frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{17}{4} = 4.25$$

A kért terület tehát 4.25 egység.

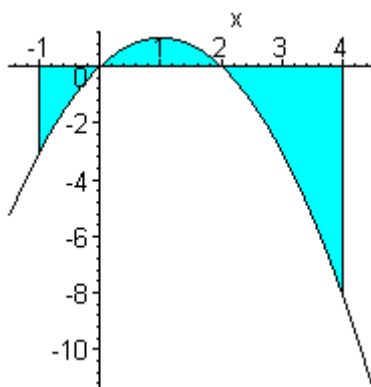
13. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 2x - x^2$ függvény grafikonja és az x -tengely közötti alakzat területét a $[-1, 4]$ intervallumon.

Megoldás: Most is célszerű ábrázolni a függvény adott intervallumba eső részét. Mivel másodfokú függvényt kell ábrázolnunk, célszerű meghatározni a zérushelyeket. Emeljünk ki x -et, mert így azt kell vizsgálnunk, hogy egy szorzat mikor egyenlő nullával.

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{vagy} \\ 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

A zérushelyek tehát $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$. Ezek ismeretében már könnyen ábrázolható a parabola.

Mivel x^2 együtthatója negatív, ezért konkáv parabolát kell rajzolnunk.



A kérdéses alakzat most három részből áll, mivel a függvény két helyen is metszi az x -tengelyt az adott intervallumon belül. Az első rész a $[-1, 0]$ intervallumhoz tartozó rész, a második a $[0, 2]$ intervallumhoz tartozó rész, s a harmadik a $[2, 4]$ intervallumhoz tartozó

rész. Mivel az első és a harmadik részen a függvény nem pozitív, így a terület meghatározásához ezeken a részekben a függvény integráljának abszolút értékét kell venni.

$$T = \left| \int_{-1}^0 2x - x^2 dx \right| + \int_0^2 2x - x^2 dx + \left| \int_2^4 2x - x^2 dx \right| = - \int_{-1}^0 2x - x^2 dx + \int_0^2 2x - x^2 dx - \int_2^4 2x - x^2 dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = - \int_{-1}^0 2x - x^2 dx + \int_0^2 2x - x^2 dx - \int_2^4 2x - x^2 dx = - \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 - \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_2^4$$

Helyettesítsük mindhárom esetben az integrálási határokat a Newton-Leibniz-formulának megfelelően, majd hajtsuk végre a műveleteket.

$$\begin{aligned} T &= - \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 - \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \\ &= - \left(\left(0^2 - \frac{0^3}{3} \right) - \left((-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) + \left(\left(2^2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(0^2 - \frac{0^3}{3} \right) \right) - \left(\left(4^2 - \frac{4^3}{3} \right) - \left(2^2 - \frac{2^3}{3} \right) \right) = \\ &= - \left(0 - \left(1 + \frac{1}{3} \right) \right) + \left(\left(4 - \frac{8}{3} \right) - 0 \right) - \left(\left(16 - \frac{64}{3} \right) - \left(4 - \frac{8}{3} \right) \right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \left(-\frac{16}{3} - \frac{4}{3} \right) = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

Amint látható, minél több helyen metszi a függvény grafikonja az adott intervallumon belül a x -tengelyt, annál több részben kell számolnunk a területet. Mindig figyeljünk oda arra, hogy mely részintervallumokon halad a függvény grafikonja a x -tengely alatt. Ezeken a részekben az integrál abszolút értékét kell vennünk, azaz szorozni kell az integrált -1 -gyel.

Ezek után térjünk vissza ahhoz a motivációs példához, ami a határozott integrál bevezetése előtt szerepelt.

14. feladat: Mennyi munkát kell végeznünk ahhoz, hogy egy m tömegű űrhajót h távolságra juttassunk a Föld felszínétől?

Megoldás: Amint az korábban szerepelt, az űrhajóra a Föld által kifejtett gravitációs erő hat,

amit $F_{grav} = F_{grav}(r) = k \frac{Mm}{r^2}$ összefüggéssel írhatunk le a Föld középpontjától mért távolság

függvényében. A munka az $F_{grav}(r)$ függvény grafikonja alatti terület az $[R, R+h]$

intervallumon. Amint az egy korábbi ábrán látható volt, a függvény pozitív értékeket vesz fel, így a terület a függvény ezen intervallumon vett integráljával egyenlő. A változó szerepét most r tölti be, így r szerint integrálunk.

$$W = \int_R^{R+h} k \frac{Mm}{r^2} dr$$

Mivel k , M , m konstansok, így kiemelhetők az integrálból.

$$W = kMm \int_R^{R+h} \frac{1}{r^2} dr$$

Az integrandust ezután írjuk negatív kitevős hatvány formájában. Így már könnyen meghatározható a primitív függvény, amit hozzunk minél egyszerűbb alakra.

$$W = kMm \int_R^{R+h} r^{-2} dr = kMm \left[\frac{r^{-1}}{-1} \right]_R^{R+h} = kMm \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{R+h}$$

Helyettesítsük be ezután az integrálási határokat, s vegyük a két helyettesítési érték különbségét.

$$W = kMm \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{R+h} = kMm \left(-\frac{1}{R+h} - \left(-\frac{1}{R} \right) \right) = kMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$$

Ezzel olyan összefüggést kaptunk a munkára, amibe csak az űrhajó tömegét és a felszíntől való eltávolodását kell behelyettesíteni. Ha ezeket az adatokat ismerjük, a munka pontosan kiszámolható.

Ellenőrző kérdések:

7. kérdés: Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény grafikonja és az x -tengely közötti alakzat területét a $[0, 8]$ intervallumon.

- 9
- 10
- 12 (X)
- 15

8. kérdés: $\int_1^{16} x \sqrt[4]{x} dx$

- $\frac{1972}{9}$
- $\frac{2044}{9}$ (X)
- $\frac{2096}{9}$
- $\frac{2110}{9}$

9. kérdés: $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

- 3
- $\frac{10}{3}$
- 4 (X)
- $\frac{13}{3}$

10. kérdés: Határozzuk meg az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonja és az x -tengely közötti alakzat területét a $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon.

$$\frac{1}{2} \quad (\text{X})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

11. kérdés: Határozzuk meg az $f(x) = 4 - x^2$ függvény grafikonja és az x -tengely közötti alakzat területét a $[0, 3]$ intervallumon.

$$3$$

$$\frac{14}{3}$$

$$6$$

$$\frac{23}{3} \quad (\text{X})$$

12. kérdés: Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + 3x$ függvény grafikonja és az x -tengely közötti alakzat területét a $[-5, 1]$ intervallumon.

$$6$$

$$8 \quad (\text{X})$$

$$12$$

$$15$$

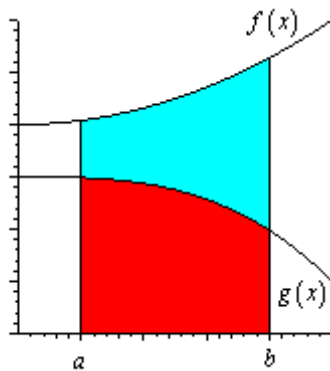
Elméleti összefoglaló: A határozott integrál nem csak olyan alakzatok területének meghatározását teszi lehetővé, melyek egy függvény grafikonja és az x -tengely között helyezkednek el, hanem más görbékkel határolt alakzatokét is. Ha például a folytonos $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjai nem metszik egymást az $[a, b]$ intervallum belsejében, akkor a függvények grafikonjai, valamint az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt síkrész területe, vagy máképp fogalmazva a függvények grafikonjai közti terület az $[a, b]$ intervallumon a következő:

$$T = \left| \int_a^b f(x) - g(x) dx \right|.$$

Ha tudjuk, hogy az $[a, b]$ -n $f(x) \geq g(x)$, akkor az abszolút érték elhagyható, hiszen

$f(x) - g(x)$ nem negatív értékű függvény az $[a, b]$ -n. Az állítás helyességét az egyszerűség

kedvéért $f(x)$ és $g(x)$ $[a, b]$ -n pozitív függvények esetén az alábbi ábra segítségével láthatjuk be.



Ezen látható, hogy az $\int_a^b f(x) dx$ megadja a pirossal és kékkel jelölt alakzatok területének

összeget, az $\int_a^b g(x) dx$ pedig csak a piros alakzat területét. A kékkel jelölt síkrész területe így

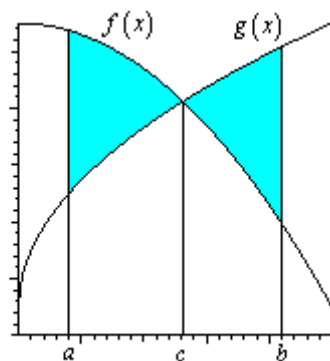
a kettő különbsége, tehát: $T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$. A határozott integrál tulajdonságai

között szerepelt, hogy azonos intervallumon vett integrálok különbsége megegyezik a függvények különbségének integráljával, azaz:

$$T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

Két függvény grafikonja közti területet tehát úgy kapjuk, hogy a nem kisebb függvényből kivonjuk a nem nagyobbbat, s különbséget integráljuk.

Ha a két függvény grafikonja metszi egymást az $[a, b]$ intervallum belsejében, akkor a grafikonok közti területet részletekben számolhatjuk. Az alábbi ábrán látható, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjai metszik egymást a c helyen.



Az $[a, c]$ intervallumon $f(x) \geq g(x)$, így ezen a részintervallumon $f(x) - g(x)$ -et integráljuk, míg a $[c, b]$ intervallumon $g(x) \geq f(x)$, így ezen a részintervallumon $g(x) - f(x)$ -et integráljuk. A terület tehát a következő:

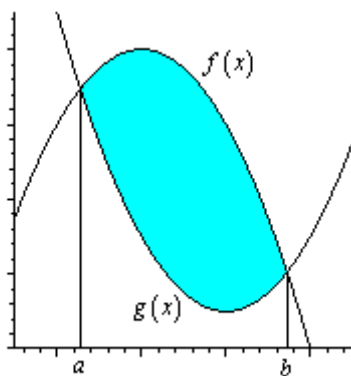
$$T = \int_a^c f(x) - g(x) dx + \int_c^b g(x) - f(x) dx.$$

Amennyiben nem szeretnénk vizsgálni, hogy az egyes részekben melyik függvény vesz fel nagyobb értékeket, akkor megtehetjük azt is, hogy tetszőlegesen vesszük a két függvény különbségét, azt integráljuk az egyes részekben, s az integráloknak vesszük az abszolút értékét. Ezt az alábbi módon írhatjuk.

$$T = \left| \int_a^c f(x) - g(x) dx \right| + \left| \int_c^b f(x) - g(x) dx \right|$$

Ha a függvények grafikonjai nem csak egy helyen metszik egymást, akkor természetesen több részletben kell számolnunk.

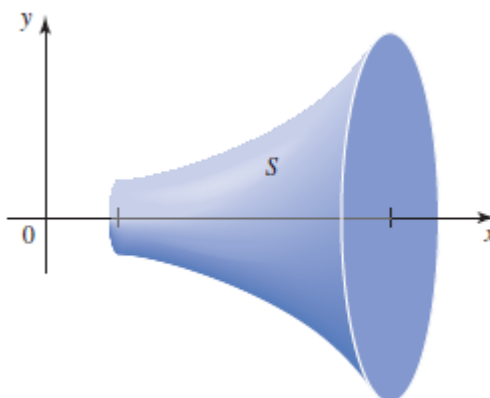
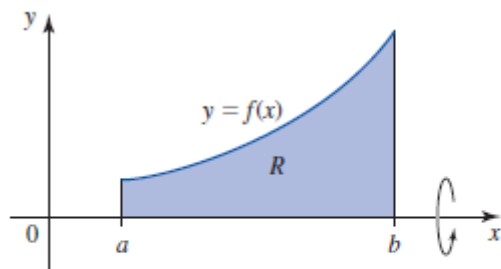
Lényegében ugyanígy járhatunk el, ha két függvény grafikonja által közrezárt síkrész területe a kérdés. Az ilyen alakzat a grafikonok metszéspontjai között helyezkedik el, amint az alábbi ábrán látható.



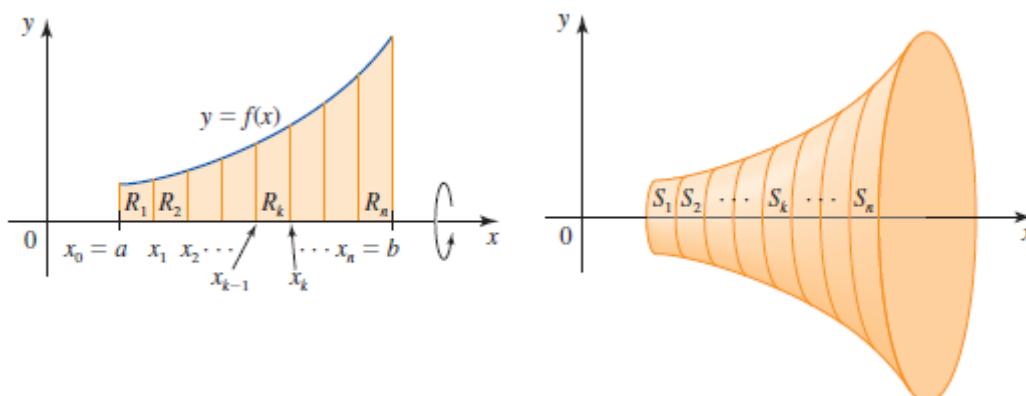
Ilyenkor először meg kell oldanunk az $f(x) = g(x)$ egyenletet. Ezzel kapjuk meg a metszéspontok helyét, azaz a -t és b -t. Ezek után az $[a, b]$ -n nem kisebb függvényből kivonjuk a nem nagyobbat, s különbséget integráljuk $[a, b]$ -n.

A görbe vonallal határolt alakzatok területének számolása a határozott integrál legkézenfekvőbb alkalmazása. De a határozott integrál nem csak erre jó. Az alábbiakban a forgástestek térfogatának meghatározására ismerünk meg egy alkalmazást.

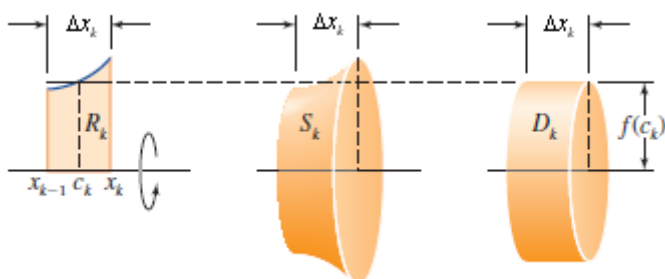
Tekintsük az $[a, b]$ intervallumon nem negatív, folytonos $f(x)$ függvényt. Az $f(x)$ grafikonja, az x -tengely, az $x=a$ és $x=b$ egyenes által határolt alakzatot forgassuk meg az x -tengely körül, így egy forgástestet kapunk. Ez látható az alábbi ábrákon.



