

8. lecke 3. önellenőrző feladat

A feladatban megadott kétváltozós termelési függvény $Q = F(K, L) = KL + 0,1KL^2 - L^3$.

A határtermék-függvények származtatása

A munka határterméke (MP_L) és a tőke határterméke (MP_K) a termelési függvény munka, illetve tőke szerinti parciális deriváltjaként adódik (ezt a módszertani segédlet részletesen tárgyalja):

$$MP_L = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} \text{ és } MP_K = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K}.$$

L -szerinti parciális deriválás során K -t konstansnak, K szerinti parciális deriválás során pedig L -t konstansnak kell tekinteni.

Ily módon MP_L származtatása részletesen:

- a termelési függvény első tagja KL ; ha ezt L szerint deriváljuk, akkor az eredmény K (ez ugyan olyan mintha $f(x) = 5x$ -et deriválnánk x szerint: az eredmény 5 lenne);
- a következő tag $0,1KL^2$: itt a $0,1K$ komponens nem tartalmaz L változót, ezt tehát „konstans” szorzótényezőként kezelve változatlan formában leírjuk, majd megszorozzuk L^2 deriváltjával, ami $2L$, vagyis a második tag deriváltja $0,1K \cdot 2L = 0,2KL$;
- az utolsó tag csak L -t tartalmaz, ennek deriváltja $3L^2$.

Az eredmény tehát: $MP_L = K + 0,2KL - 3L^2$.

MP_K esetében a fenti termelési függvényénél csak az első két taggal kell foglalkozni, mivel az utolsó tag nem tartalmaz K -t, ezért az „konstans”, vagyis deriváltja zérus. Az első két tagban K első hatványon van, vagyis deriválás után K helyére 1 kerül. Ily módon a végeredmény:

$$MP_K = L + 0,1L^2.$$

Az átlagtermék-függvények származtatása

A munka átlagtermékének (AP_L) meghatározásához a termelési függvényt osztani kell L -lel, a tőke átlagtermékének (MP_L) meghatározásához pedig K -val.

AP_L származtatása részletesen: tagonként végigosztunk L -lel, vagyis

$$\frac{KL}{L} = K; \quad \frac{0,1KL^2}{L} = 0,1KL; \quad \frac{L^3}{L} = L^2. \text{ A végeredmény tehát } AP_L = K + 0,1KL - L^2.$$

A tőke határterméke hasonló módon (csak az egyes tagokat K -val osztva):

$$AP_K = L + 0,1L^2 - \frac{L^3}{K}.$$

A táblázat kitöltése

A táblázat értékeit rögzített tőkeszint ($K=100$), vagyis a $K=100$ -as tőkeállományhoz tartozó parciális termelési függvény, valamint ennek határ- és átlagtermék-függvénye alapján kell meghatározni.

A feladat korábbi részéből ismert, hogy a termelési függvény, a munka átlag- és határtermék-függvénye a következő alakokat veszik fel:

$$Q = KL + 0,1KL^2 - L^3;$$

$$MP_L = K + 0,2KL - 3L^2;$$

$$AP_L = K + 0,1KL - L^2.$$

Ezekbe a képletekbe K helyére 100-at beírva az alábbi parciális függvényeket kapjuk:

$$Q = 100L + 10L^2 - L^3;$$

$$MP_L = 100 + 20L - 3L^2;$$

$$AP_L = 100 + 10L - L^2.$$

A termelés maximumában (a táblázat első sora) a határtermék zérus, tehát keressük azt az L értéket, amely mellett $MP_L = 100 + 20L - 3L^2 = 0$. A másodfokú függvény átrendezés után a következőképpen is felírhatjuk (ezzel az átrendezéssel könnyebb a másodfokú egyenlet középiskolában tanult megoldó képletének paraméterezése): $3L^2 - 20L - 100 = 0$.

$$L_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-100)}}{2 \cdot 3} \quad (\text{a negatív gyök közgazdaságilag nem értelmezhető})$$

$$L = \frac{20 + 40}{6} = 10 \quad (\text{ez a táblázat első üres cellájába kerülő érték})$$

Az $L=10$ eredményt ezek után helyettesítsük be a termelési, a határtermék- és az átlagtermék-függvénybe, így megkapjuk az első sor további értékeit!

$$Q = 100 \cdot 10 + 10 \cdot 10^2 - 10^3 = 1000$$

$MP_L = 100 + 20 \cdot 10 - 3 \cdot 10^2 = 0$ (erre a behelyettesítésre valóban nincs is szükség, legfeljebb ellenőrzésképpen, hiszen ebből az összefüggésből indultunk ki)

$$AP_L = 100 + 10 \cdot 10 - 10^2 = 100$$

Az utolsó oszlopban szereplő parciális termelési rugalmasság jele (ε_L) sajnos az én gépemen is hibásan jelenik meg (fogom jelezni a digitalizálónak), mindenestre ide ennek kell kerülnie,

amelyet a határtermék és az átlagtermék hányadosaként kapunk: $\varepsilon_L = \frac{MP_L}{AP_L} = \frac{0}{100} = 0$.

A **határtermék maximumában** a határtermék-függvény deriváltja nulla.

$$\frac{dMP_L}{dL} = 20 - 6L = 0$$

$$L = \frac{20}{6} = 3,3$$

A kapott L értéket ezek után ismét helyettesítsük be a termelési, a határtermék- és az átlagtermék-függvénybe, így megkapjuk a második sor további értékeit!

Az **átlagtermék maximumában** az átlagtermék-függvény deriváltja nulla.

$$\frac{dAP_L}{dL} = 10 - 2L = 0$$

$$L = \frac{10}{2} = 5$$

A kapott L értéket ezek után ismét helyettesítsük be a termelési, a határtermék- és az átlagtermék-függvénybe, így megkapjuk a harmadik sor további értékeit!