



SZÉCHENYI ISTVÁN  
EGYETEM  
GYŐR

## Mikroökonómiai optimumfeladatok megoldási módszerei

Alapvető deriválási szabályok.  
Feltételes szélső érték feladatok  
megoldása.

---

---

---

---

---

---

---



## Mit jelent az optimalizálás?

- feltételes szélsőérték-feladat
- döntési helyzet feltárása
- egyszerűsítő feltevések, modellek
- döntési változók azonosítása
- választási lehetőségek, korlátozó feltételek
- döntési kritérium, célfüggvény, racionális magatartás, optimum: maximum- vagy minimum
- a gazdálkodás fogalma, alkalmazási területek

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---



## A hasznosság maximalizálása

- egyváltozós hasznossági függvények
- a határhaszon fogalma
- a határhaszon mint differenciahányados
- a határhaszon mint differenciálhányados
- a legfontosabb deriválási szabályok
- egyváltozós hasznossági függvények szélső értékének meghatározása deriválással

Kapcsolódó irodalom: Koppány Krisztián [2005]: Módszertani  
segédlet... Universitas-Győr Kht. 17-19., 36-41., 46-47. o.

Koppány Krisztián, SZE

---

---

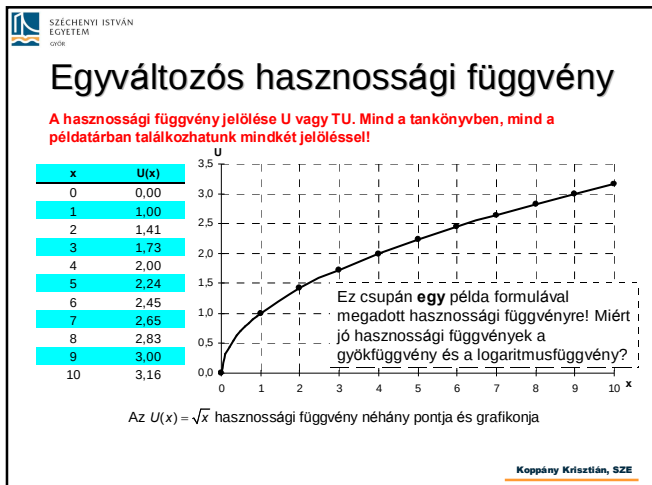
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

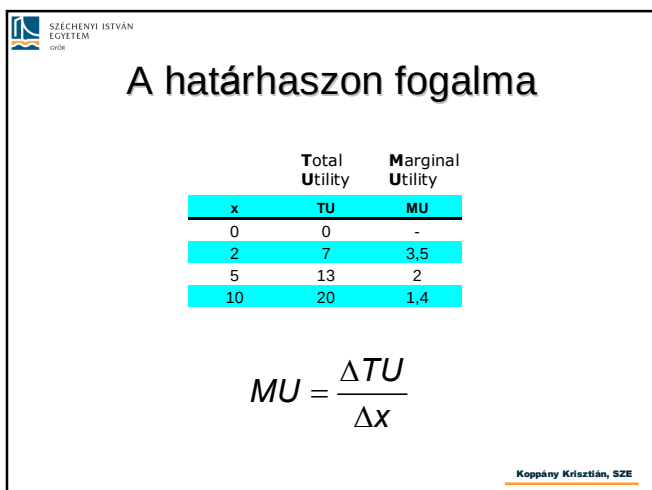
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

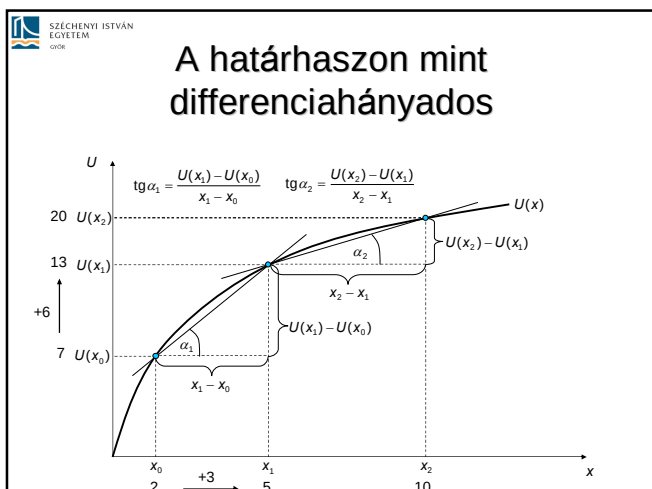
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