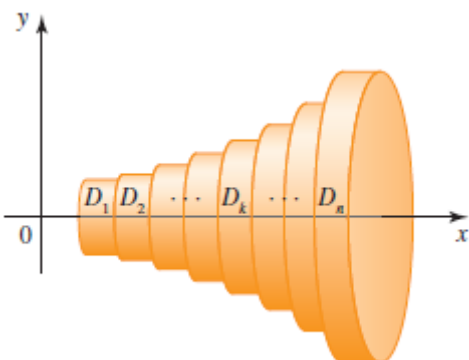
Határozzuk meg ennek a forgástestnek a térfogatát. Használjuk ehhez azt az eljárást, amit a terület meghatározásakor alkalmaztunk. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n részre. Az intervallum felosztása a forgástestet vékony rétegekre bontja.



A vékony rétegekben határozzuk meg közelítőleg a térfogatot úgy, hogy lapos hengerrel közelítünk. Tekintsük a k -adik részintervallumot, melynek szélessége Δx_k . Válasszunk a részintervallumból egy számot, legyen ez c_k . Hanyagoljuk el a függvény változását a részintervallumon, és tekintsük úgy, mintha az egész részen az $f(c_k)$ értéket venné fel a függvény. A forgatás során így az ívelt oldalú rétegből egy lapos henger lesz, melynek sugara $f(c_k)$ -val egyenlő, magassága pedig Δx_k . Ez látható az alábbi ábrán.



Hajtsuk végre ezt a közelítést minden részintervallumon, így a forgástestet egymás melletti lapos hengerek sokaságával közelítjük.



Írjuk fel, hogyan számolható ki egy ilyen lapos henger térfogata. Mivel a k -adik henger sugara $f(c_k)$, magassága pedig Δx_k a térfogata az alábbi:

$$V_k = \pi f^2(c_k) \Delta x_k.$$

Összegezzük ezután a hengerek térfogatát, ezzel egy közelítést kapunk a forgástest térfogatára.

$$V \approx \sum_{k=1}^n V_k = \sum_{k=1}^n \pi f^2(c_k) \Delta x_k$$

Ebben az összegben felismerhető, hogy a $\pi f^2(x)$ függvény integrálközelítő összege.

A közelítés nyilván annál pontosabb lesz, minél laposabbak a hengerek. Növeljük ezért az osztópontok számát, s vegyük a fenti összeg határértékét $n \rightarrow \infty$ esetén, miközben a felosztás finomsága egyre kisebb lesz, azaz $\max \Delta x_k \rightarrow 0$. Ha létezik a határérték, megkapjuk a pontosan a test térfogatát. A közelítő összeg határértéke pedig nem más, mint a $\pi f^2(x)$ függvény határozott integrálja az $[a, b]$ intervallumon.

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n V_k = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \pi f^2(c_k) \Delta x_k = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

A konstans π kiemelhető az integrálból, s így a forgástest térfogatára az alábbi összefüggést kapjuk:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Ezzel olyan képlethez jutottunk, amibe egy konkrét feladat esetén csak be kell helyettesítenünk az adott függvényt és az intervallum határait, majd végre kell hajtunk az integrálást.

A fenti eljárás segítségével sok más dologra lehet olyan képletet levezetni, amiben integrál szerepel. Ilyenek például a görbe ívhossza, forgástest palástjának felszíne, kiterjedt test tömegközéppontja és tehetetlenségi nyomatéka.

Kidolgozott feladatok:

15. feladat: Mekkora az $f(x) = 4x - x^2 + 1$ és $g(x) = \frac{1}{x}$ függvények grafikonjai közötti terület az $[1, 4]$ intervallumon.

Megoldás: Készítsünk egy ábrát a két függvényről a megadott intervallumon. Ha kiszámoljuk a két függvény értékét az intervallum végpontjaiban, akkor a görbék jelleg alapján könnyű elkészíteni az ábrát.

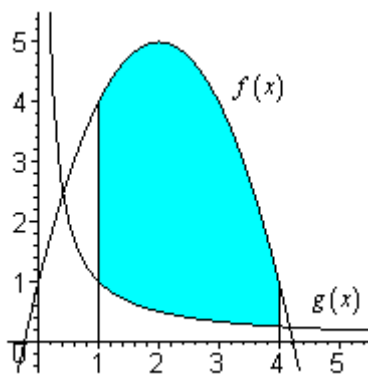
$$f(1) = 4 \cdot 1 - 1^2 + 1 = 4$$

$$f(4) = 4 \cdot 4 - 4^2 + 1 = 1$$

$$g(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$g(4) = \frac{1}{4}$$

Az $f(x)$ grafikonja egy konkáv parabola, $g(x)$ grafikonja pedig hiperbola. Illesszünk ilyen görbéket a meghatározott pontokra.



Amint látható, a megadott intervallumon belül nem metszi egymást a két függvény. Így egyszerűen vennünk kell a két függvény különbségét, s azt kell integrálnunk a megadott intervallumon. Mivel tudjuk, hogy az adott intervallumban $f(x) > g(x)$, így ha az $f(x) - g(x)$ különbséget vesszük, akkor nincs szükség abszolút értékre.

$$T = \int_1^4 \left(4x - x^2 + 1 \right) - \frac{1}{x} dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = \int_1^4 \left(4x - x^2 + 1 \right) - \frac{1}{x} dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} + x - \ln x \right]_1^4$$

Helyettesítsük be az integrálási határokat, és vegyük a helyettesítési értékek különbségét, és végezzük el a műveleteket.

$$\begin{aligned} T &= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} + x - \ln x \right]_1^4 = \left(2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} + 4 - \ln 4 \right) - \left(2 \cdot 1^2 - \frac{1^3}{3} + 1 - \ln 1 \right) = \\ &= \left(32 - \frac{64}{3} + 4 - \ln 4 \right) - \left(2 - \frac{1}{3} + 1 - 0 \right) = 12 - \ln 4 \approx 10.61 \end{aligned}$$

A kérdéses terület tehát közelítőleg 10.61 egység.

16. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = e^x$ és $g(x) = x^2 - 2x + 1$ függvények grafikonjai közti területet a $[-1, 1]$ intervallumon.

Megoldás: Készítsünk most is ábrát a két függvényről. Célszerű most is meghatározni a függvények értékét a megadott intervallum végpontjaiban.

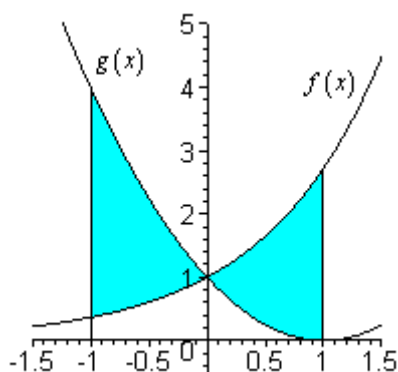
$$f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.37$$

$$f(1) = e^1 = e \approx 2.72$$

$$g(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 4$$

$$g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$$

Az $f(x)$ exponenciális függvény, $g(x)$ pedig másodfokú tehát parabola. A görbék jellege alapján így már könnyű ábrázolni a függvényeket.



Az ábráról úgy látszik, a két grafikon $x=0$ -nál metszi egymást. Ezt a függvényekbe helyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük.

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$g(0) = 0^2 - 0 \cdot 1 + 1 = 1$$

Mindkét függvény 1-et vesz fel, tehát az $x=0$ helyen valóban metszik egymást. Más metszéspont nincs.

A kért területet a metszéspont miatt most két részletben integrálva tudjuk meghatározni. Az első részen -1 és 0 között $g(x) > f(x)$, így itt a $g(x) - f(x)$ függvényt integráljuk, a második részen 0 és 1 között $f(x) > g(x)$, ezért itt az $f(x) - g(x)$ függvényt integráljuk, majd a két integrált összeadjuk. Így nem szükséges az abszolút értékét venni egyik integrálnak sem.

$$T = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x + 1) - e^x dx + \int_0^1 e^x - (x^2 - 2x + 1) dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényeket.

$$T = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) - e^x \right]_{-1}^0 + \left[e^x - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \right]_0^1$$

Helyettesítsük a Newton-Leibniz-formulának megfelelően az integrálási határokat, és hajtsuk végre a műveleteket.

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{0^3}{3} - 0^2 + 0 - e^0 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 + (-1) - e^{-1} \right) + \left(e^1 - \frac{1^3}{3} + 1^2 - 1 \right) - \left(e^0 - \frac{0^3}{3} + 0^2 - 0 \right) = \\ &= (-1) - \left(-\frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{e} \right) + \left(e - \frac{1}{3} \right) - (1) = e + \frac{1}{e} \approx 3.09 \end{aligned}$$

A kérdéses terület tehát közelítőleg 3.09 egység.

17. feladat: Mekkora területű síkrészt zárnak közre az $f(x) = x^2 - 1$ és $g(x) = 1 - x$ függvények grafikonjai?

Megoldás: Mivel két görbe által közrezárt síkrész területe a kérdés, ezért meg kell határoznunk a metszéspontjaikat. Oldjuk meg tehát az $f(x) = g(x)$ egyenletet.

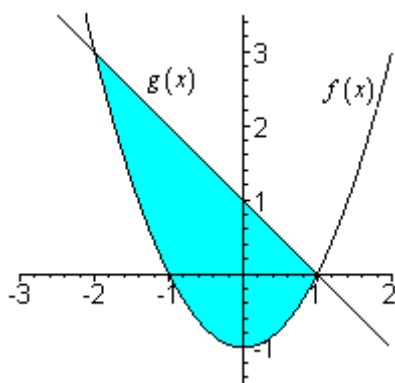
$$x^2 - 1 = 1 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

A kért területet ezután úgy kaphatjuk, hogy a két függvény különbségét integráljuk a két metszéspont között, azaz a $[-2,1]$ intervallumon, s vesszük az integrál abszolút értékét. Ha azonban el tudjuk dönteni, melyik függvény nagyobb az intervallum belsejében, és a nagyobb értékű függvényből vonjuk ki a kisebb értékűt, akkor nincs szükség az abszolút értékre. Ha készítünk egy ábrát, akkor arról ezt le tudjuk majd olvasni. Az intervallum végpontjaiban a két függvény most ugyanazon értékeket veszi fel. Mivel $g(x)$ az egyszerűbb, így ebbe célszerű helyettesíteni.

$$f(-2) = g(-2) = 1 - (-2) = 3$$

$$f(1) = g(1) = 1 - 1 = 0$$

Az $f(x)$ másodfokú függvény, grafikonja konvex parabola, $g(x)$ elsőfokú, grafikonja egyenes. Ezek után már könnyű egy jó ábrát készíteni.



A $[-2,1]$ intervallum belsejében láthatóan $g(x) > f(x)$, ezért a $g(x) - f(x)$ függvényt integráljuk, s így nem lesz szükség abszolút értékre.

$$T = \int_{-2}^1 (1-x) - (x^2 - 1) dx = \int_{-2}^1 2 - x - x^2 dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = \int_{-2}^1 2 - x - x^2 dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1$$

Helyettesítsük a határokat, és vegyük a helyettesítési értékek különbségét, és végezzük el a műveleteket.

$$\begin{aligned} T &= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 = \left(2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left(2 \cdot (-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right) = \\ &= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = 4.5 \end{aligned}$$

A két grafikon által közrezárt terület tehát 4.5 egység.

18. feladat: Forgassuk meg az x -tengely körül az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény $[0,8]$

intervallumhoz tartozó íve és az x -tengely közötti síkrészt, és határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát.

Megoldás: A megadott függvényt és intervallumot helyettesítsük be a forgástest térfogatának képletébe, amit az elméleti összefoglalóban ismertünk meg.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^8 (\sqrt[3]{x})^2 dx$$

Alakítsuk át az integrandust egyetlen hatvánnyá, majd határozzuk meg a primitív függvényt.

$$V = \pi \int_0^8 (\sqrt[3]{x})^2 dx = \pi \int_0^8 \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 dx = \pi \int_0^8 x^{\frac{2}{3}} dx = \pi \left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_0^8 = \frac{3}{5} \pi \left[\sqrt[3]{x^5} \right]_0^8$$

Helyettesítsük a felső határt, és vonjuk ki belőle az alsó határ helyettesítési értékét. Azután végezzük el a műveleteket.

$$V = \frac{3}{5} \pi \left[\sqrt[3]{x^5} \right]_0^8 = \frac{3}{5} \pi \left(\sqrt[3]{8^5} - \sqrt[3]{0^5} \right) = \frac{3}{5} \pi (32 - 0) = \frac{96}{5} \pi \approx 60.32$$

A keletkező forgástest térfogata tehát közelítőleg 60.32 egység.

19. feladat: Forgassuk meg az x -tengely körül az $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ függvény $[1, 5]$

intervallumhoz tartozó íve és az x -tengely közötti síkrészt, és határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát.

Megoldás: Mint az előző feladatban, most is behelyettesítünk a forgástest térfogatának képletébe.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_1^5 \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x} \right)^2 dx$$

Végezzük el a négyzetre emelést.

$$V = \pi \int_1^5 \frac{x+1}{x^2} dx$$

Bontsuk fel a törtet két tört összegére, és végezzük el külön-külön az osztást.

$$V = \pi \int_1^5 \frac{x+1}{x^2} dx = \pi \int_1^5 \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} dx = \pi \int_1^5 \frac{1}{x} + x^{-2} dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$V = \pi \int_1^5 \frac{1}{x} + x^{-2} dx = \pi \left[\ln x + \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^5 = \pi \left[\ln x - \frac{1}{x} \right]_1^5$$

Helyettesítsük az integrálási határokat a Newton-Leibniz-formula szerint, és végezzük el a műveleteket.

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\ln x - \frac{1}{x} \right]_1^5 = \pi \left(\left(\ln 5 - \frac{1}{5} \right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{1} \right) \right) = \pi \left(\left(\ln 5 - \frac{1}{5} \right) - (0 - 1) \right) = \\ &= \pi \left(\ln 5 + \frac{4}{5} \right) \approx 7.57 \end{aligned}$$

A forgástest térfogata közelítőleg 7.57 egység.

