Bácsó Sándor

Diszkrét Matematika I.

mobiDIÁK könyvtár

Bácsó Sándor

Diszkrét Matematika I.

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Bácsó Sándor

Diszkrét Matematika I.

egyetemi jegyzet

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem Informatikai Intézet

Lektor

Fazekas István

Copyright © Bácsó Sándor, 2003

Copyright © elektronikus közlés mobiDIÁK könyvtár, 2003

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Intézet
4010 Debrecen, Pf. 12
http://mobidiak.unideb.hu

A mű egyéni tanulmányozás céljára szabadon letölthető. Minden egyéb felhasználás csak a szerző előzetes írásbeli engedélyével történhet.
A mű a *A mobiDIÁK önszervező mobil portál* (IKTA, OMFB-00373/2003) és a *GNU Iterátor, a legújabb generációs portál szoftver* (ITEM, 50/2003) projektek keretében készült.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ez a jegyzet programtervező matematikus hallgatók számára készült a "Diszkrét matematika" című tantárgy előadásai alapján. Az első rész az első szemeszterben elsajátítandó anyagot tartalmazza.

A jegyzet anyaga erősen támaszkodik a középiskolában elsajátított matematikai tanulmányokra. A jegyzet első két fejezete előkészítő részei a nem metrikus lineáris matematikai ismereteknek (a metrikus lineáris algebrai fejezeteket a jegyzet második része tartalmazza). Itt csak a legfontosabb fogalmakat és állításokat adjuk meg, több esetben bizonyítás nélkül. Az irodalomjegyzékben található munkákban a bizonyítások is megismerhetők.

A jegyzet lényeges részei a harmadik, a negyedik és ötödik fejezetben találhatók. Itt tisztázzuk a vektorterekhez, mátrixokhoz, determinánsokhoz, lineáris egyenletrendszerekhez és lineáris leképezésekhez tartozó alapvető ismereteket teljes részletességgel.

Remélhetőleg a jegyzet eléri célját azzal, hogy használható ismereteket nyújt a további tanulmányokhoz. A jegyzethez példatár is készül, amellyel együtt alkot ez a munka egységes egészet.

A szerző köszönetet mond Fazekas István egyetemi docensnek az igen lelkiismeretes lektorálásért, nélkülözhetetlen tanácsaiért, továbbá Orosz Ágotának és Kaiser Zoltánnak a jegyzet gondos előállításáért.

1. fejezet
Halmazelmélet; relációk, függvények

1. Halmazelméleti alapfogalmak

Ebben a fejezetben alapfogalomként használjuk a *halmaz*, *elem* és az *eleme* szavakat, az alábbi jelölések mellett. Halmaz: $A, B, C, \dots$ vagy $A_1, A_2, A_3, \dots$; elem: $a, b, c, \dots$ vagy $a_1, a_2, a_3, \dots$; a eleme A-nak: $a \in A$; a nem eleme A-nak: $a \notin A$. Halmazt megadhatunk elemeinek felsorolásával: $A = \{a, b, \dots\}$; illetve valamilyen kitüntető tulajdonsággal: $A = \{a \mid T(a)\}$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy az A halmaz elemei azon a elemek lesznek, amelyek rendelkeznek a T tulajdonsággal. Például: $A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0\}$.

1.1. Definíció. Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, *üres halmaz*nak nevezzük. Jele: $\emptyset$.

1.2. Definíció. Az A és a B *halmazok egyenlőek*, ha elemeik megegyeznek, azaz

$$A = B \iff (\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ és } (\forall x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Jele: $A = B$.

1.3. Definíció. Az A halmaz *részhalmaz*a a B halmaznak, ha

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Jele: $A \subset B$. A *valódi részhalmaz*a B-nek, ha $A \subset B$ és $A \neq B$.

1.4. Tétel. $A = B \iff A \subset B$ *és* $B \subset A$.

Bizonyítás. Az 1.2. és az 1.3. definíciók alapján nyilvánvaló. □

1.5. Tétel. *Csak egy üres halmaz létezik.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy A és B is üres halmazok. Ekkor $A \subset B$ és $B \subset A$ teljesül, így az 1.4. tétel miatt $A = B$. □

1.6. Definíció. *Halmazrendszernek* nevezzük az olyan nem üres halmazt, melynek elemei halmazok.

1.7. Definíció. Egy A halmaz összes részhalmazaiból álló halmazt az A *hatványhalmaz*ának nevezzük. Jele: 2^A illetve $P(A)$.

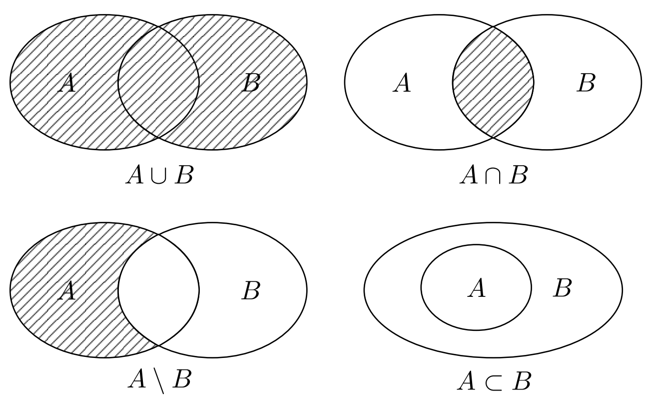
1.8. Példa. Az $A = \{x, y\}$ halmaz hatványhalmaza:

$$2^A = \big\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\big\}.$$

1.9. Definíció. Legyen $I \neq \emptyset$ indexhalmaz, és $\forall i \in I$ esetén adott egy A_i halmaz. Ekkor $\{A_i \mid i \in I\}$ *indexelt halmazrendszer* (vagy I-vel indexelt halmazrendszer).

1.10. Definíció. Műveletek halmazok között:

1. A és B *halmazok uniója*: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$;
2. A és B *halmazok metszete*: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$;
3. A és B *halmazok különbsége*: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$.
4. Az $S = \{A_i \mid i \in I\}$ *halmazrendszer uniója*:
$$\bigcup S = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists A_i : \ A_i \in S,\ x \in A_i\};$$
5. $S = \{A_i \mid i \in I\}$ *halmazrendszer metszete*:
$$\bigcap S = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall A_i \in S \text{ esetén } x \in A_i\}.$$



1.11. Definíció. Legyen X egy halmaz és $A \subset X$. Ekkor az A halmaz X-re vonatkozó *komplementer*én az $X \setminus A$ halmazt értjük. Jele: $\overline{A}$ vagy A^c.

1.12. Tétel. *Legyen X adott halmaz és $A, B \subset X$. Ekkor*

1. $A = B \iff \overline{A} = \overline{B}$;
2. $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$;

3. $\overline{\overline{A}} = A$.

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy $A = B$. Ekkor

$$x \in \overline{A} \iff x \notin A \iff x \notin B \iff x \in \overline{B},$$

tehát $\overline{A}$ és $\overline{B}$ elemei megegyeznek, így $\overline{A} = \overline{B}$.
Fordítva, ha $\overline{A} = \overline{B}$, akkor

$$x \in A \iff x \notin \overline{A} \iff x \notin \overline{B} \iff x \in B,$$

tehát $A = B$.

2. Tegyük fel, hogy $A \subset B$. Ekkor

$$x \in \overline{B} \iff x \notin B \Rightarrow x \notin A \iff x \in \overline{A},$$

tehát $\overline{B}$ elemei $\overline{A}$-nek is elemei, azaz $\overline{B} \subset \overline{A}$.
Fordítva, ha $\overline{B} \subset \overline{A}$, akkor

$$x \in A \iff x \notin \overline{A} \Rightarrow x \notin \overline{B} \iff x \in B,$$

tehát $A \subset B$.

3. $x \in \overline{\overline{A}} \iff x \notin \overline{A} \iff x \in A$, tehát $\overline{\overline{A}} = A$.

□

1.13. Tétel. *Legyen X adott halmaz és $A, B, C \subset X$. Ekkor*

1. $A \cup B = B \cup A$ *és* $A \cap B = B \cap A$, *azaz a metszet- és az unióképzés kommutatív;*

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *és* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, *azaz a metszet- és az unióképzés asszociatív;*

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *és* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, *azaz teljesül a disztributivitás;*

4. $A \cup A = A$ *és* $A \cap A = A$, *azaz a metszet- és az unióképzés idempotens;*

5. $A \cup \emptyset = A$ *és* $A \cap \emptyset = \emptyset$;

6. $A \cup X = X$ *és* $A \cap X = A$;

7. $\overline{\emptyset} = X$ *és* $\overline{X} = \emptyset$;

8. $A \cup \overline{A} = X$ *és* $A \cap \overline{A} = \emptyset$;

9. $A \cup B = A \iff B \subset A$;

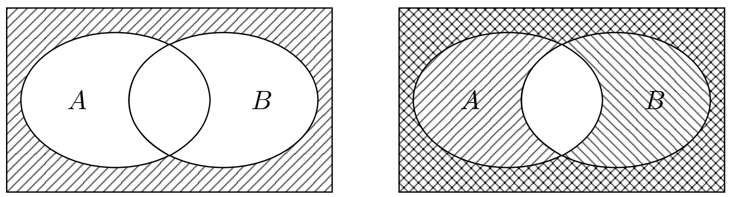
10. $A \cap B = A \iff A \subset B$.

Bizonyítás. Csak a 3. állítást igazoljuk, a többi bizonyítás hasonlóan végezhető. $x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in A$ vagy $x \in (B \cap C) \iff x \in A$ vagy ($x \in B$ és $x \in C$) $\iff$ ($x \in A$ vagy $x \in B$) és ($x \in A$ vagy $x \in C$) $\iff$ $x \in (A \cup B)$ és $(A \cup C) \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. □

1.14. Tétel (de Morgan-féle azonosságok). *Legyen X adott halmaz, és $A, B \subset X$. Ekkor*

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{és} \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Bizonyítás. $x \in \overline{(A \cup B)} \iff x \notin (A \cup B) \iff x \notin A$ és $x \notin B \iff x \in \overline{A}$ és $x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.



$\overline{A \cup B}$ $\quad$ $\overline{A} \cap \overline{B}$

Hasonlóan igazolható a második állítás is. □

2. Relációk

2.1. Definíció. Legyenek A és B tetszőleges halmazok. *Rendezett elempár* alatt az (a, b) szimbólumot értjük, ahol $a \in A$ és $b \in B$. Két rendezett elempár egyenlőségét az alábbi módon definiáljuk:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ és } b = d.$$

2.2. Definíció. Az A és a B halmazok *Descartes-féle szorzat*án az

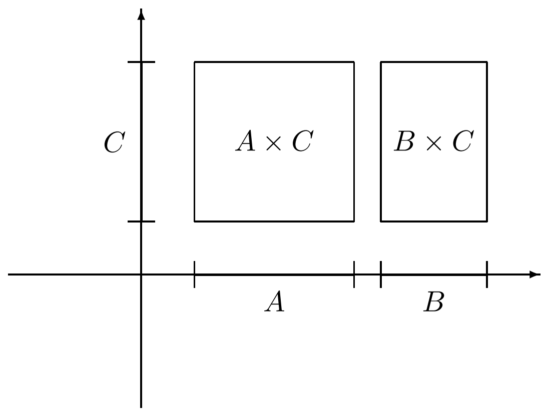
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

halmazt értjük.

2.3. Tétel. *Legyenek A, B és C tetszőleges halmazok. Ekkor*

1. $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset$ *vagy* $B = \emptyset$;
2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
6. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
7. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;
8. $B \subset C \Rightarrow A \times B \subset A \times C$;
9. $A \times B = B \times A \iff A = B$.

Bizonyítás. A második állítást igazoljuk:
2. $(x,y) \in (A \cup B) \times C \iff x \in (A \cup B)$ és $y \in C \iff (x \in A$ vagy $x \in B)$ és $y \in C \iff (x \in A$ és $y \in C)$ vagy $(x \in B$ és $y \in C) \iff (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.



□

2.4. Definíció. Legyenek A és B halmazok. Ekkor $F \subset A \times B$-t az A és B halmazok közötti (binér) *reláció*nak nevezzük. Jele: aFb, ahol $a \in A$ és $b \in B$ vagy $b = F(a)$, azaz az F reláció mellett az a elem képe b.

2.5. Definíció. Az $F \subset A \times B$ reláció *értelmezési tartomány*a:

$$D_F \doteq \{x \mid x \in A,\ \exists y \in B,\ (x,y) \in F\};$$

*értékkészlet*e:

$$R_F \doteq \{y \mid y \in B,\ \exists x \in A,\ (x,y) \in F\}.$$

2.6. Definíció. Ha $D_F = A$, akkor F az *A-nak B-be történő leképezése*;
ha $R_F = B$, akkor F egy *A-ból B-re történő leképezés*;
ha $D_F = A$ és $R_F = B$, akkor F az *A-nak B-re történő leképezése.*

2.7. Definíció. Ha $F \subset A \times B,\ C \subset A$, akkor az F reláció mellett C *kép*e:

$$F(C) \doteq \{y \mid y \in B,\ \exists x \in C,\ (x,y) \in F\}.$$

2.8. Definíció. Legyen $F \subset A \times B$ reláció és $C \subset D_F$, ekkor az F reláció C-re való *leszűkítés*e:

$$F\big|_C = \{(x,y) \mid\ (x,y) \in F,\ x \in C\}.$$

index$F\big|_C$

2.9. Definíció. Legyen $F \subset A \times B$ reláció. Ekkor F *inverz*e:

$$F^{-1} \doteq \{(y,x) \mid \ (y,x) \in B \times A,\ (x,y) \in F\}.$$

2.10. Következmény. Legyen $F \subset A \times B$ reláció. Ekkor:

1. $D_{F^{-1}} = R_F$;
2. $R_{F^{-1}} = D_F$;
3. $(F^{-1})^{-1} = F$.

2.11. Definíció. Legyenek A, B és C halmazok. Ekkor az $F \subset A \times B$ és a $G \subset B \times C$ *relációk kompozíció*ja vagy *összetétel*e a $G \circ F \subset A \times C$ reláció:

$$G \circ F \doteq \{(x,z) \mid \ x \in A,\ z \in C,\ \exists y \in B,\ (x,y) \in F,\ (y,z) \in G\ \}.$$

2.12. Következmény. Legyenek A, B, C és D halmazok, és $F \subset A \times B,\ G \subset B \times C,\ H \subset C \times D$ relációk. Ekkor

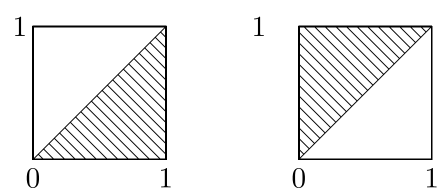
1. $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$;
2. $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$.

2.13. Definíció. Legyen A egy halmaz. Az $R \subset A \times A$ relációt *rendezési reláció*nak nevezzük, ha $\forall x, y, z \in A$ esetén teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

1. xRx, azaz reflexív;
2. (xRy és yRx) $\Rightarrow x = y$, azaz antiszimmetrikus;
3. (xRy és yRz) $\Rightarrow xRz$, azaz tranzitív;
4. xRy és yRx közül legalább az egyik fennáll, azaz teljes.