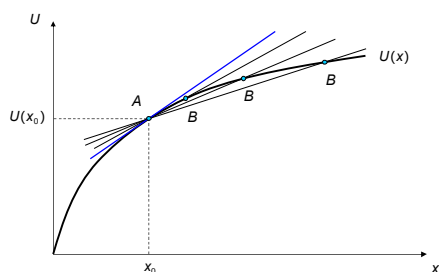
---

---

---

---

## A határhaszon mint differenciálhányados



$$MU(x) = \frac{dU(x)}{dx} = U'(x)$$

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

---

## A legfontosabb deriválási szabályok...

$$f(x) = x^\alpha \quad f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$f(x) = x^5 \quad f'(x) = 5x^4$$

$$g(x) = x^2 \quad g'(x) = 2x$$

$$h(x) = x \quad h'(x) = 1 \cdot x^0 = 1$$

$$f(x) = 2x^3 \quad f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^2 = 6x^2$$

$$g(x) = 2x \quad g'(x) = 2 \cdot 1 \cdot x^0 = 2$$

$$h(x) = 7 \quad h'(x) = 0$$

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

---

## ... és alkalmazásuk

$$TU(x) = \sqrt{x} = x^{0.5} \quad MU(x) = TU'(x) = 0.5 \cdot x^{-0.5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$TU(x) = 5x^{0.2} \quad MU(x) = 5 \cdot 0.2 \cdot x^{-0.8} = \frac{1}{x^{0.8}}$$

$$TU(x) = 2x^{\frac{2}{3}} \quad MU(x) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$TU(x) = 6x - x^2 \quad MU(x) = 6 - 2x$$

$$U(x) = \ln x \quad U'(x) = \frac{1}{x}$$

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

---

## Szélső érték meghatározása deriválással

- vegyünk egy telítődési ponttal rendelkező hasznossági függvényt pl.  $U(x) = 6x - x^2$
- ábrázoljuk!
- értelmezzük a telítődési pontot!
- határozzuk meg a függvény maximumhelyét a derivált (határhaszon függvény) zérushelye segítségével!
- ezzel az optimumfeladatok megoldásának egyik (bár nem minden esetben legkényelmesebb) módszerét elő is készítettük!

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

---

## Feltételes szélsőérték-feladatok megoldása: a legegyszerűbb módszer

- kétváltozós korlátozó feltételek értelmezése és felírása
  - gyakorlatias példák
  - költségvetési halmaz és költségvetési egyenes
  - tengelymetszet, meredekség
  - eltolódások, elfordulások
- kétváltozós célfüggvények értelmezése
- az optimális megoldás meghatározása
  - az egyik változót kifejezzük a korlátozó feltételből
  - a kapott formulát a hasznossági függvénybe írjuk
  - egyváltozós hasznossági függvényt kapunk
  - ennek szélső értéke a korábbiak alapján meghatározható

Kapcsolódó irodalom: Koppány [2005] 19-20., 75. és 79. o.

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

---

## Korlátozó feltételek a fogyasztásban

- egy egyetemi hallgató a félév elején 5000 Ft-os kártyával töltötte fel mobilját
- a mobiltelefont csak két célra használja
  - szülők hívása: vezetékes hálózatra történő hívás, kedvezményes időszakban, 30 Ft/perc
  - barátnő/barát hívása: hálózaton belüli hívás, éjszaka, díja 15 Ft/perc

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

---

## Jelölések

- jövedelem vagy a fogyasztásra költött pénzösszeg:  $I$  (esetünkben  $I = 5000$  Ft)
- a termékekből vásárolt (vásárolható) mennyiség:  $x$  és  $y$ 
  - szülőkkel való beszélgetési idő percben ( $x$ )
  - barátnővel/baráttal való beszélgetési idő percben ( $y$ )
- az egyes termékek árai:  $p_x$  és  $p_y$ 
  - hívás vezetékes hálózatra, kedvezményes időszakban ( $p_x = 30$ )
  - éjszakai hívás, hálózaton belül ( $p_y = 15$ )