Ellenőrző kérdések:

13. kérdés: Mekkora az $f(x) = e^x$ és $g(x) = 2x - x^2 + 2$ függvények grafikonjai közti alakzat területe a $[0,1]$ intervallumon?

$$\frac{5}{3} - e$$

$$\frac{5}{3} + e$$

$$\frac{11}{3} - e \text{ (X)}$$

$$\frac{11}{3} + e$$

14. kérdés: Mekkora az $f(x) = x^2$ és $g(x) = 2 - x$ függvények grafikonjai közötti síkrész területe a $[0,2]$ intervallumon?

$$\frac{8}{3}$$

$$3 \text{ (X)}$$

$$\frac{19}{6}$$

$$\frac{10}{3}$$

15. kérdés: Mekkora területű síkrészt zárnak közre az $f(x) = x^2$ és $g(x) = 3x$ függvények grafikonjai?

$$3$$

$$3.5$$

$$4$$

$$4.5 \text{ (X)}$$

16. kérdés: Forgassuk meg az x -tengely körül az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény $[1,4]$ intervallumhoz tartozó íve és az x -tengely közötti síkrészt. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

$$\frac{1}{4}\pi$$

$$\frac{1}{2}\pi$$

$$\frac{3}{4}\pi \text{ (X)}$$

$$\frac{3}{2}\pi$$

17. kérdés: Forgassuk meg az x -tengely körül az $f(x) = x\sqrt{x-1}$ függvény $[1, 2]$ intervallumhoz tartozó íve és az x -tengely közötti síkrészt. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

$$\frac{7}{6}\pi$$

$$\frac{5}{4}\pi$$

$$\frac{4}{3}\pi$$

$$\frac{17}{12}\pi \quad (\text{X})$$

További kidolgozott feladatok:

20. feladat: $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$

Megoldás: Egy csúnya törtet kellene integrálnunk, és a törtek integrálásra nincs általános integrálási szabály. Ezért át kell alakítanunk valahogy az integrandust. Középiskolából ismert a $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ azonosság. Használjuk fel elsőként ezt.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx$$

A számlálóban felismerhetjük, hogy egy $a^2 - b^2$ típusú kifejezés, amiben a szerepét most $\cos x$, b szerepét pedig $\sin x$ tölti be. Mivel $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, a számlálót szorzattá tudjuk alakítani.

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} dx$$

Ezek után pedig egyszerűsíthetjük a törtet $\cos x - \sin x$ -szel.

$$\int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} dx = \int \cos x + \sin x dx$$

Ezzel nincs többé tört, hanem csak két alapintegrál összege szerepel, melyeket tagonként integrálunk.

$$\int \cos x + \sin x dx = \int \cos x dx + \int \sin x dx = \sin x - \cos x + c$$

21. feladat: $\int \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} dx$

Megoldás: Mivel a számlálóban egy különbség áll, a törtet felbonthatjuk két tört különbségére.

$$\int \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{x^2}{x^2 \cdot \sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} dx$$

Mindkét tört egyszerűsíthető, az első x^2 -tel, a második $\sin^2 x$ -szel.

$$\int \frac{x^2}{x^2 \cdot \sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} dx$$

A második törtben egy hatvány reciproka áll, amit írjunk inkább negatív kitevős hatványként.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - x^{-2} dx$$

Így már csak alapintegrálok különbsége szerepel, melyeket külön-külön integrálunk.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} - x^{-2} dx = -\operatorname{ctg} x - \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x + c$$

22. feladat: $\int \frac{5x^2 + 2}{x^2 \cdot (x^2 + 1)} dx$

Megoldás: Az integrandus egy elég bonyolult tört, azonban észrevehető, hogy a számláló olyan összegre bontható, melynek egyik tagja a nevező egyik tényezőjének, másik tagja pedig a nevező másik tényezőjének a szám szorosa.

$$\int \frac{5x^2 + 2}{x^2 \cdot (x^2 + 1)} dx = \int \frac{3x^2 + 2(x^2 + 1)}{x^2 \cdot (x^2 + 1)} dx$$

Ez azért jó, mert így a törtet két tört összegére bonthatjuk, és a keletkező törtéken belül egyszerűsíthetünk.

$$\int \frac{3x^2 + 2(x^2 + 1)}{x^2 \cdot (x^2 + 1)} dx = \int \frac{3x^2}{x^2 \cdot (x^2 + 1)} + \frac{2(x^2 + 1)}{x^2 \cdot (x^2 + 1)} dx = \int \frac{3}{x^2 + 1} + \frac{2}{x^2} dx$$

Az összeget természetesen tagonként integráljuk, a konstans szorzók pedig kiemelhetők.

$$\int \frac{3}{x^2 + 1} + \frac{2}{x^2} dx = \int \frac{3}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x^2} dx = 3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2} dx$$

Az első tag alapintegrál, a második tagban pedig a reciprok helyett írjunk inkább negatív kitevős hatványt.

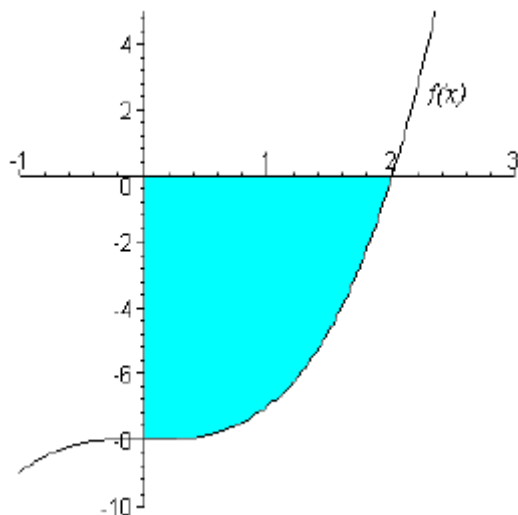
$$3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2} dx = 3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + 2 \int x^{-2} dx$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk a megfelelő alapintegrálokat.

$$3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + 2 \int x^{-2} dx = 3 \arctg x + 2 \frac{x^{-1}}{-1} + c = 3 \arctg x - \frac{2}{x} + c$$

23. feladat: Határozzuk meg azon véges síkrész területét, melyet a koordináta-rendszer két tengelye és az $f(x) = x^3 - 8$ függvény grafikonja határol.

Megoldás: Készítsünk egy ábrát a függvényről, hogy láthassuk, hogyan is helyezkedik el a kérdéses alakzat a koordináta-rendszerben. Az ábrázolás könnyű, hiszen az x^3 grafikonját kell 8-cal lefelé eltolnunk az y -tengely mentén.



Amint látható, a negyedik síknegyedben van olyan síkrész, ami a feladat feltételeinek megfelel. Nyilván szükségünk van arra, hogy meghatározzuk, hol metszi a függvény grafikonja az x -tengelyt. Az ábráról sejthető, hogy $x=2$ a zérushely, s ez a függvénybe helyettesítéssel könnyen ellenőrizhető is. Természetesen az $x^3 - 8 = 0$ egyenletet is megoldhatjuk, s ezzel is igazolhatjuk, hogy 2-nél van a metszéspont. Így egyértelmű, hogy az alakzat a $[0, 2]$ intervallumon található. Mivel itt a függvény negatív értékeket vesz fel, így a területet a függvény ezen intervallumon vett integráljának -1 -szerese adja.

$$T = - \int_0^2 x^3 - 8 \, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = - \left[\frac{x^4}{4} - 8x \right]_0^2$$

Helyettesítsünk a Newton-Leibniz-szabályba, és hajtsuk végre a műveleteket.

$$T = - \left(\left(\frac{2^4}{4} - 8 \cdot 2 \right) - \left(\frac{0^4}{4} - 8 \cdot 0 \right) \right) = -((4 - 16) - 0) = 12$$

24. feladat: Mekkora területű véges síkrészt zárnak közre az $f(x) = x^3 + x$ és $g(x) = 5x$ függvények grafikonjai?

Megoldás: Mivel két függvénygrafikonja által közrezárt síkrész területe a kérdés, így először meg kell határoznunk, hol metszik egymást a grafikonok. Oldjuk meg az $f(x) = g(x)$ egyenletet.

$$x^3 + x = 5x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0$$

Ha az első tényező nulla, akkor az $x=0$ megoldást kapjuk.

Ha a második tényező nulla, akkor $x^2 = 4$, amiből vagy $x=2$ vagy $x=-2$.

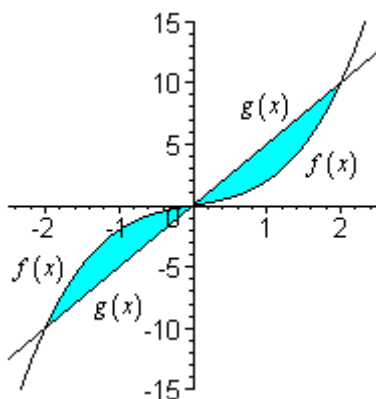
A két függvény grafikonja tehát 3 helyen is metszi egymást. Ez azt jelenti, hogy a két grafikon által közrezárt alakzat két részből áll, mert van közrezárt alakzat az első két metszéspont és a második két metszéspont között is. Ezt jól láthatjuk, ha ábrázoljuk a két függvényt. Az ábrázoláshoz célszerű meghatározni a függvények értékét a metszéspontokban.

Ezek a helyeken a két függvény azonos értéket vesz fel. Mivel $g(x)$ az egyszerűbb függvény, így célszerű abba helyettesítve számolni.

$$f(-2) = g(-2) = 5 \cdot (-2) = -10$$

$$f(0) = g(0) = 5 \cdot 0 = 0$$

$$f(2) = g(2) = 5 \cdot 2 = 10$$



A kérdéses területet két integrállal határozhatjuk meg. Mivel a $[-2, 0]$ intervallum belsejében $f(x) > g(x)$, ezért ezen az intervallumon integráljuk az $f(x) - g(x)$ függvényt, s mert a $[0, 2]$ intervallumon $g(x) > f(x)$, ezért ezen az intervallumon integráljuk az $g(x) - f(x)$ függvényt. A terület a két integrál összege lesz.

$$T = \int_{-2}^0 (x^3 + x) - 5x \, dx + \int_0^2 5x - (x^3 + x) \, dx = \int_{-2}^0 x^3 - 4x \, dx + \int_0^2 4x - x^3 \, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényeket.

$$T = \int_{-2}^0 x^3 - 4x \, dx + \int_0^2 4x - x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2$$

Helyettesítsük az integrálási határokat a megszokott módon, és végezzük el a műveleteket.

$$T = \left(\left(\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 \right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2 \cdot (-2)^2 \right) \right) + \left(\left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} \right) - \left(2 \cdot 0^2 - \frac{0^4}{4} \right) \right) =$$

$$= (0 - (4 - 8)) + ((8 - 4) - 0) = 4 + 4 = 8$$

A közrezárt alakzat területe tehát 8 egység.

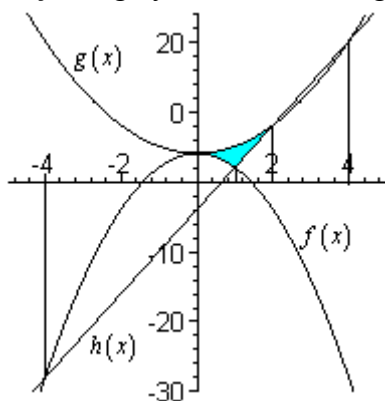
A feladatot egy integrál kiszámolásával is megoldhatjuk, ha kihasználjuk azt, hogy a közrezárt alakzat két része szimmetrikus az origóra. Ekkor elég az egyik integrált kiszámolnunk, és annak dupláját venni. Szimmetrikus alakzatok esetén így csökkenthetjük a számolás mennyiségét.

25. feladat: Mekkora területű véges síkrészt határolnak az alábbi függvények grafikonjai?

$$f(x) = 4 - 2x^2, \quad g(x) = x^2 + 4, \quad h(x) = 6x - 4$$

Megoldás: Most meg kellene keresnünk az összes olyan pontot, ahol két függvény grafikonja metszi egymást. Ehhez három egyenletet is meg kéne oldanunk, hiszen bármely két függvényt egyenlővé kellene tennünk egymással. Készítsünk inkább egy ábrát a három függvény

grafikonjáról és olvassuk le az ábráról a metszéspontok helyét. Az ábrázolás során azt használjuk ki, hogy ismerjük a függvények jellegét. Az $f(x) = 4 - 2x^2$ egy konkáv parabola lesz 4 egységgel eltolva az y -tengely mentén. A $g(x) = x^2 + 4$ konvex parabola szintén 4 egységgel eltolva az y -tengely mentén. A $h(x) = 6x - 4$ pedig egyenes, ami -4 -ben metszi az y -tengelyt, s a meredeksége 6.

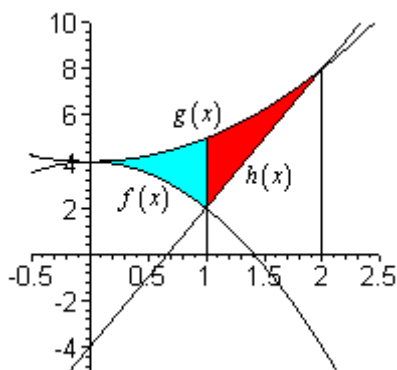


Az ábráról leolvasható, hogy öt közös pont van, s ezek az $x = -4$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$ helyeken vannak.

Az is látható azonban hogy a három függvény grafikonja által határolt alakzat szempontjából csak az $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ helyeken lévő metszéspontok érdekesek, mert a $[0, 2]$

intervallumon kívül csak két függvény grafikonja által határolt alakzat alakul ki, vagy a függvények grafikonjai közti alakzat nem véges.

Nagyítsuk fel ezután az ábra lényeges részét.



Az alakzatot az $x = 1$ helyen két részre kell bontanunk, mert más függvény grafikonja határolja alulról a $[0, 1]$ és más az $[1, 2]$ intervallumon. Ebből következik, hogy a területet két integrál összegeként kaphatjuk meg. A $[0, 1]$ intervallumon a $g(x) - f(x)$ függvényt kell integrálnunk, míg az $[1, 2]$ intervallumon $g(x) - h(x)$ függvényt.

$$T = \int_0^1 (x^2 + 4) - (4 - 2x^2) dx + \int_1^2 (x^2 + 4) - (6x - 4) dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 x^2 - 6x + 8 dx$$

Határozzuk meg primitív függvényeket.

$$T = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 x^2 - 6x + 8 dx = \left[x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_1^2$$

Helyettesítsük az integrálási határokat, és végezzük el a műveleteket.

$$T = \left[x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_1^2 = (1^3 - 0^3) + \left(\left(\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 3 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 \right) \right) =$$

$$= 1 + \left(\frac{8}{3} - 12 + 16 \right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 8 \right) = \frac{7}{3}$$

A három függvény grafikonja által határolt alakzat területe tehát $\frac{7}{3}$ egység.