Ekkor az (A, R) párt *rendezett halmaz*nak nevezzük, és a rendezési reláció jele: $\leq$. Ha $x \leq y$ és $x \neq y$, akkor $x < y$-t írunk. Az $x \leq y$ illetve $x < y$ kifejezésekre használatos az $y \geq x$, illetve $y > x$ jelölés is.
Ha csak az 1.,2.,3. tulajdonság teljesül a relációra, akkor *parciális rendezés*ről vagy *féligrendezés*ről beszélünk.

2.14. Példa. Az $x \leq y$ reláció $[0,1] \times [0,1]$-en és ennek inverze (az átló mindkét relációhoz hozzátartozik):



$x \leq y$ $\qquad$ $x \leq y$ inverze

2.15. Definíció. Legyen (A, R) rendezett halmaz.

1. Egy $B \subset A$ halmazt *felülről korlátos*nak nevezünk, ha $\exists a \in A$ úgy, hogy $\forall b \in B$ esetén $b \leq a$, és ekkor az a elemet a B halmaz *felső korlát*jának nevezzük.
2. Egy $B \subset A$ halmazt *alulról korlátos*nak nevezünk, ha $\exists a \in A$ úgy, hogy $\forall b \in B$ esetén $b \geq a$, és ekkor az a elemet a B halmaz *alsó korlát*jának nevezzük.
3. Egy $B \subset A$ halmazt *korlátos*nak nevezünk, ha alulról és felülről is korlátos.

2.16. Definíció. 1. Egy $B \subset A$ halmaz *pontos felső korlát*ja egy olyan $a \in A$ felső korlát, amelynél kisebb felső korlátja a B-nek nincsen. Jele: $a = \sup B$ (szuprémum).
2. Egy $B \subset A$ halmaz *pontos alsó korlát*ja egy olyan $a \in A$ alsó korlát, amelynél nagyobb alsó korlátja a B-nek nincsen. Jele: $a = \inf B$ (infimum).

2.17. Definíció. Egy rendezett halmazt *teljes*nek nevezünk, ha bármely nem üres felülről korlátos részhalmazának létezik pontos felső korlátja.

A matematika vizsgán az egymással (közelítőleg) azonos tudású diákok kapnak azonos jegyet. Így a diákokat öt osztályba soroljuk: 1-es, 2-es, ..., 5-ös tudású diákok. Ezen osztályozás alapja az ekvivalens (azonos) tudás.

2.18. Definíció. Legyen A egy halmaz. Az $R \subset A \times A$ relációt *ekvivalencia reláció*nak nevezzük, ha $\forall x, y, z \in A$ esetén teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

1. xRx, azaz reflexív;
2. $xRy \to yRx$, szimmetrikus;
3. xRy és $yRz \to xRz$, tranzitív.

Jele: $a \sim b$. Ekkor azt is mondjuk, hogy a ekvivalens b-vel.

2.19. Példa. $\mathbb{Z}_+$-on (azaz a pozitív egész számok halmazán) értelmezett $aRb \overset{\cdot}{\iff} 5 \big| a - b$ reláció ekvivalencia reláció. ($5 \big| a - b$ jelentése: 5 osztója $a - b$-nek.) Azok a pozitív egész számok lesznek ekvivalensek egymással, amelyek 5-tel osztva ugyanazt a maradékot adják.

2.20. Definíció. Legyen $H \neq \emptyset$ halmaz. Az S halmazrendszert H egy *osztályozás*ának nevezzük, ha S elemei páronként diszjunktak, és egyesítésük H. Azaz $\forall A, B \in S$, esetén $A, B \subset H$, $A \cap B = \emptyset$ vagy $A = B$; továbbá $\bigcup S = H$.

2.21. Tétel. *Ha S egy osztályozás H-n, akkor H-n megadható egy S-hez tartozó ekvivalencia reláció. Ha H-n adott egy ekvivalencia reláció, akkor az indukál egy osztályozást H-n.*

2.22. Példa. A 2.19. példában szereplő ekvivalancia reláció által indukált osztályozás esetén (egy osztályba kerülnek az egymással ekvivalens elemek) öt különböző osztályt kapunk. Ha pedig $\mathbb{Z}_+$-on azt az osztályozást adjuk meg, amelynél azonos osztályba kerülnek azok az elemek, amelyek 5-tel osztva ugyanazt a maradékot adják, és két elem akkor és csak akkor áll relációban egymással, ha egy osztályba tartoznak, akkor megkapjuk a fenti ekvivalencia relációt.

3. Függvények

A függvény fogalmát úgy alakítjuk ki, hogy ne lehessen "többértékű" függvényről beszélni.

3.1. Definíció. Az $f \subset A \times B$ relációt *függvény*nek nevezzük, ha bármely $a \in A$ esetén egyértelműen létezik olyan $b \in B$, melyre $(a, b) \in f$.
Jelölés: $f : A \to B,\ b = f(a)$.
Ekkor a függvény értelmezési tartománya: A, értékkészlete: B, a függvény képhalmaza: $f(A) = \{b \mid\ b \in B,\ \exists a \in A:\ (a, b) \in f\}$.

3.2. Megjegyzés. Minden függvény reláció, de nem minden reláció függvény.

3.3. Definíció. Az $f : A \to B$ *függvény invertálható*, ha $f^{-1} : f(A) \to A$ is függvény. Ekkor f^{-1}-et az f *inverzfüggvény*ének nevezzük. Az invertálható függvényeket kölcsönösen egyértelműnek nevezzük.

3.4. Tétel. *Az $f : A \to B$ függvény akkor és csak akkor invertálható, ha bármely $a_1, a_2 \in A$; $a_1 \neq a_2$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$.*
Másképpen: $\forall a_1, a_2 \in A:\ f(a_1) = f(a_2) \iff a_1 = a_2$.

Bizonyítás. (a) Tegyük fel, hogy f invertálható, vagyis az f^{-1} reláció függvény. Ha $a_1, a_2 \in A$, akkor $(a_1, f(a_1)) \in f$ és $(a_2, f(a_2)) \in f$, így $(f(a_1), a_1) \in f^{-1}$, $(f(a_2), a_2) \in f^{-1}$. Ha $f(a_1) = f(a_2)$ teljesül, akkor $a_1 = f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2)) = a_2$, mivel az f^{-1} függvény egyértelműen rendeli hozzá az elemekhez a képüket.

(b) Most tegyük fel, hogy $\forall a_1, a_2 \in A:\ f(a_1) = f(a_2) \iff a_1 = a_2$, és f^{-1} nem függvény, azaz létezik $f(a) \in f(A)$ úgy, hogy $(f(a), a_1) \in f^{-1}$, $(f(a), a_2) \in f^{-1}$ és $a_1 \neq a_2$. Ez nyilván ellentmondás, hiszen $f(a_1) = f(a) = f(a_2)$ miatt $a_1 = a_2$.

□

3.5. Példa. A $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset [-1, 1] \times [-1, 1]$ reláció nem függvény, hisz pl. $(0, 1)$ valamint $(0, -1)$ is hozzá tartozik.

Viszont az $F = \{(x,y) \mid y = \sqrt{1-x^2}\} \subset [-1,1] \times [0,1]$ reláció függvény. Ez a függvény nem invertálható. Viszont megszorítása $[0,1]$-re már invertálható (és inverze önmaga).

(Csak megjegyezzük, hogy az eredeti K mint reláció inverze önmaga.)

3.6. Definíció. Legyenek $f : A \to B$ és $g : B \to C$ függvények. Ekkor a $g \circ f \subset A \times C$ relációt *összetett függvény*nek nevezzük, f a belső függvény, g a külső függvény.

3.7. Tétel. *Legyenek $f : A \to B$ és $g : B \to C$ függvények. Ekkor az $g \circ f$ reláció is függvény. Jelölés: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Bizonyítás. Ha $(x,z) \in (g \circ f)$, akkor definíció szerint létezik olyan $y \in B$, melyre $(x,y) \in f$ és $(y,z) \in g$. Mivel f függvény, így $y = f(x)$ egyértelműen létezik, és ehhez az egyértelműen létező y-hoz egyértelműen tartozik $z = g(y) = g(f(x))$, mert g is függvény. Eszerint bármely $x \in A$ esetén egyértelműen létezik $z \in C$ úgy, hogy $z = (g \circ f)(x)$, azaz $(x,z) \in (g \circ f)$, tehát $g \circ f$ is függvény. □

3.8. Definíció. Legyen $f : A \to B$ függvény. Ekkor

1. f *injektív*, ha bármely $x, y \in A$ és $x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$, azaz a függvény invertálható;
2. f *szürjektív*, ha $f(A) = B$;
3. f *bijektív*, ha injektív és szürjektív.

3.9. Definíció. Az A halmaz *identikus függvénye*: $id_A : A \to A$

$$id_A(x) = x \quad \forall x \in A.$$

3.10. Definíció. Az A és B *halmazok ekvivalensek* egymással, ha létezik a halmazok között bijektív függvény: $\exists f : A \to B$ bijektív.

3.11. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz. Ekkor az $f : A \times A \to A$ függvényt (binér) *művelet*nek nevezzük.

3.12. Definíció. *Elemi függvények*nek nevezzük az alábbi négy (a valós számok halmazából a valós számok halmazába képező) függvényből:

1. $f(x) = c$ konstans függvény;
2. $f(x) = x$ identikus függvény;
3. $f(x) = a^x, \ a > 0$ hatványfüggvény;
4. $f(x) = \sin x$

összeadással, szorzással, kivonással, osztással, összetettfüggvény-képzéssel és invertálással előállítható függvényeket.

2. fejezet
Számfogalmak

1. Valós számok

1.1. Definíció. Legyen adott egy $\mathbb{R}$ halmaz, és legyen rajta értelmezve két művelet:

$$f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x, y) = x + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$$
$$f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x, y) = x \cdot y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Azt mondjuk, hogy $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *test*, ha teljesíti az alábbi tulajdonságokat, az úgynevezett testaxiómákat:

1. kommutativitás
$$x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$
$$x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$
2. asszociativitás
$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R},$$
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R},$$
3. disztributivitás
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R},$$
4. létezik zéruselem (vagy nullelem), jele: 0,
$$\exists 0 \in \mathbb{R} :\ x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
5. létezik additív inverz
$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ esetén } \exists(-x) \in \mathbb{R} :\ x + (-x) = 0,$$
6. létezik egységelem, jele: 1,
$$\exists 1 \in \mathbb{R},\ 1 \neq 0 :\ x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
7. létezik multiplikatív inverz
$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \text{ esetén } \exists(x^{-1}) \in \mathbb{R} :\ x \cdot (x^{-1}) = 1.$$

1.2. Definíció. Legyen adva az $\mathbb{R}$ testen egy $\leq$ rendezési reláció: $\leq\ \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *rendezett test*, ha teljesül az alábbi két tulajdonság:

1. ha $x, y \in \mathbb{R}$ és $x \leq y$, akkor $x + z \leq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$,
2. ha $x, y \in \mathbb{R}$ és $x \geq 0,\ y \geq 0$, akkor $x \cdot y \geq 0$.

1.3. Definíció. Az $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *rendezett test teljes*, ha bármely felülről korlátos nemüres részhalmazának létezik pontos felső korlátja.

1.4. Definíció. *Valós számok halmazá*nak nevezünk egy teljes rendezett testet. Jele: $\mathbb{R}$.

1.5. Tétel. *$\mathbb{R}$-ben az egységelem és a nullelem egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy két nullelem létezik: 0_1 és 0_2 . Ekkor $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$. □

1.6. Megjegyzés. Mivel $\mathbb{R}$-ben az összeadás és a szorzás ugyanazokkal a műveleti tulajdonságokkal rendelkezik (úgynevezett Abel-csoportot alkotnak), így az additív tulajdonságokra vonatkozó bizonyítások multiplikatív esetben hasonlóan végezhetők. Az összeadás helyét a szorzás, a nullelem helyét az egységelem veszi át.

1.7. Tétel. *Egyszerűsítési szabály.*

1. *Ha $x, y, z \in \mathbb{R},\ x + y = x + z$, akkor $y = z$.*
2. *Ha $x, y, z \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ xy = xz$, akkor $y = z$.*

Bizonyítás. Az 1. állítást igazoljuk: $y = y + 0 = y + (x + (-x)) = (y + x) + (-x) = (x + y) + (-x) = (x + z) + (-x) = (z + x) + (-x) = z + (x + (-x)) = z + 0 = z$. □

1.8. Tétel. *Minden $\mathbb{R}$-beli elemnek egyértelműen létezik additív inverze, és minden nem nulla valós számnak egyértelműen létezik multiplikatív inverze.*

Bizonyítás. A multiplikatív esetet igazoljuk. Indirekt tegyük fel, hogy az x nem nulla valós számnak két inverze van, azaz $x \cdot x_1^{-1} = 1$ és $x \cdot x_2^{-1} = 1$. Ekkor $x \cdot x_1^{-1} = x \cdot x_2^{-1}$, így az egyszerűsítési szabály miatt $x_1^{-1} = x_2^{-1}$. □

1.9. Tétel. *Kivonási és osztási szabály.*

1. *Bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén egyértelműen létezik $z_1 \in \mathbb{R}$, amelyre $x = y + z_1$. z_1 jele: $x - y$.*
2. *Bármely $x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0$ esetén egyértelműen létezik $z_2 \in \mathbb{R}$, amelyre $x = yz_2$. Ekkor z_2-re az $\frac{x}{y}$ jelölést használjuk.*

Bizonyítás. Az 1. állításnál legyen $z_1 = x + (-y)$.

(a) Mivel $y + z_1 = y + x + (-y) = (y + (-y)) + x = 0 + x = x$, így létezik $x - y$.

(b) Ha z_1 és z_2 esetén is teljesül, hogy $y + z_1 = x = y + z_2$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $z_1 = z_2$, tehát $x - y$ egyértelműen létezik.

□

1.10. Tétel. *Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $-(-x) = x$, és ha $x \neq 0$, $(x^{-1})^{-1} = x$. $(-x)$ jele: $-x$ és x^{-1} jele: $\frac{1}{x}$.*

Bizonyítás. Az additív inverz tulajdonsága miatt $(-x) + x = 0$ és $(-x) + (-(-x)) = 0$, így az egyszerűsítési szabály miatt $x = -(-x)$. □

1.11. Tétel. *Legyen $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor $xy = 0 \iff x = 0$ vagy $y = 0$.*

Bizonyítás. (a) Tegyük fel, hogy $x = 0$. Ekkor

$$xy = 0 + 0y = 0y = (0 + 0)y = 0y + 0y,$$

és az egyszerűsítési szabály miatt $0 = 0y$.

(b) Most indirekt tegyük fel, hogy $x \neq 0$, $y \neq 0$, de $xy = 0$. Mivel nem nulla számoknak létezik multiplikatív inverzük, így az (a) részben bizonyított állítás felhasználásával:

$$0 = \underbrace{(xy)}_{0} y^{-1}x^{-1} = x\underbrace{(yy^{-1})}_{1} x^{-1} = xx^{-1} = 1,$$

az ellentmondás oka az $x, y \neq 0$ feltétel.