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

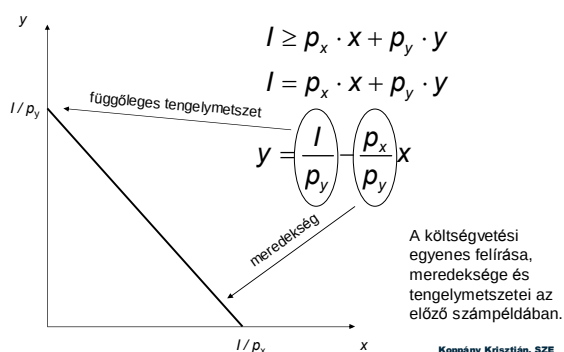
---

---

---

---

## Költségvetési halmaz és költségvetési egyenes általában



Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

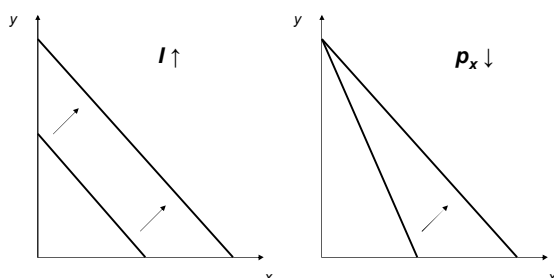
---

---

---

---

## A költségvetési egyenes elmozdulásai



A fenti változások értelmezése a korábbi konkrét példánkban.

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

---

## A célfüggvény és a teljes optimumfeladat

- tételezzük fel, hogy a telefonhívásokból származó hasznosság a következő függvény szerint alakul:  $U(x, y) = x \cdot y$
- hogyan használja fel a fenti fogyasztó a leghasznosabb módon az 5000 Ft-os egyenleget?
- a célfüggvény és a korlátozó feltétel felírása

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

## A megoldás lépései

- fejezzük ki az egyik változót a korlátozó feltételből
- a kapott formulát helyettesítsük be a célfüggvénybe
- a célfüggvény egyváltozósá alakult
- keressük meg az egyváltozós célfüggvény maximumhelyét
- a korlátozó feltételbe való visszahelyettesítéssel határozzuk meg a másik változó optimális értékét

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

## Optimumfeladatok egy másik megoldási módszere

- fontos előzetes tudnivalók
  - ez a megoldási módszer bír a legtöbb közgazdasági tartalommal
  - a megoldás lényege grafikusán jól szemléltethető
  - kétváltozós esetben a leginkább ajánlott eljárás
- a kétváltozós hasznossági függvények szintvonalai, közömbösségi görbék
- az optimális megoldás grafikus szemléltetése
- a helyettesítési ráta és helyettesítési határráta
- a parciális deriválás, kétváltozós hasznossági függvények parciális deriváltjai
- MRS meghatározása parciális deriváltak segítségével
- az MRS = költségvetési egyenes meredeksége optimumfeltétel alapján történő megoldás menete

Kapcsolódó irodalom: Koppány [2005] 75-78. o.