26. feladat: Forgassuk meg az x -tengely körül az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$

intervallumhoz tartozó íve és az x -tengely közötti síkrészt. Határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát.

Megoldás: Helyettesítsünk be a forgástestek térfogatának képletébe.

$$V = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x dx$$

Az integrandus egy összetett függvény, s az összetett függvényekre nincs általános integrálási szabály. Mivel várhatóan nem lesz egyszerű primitív függvényt találni, ezért végezzük el külön a határozatlan integrálást. Próbáljuk átalakítani úgy az integrandust, hogy integrálható függvényt, vagy azok összegét kapjuk. Induljunk el a legegyszerűbb szóba jöhető

összefüggésből, mely szerint $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, és írjuk ezt be az integrandusba. Mivel így egy

tört négyzetét kapjuk, ezután úgy alakíthatunk tovább, hogy külön emeljük négyzetre a számlálót és a nevezőt.

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$$

Még nem látszik pontosan miért jó ez az átalakítás, de középiskolából több olyan összefüggés is ismert, melyben $\sin^2 x$ és $\cos^2 x$ szerepel, így ebben az irányban tovább alakítható a függvény. Ismét a legegyszerűbb összefüggésből menjünk tovább, ami a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság. Rendezzük ezt át $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ alakra, és helyettesítsünk be az integrandus számlálójába.

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx$$

Bontsuk fel ezután a törtet két tört összegére azáltal, hogy külön osztjuk el a számláló tagjait, majd egyszerűsítsünk, amelyik törtben erre lehetőség van.

$$\int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - 1 dx$$

Ezzel sikerült elérnünk, hogy az integrandus két alapintegrál különbsége lett. A tagokat külön-külön integrálhatjuk, s az alapintegrálokat egyszerűen be kell helyettesítenünk.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} - 1 dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int 1 dx = -\operatorname{ctg} x - x + c$$

A primitív függvényt sikerült meghatározni, de talán az olvasóban felvetődik az a kérdés, miért nem a nevezőben álló $\sin^2 x$ helyére helyettesítettünk $1 - \cos^2 x$ -et, hiszen ezt is megtehettük volna. Természetesen ez az átalakítás sem lett volna hibás, de ekkor nem tudtuk volna tovább alakítani az integrandust. A törtek esetében többször hajthatunk végre olyan átalakítást, hogy külön osztjuk el a számláló tagjait. Ehhez arra van szükség, hogy a

számlálóban álljon összeg vagy különbség, és ne a nevezőben. Az is fontos volt a további alakítás során, hogy a számláló egyik tagja megegyezett a nevezővel, s így tudtunk egyszerűsíteni. Az egyszerűsítés után kapott 1 pedig alapintegrál, hiszen $\int 1dx = x + c$.

De térjünk vissza a forgástest térfogatához.

$$V = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x dx = \left[-\operatorname{ctg} x - x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \left(-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$= \left(0 - \frac{\pi}{2} \right) - \left(-\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0.68$$

A keletkező forgástest térfogata tehát 0.68 egység.

Ellenőrző kérdések:

18. kérdés: $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$

$\sin x + \cos x + c$ (X)

$\sin x - \cos x + c$

$\cos x - \sin x + c$

$-\sin x - \cos x + c$

19. kérdés: $\int \frac{x + \cos^2 x}{x^2 \cdot \cos^2 x} dx$

$\frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{tg} x + c$

$\frac{x^2}{2} + \operatorname{tg} x + c$

$\ln x \cdot \operatorname{tg} x + c$

$\ln x + \operatorname{tg} x + c$ (X)

20. kérdés: $\int \frac{1-x^2}{x^2 \cdot (x^2+1)} dx$

$\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + c$

$-\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + c$

$\frac{1}{x} - 2\operatorname{arctg} x + c$

$-\frac{1}{x} - 2\operatorname{arctg} x + c$ (X)

21. kérdés: Mekkora annak a véges síkrésznek a területe, melyet a koordinátarendszer két tengelye és az $f(x) = x^3 + 1$ függvény grafikonja határol?

$$\frac{2}{3} \frac{3}{4} \text{ (X)} \frac{4}{5} \frac{5}{6}$$

22. kérdés: Mekkora területű véges síkrészt zárnak közre az $f(x) = x^3 - 4x$ és $g(x) = -3x$ függvények grafikonjai?

$$\frac{1}{4} \frac{1}{2} \text{ (X)} \frac{2}{3} \frac{3}{4}$$

23. kérdés: Tekintsük az $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{4} + 3$, $h(x) = -2x$ függvényeket. Mekkora a három függvény grafikonja által határolt véges síkrész területe?

$$\frac{14}{3} \frac{16}{3} \frac{20}{3} \text{ (X)} \frac{22}{3}$$

24. kérdés: Forgassuk meg az x -tengely körül az $f(x) = \tan x$ függvény $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

intervallumhoz tartozó íve és az x -tengely közötti síkrészt. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

$$\frac{4\pi - \pi^2}{4} \text{ (X)}$$

$$\frac{\pi^2 - 2\pi}{4}$$

$$\frac{\pi^2 + 2\pi}{4}$$

$$\frac{4\pi + \pi^2}{4}$$

4. Integrálszámítás

4.2. Bevezetés az integrálási módszerekbe

Tanulási cél: Megismerni az $f(ax+b)$, $f^a(x)$ és $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvények integrálási módszerét, valamint a parciális integrálás szabályát. Ezen módszereket alkalmazni feladatokban.

Elméleti összefoglaló: Az alapintegrálok ismeretében, és az előző leckében megismert egyszerű tételek felhasználásával a függvények elég széles körében meghatározható a primitív függvény. Az alábbiakban olyan módszereket ismertetünk, melyekkel a primitív függvényt még szélesebb körben meghatározhatjuk.

Tétel: Ha tudjuk, hogy az f függvény primitív függvénye F , akkor

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c,$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$.

A tételeket sok esetben bizonyítás nélkül adjuk csak meg, de az egyszerűbb esetekben megmutatjuk a bizonyítást is.

Bizonyítás: Azt kell belátnunk, hogy az integrálás eredményének, $\left(\frac{F(ax+b)}{a} + c\right)$ a

deriváltja az integrálandó függvénnyel $(f(ax+b))$ egyenlő. Ehhez használjuk fel az összetett függvények deriválási szabályát és azt, hogy ha F primitív függvénye f -nek, akkor $F' = f$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{F(ax+b)}{a} + c\right)' &= \left(\frac{F(ax+b)}{a}\right)' + c' = \frac{1}{a}(F(ax+b))' + 0 = \\ &= \frac{1}{a}F'(ax+b) \cdot (ax+b)' = \frac{1}{a}f(ax+b) \cdot a = f(ax+b) \end{aligned}$$

A feladatokban való alkalmazáshoz a tételt másképp úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha olyan összetett függvényt kell integrálnunk, melynek belső függvénye lineáris, akkor integráljuk a külső függvényt, s összetételt alkotunk az eredeti belső függvénnyel, valamint osztunk a belső függvényből x együtthatójával.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: $\int \sin(3x + \pi) dx$

Megoldás: Az integrandusunk jól láthatóan olyan összetett függvény, amelynek belső függvénye elsőfokú polinom, vagy más szóval lineáris. Alkalmazhatjuk a fent megismert szabályt.

A külső függvény $\sin x$. Ennek integrálja: $\int \sin x dx = -\cos x + c$.

A belső függvény $3x + \pi$, ez felel meg $ax + b$ -nek, azaz $a = 3$ és $b = \pi$. Ezután egyszerűen behelyettesítünk a szabályba.

$$\int \sin(3x + \pi) dx = \frac{-\cos(3x + \pi)}{3} + c$$

Az ilyen feladatokban általában nem szükséges sok átalakítást végrehajtani az integranduson, a hangsúly azon van, hogy felismerjük, ilyen típusú összetett függvényünk van. Ha ez sikerült, akkor már könnyű alkalmazni a szabályt.

2. feladat: $\int \frac{1}{5x-8} dx$

Megoldás: Az integranduson megint azt ismerhetjük fel, hogy olyan összetett függvény, melynek belső függvénye elsőfokú.

A külső függvény most nyilván az $\frac{1}{x}$. Ennek integrálja a következő: $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$.

A belső függvény most $5x-8$, tehát $a=5$ és $b=8$.

Alkalmazva az $\int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ szabályt, az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int \frac{1}{5x-8} dx = \frac{\ln |5x-8|}{5} + c.$$

3. feladat: $\int \frac{1}{\cos^2 5x} dx$

Megoldás: Ha most deriválnunk kellene, akkor azt mondanánk, jelen esetben egy

többszörösen összetett függvényünk van. Külső függvény az $\frac{1}{x^2}$, középső a $\cos x$, és belső az

$5x$. Nem muszáj azonban ennyire felbontanunk a függvényt, sőt integrálásnál nem is célszerű. Az előző felbontásban szereplő belső függvény, az $5x$, egy lineáris függvény. Csak annyit kell tennünk, hogy amit az előbb külső és középső függvénynek tekintettünk, azt nem

bontjuk fel, hanem egyben tekintjük külső függvénynek. Azaz most $\frac{1}{\cos^2 x}$ lesz a külső

függvény. Azért célszerű ez a felbontás, mert így a külső függvény egy alapintegrál. Tudjuk

ugyanis, hogy $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$.

Amint már említettük, a belső függvény $5x$, azaz $a=5$ és $b=0$.

Alkalmazva a korábban ismertetett szabályt, az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int \frac{1}{\cos^2 5x} dx = \frac{\operatorname{tg} 5x}{5} + c.$$

4. feladat: $\int \sqrt[3]{4x+7} dx$

Megoldás: Az integrandus ebben az esetben is olyan összetett függvény, melynek belső függvénye elsőfokú.

A külső függvény nyilván a $\sqrt[3]{x}$, melynek integrálja: $\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + c$.

A belső függvény $4x+7$, tehát $a=4$, és $b=7$.

Alkalmazva az előzőekben ismertetett szabályt, a következőt kapjuk:

$$\int \sqrt[3]{4x+7} dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt[3]{(4x+7)^4}}{4} + c = \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x+7)^4} + c.$$

5. feladat: $\int e^{4-x} dx$

Megoldás: Most is olyan függvényt kell integrálnunk, melynek belső függvénye lineáris.

A külső függvény most az e^x , melynek integrálja önmaga, azaz: $\int e^x dx = e^x + c$.

A belső függvény $4-x$, tehát $a = -1$, és $b = 4$.

Alkalmazva az előzőekben ismertetett szabályt, a következőt kapjuk:

$$\int e^{4-x} dx = \frac{e^{4-x}}{-1} + c = -e^{4-x} + c.$$

A feladatban arra kell figyelni, hogy a lineáris belső függvényben most fordított a sorrend, azaz a konstans áll elől, és az elsőfokú rész hátul. Valamint ne feledkezzünk el arról sem, hogy az együtthatóba az előjel is beletartozik. Mivel most $-x$ szerepel, ezért az elsőfokú részben az együttható $a = -1$.

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: $\int \cos(2x-3) dx$

$$\begin{aligned} &2 \sin(2x-3) + c \\ &-3 \sin(2x-3) + c \\ &\frac{\sin(2x-3)}{2} + c \text{ (X)} \\ &\frac{\sin(2x-3)}{-3} + c \end{aligned}$$

2. kérdés: $\int \frac{1}{5-6x} dx$

$$\begin{aligned} &5 \ln|5-6x| + c \\ &\frac{\ln|5-6x|}{5} + c \\ &-6 \ln|5-6x| + c \\ &\frac{\ln|5-6x|}{-6} + c \text{ (X)} \end{aligned}$$

3. kérdés: $\int \frac{1}{(2x+5)^3} dx$

$$\frac{(2x+5)^{-2}}{2} + c$$

$$\frac{1}{-4(2x+5)^2} + c \quad (\text{X})$$

$$\frac{\ln(2x+5)^3}{2} + c$$

$$\frac{\ln(2x+5)^3}{5} + c$$

4. kérdés: $\int 4^{8-5x} dx$

$$\frac{4^{8-5x} \cdot \ln 4}{5}$$

$$\frac{4^{8-5x} \cdot \ln 4}{-5}$$

$$\frac{4^{8-5x}}{5 \cdot \ln 4}$$

$$\frac{4^{8-5x}}{-5 \cdot \ln 4} \quad (\text{X})$$

5. kérdés: $\int \sqrt{4+9x} dx$

$$\frac{2\sqrt{(4+9x)^3}}{27} + c \quad (\text{X})$$

$$\frac{\sqrt{(4+9x)^3}}{6} + c$$

$$\frac{1}{8\sqrt{4+9x}} + c$$

$$\frac{1}{18\sqrt{4+9x}} + c$$

Elméleti összefoglaló:

Tétel: Minden $\alpha \neq 1$ valós szám esetén

$$\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c.$$

Bizonyítás: A tételt az integrálás eredményének deriválásával igazoljuk. Eközben felhasználjuk az összetett függvény deriválási szabályát, amikor az $f^{\alpha+1}(x)$ függvényt deriváljuk. Ekkor a külső függvény $x^{\alpha+1}$, a belső függvény pedig $f(x)$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c \right)' &= \left(\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} \right)' + c' = \frac{1}{\alpha+1} (f^{\alpha+1}(x))' + 0 = \\ &= \frac{1}{\alpha+1} (\alpha+1) f^{\alpha}(x) \cdot f'(x) = f^{\alpha}(x) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

A tételt szövegben is megfogalmazhatjuk a feladatokban való alkalmazáshoz. Ha olyan szorzatot kell integrálnunk, melynek egyik tényezője egy függvény hatványa (a kitevő $\neq -1$), másik tényezője pedig a hatványozott függvény deriváltja, akkor az integrálás eredményében eggyel alacsonyabb hatványra emeljük a függvényt, és osztunk az új kitevővel.

Kidolgozott feladatok:

6. feladat: $\int (x^2 + 5)^6 \cdot 2x dx$

Megoldás: Az integrandusban most azt ismerhetjük fel, hogy egy függvény hatványa áll benne megszorozva a hatványozott függvény deriváltjával. Úgy is mondhatjuk, hogy az integrandus $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú. Alkalmazhatjuk a most megismert szabályt.