□

2. Természetes számok, egész számok, racionális számok

2.1. Definíció. Az $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ halmazt a *természetes számok halmazá*nak nevezzük, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. $1 \in \mathbb{N}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$,
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ n - 1 \in \mathbb{N} \iff n \neq 1$,
4. teljes indukció elve: ha $M \subset \mathbb{N}$ olyan, hogy
   $1 \in M$,
   $m \in M \Longrightarrow m + 1 \in M$,
   akkor $M = \mathbb{N}$.

2.2. Tétel. *A természetes számok halmaza rendelkezik a következő két tulajdonsággal:*

1. *$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ felülről nem korlátos ,*
2. *archimedeszi tulajdonság: $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$ és $\forall y \in \mathbb{R}$ esetén $\exists n \in \mathbb{N}$: $y < nx$.*

2.3. Megjegyzés. Az archimedeszi tulajdonság az 1. állítás következménye. Eszerint létezik $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{x}{y} < n$, amiből $y < nx$.

2.4. Definíció. Azokat a valós számokat, amelyek előállnak két természetes szám különbségeként, egész számoknak nevezzük:

$$\mathbb{Z} \doteq \{x \mid\ x \in \mathbb{R},\ \exists m, n \in \mathbb{N}\ :\ x = m - n\}.$$

2.5. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

1. $x^1 \doteq x$,
2. $x^n \doteq x^{n-1}x$, ha $n \neq 1$,
3. $x^{-n} \doteq \dfrac{1}{x^n}$, ha $x \neq 0$,
4. $x^0 \doteq 1$, ha $x \neq 0$.

2.6. Definíció. Azokat a valós számokat, amelyek előállnak két egész szám hányadosaként, *racionális számok*nak nevezzük:

$$\mathbb{Q} \doteq \left\{x \mid\ x \in \mathbb{R},\ \exists p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0:\ x = \frac{p}{q}\right\}$$

2.7. Definíció. Az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmaz elemeit *irracionális számok*nak nevezzük.

2.8. Megjegyzés. 1. $\mathbb{Q}$ test, hiszen könnyen látható, hogy a racionális számok összege, szorzata, additív inverze és multiplikatív inverze is racionális szám.

2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nem üres halmaz, azaz létezik olyan valós szám, amely nem racionális szám. Ha például a $\sqrt{2}$ racionális szám lenne, akkor léteznének olyan p és q egész számok, melyekre

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},\ \text{ahol } p \text{ és } q \text{ legnagyobb közös osztója } 1.$$

Ekkor $2q^2 = p^2$ lenne, így q osztója volna p-nek, ami ellentmond annak, hogy p és q relatív prímek.

2.9. Definíció. Bevezetjük az alábbi elnevezéseket:

1. $\mathbb{R}_+ \doteq \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$: *pozitív valós számok halmaza*,
2. $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$: *nem negatív számok halmaza*,
3. $\mathbb{R}_- \doteq \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < 0\ \}$: *negatív valós számok halmaza*,
4. $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}$: *nem pozitív valós számok halmaza.*

2.10. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Ekkor x *abszolút érték*ét az alábbi módon definiáljuk:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ha } \ x \geq 0, \\ -x & \text{ha } \ x < 0. \end{cases}$$

2.11. Tétel. *Az abszolút érték tulajdonságai:* $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén*

1. $|-x| = |x|$,
2. $|xy| = |x||y|$,
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
4. $|x+y| \leq |x| + |y|$,
5. $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

2.12. Definíció. Legyen $x, y \in \mathbb{R}$. A $d(x,y) = |x-y|$ valós számot az x és az y számok *távolság*ának nevezzük. A $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *metriká*nak nevezzük $\mathbb{R}$-en.

2.13. Tétel. *A d metrika rendelkezik a következő tulajdonságokkal. Bármely* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *esetén:*

1. $d(x,y) \geq 0$,
   $d(x,y) = 0 \iff x = y$, *(nem negativitás);*
2. $d(x,y) = d(y,x)$, *(szimmetria);*
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, *(háromszög-egyenlőtlenség).*

2.14. Megjegyzés. Az a, b végpontú intervallumokra a következő jelöléseket vezetjük be:

1. $]a,b[= \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$,
2. $]a,b] = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$,
3. $[a,b[= \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$,
4. $[a,b] = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$,

2.15. Definíció. Az $a \in \mathbb{R}$ szám $\delta > 0$ sugarú *nyílt gömbkörnyezet*én az alábbi halmazt értjük:

$$k(a,\delta) = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ d(a,x) < \delta\}.$$

2.16. Definíció. Az $\{[a_i, b_i]\} \subset \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, indexelt halmazrendszert *egymásba skatulyázott intervallumrendszer*nek nevezzük, ha $a_i \leq a_{i+1},\ b_{i+1} \leq b_i\ \forall i \in \mathbb{N}$ (azaz $[a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [a_i, b_i]\ \forall i \in \mathbb{N}$).

2.17. Tétel (Cantor-féle metszettétel). *Legyen* $\{[a_i, b_i]\} \subset \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}$ *egymásba skatulyázott zárt intervallumrendszer. Ekkor*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i] \neq \emptyset.$$

2.18. Definíció. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz *mindenütt sűrű* $\mathbb{R}$-ben, ha $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y,\ x < y$ esetén létezik $h \in H$, melyre $x < h < y$.

2.19. Megjegyzés. A racionális számok, valamint az irracionális számok halmaza mindenütt sűrű $\mathbb{R}$- ben.

2.20. Tétel. *Bármely* $x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$ *és* $n \in \mathbb{N}$ *esetén egyértelműen létezik* $y \in \mathbb{R}$ *és* $y \geq 0$, *melyre* $y^n = x$.

2.21. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$ és $n \in \mathbb{N}$. Azt az egyértelműen létező $y \in \mathbb{R}$ nem negatív számot, melyre $y^n = x$ teljesül, az x valós szám n*-edik gyök*ének nevezzük. Jele: $\sqrt[n]{x} = y$ vagy $x^{\frac{1}{n}} = y$.

2.22. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$ páratlan és $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ha $x < 0$, akkor $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \doteq -\sqrt[n]{-x}$.

2.23. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{Q}$ és $r = \dfrac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$. Ekkor $x^r \doteq \sqrt[n]{x^m}$, ha ez az előbbiek alapján értelmezhető.

2.24. Definíció. Ha $S \subset \mathbb{R}$ felülről nem korlátos, akkor $\sup S \doteq \infty$ és ha $S \subset \mathbb{R}$ alulról nem korlátos, akkor $\inf S \doteq -\infty$. Ha ezzel a két szimbólummal kibővítjük a valós számok halmazát, akkor az így kapott halmazt *bővített valós számok halmazá*nak nevezzük:

$$\mathbb{R}_b = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

2.25. Megjegyzés. $\mathbb{R}_b$ nem test.

3. Komplex számok

3.1. Definíció. Tekintsük a valós számokból képzett (a, b) számpárok halmazát. Ezen a halmazon értelmezzük a szorzás és az összeadás műveletét az alábbi módon:

$(a, b) + (c, d) \doteq (a + c, b + d)$,
$(a, b)(c, d) \doteq (ac - bd, bc + ad)$.

A valós számpárok halmazát ezen két művelettel ellátva $(\mathbb{C}, +, \cdot)$-ral jelöljük és elemeit *komplex számok*nak nevezzük. Ha $z \in \mathbb{C}$ és $z = (a, b)$, akkor a $\mathrm{Re}(z) \doteq a$ számot a komplex szám *valós rész*ének nevezzük, és $\mathrm{Im}(z) \doteq b$ a komplex szám *képzetes* (imaginárius) *rész*e.

3.2. Következmény. Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha a valós és a képzetes részük is megegyezik, vagyis

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c,\ b = d.$$

3.3. Tétel. $\mathbb{C}$ *test.*

Bizonyítás. 1. Additív tulajdonságok: $\forall (a, b),\ (c, d),\ (e, f) \in \mathbb{C}$ esetén

(a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c, d) + (a, b)$, kommutativitás,

(b) $\big((a, b) + (c, d)\big) + (e, f) = (a + c + e, b + d + f) = (a, b) + \big((c, d) + (e, f)\big)$, asszociativitás,

(c) $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$, létezik nullelem,

(d) $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$, létezik additív inverz.

2. Multiplikatív tulajdonságok: $\forall (a, b),\ (c, d),\ (e, f) \in \mathbb{C}$ esetén

(a) $(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad) = (c, d)(a, b)$, kommutativitás,

(b) $\big((a, b)(c, d)\big)(e, f) = \big((ac - bd)e - (bc + ad)f, (ac - bd)f + (bc + ad)e\big) = (a, b)\big((c, d)(e, f)\big)$, asszociativitás,

(c) $(a, b)(1, 0) = (a, b)$, létezik egységelem,

(d) ha $(a, b) \neq (0, 0)$, akkor $(a, b)\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0)$, létezik multiplikatív inverz.

3. Disztributivitás: $\forall (a, b),\ (c, d),\ (e, f) \in \mathbb{C}$ esetén
$\big((a, b) + (c, d)\big)(e, f) = (a + c, b + d)(e, f) =$
$\big((a + c)e - (b + d)f, (a + c)f + (b + d)e\big) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f).$

□

3.4. Megjegyzés. A valós számok tekinthetők úgy, mint 0 képzetes részű komplex számok, hiszen a $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ a \mapsto (a, 0)$ leképezés injektív. Ez a leképezés egy beágyazása $\mathbb{R}$-nek $\mathbb{C}$-be. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a komplex számokra definiált műveletek az $(a, 0)$ alakú számokon az eredeti (valós számokon értelmezett) összeadást illetve szorzást adják.

Ezen megjegyzés alapján az $(a, 0)$ alakú komplex számot gyakran csak a-val jelöljük ($a \in \mathbb{R}$). Speciálisan a $(0, 0)$ nullelemet 0-val.

3.5. Definíció. Az $i = (0, 1)$ komplex számot *képzetes egység*nek nevezzük.

3.6. Tétel. $i^2 = -1$

Bizonyítás. $(0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$. □

3.7. Tétel. *Minden (a, b) komplex szám megadható az $a + ib$ algebrai írásmódban.*

Bizonyítás. A kétféle megadás egyenértékű, hiszen
$a + ib = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = (a, b)$. $\square$

3.8. Definíció. Egy $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ szám *konjugált*ja: $\overline{z} \doteq a - ib$.

3.9. Megjegyzés. $z = a+ib$-re $z\overline{z} = a^2+b^2$. Ez alapján a z-vel való osztás a konjugálttal történő bővítéssel végezhető el. Pl. $w = c + id$ jelöléssel (ha $\overline{z} \neq 0$)

$$wz^{-1} = \frac{w}{z} = \frac{w\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{w\overline{z}}{a^2 + b^2} \dots$$

a formális számolás.

3.10. Tétel. *A konjugálás tulajdonságai. Minden $z, w \in \mathbb{C}$ esetén*

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
2. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
3. $z + \overline{z} = 2Re(z)$,
4. $z - \overline{z} = 2iIm(z)$,
5. $z\overline{z} \geq 0$; $z\overline{z} = 0 \iff z = 0$.

3.11. Definíció. Egy $z \in \mathbb{C}$ szám *abszolút érték*én a $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ nem negatív valós számot értjük. Ekkor $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

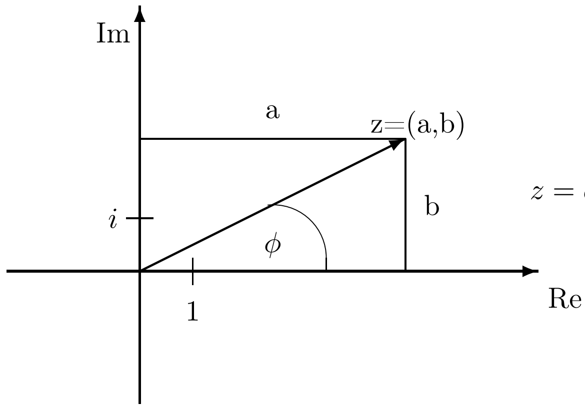
3.12. Tétel. *Az abszolút érték tulajdonságai:*

1. $0 \leq |z|$
   és $|z| = 0 \iff z = 0$,
2. $|\overline{z}| = |z|$,
3. $|zw| = |z||w|$,
4. $|Re(z)| \leq |z|$,
5. $|Im(z)| \leq |z|$,
6. $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Bizonyítás. Az 1-5. állítások nyilvánvalóak. A háromszög-egyenlőtlenség (azaz 6.) bizonyítása:
$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z + w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w} = |z|^2+|w|^2+ z\overline{w} + w\overline{z} = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2$. $\square$

3.13. Megjegyzés. A komplex számok halmaza és az Euklideszi sík pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létezik: a $z = a + bi$ komplex számnak a sík (a, b) pontját (vektorát) feleltetjük meg. Ekkor a komplex számok összeadása éppen a megfelelő vektorok összeadását jelenti. Továbbá

z abszolút értéke éppen az (a, b) vektor hossza.



$$a = |z| \cos \phi$$
$$b = |z| \sin \phi$$
$$z = a + ib = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$$

Látható, hogy egy komplex számot egyértelműen meghatároz a hossza (abszolút értéke) és a valós tengellyel bezárt szöge. Az így kapott, úgynevezett trigonometrikus alak igen hasznos a hatványozás és a gyökvonás szempontjából.

3.14. Definíció. Egy $z \in \mathbb{C}$ szám *trigonometrikus alak*jának nevezzük a $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$ alakot, ahol ϕ a z *argumentum*a, azaz a valós tengellyel bezárt szöge.

3.15. Következmény. 1. Ha $z \in \mathbb{C}$, $z = a+ib = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$, akkor $\phi = \arccos(a/|z|) = \arcsin(b/|z|)$.

2. Ha $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$ és $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$, akkor
$$z = w \iff |z| = |w| \text{ és } \phi = \psi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

3.16. Tétel. *Műveletek trigonometrikus alakú komplex számokkal:*

1. $z_1 z_2 = |z_1|(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)|z_2|(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) = |z_1||z_2|(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$;
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)}{|z_2|(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$, *ha* $z_2 \neq 0$;
3. $z^n = \Big(|z|(\cos \phi + i \sin \phi)\Big)^n = |z|^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi))$;
4. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{|z|(\cos \phi + i \sin \phi)} = \dfrac{1}{|z|}(\cos(-\phi) + i \sin(-\phi))$, *ha* $z \neq 0$.

Bizonyítás. Az 1. állítás bizonyítása:
$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 + i(\sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \phi_2) = |z_1||z_2|(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$ a trigonometrikus függvényekre vonatkozó

addíciós képletek alapján.
A többi állítás ennek következménye, hiszen
$z\dfrac{1}{z} = 1 = (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$ alapján adódik a 4. képlet;
$\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \dfrac{1}{z_2}$ alapján a 2. összefüggés;
$z^n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z$ miatt pedig 3. □

3.17. Példa. Az $i^2 = -1$ egyenlőség bizonyítása trigonometrikus alakban:

$$ii = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = (\cos\pi + i\sin\pi) = -1.$$

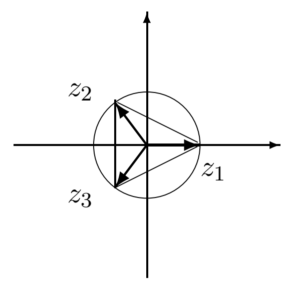
3.18. Definíció. Egy $z \in \mathbb{C}$ szám *n-edik gyök*ének nevezzük a $w \in \mathbb{C}$ számot, ha $w^n = z$.