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---




---

---

---

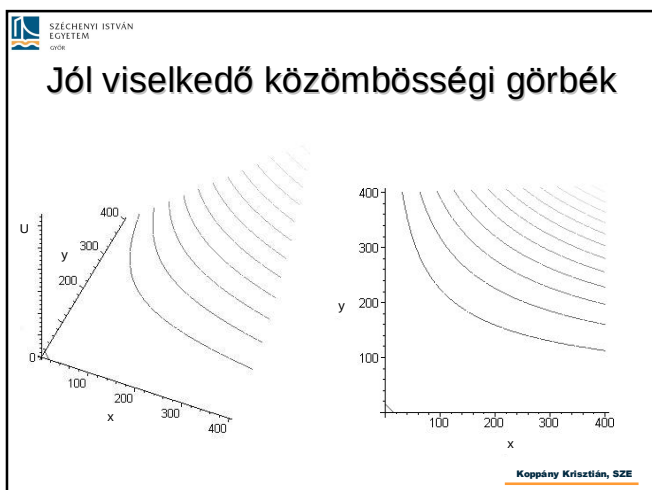
---

---

---

---

---




---

---

---

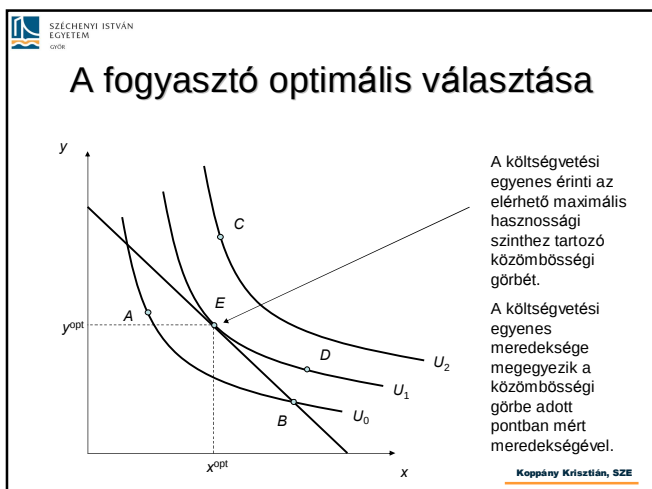
---

---

---

---

---




---

---

---

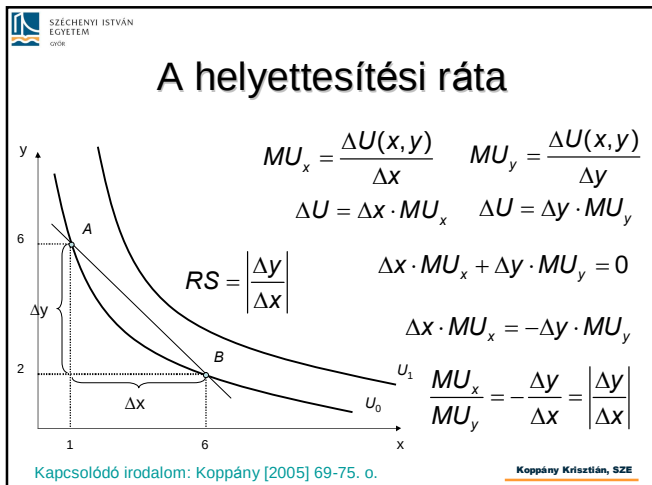
---

---

---

---

---




---

---

---

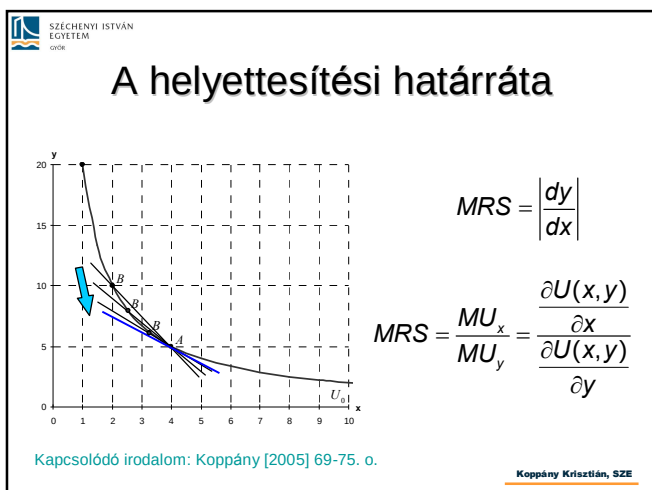
---

---

---

---

---




---

---

---

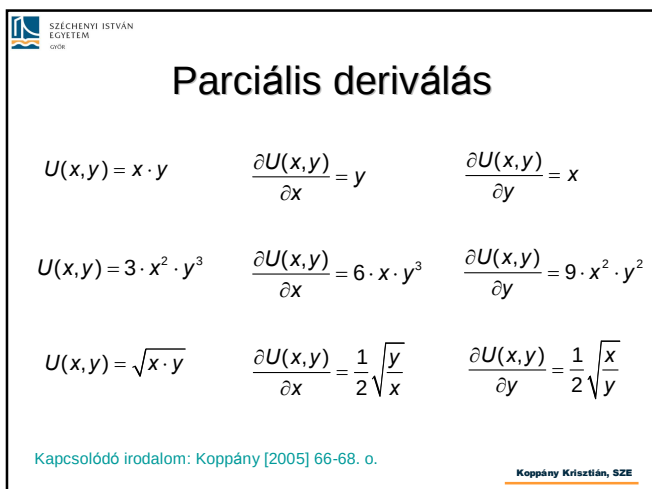
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---