Ebben a feladatban nyilván $f(x) = x^2 + 5$ az a függvény, aminek a hatványa szerepel, s mellette ott áll szorzóként a deriváltja, hiszen $(x^2 + 5)' = 2x$.

A szabály azt mondja ki, hogy ilyen esetben a függvény 1-gyel magasabb kitevőjű hatványa lesz az integrál, elosztva ezen 1-gyel nagyobb kitevővel. Így az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int (x^2 + 5)^6 \cdot 2x dx = \int (x^2 + 5)^6 \cdot (x^2 + 5)' dx = \frac{(x^2 + 5)^7}{7} + c.$$

Látható, hogy a megoldás során nem volt szükség az integrandus hosszas átalakítására. Az volt a fontos, hogy felismerjük, az integrandus típusát. Erre akkor van csak esélyünk, ha rendelkezünk az alapderiváltak biztos ismeretével.

7. feladat: $\int (x^2 - 1)^3 x dx$

Megoldás: Az előző feladat megoldásának mintájára azt mondhatjuk, hogy legyen $f(x) = x^2 - 1$, hiszen ennek a függvénynek hatványa szerepel az integrandusban. A gondot az okozza, hogy ennek deriváltja $(x^2 - 1)' = 2x$, és nem pontosan ez szerepel a függvény hatványa mellett szorzóként, hanem csak x . Ezen azonban segíthetünk, ha az integrandust szorozzuk is, és osztjuk is 2-vel. Így elérjük, hogy a függvény hatványa mellett a hatványozott függvény deriváltja álljon.

$$\int (x^2 - 1)^3 x dx = \int \frac{(x^2 - 1)^3 2x}{2} dx =$$

Mivel konstans szorzó kiemelhető az integrálból, ezért a 2-vel osztás helyett célszerűbb $\frac{1}{2}$ -del szorzást írni az integrál elé. Így az integrandus egyértelműen $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú.

$$\int \frac{(x^2 - 1)^3 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (x^2 - 1)^3 2x dx = \frac{1}{2} \int (x^2 - 1)^3 \cdot (x^2 - 1)' dx$$

Alkalmazzuk a fent megismert szabályt.

$$\frac{1}{2} \int (x^2 - 1)^3 \cdot (x^2 - 1)' dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 1)^4}{4} + c = \frac{1}{8} (x^2 - 1)^4 + c$$

A megoldásból látható, hogy ha az integrandus egyik tényezője egy függvény hatványa, a másik pedig ezen hatványozott függvény deriváltjának szám szorosa, akkor kialakítható az $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$ típusú integrandus. Ilyenkor megfelelő konstanssal szorzunk is és osztunk is, hogy a hatványozott függvény deriváltja jelenjen meg. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ilyen csak akkor tehetünk, ha a hatványozott függvény deriváltjától csak konstans szorzó erejéig tér el a tényező. Ha nem konstans szorzó az eltérés, akkor a függvény nem integrálható ilyen módon.

8. feladat: $\int \sqrt[3]{\cos x} \cdot \sin x dx$

Megoldás: Az előző két feladatban egyértelműen látható volt egy függvény hatványa, most ehhez egy kicsit alakítanunk kell az integranduson. A gyök helyett írunk törtkitevős hatványt.

$$\int \sqrt[3]{\cos x} \cdot \sin x dx = \int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot \sin x dx$$

Így már megvan, hogy a $\cos x$ függvény hatványa szerepel az integrandusban egyik tényezőként. Mellette $\sin x$ áll, ami csak egy előjelben különbözik a $\cos x$ deriváltjától, hiszen $(\cos x)' = -\sin x$. Értjük el, hogy megjelenjen a negatív előjel az integrandusban. Ha két negatív előjelet is kiteszünk, akkor mintha nem is tettünk volna semmit. Az egyiket tegyük ki az integrál elé, a másikat pedig belül a $\sin x$ -hez. Így elérjük, hogy a hatványozott függvény deriváltja álljon az integrandusban.

$$\int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot \sin x dx = - \int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot (-\sin x) dx = - \int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot (\cos x)' dx$$

Ezután már alkalmazható az $\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$ szabály, s az alábbi eredményt kapjuk:

$$- \int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot (\cos x)' dx = - \frac{(\cos x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = - \frac{3}{4} (\cos x)^{\frac{4}{3}} + c.$$

9. feladat: $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} dx$

Megoldás: Ebben a feladatban sem nyilvánvaló, hogy függvény hatványa szerepel, ezért alakítunk az integranduson. A tört helyett most írunk negatív kitevős hatvánnyal való szorzást.

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} dx = \int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot \operatorname{sh} x dx$$

Már csak annyit kell észrevenni, hogy $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, tehát a második tényezőben a hatványozott függvény deriváltja áll.

$$\int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot \operatorname{sh} x dx = \int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot (\operatorname{ch} x)' dx$$

Alkalmazva a megfelelő szabályt, a következő eredményt kapjuk:

$$\int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot (\operatorname{ch} x)' dx = \frac{(\operatorname{ch} x)^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2(\operatorname{ch} x)^2} + c.$$

10. feladat: $\int \frac{1}{(1+x^2) \cdot \operatorname{arctg}^2 x} dx$

Megoldás: Tudjuk, hogy $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Ezért célszerűnek látszik két tört szorzatára

bontani az integrandust, majd negatív kitevős hatványt írni. Így jól láthatóvá tehetjük, hogy az integrandus $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$ típusú.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x^2) \cdot \operatorname{arctg}^2 x} dx &= \int \frac{1}{(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg}^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{(1+x^2)} \cdot (\operatorname{arctg} x)^{-2} dx = \int (\operatorname{arctg} x)^{-2} \cdot (\operatorname{arctg} x)' dx \end{aligned}$$

Alkalmazzuk az $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$ típusú függvényekre vonatkozó integrálási szabályt.

$$\int (\operatorname{arctg} x)^{-2} \cdot (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{(\operatorname{arctg} x)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{\operatorname{arctg} x} + c$$

11. feladat: $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Megoldás: Tudjuk, hogy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, ezért célszerű a törtet szorzattá bontani. Még annyit kell

felismernünk, hogy a $\ln x$ -et is tekinthetjük egy függvény hatványának, hiszen $(\ln x)^1$ -ről van szó, csak az 1-et nem írtuk ki a kitevőben. Így jól láthatóvá válik, hogy az integrandus $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$ típusú függvény.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int (\ln x)^1 \cdot (\ln x)' dx$$

Alkalmazva a megfelelő integrálási módszert, a következő eredményt kapjuk:

$$\int (\ln x)^1 \cdot (\ln x)' dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c = \frac{1}{2} \ln^2 x + c.$$

Ellenőrző kérdések:

6. kérdés: $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$

$$\frac{\cos^4 x}{4} + c$$

$$-\frac{\cos^4 x}{4} + c \quad (\text{X})$$

$$\frac{\sin^4 x}{4} + c$$

$$-\frac{\sin^4 x}{4} + c$$

7. kérdés: $\int \sqrt{\operatorname{sh} x} \cdot \operatorname{ch} x \, dx$

$$\frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{sh}^3 x} + c \quad (\text{X})$$

$$\frac{3}{2} \sqrt{\operatorname{sh}^3 x} + c$$

$$-\frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{sh}^3 x} + c$$

$$-\frac{3}{2} \sqrt{\operatorname{sh}^3 x} + c$$

8. kérdés: $\int x^2 (4 - x^3)^5 \, dx$

$$\frac{(4 - x^3)^6}{6} + c$$

$$\frac{(4 - x^3)^6}{18} + c$$

$$-\frac{(4 - x^3)^6}{6} + c$$

$$-\frac{(4 - x^3)^6}{18} + c \quad (\text{X})$$

9. kérdés: $\int \frac{e^x}{(e^x + 1)^4} \, dx$

$$\frac{1}{(e^x + 1)^3} + c$$

$$-\frac{1}{3(e^x + 1)^3} + c \quad (\text{X})$$

$$\frac{1}{(e^x + 1)^5} + c$$

$$-\frac{1}{5(e^x + 1)^5} + c$$

10. kérdés: $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \, dx$

$$-\operatorname{tg}^2 x + c$$

$$\operatorname{tg}^2 x + c$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + c$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + c \quad (\text{X})$$

11. kérdés: $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)} dx$

$$\frac{4}{3}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x} + c$$

$$\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{arctg}^3 x} + c$$

$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x} + c \quad (\text{X})$$

$$\frac{3}{4}\sqrt[4]{\operatorname{arctg}^3 x} + c$$

Elméleti összefoglaló:

Tétel: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$

Bizonyítás: Ha $f(x) > 0$, akkor $|f(x)| = f(x)$. Alkalmazzuk az összetett függvény deriválási szabályát.

$$(\ln |f(x)| + c)' = (\ln(f(x)))' + c' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) + 0 = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Ha $f(x) < 0$, akkor $|f(x)| = -f(x)$. Most is az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazzuk.

$$(\ln |f(x)| + c)' = (\ln(-f(x)))' + c' = \frac{1}{-f(x)} \cdot (-f'(x)) + 0 = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Azon x -ekre, ahol $f(x) = 0$, az $\frac{f'(x)}{f(x)}$ függvény nincs értelmezve.

A feladatokban történő alkalmazáshoz a tételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha olyan törtet kell integrálnunk, melynek számlálója a nevező deriváltjával egyenlő, akkor az integrálás eredménye a nevező abszolút értékének a logaritmus lesz.

Kidolgozott feladatok:

12. feladat: $\int \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 6} dx$

Megoldás: Az integrandus olyan tört, melynek számlálójában épp a nevező deriváltja áll, hiszen $(x^3 - 2x + 6)' = 3x^2 - 2$. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy egy $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvényt kell integrálnunk.

Mivel most jól láthatóan $f(x) = x^3 - 2x + 6$, csak annyi a feladatunk, hogy behelyettesítsünk a szabályba.

$$\int \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 6} dx = \int \frac{(x^3 - 2x + 6)'}{x^3 - 2x + 6} dx = \ln |x^3 - 2x + 6| + c$$

13. feladat: $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx$

Megoldás: Most azt kell felismernünk az integranduson, hogy a számláló, csak egy konstans szorzóban tér el a nevező deriváltjától, hiszen $(e^{3x} + 5)' = 3e^{3x}$.

Ha be tudjuk csempészni a számlálóba a 3-at, akkor az integrandus $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú lesz, s el tudjuk végezni az integrálást. Hasonló esettel már találkoztunk korábban, és akkor a hiányzó konstanssal szoroztunk is, osztottunk is. Járjunk el most is így, és az osztást egyből írjuk az integrál jel elé reciprokkaal történő szorzás formájában.

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx = \frac{1}{3} \int \frac{(e^{3x} + 5)'}{e^{3x} + 5} dx$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk az

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c \text{ szabályba.}$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{(e^{3x} + 5)'}{e^{3x} + 5} dx = \frac{1}{3} \ln |e^{3x} + 5| + c = \frac{1}{3} \ln(e^{3x} + 5) + c$$

Mivel a $e^{3x} + 5 > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért hagyhattuk el az abszolút értéket az eredményben.

Amint látható, ha olyan törtünk van, melyben a számláló csak konstans szorzóban különbözik a nevező deriváltjától, akkor a hiányzó konstanssal szorozva és osztva is, elérhető, hogy

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \text{ típusú függvény legyen az integrandus.}$$

14. feladat: $\int \frac{x}{x^2 + 4} dx$

Megoldás: Vegyük észre, hogy a nevező deriváltja $(x^2 + 4)' = 2x$, csak egy konstans szorzóban tér el a tört számlálójától, ami x . Ahhoz, hogy $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvény legyen az integrandus, szükség lenne a számlálóban egy 2-es szorzóra. Az előbbieket szerint szorozzunk 2-vel, és osszuk is 2-vel. Az osztást egyből írjuk az integrál elé $\frac{1}{2}$ -del szorzás formájában.

$$\int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4)'}{x^2+4} dx$$

Már csak be kell helyettesítenünk a szabályba.

$$\frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4)'}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + c$$

Az abszolút érték most is elhagyható az eredményben, hiszen $x^2+4 > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

15. feladat: $\int \operatorname{tg} x dx$

Megoldás: Használjuk fel a $\operatorname{tg} x$ definícióját, azaz írjunk helyette $\frac{\sin x}{\cos x}$ -et.

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

Az integrálandó tört számlálója csak egy előjelben tér el a nevező deriváltjától, hiszen $(\cos x)' = -\sin x$. Szorozzuk meg ezért az integrandust -1 -gyel, és az integrál elé is írjunk egy negatív előjelet. Így elérjük, hogy az integrandus $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvény legyen.

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk a megfelelő integrálási szabályba.

$$- \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

16. feladat: $\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} dx$

Megoldás: Ugyan törtet kell integrálnunk, de most nyilván nem igaz, hogy a számlálóban a nevező deriváltja áll, hiszen a nevezőben egy szorzat van, aminek deriváltja nem 1. Látunk

azonban a függvényben részletként $\operatorname{tg} x$ -et, amiről tudjuk, hogy deriváltja $\frac{1}{\cos^2 x}$, s a

nevezőben szerepel a $\cos^2 x$ is. Használjuk fel a törtek azon átalakítását, amivel emeletes törtté alakíthatunk egy törtet, ha a nevezőben szorzat áll. Ezt az alábbi módon írhatjuk:

$$\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a}.$$

Ha ezt úgy alkalmazzuk, hogy a számlálóba $\frac{1}{\cos^2 x}$ kerül, akkor ezzel a nevezőben maradó

$\operatorname{tg} x$ deriváltját kapjuk meg, azaz $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusúvá sikerül alakítanunk a függvényt.

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} dx = \int \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg} x} dx$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk a szabályba.

$$\int \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg} x} dx = \ln |\operatorname{tg} x| + c$$

A feladatot sikerült megoldanunk, de talán többen azt mondják magukban, hogy ők bizony másképp alakították volna az integrandust. Az előző feladatban szerepelt, hogy $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, amit most is felhasználhattunk volna. Így a tört nevezőjében még egyszerűsíthetünk is.