3.19. Példa. Az 1 komplex szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyök*öknek nevezzük. Ha például $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ harmadik egységgyök, akkor $z^3 = 1$, azaz

$$z^3 = |z|^3(\cos(3\phi) + i\sin(3\phi)) = (\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ).$$

Ezek szerint $|z| = 1$ és $3\phi = 0^\circ + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Három különböző megoldás van, $k = 0, 1, 2$ esetén az alábbi gyökök adódnak:

$$z_1 = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ,$$
$$z_2 = \cos\frac{0^\circ + 2\pi}{3} + i\sin\frac{0^\circ + 2\pi}{3},$$
$$z_3 = \cos\frac{0^\circ + 4\pi}{3} + i\sin\frac{0^\circ + 4\pi}{3}.$$



Az n-edik egységgyökök a komplex számsíkon egy origó középpontú szabályos n-szög csúcsaiban helyezkednek el. Egy $z \neq 0$ komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

3.20. Tétel. *Egy $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ komplex szám n-edik gyökei:*

$$w_{1,2,\dots,n} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right),$$

ahol $k = 0, 1, \dots, n-1$.

3.21. Megjegyzés. Ismert, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú valós együtthatós másodfokú egyenletnek negatív diszkrimináns esetén nincsenek valós megoldásai. A komplex számok halmazán azonban mindig megoldható az egyenlet, hiszen a negatív számoknak is van két komplex gyökük, így alkalmazható a megoldóképlet.

Például az $x^2 + 2x + 3 = 0$ egyenlet megoldásai:

$$x_{1,2} = \frac{-2 + \sqrt{-8}}{2} = -1 + \sqrt{2}\sqrt{-1} = -1 \pm i\sqrt{2},$$

hiszen a -1 négyzetgyökei az i és a $-i$. Elmondható tehát, hogy mindig léteznek $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ komplex számok úgy, hogy

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ekkor a fenti egyenlet két megoldása x_1 és x_2.

Általánosabban, minden $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ n-edfokú polinom esetén léteznek $x_1, \ldots, x_n$ komplex számok úgy, hogy

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n).$$

Tehát minden n-edfokú polinomnak létezik n darab gyöke (nem feltétlenül különbözőek).

Legyenek az $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ egyenlet együtthatói valós számok. Ekkor ha egy komplex szám megoldása az egyenletnek, akkor a szám konjugáltja is megoldás, hiszen az egyenlet mindkét oldalának konjugáltját véve $a_n \overline{x}^n + \cdots + a_1 \overline{x} + a_0 = 0$ adódik, mivel valós szám konjugáltja önmaga. Ennek következménye, hogy páratlan fokszámú valós együtthatós polinomnak mindig létezik legalább egy valós gyöke.

4. Algebrai stuktúrák

Csak kétváltozós (azaz binér) műveletekkel fogunk dolgozni. (Valójában léteznek tetszőleges n-változós műveletek is ($n = 0, 1, 2, \ldots$).)

4.1. Definíció. *Algebrai struktúrá*n egy, legalább egy művelettel ellátott S halmazt értünk. Ha a halmaz az összeadás műveletével van ellátva, akkor $(S, +)$-t additív struktúrának nevezzük, ha a halmaz a szorzás műveletével van ellátva, akkor azt mondjuk, hogy $(S, \cdot)$ egy multiplikatív struktúra.

4.2. Definíció. Bevezetjük az alábbi jelöléseket:
T_1: kommutativitás,
T_2: asszociativitás,
T_3: létezik neutrális elem (összeadás esetén nullelem, szorzásnál egységelem),
T_4: létezik inverz,
T_5: nullosztómentesség ($\forall x, y \in S: \ xy = 0 \iff x = 0$ vagy $y = 0$),
T_6: disztributivitás.

Vannak egyműveletes struktúrák (félcsoport, csoport, Abel-csoport), és kétműveletes struktúrák (gyűrű, integritástartomány, test). A különböző algebrai struktúrákat az alábbi táblázatokban foglaljuk össze:

egyműveletes struktúrák

név	definiáló tulajdonságok	példák
félcsoport	T_2	$(\mathbb{N},\cdot),\ (\mathbb{N},+)$
csoport	$T_2,\ T_3,\ T_4$	$(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot),\ (\mathbb{Z},+)$
Abel-csoport	$T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4$	$(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot),\ (\mathbb{Z},+)$

kétműveletes struktúrák, $(S,+,\cdot)$

név	definiáló tulajdonságok	példák
gyűrű	$(S,+)$ Abel-csoport, $(S,\cdot)$ félcsoport, T_6	$(\mathbb{Z},+,\cdot)$
integritástartomány	$(S,+,\cdot)$ gyűrű, $(S,\cdot):\ T_1,\ T_3,\ T_5$	$(\mathbb{Z},+,\cdot)$
test	$(S,+),\ (S\setminus\{0\},\cdot)$ Abel-csoport, T_6	$\mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}$

A testaxiómák pontos leírását lásd az 1. szakaszban. A táblázatban az $(S\setminus\{0\},\cdot)$ jelölés csak arra utal, hogy a 0-elemnek nincs multipikatív inverze.

Későbbi tanulmányokban hasznos még a következő két algebrai struktúra. Legyen H egy legalább kételemű halmaz, és legyen H-n értelmezve az unió $(\cup)$, a metszet $(\cap)$ és a komplementer $(^-)$ képzés.

4.3. Definíció. A $(H,\cup,\cap)$ algebrai struktúrát hálónak nevezzük, ha

1. $(H,\cup)$ kommutatív félcsoport,
2. $(H,\cap)$ kommutatív félcsoport,
3. érvényesek az úgynevezett elnyelési törvények, azaz

$$a,b\in H \implies a\cap(a\cup b)=a;\quad a\cup(a\cap b)=a.$$

4.4. Definíció. A $(H,\cup,\cap)$ hálót Boole-algebrának nevezzük, ha tartalmazza a zéruselemet $(\emptyset)$, tartalmazza az egységelemet (H), és érvényes az $\cup$, $\cap$ műveletekre a disztributivitás, és H minden elemének létezik komplementere.

4.5. Példa. Boole-algebra egy A halmaz üres részhalmazainak (2^A vagy $P(A)$) hálója, ahol a zéruselem az üres halmaz, az egységelem pedig maga az A, továbbá $\forall X\subset A$-ra $\overline{X}\subset A$.

5. Számosságok

A hétköznapi életben, amikor egy (véges) halmaz elemeit megszámoljuk, akkor $1-1$ értelmű leképezést létesítünk az illető halmaz és az $\{1,2,\dots,n\}$

halmaz között (ahol n valamely természetes szám). Azt pedig, hogy két halmaz elemei száma egyenlő, eldönthetjük úgy is, ha elemeiket párba rakjuk. A pontos matematikai fogalmak a következők.

5.1. Definíció. Az A és a B *halmazok egyenlő számosságúak*, ha létezik közöttük bijektív leképezés. Jele: $A \sim B$.

5.2. Definíció. Az A *halmaz számossága nagyobb*, mint a B halmaz számossága, ha számosságuk nem egyenlő, és létezik olyan C halmaz, melynek számossága egyenlő B számosságával és $C \subset A$.

5.3. Definíció. Az A halmaz *véges*, más szóval véges számosságú, ha $A = \emptyset$ vagy létezik $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$.

5.4. Definíció. Az A halmaz *végtelen* más szóval végtelen számosságú ha nem véges.

5.5. Definíció. Az A halmaz *megszámlálhatóan végtelen*, ha $A \sim \mathbb{N}$. Ennek a számosságnak a jele: $\aleph_0$. (Az $\aleph$ (alef) betű a héber ábécé első betűje, ezt a jelölést G. Cantor vezette be.)

5.6. Definíció. A A halmaz *megszámlálható*, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

5.7. Tétel. *Ha az $\{A_i \mid i \in I,\ I \neq \emptyset\}$ indexelt halmazrendszer olyan, hogy minden i esetén A_i megszámlálhatóan végtelen, és I megszámlálhatóan végtelen, akkor $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ is megszámlálhatóan végtelen.*

5.8. Tétel. *A racionális számok számossága megszámlálhatóan végtelen.*

Bizonyítás. Legyen $A_n = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, ekkor $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, tehát az 5.7. tétel miatt megszámlálhatóan végtelen, hiszen A_n bármely n esetén megszámlálhatóan végtelen. $\square$

5.9. Tétel. *A valós számok számossága nagyobb, mint a racionális számok számossága.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathbb{R}$ megszámlálható. Ekkor a $[0, 1]$ zárt intervallum is megszámlálható, azaz létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés $\mathbb{N}$ és $[0, 1]$ elemei között. írjuk fel a megfeleltetés sorrendjében a $[0, 1]$ elemeit tizedestört alakban:

$1 \mapsto 0, a_{11}a_{12}a_{13} \ldots$
$2 \mapsto 0, a_{21}a_{22}a_{23} \ldots$
$3 \mapsto 0, a_{31}a_{32}a_{33} \ldots$

$\vdots$

Itt $a_{11}, a_{12}, \ldots$ számjegyeket jelölnek, a véges tizedestörteket végtelen sok nullával egészítjük ki. A feltevés szerint $[0,1]$ valamennyi eleme fel van sorolva. Legyen

$$b_i = \begin{cases} 5, & \text{ha } a_{ii} \neq 5, \\ 4, & \text{ha } a_{ii} = 5, \end{cases}$$

és tekintsük a $b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ számot. Ez a szám nincs benne a fenti felsorolásban, mivel mindegyiktől különböző. Ez ellentmondás, így $\mathbb{R}$ nem megszámlálható. Ebből következik az állítás. $\square$

5.10. Definíció. A valós számok, illetve a vele ekvivalens halmazok számosságát *kontinuum számosság*nak nevezzük. Jele: $\mathfrak{c}$

5.11. Következmény. Az irracionális számok számossága kontinuum.

5.12. Definíció. Azokat a komplex számokat, amelyek előállnak valamely

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,\ a_i \in \mathbb{Z},\ a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N},$$

n-edfokú egész együtthatós algebrai egyenlet gyökeként, *algebrai számok*nak nevezzük.

5.13. Példa. Minden racionális szám algebrai szám, hiszen gyöke egy elsőfokú egész együtthatós algebrai egyenletnek;
pl. $\dfrac{3}{5}$ megoldása az $5x - 3 = 0$ egyenletnek.

5.14. Tétel. *Egy n-ed fokú egész együtthatós algebrai egyenletnek legfeljebb n darab gyöke van $\mathbb{C}$-ben.*

5.15. Tétel. *Az algebrai számok halmaza bővebb, mint a racionális számok halmaza.*

Bizonyítás. Minden racionális szám algebrai szám, de van olyan algebrai szám amely nem racionális. Például $\sqrt[n]{\dfrac{p}{q}}$ gyöke a $qx^n - p = 0$ egyenletnek, de általában nem racionális (lásd $\sqrt{2}$). $\square$

5.16. Tétel. *Nem minden komplex szám algebrai.*

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy megszámlálható sok algebrai szám van, hiszen a komplex számok számossága kontinuum. Az algebrai számok az

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{Z},\ a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N},$$

egyenlet gyökei. Legyen

$$h = |a_n| + |a_{n-1}| + \dots |a_0| + n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Minden h-hoz csak véges sok algebrai egyenlet tartozik, és minden algebrai egyenletnek csak véges sok gyöke van. Mivel megszámlálható sok véges elemszámú halmaz uniója is megszámlálható, így

$$\{\text{algebrai számok}\} =$$

$$\bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} \mid a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \ \text{ és } \ |a_n| + \dots + |a_0| + n = h\}$$

megszámlálható halmaz. □

5.17. Definíció. A nem algebrai számokat *transzcendens számok*nak nevezzük.

5.18. Megjegyzés. Léteznek transzcendens számok, ilyen például a π és e.

6. Kombinatorikai alapfogalmak

6.1. Definíció. *Ismétlés nélküli permutáció*nak nevezzük n darab különböző elem egy rögzített sorrendjét. Jelölés: felsoroljuk az n darab elemet, és alá írjuk őket a permutáció sorrendjében, például

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.2. Tétel. *Az összes lehetséges permutációk száma n különböző elem esetén: $P_n = n!$. (Az $f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ $(n \in \mathbb{N})$ előírással értelmezett függvényt faktoriális függvénynek nevezzük, ahol $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6, \dots,$ $10! = 3628800, \dots$.)*

Bizonyítás. Az elemek száma szerinti teljes indukciót alkalmazunk, $n = 1$ esetén nyilván igaz, egy elemnek egy sorrendje van: $P_1 = 1! = 1$. Tegyük fel, hogy n-re igaz, azaz $P_n = n!$, Ezt felhasználva bizonyítsuk be, hogy ekkor $n + 1$-re is igaz a tétel. Ha adott n elem egy rögzített sorrendje, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, akkor az $n+1$-edik elem elhelyezésére az alábbi lehetőségek adódnak:

$$(\star, a_1, a_2, \dots, a_n),\ (a_1, \star, a_2, \dots, a_n),\ \dots,\ (a_1, a_2, \dots, a_n, \star),$$

összesen $n + 1$ darab. Mivel az indukciós feltevés szerint n elem permutációinak száma $n!$, így $P_{n+1} = (n+1)P_n = (n+1)n! = (n+1)!$. □

6.3. Példa. Egy kártyapakli megkeverése a 32 lap egy permutációja, és $32! \approx 2,63 \cdot 10^{35}$ számú különböző sorrend létezik.

6.4. Definíció. *Ismétléses permutáció*nak nevezzük n elem egy rögzített sorrendjét, ha az n darab elem közül $l_1, l_2, \ldots, l_k$ darab rendre egyenlő.

Ekkor $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n$, például:

$$\underbrace{3\ldots3}_{l_1}\ \underbrace{4\ldots4}_{l_2}\ldots\ \underbrace{6\ldots6}_{l_k}.$$

6.5. Tétel. *Legyen n elem közül $l_1, l_2, \ldots, l_k$ darab rendre egyforma. Ekkor ezen elemek összes lehetséges ismétléses permutációinak száma:*

$$P_{n;l_1,\ldots,l_k} = \frac{n!}{l_1! \cdot \cdots \cdot l_k!}.$$

Bizonyítás. Ha tekintjük az elemek ismétlés nélküli permutációit, akkor ezek között több egyforma is szerepel, mivel az azonos elemeket egymás között cserélgetve a permutáció nem változik. Például az l_1 darab egyforma elem egymás közti permutációinak száma $l_1!$,..., az l_k darab egyforma elem esetén pedig $l_k!$. Ha ezek szorzatával elosztjuk az ismétlés nélüli permutációk számát, megkapjuk az isméléses permutációk számát: $\dfrac{n!}{l_1! \cdot \cdots \cdot l_k!}$. □

6.6. Példa. Ha úgy keverünk össze egy kártyapaklit, hogy csak a színeket vesszük figyelembe, akkor négyféle lap lesz (piros, zöld, tök, makk), és mindegyikből 8 darab van a pakliban. Ez a 32 lap egy ismétléses permutációja, és az összes különböző sorrend száma: $P_{n;8,8,8,8} = \dfrac{32!}{8!8!8!8!}$

6.7. Definíció. Tekintsünk n darab különböző elemet, ezekből kiválasztva k darab rendezett elemet, az n elem egy k-adosztályú *ismétlés nélküli variáció*ját kapjuk.