## A megoldás lépései – a telefonos mintapéldán keresztül

- a határhasznossági függvények meghatározása
- az optimumfeltétel formális felírása
- az optimumfeltétel egyik változóra való rendezése és visszahelyettesítése a korlátozó feltételbe
- az így módon egyváltozósá alakult korlátozó feltétel megoldása
- a másik változó optimális értékének meghatározása visszahelyettesítéssel

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

## Optimális megoldás egy másfajta preferencia-rendezés esetén

- legyen most a fogyasztó hasznossági függvénye  $U(x, y) = x \cdot y^2$
- hogyan értelmezhetjük a preferenciák ilyen fajta változását?
- hogyan alakulnak ebben az esetben az optimális beszélgetési időtartamok?
- optimális megoldás

$$x = 55,56 \quad y = 222,22$$

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

## Optimumfeladatok a mikroökonómia tananyagban

- optimális fogyasztási szerkezet: a maximális hasznosságot biztosító fogyasztói kosár
- optimális munkavállalói döntés: a maximális életminőséget biztosító szabadidő-jövedelem kombináció
- optimális intertemporális választás: a maximális hasznosságot biztosító jelenbeli és jövőbeli fogyasztás kombináció
- optimális erőforrás-felhasználás
  - adott költségkerettel megvalósítható maximális kibocsátás
  - adott kibocsátás minimális költséggel
- mindig adott preferenciákkal és technológiákkal dolgozunk

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

## Példa: optimális munkavállalói döntés

- Egy munkavállaló számára a szabadidő és a bérjavarok együttes hasznosságát az  $U(sz, j) = (sz - 8)^j$  függvény írja le, ahol  $sz$  a napi szabadidő mennyisége órákban,  $8 < sz \leq 24$ ,  $j$  pedig a napi jövedelmet jelöli.
  - Ábrázolja az életminőség közömbösségi térképét néhány közömbösségi görbe segítségével!
  - Ábrázolja az életminőség költségvetési egyenesét 300, 420 és 650 Ft-os órabér mellett!
  - Mekkora az optimális munkamennyiség 300 Ft-os órabér esetén? Mekkora a napi bérjövedelem?

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

---

## Példa: optimális intertemporális allokáció

- Tamás most írt alá egy kétéves, 8 millió Ft összegű megbízási szerződést. A megbízási díjat két részletben kapja: idén 5 millió Ft-ot, jövőre 3 milliót. A kamatláb 10 százalékos, Tamás intertemporális hasznossági függvénye  $U(C_1, C_2) = \ln C_1 + \ln C_2$ .
  - Határozza meg Tamás optimális intertemporális allokációját!
  - Ábrázolja a szituációt!
  - Megtakarító vagy hitelfeltevő pozícióban van Tamás az első időszakban?

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

---

## Példa: optimális tényezőfelhasználás

- A termelési technológiát egy  $Q = 2K^{0.4}L^{0.6}$  alakú Cobb-Douglas-féle termelési függvény írja le.
- A rendelkezésre álló költségkeret 75 millió Ft, a munka után fizetett tényezőjövdelem 120 ezer Ft, a tőke utáni kamat pedig 20 százalékos.
  - Határozza meg az adott költségkeretből megvalósítható maximális kibocsátási szintet és az ehhez tartozó optimális tényezőkombinációt!
  - Határozza meg a 100 ezer darabos kibocsátási szinthez tartozó, minimális költséget biztosító, optimális tényezőkombinációt! Mekkora ez a minimális költség?

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---

---

## További nehezebb témakörök

- rugalmassági mutatók
- profitmaximalizálás, optimális kibocsátási nagyság
- piaci szerkezetek
  - versenypiac és monopólium
  - árdiskriminációs stratégiák monopolerő esetén
  - Cournot- és Stackelberg-duopólium
- vállalatok munkakereslete, optimális tényezőfelhasználás és kibocsátás az inputpiac oldaláról

Koppány Krisztián, SZE

---

---

---

---

---

---

---