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx =$$

Ezen a ponton azonban elakadunk. A kapott tört nem alapintegrál, és nem tudjuk egyik könnyen integrálható függvény típust, azaz $f(ax+b)$, vagy $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$, vagy $\frac{f'(x)}{f(x)}$ sem kialakítani. Az átalakításunk ugyan jó, de nem segít a függvény integrálásában. Az integrálási feladatokban tudatosan keresni kell, hogy a tanult szabályok közül melyik alkalmazható az adott esetben. Mivel már két olyan szabályt is láttunk, amiben függvény és deriváltja is szerepel, így kijelenthetjük, hogy a szabályok sok esetben csak akkor ismerhetők fel, ha jól ismerjük az alapderiváltakat. Ha nem tudjuk, melyik függvénynek mi a deriváltja, akkor nem fogjuk felismerni a feladatokban, hogy ezeket az integrálási szabályokat kellene alkalmaznunk. Ilyenkor könnyen kerülhetünk olyan zsákutcába, mint amibe a fenti átalakításokkal jutottunk.

17. feladat: $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$

Megoldás: Ilyen formában a tört számlálója nyilván nem egyenlő a nevező deriváltjával. De a nevezőben látjuk az $\ln x$ -et, amiről tudjuk, hogy deriváltja $\frac{1}{x}$, és az x is ott van a nevezőben.

Ha ugyanúgy emeletes törtté alakítunk, mint az előző feladatban, akkor most is $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvényt kapunk. Vigyünk a számlálóba az $\frac{1}{x}$ -et.

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx =$$

A szokásos módon már csak behelyettesítünk a szabályba.

$$\int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + c$$

Ellenőrző kérdések:

12. kérdés: $\int \frac{6x-4}{3x^2-4x+1} dx$

$$\ln |6x-4| + c$$

$$\ln|3x^2 - 4x + 1| + c \text{ (X)}$$

$$\ln|3x^2 - 4x| + c$$

$$\ln|x^3 - 2x^2 + x| + c$$

$$\mathbf{13. \text{ kérdés: }} \int \frac{x^2 - 4}{x^3 - 12x} dx$$

$$\ln|x^3 - 12x| + c$$

$$\frac{1}{3} \ln|x^3 - 12x| + c \text{ (X)}$$

$$3 \ln|x^3 - 12x| + c$$

$$\ln|x^2 - 4| + c$$

$$\mathbf{14. \text{ kérdés: }} \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 8} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 8) + c \text{ (X)}$$

$$\ln(e^{2x} + 8) + c$$

$$2 \ln(e^{2x} + 8) + c$$

$$\frac{1}{e^{2x}} \ln(e^{2x} + 8) + c$$

$$\mathbf{15. \text{ kérdés: }} \int \operatorname{ctg} x dx$$

$$-\ln|\cos x| + c$$

$$\ln|\cos x| + c$$

$$\ln|\sin x| + c$$

$$-\ln|\sin x| + c \text{ (X)}$$

$$\mathbf{16. \text{ kérdés: }} \int \frac{1}{\operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 x} dx$$

$$-\ln|\operatorname{ctg} x| + c \text{ (X)}$$

$$\ln|\operatorname{ctg} x| + c$$

$$-\ln|\sin^2 x| + c$$

$$\ln|\sin^2 x| + c$$

$$\mathbf{17. \text{ kérdés: }} \int \frac{1}{(1+x^2) \cdot \operatorname{arctg} x} dx$$

$$-\ln(1+x^2)+c$$

$$\ln(1+x^2)+c$$

$$-\ln|\operatorname{arctg} x|+c$$

$$\ln|\operatorname{arctg} x|+c \quad (\text{X})$$

Elméleti összefoglaló: A szorzatfüggvény deriválási szabályának megfordításából egy újabb integrálási módszerhez juthatunk. Az alábbi tétel erről szól.

Tétel: Ha az $u(x)$ és $v(x)$ függvények differenciálhatóak, valamint $u'(x)v(x)$ integrálható, akkor az $u(x)v'(x)$ függvény is integrálható és

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Bizonyítás: Az $u(x)$ és $v(x)$ függvények differenciálhatóak, így a szorzatfüggvény deriválási szabályát alkalmazva:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Fejezzük ki ebből $u'(x)v(x)$ -et.

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$$

A jobb oldalon álló függvény integrálható, ebből következően a bal oldal is integrálható. Integráljuk mindkét oldalt.

$$\int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)dx$$

A jobb oldalon tagonként integrálhatunk.

$$\int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)dx$$

Mivel az első tagban az $u(x)v(x)$ függvény deriváltját integráljuk, így integrálás után visszakapjuk az eredeti $u(x)v(x)$ függvényt.

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

A parciális integrálás alkalmazásával az $u(x)v'(x)$ függvény integrálását az $u'(x)v(x)$ függvény integrálásra vezetjük vissza. A szabályt olyan szorzatok esetén célszerű alkalmazni, melyekben a $v'(x)$ -nek megfelelő tényező könnyen integrálható, s ha az $u'(x)v(x)$ könnyebben integrálható mint $u(x)v'(x)$. A szabály alkalmazásával soha nem fejeződik be a feladat megoldása, hiszen a jobb oldalon a második tag még integrált tartalmaz. Ezért is kapta elnevezését a szabály, hiszen csak részben történik meg az integrálás. Az alkalmazás során nagyon fontos, hogy egy integrálandó szorzat tényezői közül melyiket választjuk $u(x)$ -nek, illetve $v'(x)$ -nek. Erre vonatkozóan a kidolgozott feladatokban adunk útmutatást.

Kidolgozott feladatok:

18. feladat: $\int (2x-6) \cdot \operatorname{sh} x dx$

Megoldás: Az integrandus most szorzat, s azon belül is egyik tényezője polinom, a másik pedig a $\operatorname{sh} x$. Próbálkozzunk az előbb megismert parciális integrálás alkalmazásával.

Válasszuk a polinomot $u(x)$ -nek, mert így a szabály alkalmazása után visszamaradó integrálban majd ezen polinom deriváltja fog megjelenni, ami már csak egy konstans. Így a parciális integrálás után már nem szorzatfüggvény áll majd az integrandusban.

Legyen tehát $u(x) = 2x - 6$ és $v'(x) = \operatorname{sh} x$.

Ekkor $u'(x) = 2$ és $v(x) = \operatorname{ch} x$.

Az ismert $v'(x)$ -ből integrálással kaptuk meg $v(x)$ -et. Ezért fontos, hogy a $v'(x)$ -nek választott tényező könnyen integrálható legyen.

Helyettesítsünk be a szabályba.

$$\int (2x - 6) \cdot \operatorname{sh} x dx = (2x - 6) \cdot \operatorname{ch} x - \int 2 \cdot \operatorname{ch} x dx$$

A feladatot még nem oldottuk meg, hisz még van egy integrálunk. Ebből azonban a konstans szorzót kiemelhetjük, s utána már csak egy alapintegrál marad. Így az eredmény a következő lesz:

$$\begin{aligned} (2x - 6) \cdot \operatorname{ch} x - \int 2 \cdot \operatorname{ch} x dx &= (2x - 6) \cdot \operatorname{ch} x - 2 \int \operatorname{ch} x dx = \\ &= (2x - 6) \cdot \operatorname{ch} x - 2 \operatorname{sh} x + c. \end{aligned}$$

19. feladat: $\int (3x + 7) \cdot 5^x dx$

Megoldás: Az integrandus egy hasonló szorzat, mint amilyen az előző feladatban szerepelt.

Az első tényező most is egy polinom, a második tényezőben pedig 5^x vette át a $\operatorname{sh} x$ szerepét.

Az 5^x is könnyen integrálható, így megint a parciális integrálással próbálkozhatunk.

Legyen $u(x) = 3x + 7$ és $v'(x) = 5^x$.

Ekkor $u'(x) = 3$ és $v(x) = \frac{5^x}{\ln 5}$.

Helyettesítsünk be a szabályba.

$$\int (3x + 7) \cdot 5^x dx = (3x + 7) \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \int 3 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} dx$$

A még meghatározandó integrálból emeljük ki a konstansokat, így már csak egy alapintegrál marad majd, amit meghatározunk.

$$\begin{aligned} (3x + 7) \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \int 3 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} dx &= (3x + 7) \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{3}{\ln 5} \int 5^x dx = \\ &= (3x + 7) \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{3}{\ln 5} \cdot \frac{5^x}{\ln 5} + c = \frac{5^x}{\ln 5} \left(3x + 7 - \frac{3}{\ln 5} \right) + c \end{aligned}$$

Az utolsó két feladatban az volt a közös, hogy olyan szorzatot kellett integrálnunk, melyek egyik tényezője egy polinom, másik tényezője pedig az a^x , e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ függvények valamelyike. Ilyenkor célszerű a parciális integrálást alkalmazni olyan szereposztással, hogy $u(x)$ a polinom legyen, $v'(x)$ pedig a másik tényező. A szabályt használva a visszamaradó integrálban eggyel alacsonyabb fokszámú polinom marad már csak. Ha az eredeti polinom elsőfokú volt, akkor a visszamaradó integrálban $u'(x)$ már csak egy konstans lesz, ami az integrálból kiemelhető. A $v'(x)$ -nek megfelelő függvényt könnyen

tudjuk integrálni, hiszen az függvények a^x , e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ mindegyike alapintegrál. Ráadásul az integrálás eredményeként kapott $v(x)$ függvényt is könnyű integrálni, mert az is alapintegrál, vagy annak száma szorosa lesz. Ez akkor fontos, ha a polinom nem elsőfokú. Ilyenkor a szabályt többször kell alkalmazni egymás után, egészen addig, míg a polinomból csak egy konstans marad a deriválások után. Erre majd a későbbiekben mutatunk példát.

20. feladat: $\int (4x+3) \cdot \ln x \, dx$

Megoldás: Ismét szorzatot kell integrálnunk, és az egyik tényező most is polinom, de a másik tényezőben álló $\ln x$ más típusú mint ami az előző két feladatban szerepelt. Akkor ott olyan függvény állt, amely alapintegrál volt. A $\ln x$ nem ilyen függvény. Ezért nem célszerű $v'(x)$ -nek választani, hiszen akkor a $v(x)$ -et nem könnyű meghatározni. Legyen tehát a szereposztás most a parciális integrálás során a következő:

$$u(x) = \ln x \text{ és } v'(x) = 4x + 3.$$

$$\text{Ekkor } u'(x) = \frac{1}{x} \text{ és } v(x) = 2x^2 + 3x.$$

Helyettesítsünk ezután a szabályba.

$$\int (4x+3) \cdot \ln x \, dx = (2x^2 + 3x) \cdot \ln x - \int (2x^2 + 3x) \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

A még meghatározandó integrálban egyszerűsítsünk, majd végezzük el az integrálást. Nem lesz nehéz dolgunk, mert az egyszerűsítés után egy polinomot kell integrálnunk.

$$(2x^2 + 3x) \cdot \ln x - \int 2x + 3 \, dx = (2x^2 + 3x) \cdot \ln x - (x^2 + 3x) + c$$

21. feladat: $\int x^3 \cdot \ln x \, dx$

Megoldás: Hasonló szorzatot kell integrálnunk mint az előző feladatban, csak most a polinom nem több tagból áll, hanem csak egyetlen tagból. Ugyanúgy járhatunk el, mint az előbb.

$$\text{Legyen } u(x) = \ln x \text{ és } v'(x) = x^3.$$

$$\text{Ekkor } u'(x) = \frac{1}{x} \text{ és } v(x) = \frac{x^4}{4}.$$

Helyettesítsünk ezután a szabályba.

$$\int x^3 \cdot \ln x \, dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

A visszamaradó integrálban most is egyszerűsítsünk, a konstans szorzót pedig emeljük ki. Mivel x -nek egy hatványa marad csak, így ezt már könnyen tudjuk integrálni.

$$\frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c$$

Az eredmény szebb alakban írható, ha kiemeljük amit lehet.

$$\frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + c$$

22. feladat: $\int \ln x \, dx$

Megoldás: Az előző négy feladatban szorzat állt az integrálban, de most nem. Azaz egy egyszerű trükkal most is szorzattá alakíthatjuk. Írjuk az $\ln x$ -et $1 \cdot \ln x$ formában. Az 1 is egy polinom, csak nagyon egyszerű polinom, hiszen 0 a fokszáma. $(1 = x^0)$ Így már ugyanúgy járhatunk el mint az előző két feladatban.

Legyen $u(x) = \ln x$ és $v'(x) = 1$.

Ekkor $u'(x) = \frac{1}{x}$ és $v(x) = x$.

Helyettesítsünk ezután a szabályba.

$$\int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

A visszamaradó integrálban egyszerűsítsünk, majd hajtsuk végre az integrálást.

$$x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int 1 dx = x \cdot \ln x - x + c$$

Az eredmény kiemelés után most is írható más alakban.

$$x \cdot \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

Az utolsó három feladatban olyan szorzatokat kellett integrálni, melyek egyik tényezője polinom volt, ez lehetett csak egy konstans is, a másik tényezője pedig az $\ln x$. Ilyenkor is alkalmazható a parciális integrálás, de nem a polinomot kell $u(x)$ -nek választani, hanem az $\ln x$ -et. Ennek oka az, hogy az $\ln x$ nem alapintegrál, így nem olyan könnyen integrálható mint például a $\sin x$. Természetesen ez azt is jelenti, hogy ilyenkor a polinom lesz a $v'(x)$. Ez jó is, hiszen egy polinom hatványfüggvények konstans szorosának összegéből áll, a hatványok pedig könnyen integrálhatóak. Az integrálás növeli a hatványok fokszámát, így az integrálás utáni polinomban nem szerepel konstans tag. A legalacsonyabb fokszámú tag is

legalább elsőfokú. Mivel az $\ln x$ deriváltja $\frac{1}{x}$, így a visszamaradó integrálban egy legalább

elsőfokú tagokat tartalmazó polinomot szorzunk $\frac{1}{x}$ -szel. Ilyenkor mindig egyszerűsíthetünk

x -szel, és egy polinomot kapunk. Ezt pedig könnyen tudjuk integrálni.