6.8. Tétel. *Az összes lehetséges ismétlés nélküli k-adosztályú variációk száma n különböző elem esetén:*

$$V_n^k = n(n-1)\ldots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Bizonyítás. A bizonyítást rögzített n mellett k szerinti teljes indukcióval végezzük, $k = 1$ esetén n darab elemből 1-et kell kiválasztanunk, ezt n-féleképpen tehetjük meg, tehát: $V_n^1 = n$. Most tegyük fel, hogy k-ra igaz az állítás, és bizonyítsunk $k+1$-re. Ha kiválasztunk k darab elemet, a $k+1$-edik elem kiválasztására már csak $n-k$ lehetőség adódik, tehát $V_n^{k+1} = (n-k)V_n^k$. □

A definíciók alapján a permutáció a variáció speciális esete: $P_n = V_n^n$

6.9. Példa. Ha egy futóversenyen 10 ember áll rajthoz, akkor az első három helyezett a 10 ember egy 3-adosztályú ismétlés nélküli variációja, és összesen $V_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8$ féleképpen állhatnak fel a dobogóra a versenyzők.

6.10. Definíció. Ha n darab különböző elemből úgy választunk ki k darabot, hogy egy elemet többször is választhatunk és a sorrend számít, akkor az n elem egy k-adosztályú *ismétléses variációját* kapjuk.

6.11. Tétel. *Az összes lehetséges k-adosztályú ismétléses variációk száma n különböző elem esetén:*

$$V_{n,ism}^k = n^k.$$

Bizonyítás. A k darab hely mindegyikére n lehetőség közül választhatunk, tehát $V_{n,ism}^k = n \cdot \dots \cdot n = n^k$. □

6.12. Példa. A totó-szelvény kitöltése 3 darab elem (13+1)-edosztályú ismétléses variációja, összesen $V_3^{14} = 3^{14}-$féleképpen tölthetjük ki.

6.13. Definíció. Ha n elemből kiválasztunk k darabot úgy, hogy a sorrend nem számít, akkor az n elem k-adosztályú *ismétlés nélküli kombináció*ját kapjuk.

6.14. Tétel. *Az összes lehetséges k-adosztályú ismétlés nélküli kombináció n elem esetén:*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Az $\binom{n}{k}$ számokat *binomiális együtthatók*nak nevezzük, $\binom{n}{k}$-t "n alatt a k"-nak mondjuk.

Bizonyítás. Az n elem ismétlés nélküli k-adosztályú variációi között $k!$ számú van, melyekben ugyanazok az elemek szerepelnek, csak más sorrendben. Ezek mind ugyanazt a kombinációt állítják elő, tehát:

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \binom{n}{k}.$$

□

A kombináció az ismétléses permutáció speciális esete: $C_n^k = P_{n;k,n-k}$. Ez nemcsak abból vezethető le, hogy mindkettő $\binom{n}{k}$-val egyenlő, hanem a definícióból is. Ugyanis C_n^k n elemből k darab kiválasztásainak a száma. A kiválasztást úgy végezzük el, hogy a felsorakoztatott n elemből k darabot 1-essel, $n-k$ darabot pedig 0-val jelölünk meg. Ez pedig $P_{n;k,n-k}$-féleképp tehető meg.

6.15. Definíció. Ha n elemből úgy választunk ki k darabot, hogy a sorrend nem számít és egy elemet többször is választhatunk, akkor n elem egy k-adosztályú *ismétléses kombináció*ját kapjuk.

6.16. Tétel. *Az összes lehetséges k-adosztályú ismétléses kombinációk száma n elem esetén:*

$$C_{n,ism}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy n elem k-adosztályú ismétéses kombinációinak halmaza és $n+k-1$ elem k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak a halmaza között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létezik, azaz

$$C_{n,ism}^k = C_{n+k-1}^k.$$

Legyen az n elem az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz, és legyen ennek egy k-adosztályú ismétléses kombinációja az $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ halmaz. Rendezzük ezeket az elemeket növekvő sorrendbe, természetesen lehetnek köztük egyenlőek: $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_k \leq n$. Adjunk most az elemekhez különböző számokat úgy, hogy azután már ne legyenek közöttük egyenlőek: $1 \leq a_1 < a_2+1 < a_3+2 < \cdots < a_k+(k-1) \leq n+k-1$. Ez már az $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots n+k-1\}$ halmaz elemeinek egy ismétlés nélküli kombinációja. Minden ilyen ismétlés nélküli kombinációhoz tartozik n elem egy ismétléses kombinációja, következésképpen a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. (Például ha $n = 6$ és $k = 4$, akkor $n+k-1 = 9$ és az $\{1, 4, 5, 9\}$ ismétlés nélküli kombinációnak az ismétléses megfelelője az $\{1, 4-1, 5-2, 9-3\} = \{1, 3, 3, 6\}$.) Tehát $C_{n,ism}^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$. □

6.17. Példa. Ha ötféle csokoládét lehet kapni a boltban, és mi 10 darabot veszünk, akkor ez az 5 csokoládé 10-edosztályú ismétléses kombinációja, és összesen $C_{5,ism}^{10} = \binom{5+10-1}{10}$-féleképpen választhatunk.

6.18. Példa. Az A, B betűkből és a $0, 1$ számokból hány "betű, betű,szám, szám" típusú rendszámtábla készíthető? Három tipikus megoldási módszert ismertetünk.

(a) Kitöltjük az üres

1.	2.	3.	4.

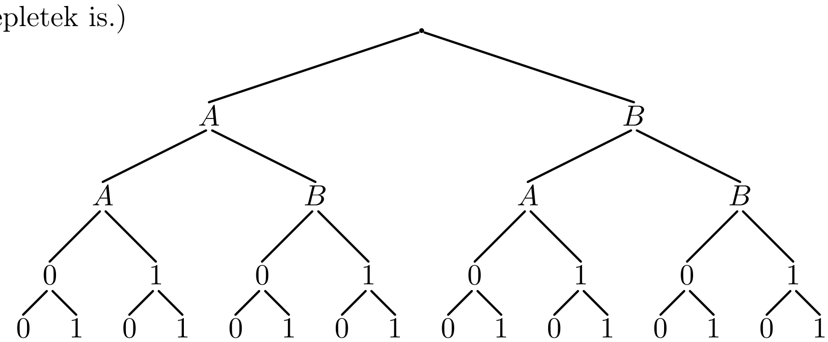
táblázatot. A kitöltési lehetőségek:

2-féle	2-féle	2-féle	2-féle

A végeredmény ezek szorzata: 2^4.

(b) Felbontjuk a kitöltést két ismert fázisra: 2 betűből 2 helyre $V^2_{2,ism}$, továbbá 2 számból 2 helyre $V^2_{2,ism}$ féleképp tehetünk. Ezek szorzata a végeredmény: $2^2 \cdot 2^2 = 2^4$.

(c) Fa gráfot készítünk a lehetséges esetek felsorolására. Ez jól magyarázza a fenti két megoldásban azt, hogy miért kellett összeszorozni az esetek számítását. (Fa gráf segítségével könnyen igazolhatók a V^k_n és $V^k_{n,ism}$ képletek is.)



Ezen gráf "lefelé haladó útjai" és a rendszámok között kölcsönösen egyértelmű leképezés van. Az ilyen esetek száma pedig $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$.

A binomiális együtthatók tulajdonságai:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, ha $0 \le k \le n$.
2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, ha $0 \le k \le n$.
   Ezen képlet belátható például az "esetek szétválasztásával." $n+1$ elemből $k+1$ darabot úgy választunk ki, hogy vagy az első n-ből k darabot és még az $n+1$-ediket, vagy az első n-ből $k+1$ darabot, de az $n+1$-ediket nem. Így $C^{k+1}_{n+1} = C^k_n + C^{k+1}_n$.
3. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k}$, ha $0 \le k \le n$.
   Ez a megfelelő képletből indukcióval adódik.

4. $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k+1)k(k-1)\cdots 1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$, ha $0 \le k \le n$.
Ezt a képletet használhatjuk a binomiális együtthatók rekurzív kiszámítására is (hiszen az $n!$ gyors növekedése miatt a definíció szerinti közvetlen kiszámítás nem célszerű).

6.19. Tétel (Polinomiális tétel). *legyen* $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ *és* $n \in \mathbb{N}$. *Ekkor*

$$(a_1 + \cdots + a_k)^n = \sum_{s_1+\cdots+s_k=n} \left(\frac{n!}{s_1! \dots s_k!} \right) a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_k^{s_k}.$$

Az összegzés azon nem negatív egész $s_1, \dots, s_k$ számokra terjed ki, amelyek összege n.

Bizonyítás. Mivel

$$(a_1 + \cdots + a_k)^n = \underbrace{(a_1 + \cdots + a_k)(a_1 + \cdots + a_k)... \ (a_1 + \cdots + a_k)}_{n \text{ darab}},$$

és minden tagot minden taggal szoroznunk kell, ezért a szorzat egy tagja $a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_k^{s_k}$ alakú lesz, ahol $s_1 + \cdots + s_k = n$. Az a_1 elemet s_1-szer $\binom{n}{s_1}$-féleképpen lehet kiválaszatni az n darab zárójelből, ezután az a_2 elmet s_2-ször már csak $(n - s_1)$ darab zárójelből választhatjuk, összesen $\binom{n-s_1}{s_2}$−féleképpen,..., az a_k elemet s_k-szor $(n - s_1 - \cdots - s_{k-1})$ darab zárójelből $\binom{n-s_1-\cdots-s_{k-1}}{s_k}$−féleképpen választhatjuk ki. Tehát az $a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_k^{s_k}$ tag együtthatója a szorzatban:

$$\binom{n}{s_1}\binom{n-s_1}{s_2}...\binom{n-s_1-\cdots-s_{k-1}}{s_k} =$$

$$\frac{n!}{s_1!(n-s_1)!}\frac{(n-s_1)!}{(n-s_1-s_2)!s_2!}\cdot ... \cdot \frac{(n-s_1-\cdots-s_{k-1})!}{\underbrace{(n-s_1-\cdots-s_k)!}_{0!=1}s_k!} = \frac{n!}{s_1!\dots s_k!}.$$

□

6.20. Tétel (Binomiális tétel). *legyen* $a, b \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

$$(a+b)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} a^{n-s} b^s = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + ... \ + \binom{n}{n} b^n.$$

Bizonyítás. A tétel a polinomiális tétel speciális esete $k = 2$-re. □

6.21. Példa. A binomiális tétel alapján:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... \ + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n,$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + ... + (-1)^n \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0.$$

Pascal-háromszög. Az $(a+b)^n$ kifejezésben szereplő együtthatókat $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén egymás alá elhelyezzük.

$$\begin{array}{lccccccccc}
n{=}0 & & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
n{=}1 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
n{=}2 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
n{=}3 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
n{=}4 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Az $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ képlet alapján látható, hogy abban, az ún. Pascal-háromszögben szereplő értékek a közvetlenül felettük szereplő két érték összegeként kaphatók meg. Ez is mutatja, hogy $\binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq n$, pozitív egész. A Pascal-háromszögben szereplő számok:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

3. fejezet
Vektorok

1. Vektorterek

1.1. Definíció. A V nem üres halmazt *vektortér*nek nevezzük a $\mathbb{T}$ test felett, ha értelmezve van rajta egy $+ : V \times V \to V$ összeadás, és egy $\mathbb{T} \times V \to V$ skalárszorzás, amelyek teljesítik az alábbi tulajdonságokat:

1. $(V, +)$ Abel-csoport,
2. $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}$ esetén:
   (a) $\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha\underline{x} + \alpha\underline{y}$,
   (b) $(\alpha + \beta)\underline{x} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{x}$,
   (c) $\alpha(\beta\underline{x}) = (\alpha\beta)\underline{x}$,
   (d) $1\underline{x} = \underline{x}$.

V elemeit *vektor*oknak nevezzük, a V Abel-csoport $\underline{0}$ neutrális elemét pedig *nullvektor*nak. $\mathbb{T}$ elemeit *skalár*oknak mondjuk.

1.2. Példa. $\mathbb{R}$ vektortér önmaga felett. Az összeadás a szokásos $\mathbb{R}$-beli összeadás, a skalárszorzás a szokásos $\mathbb{R}$-beli szorzás.

1.3. Példa. A valós számok $\mathbb{R}$ halmazának önmagával vett Descartes-féle szorzata, amelyet a *rendezett számpárok teré*nek nevezünk, vektortér $\mathbb{R}$ felett. A számpárok

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a_1, a_2) \mid \ a_1 \in \mathbb{R},\ a_2 \in \mathbb{R}\}$$

halmazán az összeadást és a skalárszorzást a következőképpen definiáljuk:
$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) \doteq (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$,
$\lambda(a_1, a_2) \doteq (\lambda a_1, \lambda a_2)$.

1.4. Példa. A valós számok $\mathbb{R}$ halmazának önmagával vett n-szeres Descartes-féle szorzata, amelyet a *szám n-esek teré*nek nevezünk, vektortér $\mathbb{R}$ felett. A szám n-esek

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-szer}} = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \ a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$$

halmazán az összeadást és a skalárszorzást a következőképpen definiáljuk:

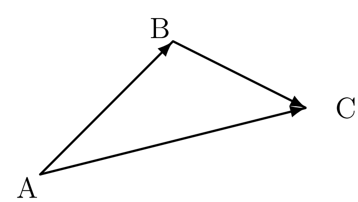
$(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)\doteq(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$,
$\lambda(a_1,\dots,a_n)\doteq(\lambda a_1,\dots,\lambda a_n)$.

1.5. Példa. *Szabad vektorok tere.*

Tekintsük a geometriai tér irányított szakaszait: $X=\{\overrightarrow{AB},\dots,\overrightarrow{UU},\dots\}$, ahol $\overrightarrow{UU}$ hossza 0, iránya tetszőleges. Legyen $Y=\{P_0,P_1,\dots\}$ a párhuzamos eltolások halmaza. Tekintsük az $f:X\to Y,\ f(\overrightarrow{AB})=P_{AB}$ leképezést, ahol P_{AB} az a párhuzamos eltolás, ami az A-hoz a B pontot rendeli. Ez egy szürjekív leképezés, de nem injektív. Ha ekvivalensnek tekintjük azokat az irányított szakaszokat, amelyekhez az f leképezés ugyanazt a párhuzamos eltolást rendeli, egy ekvivalencia relációt kapunk, ami létrehoz egy osztályozást. Az osztályokat szabad vektoroknak nevezzük, és a $\underline{0},\underline{a},\underline{b},\dots\in V$ jelölést használjuk. Egy $\overrightarrow{AB}$ irányított szakaszt az $\underline{a}\in V$ szabad vektor konkrét reprezentánsának nevezünk, ha $\overrightarrow{AB}\in\underline{a}$.

Szabad vektorok összeadását a konkrét reprezentánsaik segítségével definiálhatjuk: ha $\underline{a},\underline{b}\in V$ és $\overrightarrow{AB}\in\underline{a}$, $\overrightarrow{BC}\in\underline{b}$, akkor $\underline{a}+\underline{b}$ az a szabadvektor, amely tartalmazza $\overrightarrow{AC}$-t.

$$\overrightarrow{AB}\in\underline{a}$$
$$\overrightarrow{BC}\in\underline{b}$$
$$\overrightarrow{AC}\in\underline{a}+\underline{b}$$



Egy $\underline{a}\in V$ szabadvektor normáján egy konkrét reprezentánsának a hosszát értjük, jele: $\|\underline{a}\|$. A norma nemnegatív: $\|\underline{a}\|\geq 0$, és $\|\underline{a}\|=0$ akkor és csak akkor, ha $\underline{a}=\underline{0}$.

A norma segítségével definiálhatjuk a szabadvektorok skalárral való szorzását. Ha $\alpha\in\mathbb{R}$, $\underline{a}\in V$ akkor az $\alpha\underline{a}\in V$ szabadvektor teljesíti az alábbi tulajdonságokat:

1. $\|\alpha\underline{a}\|=|\alpha|\,\|\underline{a}\|$,
2. $\alpha>0$ esetén $\alpha\underline{a}$ egy konkrét reprezentánsa egyirányú $\underline{a}$ egy konkrét reprezentánsával,
3. $\alpha<0$ esetén $\alpha\underline{a}$ egy konkrét reprezentánsa ellentétes irányú $\underline{a}$ egy konkrét reprezentánsával,
4. $\alpha=0$ vagy $\underline{a}=0$ esetén $\alpha\underline{a}=0$.

A szabad vektorok V halmaza az így bevezetett szorzásra és összeadásra nézve vektorteret alkot a valós számok teste felett.

1.6. Példa. A legfeljebb n-edfokú valós együtthatós *polinom*ok

$$\mathcal{P}_n = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$$

halmaza vektortér $\mathbb{R}$ felett az alábbi műveletekkel:

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) \doteq$$
$$\big((a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)\big),$$
$$\lambda(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) \doteq \big((\lambda a_n)x^n + \cdots + (\lambda a_1)x + (\lambda a_0)\big).$$

1.7. Példa. Az a $\{\underline{0}\}$ halmaz, amely csak a nullvektort tartalmazza, mindig vektortér, és *triviális vektortér*nek nevezzük. (Az összeadás $\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$, a skalárszorzás $\alpha\underline{0} = \underline{0}$, $\forall \alpha \in \mathbb{T}$, szerint értelmezett.)

1.8. Példa. A zárt intervallumon értelmezett függvények

$$F = \{f \mid\ f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$$

tere vektorteret alkot a függvények pontonkénti összeadására és skalárszorzására nézve.

1.9. Példa. $\mathbb{C}$ vektortér önmaga felett. $\mathbb{C}$ vektortér $\mathbb{R}$ felett is. (De $\mathbb{R}$ nem vektortér $\mathbb{C}$ felett a szokásos $\mathbb{C}$ beli műveleteket tekintve.)

1.10. Tétel. *Vektortérben a nullvektor egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. A tétel következménye annak, hogy Abel-csoport neutrális eleme egyértelmű, a bizonyítást lásd az előző fejezet 1.5. tételénél. □

1.11. Tétel. *Legyen V vektortér a $\mathbb{T}$ test felett, $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ és $\underline{a}, \underline{b} \in V$. Ekkor*

1. $0\underline{a} = \underline{0}$,
2. $(-1)\underline{a} = -\underline{a}$,
3. $\alpha\underline{0} = \underline{0}$,
4. $\alpha\underline{a} = \underline{0} \Longrightarrow \alpha = 0$ *vagy* $\underline{a} = \underline{0}$.

Bizonyítás. 1. Mivel $0\underline{a} + \underline{a} = 0\underline{a} + 1\underline{a} = (0+1)\underline{a} = 1\underline{a} = \underline{a}$, így $0\underline{a} + \underline{a} = \underline{a}$, és az egyszerűsítési szabály miatt $0\underline{a} = \underline{0}$.
2. $\underline{a} + (-1)\underline{a} = 1\underline{a} + (-1)\underline{a} = (1 + (-1))\underline{a} = \underline{0}$, ezért $(-1)\underline{a}$ az $\underline{a}$ vektor additív inverze.
3. $\alpha\underline{0} = \alpha(\underline{0} + \underline{0}) = \alpha\underline{0} + \alpha\underline{0}$, innen $\alpha\underline{0} = \underline{0}$.
4. Indirekt tegyük fel, hogy sem $\alpha \neq 0$, sem $\underline{a} \neq \underline{0}$, de $\alpha\underline{a} = \underline{0}$. Ha $\alpha \neq 0$, akkor $(\alpha)^{-1}\alpha\underline{a} = (\alpha)^{-1}\underline{0}$, vagyis $\underline{a} = \underline{0}$, ami ellentmondás.

□

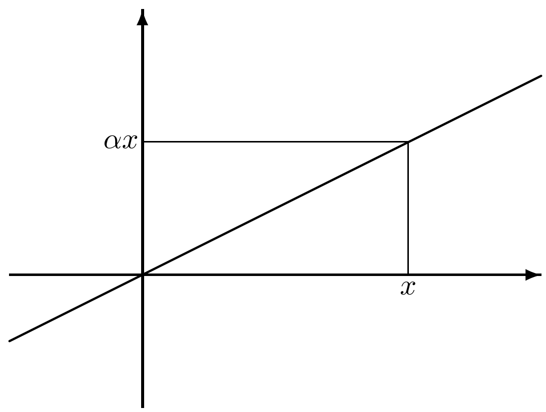
1.12. Definíció. A $(V, \mathbb{T})$ vektortér W részhalmazát a V *alterének* nevezzük, ha W önmagában is vektortér, azaz $\forall \underline{a}, \underline{b} \in W$ és $\forall \alpha \in \mathbb{T}$ esetén

$\underline{a} + \underline{b} \in W$, $\alpha\underline{a} \in W$, tehát W zárt a vektorok összeadására és tetszőleges skalárral való szorzásra.

1.13. Megjegyzés. A $\{\underline{0}\} \subset V$ és a $V \subset V$ altereket triviális altereknek, illetve nem valódi altereknek nevezzük.

1.14. Példa. A szám n-esek terében a $W = \{(a, 0, \ldots, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ halmaz altér.

1.15. Példa. $\mathbb{R}^2$-ben $V_\alpha = \{(x, \alpha x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, de rögzített elem, altér. Könnyen belátható, hogy $\mathbb{R}^2$-ben a $\{\underline{0}\}$ és az $\mathbb{R}^2$ altereken kívül csupán ilyen típusú alterek léteznek. V_α azonosítható a sík origón átmenő, α meredekségű egyeneseivel.



1.16. Tétel. *Legyen $U \subset V$, $W \subset V$ altér a V vektortérben. Ekkor $U \cap W$ és $U + W = \{\underline{u} + \underline{w} \mid \underline{u} \in U,\ \underline{w} \in W\}$ is altér.*

Bizonyítás.
1. $U \cap W$ nem lehet üres halmaz, a $\underline{0}$ vektort biztosan tartalmazza. Ha $\underline{x}, \underline{y} \in U \cap W$, akkor $\underline{x}, \underline{y} \in U$ és $\underline{x}, \underline{y} \in W$. Mivel U és W alterek, zártak a vektortér műveletekre nézve, így $\underline{x}+\underline{y} \in U$ és $\underline{x}+\underline{y} \in W$, ezért $\underline{x} + \underline{y} \in U \cap W$. Hasonlóan $\lambda\underline{x} \in U$ és $\lambda\underline{x} \in W$ miatt $\lambda\underline{x} \in U \cap W$.
2. Ha $\underline{x}, \underline{y} \in U + W$, akkor létezik $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$ és $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$ úgy, hogy $\underline{x} = \underline{u}_1 + \underline{w}_1$ és $\underline{y} = \underline{u}_2 + \underline{w}_2$. Ekkor

$$\underline{x} + \underline{y} = (\underline{u}_1 + \underline{w}_1) + (\underline{u}_2 + \underline{w}_2) = \underbrace{(\underline{u}_1 + \underline{u}_2)}_{\in U} + \underbrace{(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)}_{\in W}$$

□

2. Lineáris függőség, bázis, dimenzió

2.1. Definíció. Adott a V vektortér a $\mathbb{T}$ test felett, $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in V$ és legyenek $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{T}$. Ekkor az $\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \cdots + \alpha_k\underline{a}_k$ vektort az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok *lineáris kombináció*jának nevezzük.

A nullvektor tetszőleges $a_1, \ldots, a_k$ vektorokból előáll ún. triviális lineáris kombinációként: $\underline{0} = 0\underline{a}_1 + \cdots + 0\underline{a}_k$.

2.2. Tétel (A lineáris kombináció tranzitivitása). *Legyen V egy vektortér. Ha a $\underline{c} \in V$ vektor lineárisan kombinálható az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok segítségével, és minden $\underline{a}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ vektor lineárisan kombinálható a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_l$ vektorokból, akkor a $\underline{c}$ vektor is előállítható a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_l$ vektorok lineáris kombinációjaként.*

Bizonyítás. Ha $\underline{c} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\underline{a}_i$ és $\underline{a}_i = \sum_{j=1}^{l} \mu_{ij}\underline{b}_j \quad i = 1, \ldots, k$, akkor

$$\underline{c} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\underline{a}_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{l} \mu_{ij}\underline{b}_j \right) = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\mu_{ij} \right) \underline{b}_j.$$

Tehát előállítottuk $\underline{c}$-t a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_l$ vektorok lineáris kombinációjaként. □

2.3. Tétel. *A V vektortér tetszőleges $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorainak összes lineáris kombinációja alteret alkot V-ben. Ezt az alteret az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorrendszer által generált altérnek, vagy az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k\}$ halmaz (lineáris) lezártjának hívjuk. Jele: $\mathcal{L}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k)$.*

Bizonyítás. $\mathcal{L}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k)$ zárt az összeadásra:

$(\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_k\underline{a}_k) + (\beta_1\underline{a}_1 + \cdots + \beta_k\underline{a}_k) = (\alpha_1 + \beta_1)\underline{a}_1 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)\underline{a}_k$,

és zárt a skalárszorzásra:

$$\lambda(\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_k\underline{a}_k) = (\lambda\alpha_1)\underline{a}_1 + \cdots + (\lambda\alpha_k)\underline{a}_k.$$

□

2.4. Példa. $\mathbb{R}^2$-ben a $(0, 1)$ vektor általt generált altérben ezen vektor skalárszorosai vannak, vagyis az y tengely. Az $\underline{e}_1 = (0, 1)$ és $\underline{e}_2 = (1, 0)$ vektorok lineáris kombinációjaként azonban minden $\mathbb{R}^2$-beli vektor előáll, például $(3, 2) = 3\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$, így $\mathcal{L}(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = \mathbb{R}^2$.

2.5. Definíció. Legyen V vektortér. Az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in V$ vektorrendszert

1. *generátorrendszer*nek nevezzük, ha V minden eleme legalább egyféleképpen lineárisan kombinálható belőlük,

2. *lineárisan független vektorrendszer*nek nevezzük, ha V minden eleme legfeljebb egyféleképpen előállítható a lineáris kombinációjukként,
3. *bázis*nak nevezzük, ha V minden eleme pontosan egyféleképpen kombinálható belőlük.

2.6. Példa. $\mathbb{R}^2$-ben $\underline{e}_1 = (0,1)$ és $\underline{e}_2 = (1,0)$ bázis, hisz tetszőleges $\underline{u} = (u_1, u_2)$ vektor $\underline{u} = u_1\underline{e}_1 + u_2\underline{e}_2$ lineáris kombinációként előállítható, és ez az előállítás egyértelmű.

2.7. Definíció. Ha a V vektortérben $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ bázis, és $\underline{a}$ előállítása ebben a bázisban $\underline{a} = \lambda_1\underline{a}_1 + \dots + \lambda_k\underline{a}_k$, akkor a $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ szám k-ast az $\underline{a}$ vektor $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ bázisra vonatkozó *koordinátá*inak nevezzük.

2.8. Definíció. Egy vektorteret *végesen generált*nak nevezünk, ha létezik véges sok elemből álló generátorrendszere.

2.9. Megjegyzés. Egy vektorrendszert *lineárisan függő*nek nevezünk, ha nem lineárisan független.

2.10. Tétel. *Egy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in V$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan függő, ha belőlük a zérusvektor nem triviális lineáris kombinációval is előállítható, azaz léteznek $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ nem mind nulla skalárok úgy, hogy $\underline{0} = \alpha_1\underline{a}_1 + \dots + \alpha_k\underline{a}_k$.*

Bizonyítás. 1. Ha $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in V$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor létezik olyan $\underline{x}$ vektor, amit legalább kétféleképpen lehet kikombinálni belőlük. Ekkor

$$\underline{x} = \alpha_1\underline{a}_1 + \dots + \alpha_k\underline{a}_k, \;\; x = \beta_1\underline{a}_1 + \dots + \beta_k\underline{a}_k,$$

és létezik $i \in \{1, \dots, k\}$, melyre $\alpha_i \neq \beta_i$. A két egyenlőséget kivonva egymásból a nullvektor egy nem triviális lineáris kombinációját kapjuk:

$$\underline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\underline{a}_1 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)\underline{a}_k,$$

ahol $(\alpha_i - \beta_i) \neq 0$.

2. Ha a nullvektornak van nem triviális előállítása, akkor kétféleképpen is felírható lineáris kombinációként:

$$\underline{0} = \alpha_1\underline{a}_1 + \dots + \alpha_k\underline{a}_k, \;\; \exists i : \alpha_i \neq 0,$$

$$\underline{0} = 0\underline{a}_1 + \dots + 0\underline{a}_k,$$

így a vektorrendszer lineárisan függő.

□

2.11. Következmény. Egy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in V$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha belőlük a zérusvektor csak triviális lineáris kombinációként állítható elő, azaz ha $\underline{0} = \alpha_1\underline{a}_1 + \dots + \alpha_k\underline{a}_k$, akkor $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

Bizonyítás. Az állítás az előző tétellel ekvivalens. □

2.12. Következmény. A nullvektor önmagában függő rendszert alkot. Tetszőleges, a nullvektortól különböző vektor önmagában független rendszert alkot.

2.13. Következmény. Ha egy vektorrendszer tartalmazza a zérusvektort, akkor lineárisan függő.

2.14. Tétel. *Legyen V egy vektortér. Az alábbi állítások ekvivalensek:*
1. $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in V$ *bázis,*
2. *lineárisan független generátorrendszer,*
3. *maximális lineárisan független vektorrendszer (egy vektort hozzávéve, már nem lineárisan függetlenek),*
4. *minimális generátorrendszer (egy vektort elvéve, már nem generátorrendszer).*

Bizonyítás. Közvetlenül adódik a definíciókból, hogy a második állítás akkor és csak akkor teljesül, ha $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ bázis. Belátjuk, hogy az elsőből következik a harmadik, a harmadikból a negyedik, a negyedikből pedig az első.