Ellenőrző kérdések:

18. kérdés: $\int (3x - 4) \sin x dx$

$$3 \cos x - (3x - 4) \sin x + c$$

$$(3x - 4) \sin x - 3 \cos x + c$$

$$3 \sin x - (3x - 4) \cos x + c \text{ (X)}$$

$$(3x - 4) \cos x - 3 \sin x + c$$

19. kérdés: $\int (2x + 7) \cdot 3^x dx$

$$\frac{3^x}{\ln 3} \left(2x + 7 - \frac{2}{\ln 3} \right) + c \text{ (X)}$$

$$\frac{3^x}{\ln 3} \left(2x + 7 + \frac{2}{\ln 3} \right) + c$$

$$3^x \cdot \ln 3 \cdot (2x + 7 - 2 \cdot \ln 3) + c$$

$$3^x \cdot \ln 3 \cdot (2x + 7 + 2 \cdot \ln 3) + c$$

20. kérdés: $\int (5x+8) \cdot \operatorname{ch} x dx$

$$(5x+8) \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x + c$$

$$(5x+8) \operatorname{sh} x - 5 \operatorname{ch} x + c \quad (\text{X})$$

$$(5x+8) \operatorname{ch} x + 5 \operatorname{sh} x + c$$

$$(5x+8) \operatorname{ch} x - 5 \operatorname{sh} x + c$$

21. kérdés: $\int (8x-9) \cdot \ln x dx$

$$(4x^2 - 9x) \cdot \ln x - (8x-9) \cdot \frac{1}{x} + c$$

$$(4x^2 - 9x) \cdot \ln x + (8x-9) \cdot \frac{1}{x} + c$$

$$(4x^2 - 9x) \cdot \ln x - (2x^2 - 9x) + c \quad (\text{X})$$

$$(4x^2 - 9x) \cdot \ln x + (2x^2 - 9x) + c$$

22. kérdés: $\int x^2 \cdot \ln x dx$

$$\frac{x^3}{3} (\ln x + 1) + c$$

$$\frac{x^3}{3} (\ln x - 1) + c$$

$$\frac{x^3}{3} \left(\ln x + \frac{1}{3} \right) + c$$

$$\frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + c \quad (\text{X})$$

További kidolgozott feladatok:

23. feladat: $\int \frac{1}{1+9x^2} dx$

Megoldás: Az integrandus ezen alakjából nem igazán látszik az, hogyan tudnánk elvégezni az integrálást. Viszont észrevehetjük, hogy az integrálandó függvény nagyon hasonlít az $\frac{1}{1+x^2}$ függvényre, ami alapintegrál. A különbség az x^2 előtt álló 9-es szorzóban van. Ha egy kicsit

alakítunk a függvényen, és a $9x^2$ -et $(3x)^2$ formában írjuk, akkor lényegében az $\frac{1}{1+x^2}$ -et kapjuk, csak az x szerepét a $3x$ veszi át. Az integrál így a következő alakot ölti:

$$\int \frac{1}{1+9x^2} dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2} dx.$$

Ebből már látható, hogy olyan összetett függvényünk van, amelynek belső függvénye elsőfokú. A lecke elején megismert $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ szabályt alkalmazhatjuk tehát. Most azonban nem volt olyan egyértelmű, hogy ilyen típusú az integrál. Ez csak átalakítás után válik egyértelművé. A szabály ezután a következő módon használható.

A külső függvény most $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, ami egy alapintegrál: $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$.

A belső függvény $3x$, tehát $a=3$, és $b=0$.

Behelyettesítve a szabályba a következő eredményt kapjuk:

$$\int \frac{1}{1+9x^2} dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2} dx = \frac{\arctg 3x}{3} + c.$$

A feladatból jól látszik, hogy az alapintegrálok biztos ismerete nagyon fontos. Csak akkor jöhet rá valaki, hogy milyen alakban kell írni az integrandust, ha tisztában azzal, hogy $\frac{1}{1+x^2}$ egy alapintegrál. Ezután már könnyű észrevenni ezen alapintegrál, és az integrandus közötti hasonlóságot.

24. feladat: $\int \frac{1}{4+x^2} dx$

Megoldás: A feladat nagyon hasonlít az előzőre. Az integrandus alig különbözik az $\frac{1}{1+x^2}$ alapintegráltól, de most más helyen tér el attól, mint az előző feladatban. Elsőként azt lenne jó elérnünk, hogy a nevezőben a 4 helyén 1 álljon, ezért célszerű kiemelni $\frac{1}{4}$ -et.

$$\int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} dx$$

Ezzel elértük, hogy az integrandus lényegében olyan, mint az előző feladatban, csak x^2 együtthatója nem egy egész szám, hanem egy tört. Írjunk ezután az $\frac{x^2}{4}$ helyett $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ -t, amit

$\left(\frac{1}{2}x\right)^2$ formában is írhatunk.

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}x\right)^2} dx$$

Így már egyértelmű, hogy megint olyan összetett függvényt kell integrálnunk, amiben a belső függvény lineáris, s amelyben $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a külső függvény. Ennek integrálja már

korábban is szerepelt: $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$.

A belső függvény most $\frac{1}{2}x$, azaz $a = \frac{1}{2}$ és $b = 0$.

Alkalmazzuk az $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ szabályt, azaz integráljuk a külső függvényt,

alkossunk összetett a lineáris belső függvénnyel, és osszuk a belső függvényből x együtthatójával. Így eredményünk az alábbi lesz:

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2} dx = \frac{1}{4} \frac{\arctg \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + c.$$

25. feladat: $\int \frac{1}{x^2 - 6x + 10} dx$

Megoldás: A feladat hasonlít az előző kettőre, azonban míg az ottani törtnek nevezőjében csak egy négyzetes tag és egy konstans állt, most elsőfokú tag is van. Középiskolában megismertük a másodfokú kifejezések teljes négyzetté alakítását. Ha ezt alkalmazzuk, akkor most is elérhetjük, hogy a nevezőben csak másodfokú és konstans tag álljon.

$$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1 = (x-3)^2 + 1$$

Írjuk ezt be az integrálba.

$$\int \frac{1}{x^2 - 6x + 10} dx = \int \frac{1}{(x-3)^2 + 1} dx$$

Azt láthatjuk, hogy lényegében megint az $\frac{1}{1+x^2}$ függvényt kaptuk, csak az x szerepét az $x-3$ vette át. Olyan összetett függvényt kell tehát integrálnunk, aminek külső függvénye az

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ függvény, aminek integrálja: } F(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c.$$

A belső függvény most $x-3$, azaz $a=1$ és $b=-3$.

Alkalmazzuk az $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ szabályt.

$$\int \frac{1}{(x-3)^2 + 1} dx = \frac{\arctg(x-3)}{1} + c = \arctg(x-3) + c$$

26. feladat: $\int \frac{7}{25x^2 + 20x + 13} dx =$

Megoldás: Olyan tört áll az integrandusban, melynek számlálója konstans, nevezője pedig egy másodfokú kifejezés. Hasonlóval találkoztunk az előző három feladatban is, csak azokban a nevezőben álló másodfokú kifejezés sokkal egyszerűbb volt. Ezekben a feladatokban olyan összetett függvénné tudtuk alakítani az integrandust, melyeknek lineáris volt a belső

függvénye. Most is megpróbálhatjuk ezt elérni. Hajtsunk végre olyan átalakításokat, mint az előző három feladatban. Első lépésként alakítsunk teljes négyzetté a nevezőben, a számlálóból a konstans pedig emeljük ki.

$$\int \frac{7}{25x^2 + 20x + 13} dx = 7 \int \frac{1}{(5x+2)^2 + 9} dx$$

Ezután emeljük ki a nevezőből a 9-et, hogy helyén 1 maradjon. Azért tesszük ezt, mert a függvény így egyre jobban hasonlít majd az $\frac{1}{1+x^2}$ alapintegrálra.

$$7 \int \frac{1}{(5x+2)^2 + 9} dx = \frac{7}{9} \int \frac{1}{\frac{(5x+2)^2}{9} + 1} dx$$

Az $\frac{(5x+2)^2}{9}$ -et írjuk inkább $\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2$ alakban.

$$\frac{7}{9} \int \frac{1}{\frac{(5x+2)^2}{9} + 1} dx = \frac{7}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2 + 1} dx$$

Utolsó átalakításként pedig az $\frac{5x+2}{3}$ helyett használjuk inkább az $\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$ alakot, valamint cseréljük meg a nevezőben a tagok sorrendjét.

$$\frac{7}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{7}{9} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}\right)^2} dx$$

Ezen alakból már jól látszik, hogy olyan összetett függvényt kell integrálnunk, melynek külső függvénye az $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ alapintegrál, amiből $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$. A belső függvénye pedig az $\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$ lineáris függvény, azaz $a = \frac{5}{3}$ és $b = \frac{2}{3}$.

Alkalmazzuk az ilyen összetett függvényekre vonatkozó $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$

integrálási szabályt. Az alábbi eredményt kapjuk:

$$\frac{7}{9} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}\right)^2} dx = \frac{7}{9} \frac{\arctg\left(\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}\right)}{\frac{5}{3}} + c = \frac{7}{15} \arctg\left(\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}\right) + c$$

A feladat megoldása során alkalmazott eljárás segítségével integrálhatjuk az összes olyan törtet, melynek számlálója konstans, nevezője pedig valósban szorzattá nem bontható másodfokú kifejezés, azaz nincs valós gyöke. Ilyenkor a nevezőben teljes négyzetté alakítunk, majd kiemeléssel elérjük, hogy az összegben szereplő konstans tag 1 legyen. A nevezőben szereplő másik tagot úgy alakítjuk, hogy egy elsőfokú kifejezés négyzete legyen. Ekkor olyan összetett függvényt kapunk, melynek külső függvénye $\frac{1}{1+x^2}$, belső függvénye pedig lineáris.

27. feladat: $\int (4x^2 - 6x + 5) \cdot \cos x dx$

Megoldás: Az integrandus egy szorzat, melynek első tényezője egy polinom, második tényezője pedig a $\cos x$. Ilyen esetben a parciális integrálás $\left(\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v\right)$ vezet célhoz.

Legyen $u = 4x^2 - 6x + 5$ és $v' = \cos x$.

Ekkor $u' = 8x - 6$ és $v = \sin x$.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int (4x^2 - 6x + 5) \cdot \cos x dx = (4x^2 - 6x + 5) \cdot \sin x - \int (8x - 6) \cdot \sin x dx$$

A még meghatározandó integrál ugyanolyan típusú, mint amilyen az eredeti feladat volt, csak 1-gyel alacsonyabb a polinom fokszáma, azaz már csak elsőfokú. Ezért újra alkalmazzuk a parciális integrálást.

Legyen $u = 8x - 6$ és $v' = \sin x$.

Ekkor $u' = 8$ és $v = -\cos x$.

Amikor a szabályba helyettesítünk, akkor figyeljünk oda, hogy az integrál előtt negatív előjel állt, ami az integrál helyére kerülő mindkét tagra vonatkozik majd. Ezért célszerű zárójelbe tenni a behelyettesítésnél, hogy csökkentsük a hibázás veszélyét.

$$\int (4x^2 - 6x + 5) \cdot \cos x dx = (4x^2 - 6x + 5) \cdot \sin x - \left((8x - 6) \cdot (-\cos x) - \int 8(-\cos x) dx \right)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és emeljük ki a konstans az integrálból.

$$\int (4x^2 - 6x + 5) \cdot \cos x dx = (4x^2 - 6x + 5) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x - 8 \int \cos x dx$$

Már csak egy alapintegrálunk van, melyet behelyettesítünk, majd amit lehet összevonunk. Az eredmény a következő:

$$\begin{aligned} \int (4x^2 - 6x + 5) \cdot \cos x dx &= (4x^2 - 6x + 5) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x - 8 \sin x + c = \\ &= (4x^2 - 6x - 3) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x + c. \end{aligned}$$

28. feladat: $\int (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{sh}(3x - 8) dx$

Megoldás: Az előzőhöz nagyon hasonló feladatunk van. Ugyanúgy parciális integrálással próbálkozhatunk.

Legyen $u = x^2 + 4x - 7$ és $v' = \operatorname{sh}(3x - 8)$.

Ekkor $u' = 2x + 4$ és $v = \frac{\operatorname{ch}(3x - 8)}{3}$.

A v meghatározásakor figyeljünk oda arra, hogy $v' = \operatorname{sh}(3x - 8)$ olyan összetett függvény, aminek belső függvénye elsőfokú. Az integrálás során ne felejtünk el osztani a belső függvényből x együtthatójával.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{sh}(3x - 8) dx = (x^2 + 4x - 7) \cdot \frac{\operatorname{ch}(3x - 8)}{3} - \int (2x + 4) \cdot \frac{\operatorname{ch}(3x - 8)}{3} dx$$

A konstans szorzókat célszerű egy-egy tagban előre emelni.

$$\int (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{sh}(3x - 8) dx = \frac{1}{3} (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{ch}(3x - 8) - \frac{1}{3} \int (2x + 4) \cdot \operatorname{ch}(3x - 8) dx$$

A megmaradt integrál ugyanolyan típusú, mint amilyen az eredeti volt, csak 1-gyel alacsonyabb a polinom fokszáma, azaz már csak elsőfokú. Ezért újra alkalmazzuk a parciális integrálást.

Legyen $u = 2x + 4$ és $v' = \operatorname{ch}(3x - 8)$.

Ekkor $u' = 2$ és $v = \frac{\operatorname{sh}(3x-8)}{3}$.

Amikor a szabályba helyettesítünk, akkor figyeljünk oda, hogy az integrál előtti $-\frac{1}{3}$ szorzó az integrál helyére kerülő mindkét tagra vonatkozik majd. Ezért célszerű zárójelbe tenni a behelyettesítésnél, hogy csökkentsük a hibázás veszélyét.

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{sh}(3x-8) dx &= \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{ch}(3x-8) - \frac{1}{3} \left((2x+4) \cdot \frac{\operatorname{sh}(3x-8)}{3} - \int 2 \cdot \frac{\operatorname{sh}(3x-8)}{3} dx \right) \end{aligned}$$

Bontsuk fel a zárójelet, és emeljük ki a konstans az integrálból.