(a) 1. $\Longrightarrow$ 3. Ha az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ bázist kibővítjük egy $\underline{a} \in V$ vektorral, akkor az így kapott $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k, \underline{a}$ vektorrendszer lineárisan függő lesz, mert az $\underline{a}$ vektort kétféleképpen is elő lehet állítani belőlük lineáris kombinációval. Egyrészt léteznek olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ skalárok, melyekre

$$\underline{a} = \alpha_1\underline{a}_1 + \dots + \alpha_k\underline{a}_k,$$

mivel $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ bázis volt, másrészt

$$\underline{a} = 0\underline{a}_1 + \dots 0\underline{a}_k + 1\underline{a}.$$

(b) 3. $\Longrightarrow$ 4. Ha $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ maximális lineárisan független vektorrendszer, akkor generátorrendszer is egyben. Ugyanis ha létezne $\underline{a} \in V$ vektor, amit nem lehet kikombinálni belőlük, akkor ezt a vektort hozzávéve, a vektorrendszer lineárisan független maradna, ami ellentmondana a maximalitásnak. Tehát tegyük fel indirekt, hogy létezik $\underline{a} \in V$ úgy, hogy nem kombinálható ki az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorokból, de $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k, \underline{a}$ lineárisan függő. Ekkor a 2.10. tétel miatt a $\underline{0}$ vektor előállítható belőlük nem triviális lineáris kombinációként:

$$\underline{0} = \lambda_1\underline{a}_1 + \dots + \lambda_k\underline{a}_k + \lambda_{k+1}\underline{a} \quad \exists i: \ \lambda_i \neq 0.$$

Ebben az előállításban $\lambda_{k+1} \neq 0$, mert ellenkező esetben létezne a $\underline{0}$ vektornak nem triviális előállítása az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, ami ellentmond annak, hogy lineárisan függetlenek. így az $\underline{a}$ vektor kifejezhető $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ lineáris kombinációjaként:

$$\underline{a} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}}\underline{a}_1 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\underline{a}_k,$$

ami ellentmond az indirekt feltevésnek.

A minimalitás a lineáris függetlenség következménye. Ha például az $\underline{a}_k$ vektort elhagyjuk, akkor $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{k-1}$ vektorok nem alkothatnak generátorrendszert, mert $\underline{a}_k$-t nem lehet kikombinálni belőlük.

(c) 4. $\Longrightarrow$ 1. Tegyük fel, hogy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ minimális generátorrendszer. Ahhoz, hogy belássuk, hogy bázis, meg kell mutatni, hogy minden vektor csak egyféleképpen kombinálható belőlük. Indirekt tegyük fel, hogy létezik $\underline{a} \in V$ úgy, hogy $\underline{a}$ kétféleképpen is felírható az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként:

$$\underline{a} = \lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_k\underline{a}_k, \qquad \underline{a} = \mu_1\underline{a}_1 + \cdots + \mu_k\underline{a}_k,$$

ahol létezik i, $1 \leq i \leq k$, amire $\lambda_i \neq \mu_i$. Kivonva a két egyenlőséget egymásból:

$$\underline{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\underline{a}_1 + \cdots + \underbrace{(\lambda_i - \mu_i)}_{\neq 0}\underline{a}_i + \cdots + (\lambda_k - \mu_k)\underline{a}_k,$$

ami azt jelenti, hogy $\underline{a}_i$ kifejezhető az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként. Így ez a vektorrendszer, ami csak $(k-1)$ elemből áll, szintén generátorrendszer a 2.2. tétel miatt, ami ellentmond $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ minimalitásának.

□

2.15. Tétel. *Az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan függő, ha valamely vektora lineárisan kombinálható a többiből.*

Bizonyítás. 1. Ha $\underline{a}_1 = \lambda_2\underline{a}_2 + \cdots + \lambda_k\underline{a}_k$, akkor

$$\underline{0} = -1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 + \cdots + \lambda_k\underline{a}_k,$$

így a $\underline{0}$-nak van a triviálison kívül még egy előállítása, ami azt jelenti, hogy a vektorrendszer függő.

2. Ha a rendszer lineárisan függő, akkor a nullvektor felírható lineáris kombinációjukként: $\underline{0} = \lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_k\underline{a}_k$, és a skalárok között van nemnulla.

Tegyük fel, hogy $\lambda_1 \neq 0$. Ekkor $\underline{a}_1$ kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként:

$$\underline{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\underline{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\underline{a}_k.$$

$\square$

2.16. Következmény. Egy legalább kételemű vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan függő, ha valamelyik vektora kikombinálható az azt megelőzőekből, vagy valamelyik tagja a nullvektor.

2.17. Tétel (Kicserélési tétel). *Egy k darab vektorból álló vektorrendszerrel generált vektortér minden lineárisan független vektorrendszere legfeljebb k darab vektort tartalmaz.*

Bizonyítás. Legyen $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ generátorrendszer V-ben, és $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_l$ lineárisan független vektorrendszer. Ekkor $\underline{b}_i \neq \underline{0}$ $\;i = 1, \ldots l$.

A $\underline{b}_l, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorrendszer nem lehet minimális generátorrendszer, így lineárisan függő. Ekkor létezik i, $1 \leq i \leq k$, amelyre $\underline{a}_i$ kikombinálható az őt megelőző vektorokból, ezért ha eltávolítjuk a vektorrendszerből, az továbbra is generátorrendszer marad.

Hasonlóan a $\underline{b}_{l-1}, \underline{b}_l, \underline{a}_1, \ldots, \underline{\breve{a}}_i, \ldots, \underline{a}_k$ nem minimális generátorrendszer ($\underline{\breve{a}}_i$ azt jelenti, hogy az $\underline{a}_i$ hiányzik), így lineárisan függő vektorrendszer. Ekkor létezik j, $1 \leq j \leq k$, melyre $\underline{a}_j$ kikombinálható az előtte állókból ($\underline{b}_2$ nem kombinálható $\underline{b}_1$-ből, mert lineárisan függetlenek). Ha $\underline{a}_j$-t eltávolítjuk, a megmaradó vektorok továbbra is generátorrendszert alkotnak.

Ezután a $\underline{b}_{l-2}, \underline{b}_{l-1}, \underline{b}_l, \underline{a}_1, \ldots, \underline{\breve{a}}_i, \ldots, \underline{\breve{a}}_j, \ldots, \underline{a}_k$ vektorrendszert tekintjük, ami lineárisan függő generátorrendszer. Ekkor van olyan tagja, amely az előzőek lineáris kombinációja, és ez nem lehet valamelyik $\underline{b}_{l-m}$, $m \in \{0, 1, 2\}$, mert a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_l$ vektorrendszer lineárisan független.
Az eljárást ugyanígy folytatjuk. A vektorok cserélgetése véges sok lépésben véget ér, és mindig $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorrendszerbeli elemet cserélünk $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_l$-beli vektorra, így ez előbbi nem fogyhat el hamarabb, a végén a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_l$, $\underline{a}_{j_1}, \ldots, \underline{a}_{j_{k-l}}$ vektorrendszert kapjuk, ahol $1 \leq j_1, \ldots, \leq j_{k-l} \leq n$ (ha $k = l$, akkor természetesen $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_l$ adódik). $\square$

2.18. Következmény. Egy k darab vektorból álló vektorrendszer által generált vektortérben minden $k+1$ tagú vektorrendszer lineárisan függő.

2.19. Tétel. *Egy k darab vektor által generált vektortérben létezik legfeljebb k darab vektort tartalmazó bázis. Ebben a vektortérben minden bázis egyenlő számosságú.*

Bizonyítás. 1. Ha $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ generátorrendszer V-ben, és van benne nullvektor, akkor azt elhagyhatjuk. Ha $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ lineárisan független, akkor bázis. Ha lineárisan függő, akkor léteznek olyan elemek, amelyek kikombinálhatóak a többiből. Ezeket az elemeket elhagyva, véges sok lépésben egy lineárisan független vektorrendszert kapunk, azaz egy bázist.

2. Ha $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ és $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_l$ is bázis V-ben, akkor $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ generátorrendszer, $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_l$ lineárisan független vektorrendszer, így a 2.17. tétel miatt $l \leq k$. Fordítva: $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_l$ generátorrendszer, $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ lineárisan független, így $k \leq l$, tehát $k = l$.

□

2.20. Definíció. Egy vektortér bázisainak közös számosságát a vektortér *dimenzió*jának nevezzük.

2.21. Definíció. Egy vektorrendszer által generált altér dimenzióját a vektorrendszer *rang*jának nevezzük: rg($\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$)= $\dim \mathcal{L}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k)$.

2.22. Példa. A szám n-esek $\mathbb{R}^n$ terében az alábbi vektorrendszer bázis:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát $\mathbb{R}^n$ n-dimenziós, és ebben a bázisban egy elem előállítása:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ezt a bázist $\mathbb{R}^n$ kanonikus vagy *természetes bázis*ának nevezzük.

2.23. Példa. A legfeljebb n-ed fokú polinomok vektorterében bázis az $1, x, x^2, \ldots, x^n$ vektorrendszer, így ez a vektortér $(n+1)$-dimenziós.

2.24. Következmény. Ha V egy vektortér, $W \subset V$ altér és $\dim W = \dim V$, akkor $W = V$.

2.25. Tétel. *Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in V$ lineárisan független vektorrendszer, $k < n$. Ekkor léteznek $\underline{a}_{k+1}, \ldots, \underline{a}_n \in V$ vektorok úgy, hogy $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ bázis V-ben.*

Bizonyítás. Mivel $k < n$, ezért $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_k$ nem bázis, tehát nem maximális lineárisan független vektorrendszer. Ekkor létezik $\underline{a}_{k+1} \in V$ úgy, hogy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k, \underline{a}_{k+1}$ lineárisan függetlenek. Ha ez maximális lineárisan független vektorrendszer, azaz $k + 1 = n$, akkor megkaptunk egy bázist, ha nem maximális, akkor pedig létezik $\underline{a}_{k+2} \in V$ úgy, hogy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{k+2}$ lineárisan függetlenek. Hasonlóan folytatva az eljárást, véges sok lépésben eljutunk egy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ bázishoz. $\square$

2.26. Következmény. Egy n-dimenziós vektortér minden altere legfeljebb n-dimenziós.

2.27. Tétel. *Legyen V_1, V_2 a V vektortér két altere. Ekkor*

$$\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

Bizonyítás. Ha $V_1 \cap V_2$ bázisa $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$, akkor ez kipótolható a 2.25. tétel miatt úgy, hogy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_l$ bázisa V_1-nek, és kipótolható úgy, hogy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m$ pedig bázis V_2-ben. Ekkor $V_1 + V_2$ egy lehetséges bázisa:

$$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_l, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m.$$

Másrészt vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha például a b_i vektort elő lehetne állítani az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m$ vektorok segítségével, akkor $b_i \in V_1 \cap V_2$ teljesülne, ami ellentmondás. $\square$

3. Alterek direkt összege

3.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a V vektortér a $V_1, \dots, V_k$ altereinek *direkt összeg*e, ha minden $\underline{a} \in V$ vektor előáll pontosan egyféleképpen $\underline{a}_1 + \dots + \underline{a}_k$ alakban, ahol $\underline{a}_1 \in V_1, \dots, \underline{a}_k \in V_k$. Jele: $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

3.2. Tétel. *A V vektortér akkor és csak akkor áll elő bizonyos altereinek direkt összegeként, ha azon alterek tetszőleges bázisainak egyesítése a V vektortér egy bázisát adja.*

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ és
V_1 dimenziója n_1, bázisa $(e_1) = (\underline{e}_{11}, \dots, \underline{e}_{1n_1})$,
$\vdots$
V_k dimenziója n_k, bázisa $(e_k) = (\underline{e}_{k1}, \dots, \underline{e}_{kn_k})$.

(a) Ekkor az $((e_1), \dots, (e_k)) = (\underline{e}_{11}, \dots, \underline{e}_{kn_k})$ generátorrendszere V-nek, mivel $\forall \underline{x} \in V :\ \underline{x} = \underline{x}_1 + \dots + \underline{x}_k$, $\underline{x}_1 \in V_1, \dots, \underline{x}_k \in V_k$ esetén léteznek $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n_1}, \dots, \alpha_{kn_k}$ skalárok úgy, hogy:
$\underline{x}_1 = \alpha_{11}\underline{e}_{11} + \dots + \alpha_{1n_1}\underline{e}_{1n_1}$,

$\vdots$
$\underline{x}_k = \alpha_{k1}\underline{e}_{k1} + \cdots + \alpha_{kn_k}\underline{e}_{kn_k}$,
így $\underline{x} = \alpha_{11}\underline{e}_{11} + \cdots + \alpha_{kn_k}\underline{e}_{kn_k}$.

(b) Az $\underline{e}_{11}, \dots, \underline{e}_{kn_k}$ vektorrendszer lineárisan független. Legyen ugyanis
$\underbrace{\beta_{11}\underline{e}_{11} + \cdots + \beta_{1n_1}\underline{e}_{1n_1}}_{\underline{y}_1} + \ldots + \underbrace{\beta_{k1}\underline{e}_{k1} + \cdots + \beta_{kn_k}\underline{e}_{kn_k}}_{\underline{y}_k} = \underline{0}$
a nullvektor egy előállítása. Mivel itt $\underline{y}_1 \in V_1, \dots, \underline{y}_k \in V_k$, a direkt összeg definíciója miatt az

$$\underline{y}_1 + \cdots + \underline{y}_k = \underline{0}$$

előállítás egyértelmű. Mivel $\underline{0} \in V_i$ $(i = 1, \dots, k)$, így a

$$\underline{0} + \cdots + \underline{0} = \underline{0}$$

egy másik előállítás. Azaz $\underline{y}_i = \underline{0}$ minden $i = 1, \dots, k$ esetén. Azonban (e_i) bázisa V_i-nek, ezért a

$$\beta_{i1}\underline{e}_{i1} + \cdots + \beta_{in_i}\underline{e}_{in_i} = \underline{y}_1 = \underline{0}$$

előállításban az együtthatók nullák.

2. Tegyük fel, hogy a $V_1, \dots, V_k$ alterek bázisainak $(e) = (\underline{e}_{11}, \dots, \underline{e}_{kn_k})$ egyesítése bázisa V-nek. Belátandó, hogy minden $\underline{x} \in V$ vektort pontosan egyféleképpen lehet előállítani $\underline{x}_1 + \cdots + \underline{x}_k$ alakban, ahol $\underline{x}_1 \in V_1, \dots, \underline{x}_k \in V_k$. Az (e) bázisban $\underline{x}$ pontosan egyféleképpen állítható elő lineáris kombinációként:

$$\underline{x} = \underbrace{\alpha_{11}\underline{e}_{11} + \cdots + \alpha_{1n_1}\underline{e}_{1n_1}}_{\underline{x}_1 \in V_1} + \ldots + \underbrace{\alpha_{k1}\underline{e}_{k1} + \cdots + \alpha_{kn_k}\underline{e}_{kn_k}}_{\underline{x}_k \in V_k}.$$

Ebből azonnal adódik, hogy létezik előállítás: $\underline{x} = \underline{x}_1 + \cdots + \underline{x}_k$. Most indirekt tegyük fel, hogy létezik egy ettől különböző felírása is $\underline{x}$-nek: $\underline{x} = \underline{y}_1 + \cdots + \underline{y}_k$, ahol $\underline{y}_i \in V_i$, $i = 1, \dots, k$. Léteznek $\beta_{i1}, \dots, \beta_{in_i}$ skalárok, amelyekre $\underline{y}_i = \beta_{i1}\underline{e}_{i1} + \cdots + \beta_{in_i}\underline{e}_{in_i}$. Ekkor

$$\underline{x} = \underbrace{\beta_{11}\underline{e}_{11} + \cdots + \beta_{1n_1}\underline{e}_{1n_1}}_{\underline{y}_1 \in V_1} + \ldots + \underbrace{\beta_{k1}\underline{e}_{k1} + \cdots + \beta_{kn_k}\underline{e}_{kn_k}}_{\underline{y}_k \in V_k},$$

ami az előállítás egyértelműsége miatt csak akkor lehetséges, ha $\alpha_{11} = \beta_{11}, \dots, \alpha_{kn_k} = \beta_{kn_k}$, amiből $\underline{x}_1 = \underline{y}_1, \dots, \underline{x}_k = \underline{y}_k$.