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{sh}(3x-8) dx &= \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{ch}(3x-8) - \frac{1}{9} (2x+4) \cdot \operatorname{sh}(3x-8) + \frac{2}{9} \int \operatorname{sh}(3x-8) dx \end{aligned}$$

Már csak egy olyan összetett függvényt kell integrálnunk, aminek belső függvénye elsőfokú. Amikor először alkalmaztuk a parciális integrálást, akkor már integráltuk is ezt a függvényt, hiszen akkor ez volt a v' -nek választott tényező. Az alábbi eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{sh}(3x-8) dx &= \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{ch}(3x-8) - \frac{1}{9} (2x+4) \cdot \operatorname{sh}(3x-8) + \frac{2}{9} \frac{\operatorname{ch}(3x-8)}{3} + c = \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{ch}(3x-8) - \frac{1}{9} (2x+4) \cdot \operatorname{sh}(3x-8) + \frac{2}{27} \operatorname{ch}(3x-8) + c. \end{aligned}$$

Ha összevonjuk a két $\operatorname{ch}(3x-8)$ -at tartalmazó tagot, akkor az eredmény kicsit rövidebben is írható.

$$\int (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{sh}(3x-8) dx = \frac{1}{3} \left(x^2 + 4x - \frac{61}{9} \right) \cdot \operatorname{ch}(3x-8) - \frac{1}{9} (2x+4) \cdot \operatorname{sh}(3x-8) + c.$$

29. feladat: $\int 3^x \cdot \cos x dx$

Megoldás: Az integrandus olyan szorzat, melynek egyik tényezője exponenciális, másik tényezője pedig a $\sin x$ vagy $\cos x$ függvények valamelyike. Ilyen esetben is sokszor célszerű a parciális integrálás alkalmazása, sőt kétszer is kell használni a szabályt. Az ilyen integrandus esetén mindegy, hogyan osztjuk ki a szerepeket az első parciális integrálás során. Legyen most $u = 3^x$ és $v' = \cos x$ a szereposztás.

Ekkor $u' = 3^x \cdot \ln 3$ és $v = \sin x$.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int 3^x \cdot \cos x dx = 3^x \cdot \sin x - \int 3^x \cdot \ln 3 \cdot \sin x dx$$

Emeljük ki az integrálból a konstans $\ln 3$ -at, majd osszuk ki a következő parciális integráláshoz a szerepeket. Itt már nem mindegy, hogyan választunk. Ugyanúgy kell kiosztanunk a szerepeket, mint az első esetben.

$$\int 3^x \cdot \cos x dx = 3^x \cdot \sin x - \ln 3 \int 3^x \cdot \sin x dx$$

Legyen tehát $u = 3^x$ és $v' = \sin x$ a szereposztás.

Ekkor $u' = 3^x \cdot \ln 3$ és $v = -\cos x$.

Újra helyettesítsünk a szabályba.

$$\int 3^x \cdot \cos x dx = 3^x \cdot \sin x - \ln 3 \cdot \left(3^x \cdot (-\cos x) - \int 3^x \cdot \ln 3 \cdot (-\cos x) dx \right)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és ismét emeljük ki a konstans az integrálból.

$$\int 3^x \cdot \cos x dx = 3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x - \ln^2 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x dx$$

Így lényegében egy olyan egyenletet kaptunk, amiben az integrál az ismeretlen, mert a kétszeri parciális integrálás után az eredeti integrál szám szorosát kaptuk. Annyi a feladatunk, hogy ebből az egyenletből kifejezzük az integrált. Első lépésként adjunk mindkét oldalhoz $\ln^2 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x dx$ -et.

$$\ln^2 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x dx - \ln^2 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x dx = 0$$

$$\int 3^x \cdot \cos x dx + \ln^2 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x dx = 3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x + c$$

Emeljük ki az integrált a bal oldalon.

$$(1 + \ln^2 3) \int 3^x \cdot \cos x dx = 3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x + c$$

Végül osszuk az egyenlet mindkét oldalát $(1 + \ln^2 3)$ -mal.

$$\int 3^x \cdot \cos x dx = \frac{1}{1 + \ln^2 3} (3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x) + c$$

Ha az eredményből kiemeljük a 3^x -t, akkor a következő alakban is megadható:

$$\int 3^x \cdot \cos x dx = \frac{3^x}{1 + \ln^2 3} (\sin x + \ln 3 \cdot \cos x) + c.$$

30. feladat: $\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx$

Megoldás: A feladat hasonlít az előzőre. Olyan szorzatot kell integrálnunk, melynek egyik tényezője exponenciális, másik tényezője pedig $\sin$. Most is parciális integrálással célszerű próbálkoznunk, és tetszőlegesen oszthatjuk ki a szerepeket.

Legyen pl. $u = e^{2x}$ és $v' = \sin 3x$.

Ekkor $u' = 2e^{2x}$ és $v = -\frac{\cos 3x}{3}$.

Szeretnénk felhívni a figyelmet arra, hogy mindkét tényező olyan összetett függvény, melynek belső függvénye elsőfokú. Figyeljünk oda, mert amikor u -ból u' -t állítjuk elő, akkor a deriválásnál a belső függvény deriváltjával szoroznunk kell a külső függvény deriváltját, amikor pedig v' -ből állítjuk elő v -t, azaz integrálunk, akkor a belső függvényből x együttthatójával osztanunk kell a külső függvény integrálját.

Helyettesítsünk be ezután a szabályba.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = e^{2x} \cdot \left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) - \int 2e^{2x} \cdot \left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) dx$$

Mielőtt újra alkalmaznánk a parciális integrálást, célszerű ezt egy kicsit rendezni, s a konstansokat kiemelni a tagokban.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cdot \cos 3x dx$$

Most újra osszuk ki a szerepeket immáron figyelve arra, hogy ugyanúgy tegyük ezt, mint az első esetben.

Legyen $u = e^{2x}$ és $v' = \cos 3x$.

Ekkor $u' = 2e^{2x}$ és $v = \frac{\sin 3x}{3}$.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{3} \left(e^{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3} - \int 2e^{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3} dx \right)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és a konstansokat most is emeljük ki a tagokból.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cdot \sin 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cdot \sin 3x dx$$

A kétszeri parciális integrálás után az eredeti integrál egy szám szorosát kaptuk a jobb oldalon. Így annyi a feladatunk, hogy a kapott egyenletből fejezzük ki az integrált. Adjunk

hozzá mindkét oldalhoz $\frac{4}{9} \int e^{2x} \cdot \sin 3x dx$ -et.

$$\frac{13}{9} \int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cdot \sin 3x + c$$

Végül osszunk $\frac{13}{9}$ -del, azaz szorozzunk $\frac{9}{13}$ -dal.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = -\frac{3}{13} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{13} e^{2x} \cdot \sin 3x + c$$

Ha az eredményből kiemelünk amit lehet, akkor az alábbi formában is írható:

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = \frac{e^{2x}}{13} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) + c .$$

Ellenőrző kérdések:

23. kérdés: $\int \frac{1}{1+49x^2} dx$

$$\ln(1+49x^2) + c$$

$$\frac{1}{49} \ln(1+49x^2) + c$$

$$\frac{1}{49} \operatorname{arctg} 49x^2 + c$$

$$\frac{1}{7} \operatorname{arctg} 7x + c \text{ (X)}$$

24. kérdés: $\int \frac{1}{16+x^2} dx$

$$\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + c \text{ (X)}$$

$$\frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + c$$

$$\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{16} + c$$

$$\frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{16} + c$$

25. kérdés: $\int \frac{1}{x^2 + 8x + 17} dx$

$$\ln(x^2 + 8x + 17) + c$$

$$\frac{\ln(x^2 + 8x + 17)}{2x + 8} + c$$

$$\operatorname{arctg}(x + 4) + c \text{ (X)}$$

$$\operatorname{arctg}(x + 8) + c$$

26. kérdés: $\int \frac{1}{4x^2 - 20x + 34} dx$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x - 5) + c$$

$$\frac{1}{10} \operatorname{arctg}(2x - 5) + c$$

$$\frac{1}{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right) + c \text{ (X)}$$

$$\frac{1}{18} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right) + c$$

27. kérdés: $\int (x^2 + 5x - 4) \cdot \sin x dx$

$$(x^2 + 5x - 6) \cdot \cos x + (2x + 5) \cdot \sin x + c$$

$$(2x + 5) \cdot \sin x - (x^2 + 5x - 6) \cdot \cos x + c \text{ (X)}$$

$$(x^2 + 5x - 2) \cdot \cos x + (2x + 5) \cdot \sin x + c$$

$$(2x + 5) \cdot \sin x - (x^2 + 5x - 2) \cdot \cos x + c$$

28. kérdés: $\int (x^2 + 1) \cdot \operatorname{ch}(2x - 5) dx$

$$\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}\right) \cdot \operatorname{sh}(2x - 5) + \frac{x}{2} \cdot \operatorname{ch}(2x - 5) + c$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}\right) \cdot \operatorname{sh}(2x - 5) - \frac{x}{2} \cdot \operatorname{ch}(2x - 5) + c \text{ (X)}$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}\right) \cdot \operatorname{sh}(2x - 5) + \frac{x}{2} \cdot \operatorname{ch}(2x - 5) + c$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}\right) \cdot \operatorname{sh}(2x - 5) - \frac{x}{2} \cdot \operatorname{ch}(2x - 5) + c$$

29. kérdés: $\int 4^x \cdot \sin x dx$

$$\frac{4^x}{1 + \ln^2 4} (\ln 4 \cdot \sin x - \cos x) + c \quad (\text{X})$$

$$\frac{4^x}{1 + \ln^2 4} (\sin x - \ln 4 \cdot \cos x) + c$$

$$\frac{4^x}{1 + \ln^2 4} (\ln 4 \cdot \sin x + \cos x) + c$$

$$\frac{4^x}{1 + \ln^2 4} (\sin x + \ln 4 \cdot \cos x) + c$$

30. kérdés: $\int e^{-3x} \cdot \cos 2x dx$

$$\frac{e^{-3x}}{13} (3 \sin 2x - 2 \cos 2x) + c$$

$$\frac{e^{-3x}}{13} (3 \sin 2x + 2 \cos 2x) + c$$

$$\frac{e^{-3x}}{13} (2 \sin 2x - 3 \cos 2x) + c \quad (\text{X})$$

$$\frac{e^{-3x}}{13} (2 \sin 2x + 3 \cos 2x) + c$$

4. Integrálszámítás

4.3. Modulzáró ellenőrző kérdések

1. kérdés: $\int \frac{5x+6}{\sqrt{x}} dx$

$$\frac{15}{2} \sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt{x} + c$$

$$\frac{10}{3} \sqrt{x^3} + 3\sqrt{x} + c$$

$$\frac{15}{2} \sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x} + c$$

$$\frac{10}{3} \sqrt{x^3} + 12\sqrt{x} + c \text{ (X)}$$

2. kérdés: $\int \frac{\cos^2 x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \cos^2 x} dx$

$$\frac{\sqrt{x}}{2} - \operatorname{tg} x + c$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2} + \operatorname{ctg} x + c$$

$$2\sqrt{x} - \operatorname{tg} x + c \text{ (X)}$$

$$2\sqrt{x} + \operatorname{ctg} x + c$$

3. kérdés: $\int_0^9 \sqrt{x} (5x - 23) dx$

$$72 \text{ (X)}$$

$$75$$

$$81$$

$$84$$

4. kérdés: Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 1$ függvény grafikonja és az x -tengely közötti alakzat területét a $[0, 2]$ intervallumon.

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{3}$$

$$2 \text{ (X)}$$

$$\frac{8}{3}$$

5. kérdés: Mekkora területű síkrészt zárnak közre az $f(x) = 4 - x^2$ és $g(x) = x - 2$ függvények grafikonjai?

$$20$$

$$\frac{41}{2}$$

$$\frac{62}{3}$$

$$\frac{125}{6} \text{ (X)}$$

6. kérdés: Forgassuk meg az x -tengely körül az $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ függvény $[8, 27]$

intervallumhoz tartozó íve és az x -tengely közötti síkrészt. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

$$2\pi$$

$$3\pi \text{ (X)}$$

$$4\pi$$

$$6\pi$$

7. kérdés: $\int \frac{1}{(3x+4)^2} dx$

$$\frac{1}{3(3x+4)} + c$$

$$\frac{-1}{3(3x+4)} + c \text{ (X)}$$

$$\frac{1}{4(3x+4)} + c$$

$$\frac{-1}{4(3x+4)} + c$$

8. kérdés: $\int \frac{1}{9x^2 - 12x + 20} dx$

$$\frac{1}{12} \arctg\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) + c \text{ (X)}$$

$$\frac{1}{3} \operatorname{arctg}(3x-2) + c$$

$$\frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) + c$$

$$\frac{1}{12} \operatorname{arctg}(3x-2) + c$$

9. kérdés: $\int x^2 (x^3 + 5)^4 dx$

$$\frac{(x^3 + 5)^5}{3} + c$$

$$\frac{(x^3 + 5)^5}{5} + c$$

$$\frac{(x^3 + 5)^5}{15} + c \text{ (X)}$$

$$\frac{(x^3 + 5)^5}{30} + c$$

10. kérdés: $\int \frac{1}{(1+x^2) \cdot \sqrt{\operatorname{arctg} x}} dx$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\operatorname{arctg} x} + c$$

$$2\sqrt{\operatorname{arctg} x} + c \text{ (X)}$$

$$\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{2 \cdot (1+x^2)} + c$$

$$\frac{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)} + c$$

11. kérdés: $\int \frac{5x-15}{x^2-6x} dx$

$$\ln|x^2-6x| + c$$

$$\frac{1}{2} \ln|x^2-6x| + c$$

$$\frac{5}{2} \ln|x^2-6x| + c \text{ (X)}$$

$$5 \ln|x^2-6x| + c$$

12. kérdés: $\int \operatorname{cth} x dx$

$$\ln |\operatorname{sh} x| + c \quad (\text{X})$$

$$-\ln |\operatorname{sh} x| + c$$

$$\ln |\operatorname{ch} x| + c$$

$$-\ln |\operatorname{ch} x| + c$$

13. kérdés: $\int (7x + 2) \cos x dx$

$$\left(\frac{7}{2} x^2 + 2x \right) \sin x + c$$

$$\left(\frac{7}{2} x^2 + 2x \right) \cos x + (7x + 2) \sin x + c$$

$$(7x + 2) \sin x + 7 \cos x + c \quad (\text{X})$$

$$7 \cos x - (7x + 2) \sin x + c$$

14. kérdés: $\int (4x + 3) \cdot \ln x dx$

$$(2x^2 + 3x) \cdot \ln x - (x^2 + 3x) + c \quad (\text{X})$$

$$(2x^2 + 3x) \cdot \ln x + (x^2 + 3x) + c$$

$$(2x^2 + 3x) \cdot \ln x - (4x + 3) \cdot \frac{1}{x} + c$$

$$(2x^2 + 3x) \cdot \ln x + (4x + 3) \cdot \frac{1}{x} + c$$

15. kérdés: $\int e^x \cdot \sin 3x dx$

$$\frac{e^x}{10} (\sin 3x - 3 \cos 3x) + c \quad (\text{X})$$

$$\frac{e^x}{10} (3 \sin 3x - \cos 3x) + c$$

$$\frac{e^x}{10} (\cos 3x - 3 \sin 3x) + c$$

$$\frac{e^x}{10} (3 \cos 3x - \sin 3x) + c$$