$\square$

3.3. Következmény. Ha $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, akkor $\dim V = \dim V_1 + \cdots + \dim V_k$.

3.4. Következmény. Egy V vektortér akkor és csak akkor n-dimenziós, ha előáll n darab 1-dimenziós alterének direkt összegeként.

Bizonyítás. 1. Ha $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ és $\dim V_i = 1,\ i = 1, \ldots, n$, akkor V valóban n-dimenziós a 3.2. tétel miatt.

2. Ha a V vektortér n-dimenziós és $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ egy bázisa, akkor

$$V = \mathcal{L}(\underline{e}_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}(\underline{e}_n).$$

□

3.5. Tétel. *$V = A \oplus B$ akkor és csak akkor, ha $A + B = V$ és $A \cap B = \{\underline{0}\}$.*

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy $V = A \oplus B$.

(a) Mivel $A, B \subset V$, így $A + B \subset V$. Másrészt $A \oplus B = V$ miatt $V \subset A + B$. A kétirányú tartalmazás következtében pedig $A + B = V$.

(b) Legyen $\underline{x} \in A \cap B$. Mivel $\underline{x} \in V$ és $V = A \oplus B$, ezért $\underline{x}$ egyértelműen előáll $\underline{x} = \underline{a} + \underline{b}$ alakban, ahol $\underline{a} \in A$ és $\underline{b} \in B$. Viszont

$$\underline{x} = \underbrace{\underline{0}}_{\in A} + \underbrace{\underline{x}}_{\in B} = \underbrace{\underline{x}}_{\in A} + \underbrace{\underline{0}}_{\in B},$$

ami az egyértelműség miatt csak akkor lehetséges, ha $\underline{x} = \underline{0}$, tehát az A és a B alterek metszete csak a nullvektort tartalmazza.

2. Ha $A \cap B = \{\underline{0}\}$ és $A + B = V$, akkor az utóbbi miatt bármely $\underline{x} \in V$ esetén létezik $\underline{a} \in A$ és $\underline{b} \in B$ úgy, hogy $\underline{x} = \underline{a} + \underline{b}$. Indirekt tegyük fel, hogy az előállítás nem egyértelmű: $\underline{x} = \underline{a} + \underline{b} = \underline{a}' + \underline{b}'$, ahol $\underline{a}' \in A$ és $\underline{b}' \in B$. Ekkor

$$\underline{0} = (\underline{a} + \underline{b}) - (\underline{a}' + \underline{b}') = (\underline{a} - \underline{a}') + (\underline{b} - \underline{b}'),$$

amiből $\underbrace{(\underline{a} - \underline{a}')}_{\in A} = \underbrace{(\underline{b}' - \underline{b})}_{\in B}$, ami $A \cap B = \{\underline{0}\}$ miatt azt jelenti, hogy $\underline{a} = \underline{a}'$ és $\underline{b} = \underline{b}'$.

□

3.6. Tétel. *Ha V vektortér és $A \subset V$ altér, akkor létezik $B \subset V$ altér úgy, hogy $A \oplus B = V$.*

Bizonyítás. Ha $\dim A = k$, $\dim V = n$ és $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k$ bázisa A-nak, akkor ez a vektorrendszer kiegészíthető úgy, hogy $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k, \ldots, \underline{e}_n$ bázis V-ben. Ekkor a $B = \mathcal{L}(\underline{e}_{k+1}, \ldots, \underline{e}_n)$ altérre a 3.2. tétel miatt teljesül, hogy $A \oplus B = V$. □

3.7. Példa. $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, ahol $V_1 = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$, $V_2 = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$.

4. Faktortér

4.1. Definíció. Legyen $H \subset V$ altér és $\underline{x} \in V$ tetszőleges, rögzített vektor. Az

$$\underline{x} + H = \{\underline{x} + \underline{h} \mid \underline{h} \in H\}$$

halmazt H iránytérű *lineáris sokaság*nak nevezzük, az $\underline{x}$ vektort a lineáris sokaság reprezentáns vektorának nevezzük.

4.2. Megjegyzés. Lineáris sokaság egyértelműen meghatározza irányterét. Lineáris sokaság bármely eleme (és csakis az) reprezentánsa.

Bizonyítás. Ha egy lineáris sokaság $L = \underline{x} + H$ alakú, akkor $\underline{x} = \underline{x} + \underline{0} \in L$, azaz a reprezentáns L-beli. Legyen most $L = \underline{y} + K$ egy másik előállítás, ahol K altér. Ekkor $\underline{y} = \underline{y} + \underline{0} \in \underline{x} + H = L$ miatt egyrészt $\underline{y} \in L$, másrészt $\underline{y} = \underline{x} + \underline{h}_y$ alakú ($\underline{h}_y \in H$). Az $\underline{x} + H = L = \underline{x} + \underline{h}_y + K$ egyenlőségből adódik $H = K$. □

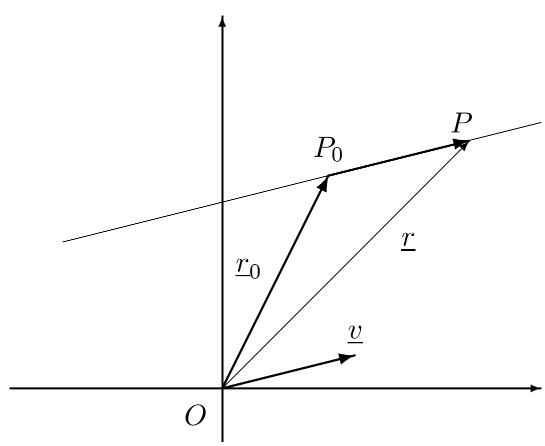
4.3. Példa. A síkban egy origón átmenő egyenes altér, ennek eltoltjai, az általános helyzetű egyenesek lineáris sokaságok:

$$H = \mathcal{L}(\underline{v}),$$

$$\underline{r} \in \underline{r}_0 + H,$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P},$$

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t\underline{v}, \; t \in \mathbb{R}.$$



Tehát az egyenes irányvektoros egyenlete: $\underline{r} = \underline{r}_0 + t\underline{v}$, $t \in \mathbb{R}$ egy olyan 1-dimenziós lineáris sokaságot határoz meg, melynek iránytere $\mathcal{L}(\underline{v})$, egy reprezentánsa pedig $\underline{r}_0$.

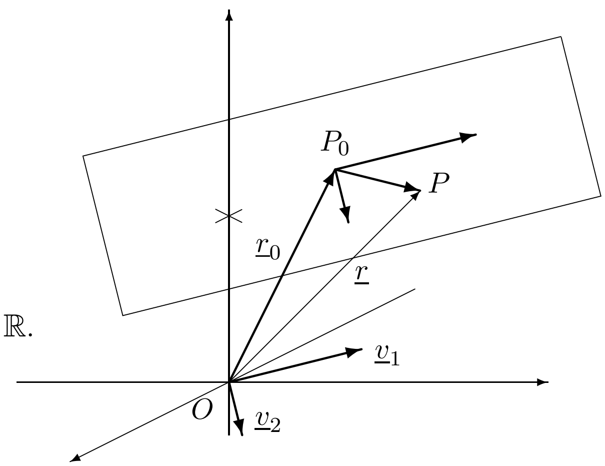
4.4. Példa. A térben egy origón átmenő sík altér, az általános helyzetű síkok lineáris sokaságok:

$$H = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2),$$

$$\underline{r} \in \underline{r}_0 + H,$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P},$$

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$



Tehát ha az iránytér $H = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$, akkor az $\underline{r}_0 + H$ lineáris sokaság egy eleme $\underline{r} = \underline{r}_0 + \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2$ alakú.

4.5. Definíció. Lineáris sokaság dimenzióján irányterének dimenzióját értjük.

4.6. Definíció. Legyen V vektortér, $H \subset V$ altér. Az $\underline{x} + H$ és $\underline{y} + H$ lineáris sokaságok összegét és skalárszorosát az alábbi módon definiáljuk:

$$(\underline{x} + H) + (\underline{y} + H) = (\underline{x} + \underline{y}) + H,$$
$$\alpha(\underline{x} + H) = \alpha\underline{x} + H, \ \alpha \in \mathbb{T}.$$

4.7. Következmény. Lineáris sokaságok összege és skalárszorosa nem függ a reprezentánsok megválasztásától.

Bizonyítás. 1. Ha $\underline{x}_1 + H = \underline{x}_2 + H$ és $\underline{y}_1 + H = \underline{y}_2 + H$, akkor $\underline{x}_2 \in \underline{x}_1 + H$ és $\underline{y}_2 \in \underline{y}_1 + H$. Ekkor $\underline{x}_2 + \underline{y}_2 \in (\underline{x}_1 + \underline{y}_1) + H$, így $(\underline{x}_2 + H) + (\underline{y}_2 + H) = (\underline{x}_1 + H) + (\underline{y}_1 + H)$.

2. Ha $\underline{x} + H = \underline{y} + H$, akkor $\underline{y} \in \underline{x} + H$. Ezért $\alpha\underline{y} \in \alpha(\underline{x} + H) = \alpha\underline{x} + H$, így $\alpha\underline{y} + H = \alpha\underline{x} + H$.

□

4.8. Tétel. *A $H \subset V$ altérhez tartozó lineáris sokaságok $\{\underline{x} + H \mid \underline{x} \in V\}$ halmaza a 4.6. definícióban definiált műveletekre nézve vektorteret alkot. Ezt a vektorteret a H altérhez tartozó faktortérnek nevezzük. Jele: V/H.*

Bizonyítás. 1. Belátandó, hogy a lineáris sokaságok halmaza a bevezetett összeadásra nézve Abel-csoport.

(a) $(\underline{x}+H)+(\underline{y}+H)=(\underline{x}+\underline{y})+H=(\underline{y}+H)+(\underline{x}+H)$,

(b) $\Big((\underline{x}+H)+(\underline{y}+H)\Big)+(\underline{z}+H)=(\underline{x}+\underline{y}+H)+(\underline{z}+H)=(\underline{x}+\underline{y}+\underline{z})+H=(\underline{x}+H)+(\underline{y}+\underline{z}+H)=(\underline{x}+H)+\Big((\underline{y}+H)+(\underline{z}+H)\Big)$,

(c) zéruselem: $(\underline{x}+H)+(\underline{0}+H)=\underline{x}+H$,

(d) additív inverz: $(\underline{x}+H)+(-\underline{x}+H)=\underline{0}+H$.

2. A skalárszorzás tulajdonságai:

(a) $\alpha\Big((\underline{x}+H)+(\underline{y}+H)\Big)=\alpha(\underline{x}+\underline{y}+H)=\alpha(\underline{x}+\underline{y})+H=(\alpha\underline{x}+\alpha\underline{y})+H=\alpha(\underline{x}+H)+\alpha(\underline{y}+H)$,

(b) $(\alpha+\beta)(\underline{x}+H)=(\alpha+\beta)\underline{x}+H=(\alpha\underline{x}+\beta\underline{x})+H=\alpha(\underline{x}+H)+\beta(\underline{x}+H)$,

(c) $\alpha\beta(\underline{x}+H)=(\alpha\beta\underline{x}+H)=\alpha(\beta\underline{x}+H)$,

(d) $1(\underline{x}+H)=\underline{x}+H$.

□

4.9. Tétel. *A V vektortér H altere szerinti faktortér dimenziója:*

$$\dim\big(V/H\big)=\dim V-\dim H.$$

Bizonyítás. Ha $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ bázisa V-nek, $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_k$ bázisa H-nak, akkor $(\underline{e}_{k+1}+H),\dots,(\underline{e}_n+H)$ bázisa V/H-nak. Ugyanis ez egyrészt generátorrendszer, mert ha $\underline{x}+H\in V/H$, akkor

$$\underline{x}=\underbrace{\alpha_1\underline{e}_1+\cdots+\alpha_k\underline{e}_k}_{\in H}+\alpha_{k+1}\underline{e}_{k+1}+\cdots+\alpha_n\underline{e}_n,$$

tehát

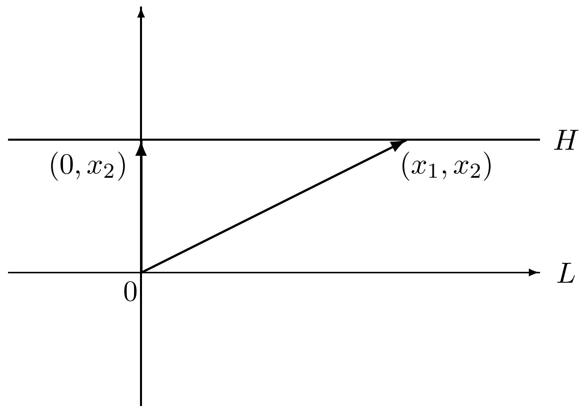
$$\underline{x}+H=\alpha_{k+1}(\underline{e}_{k+1}+H)+\cdots+\alpha_n(\underline{e}_n+H).$$

Másrész lineárisan független, hiszen ha

$$\beta_{k+1}(\underline{e}_{k+1}+H)+\cdots+\beta_n(\underline{e}_n+H)=\underline{0}+H,$$

akkor $\beta_{k+1}\underline{e}_{k+1}+\cdots+\beta_n\underline{e}_n=\underline{0}$, ami csak akkor lehetséges ha, $\beta_{k+1}=\cdots=\beta_n=0$, mert $\underline{e}_{k+1},\dots,\underline{e}_n$ lineárisan független vektorrendszer volt. □

4.10. Példa. $\mathbb{R}^2$-ben legyen $H=\{(a,0)\mid a\in\mathbb{R}\}$. H altér. A H irányterű $L=(x_1,x_2)+H$ lineáris sokaság nem függ x_1-től, tehát $(0,x_2)+H$ alakba írható.



Látható, hogy a H irányterű lineáris sokaságok a vízszintes egyenesek. Másrészt minden lineáris sokaságnak a $(0, x_2)$ alakú (az ilyen alakúak között egyértelmű) reprezentánsát választva az is világos, hogy az $\mathbb{R}^2/H$ faktortér beazonosítható a $\{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ vektortérrel (azaz a "függőleges tengellyel").

4. fejezet
Mátrixok

1. Mátrixok

1.1. Definíció. Legyen $k, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in \mathbb{T}$, $\quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, n$. Ha az a_{ij} számokat k sorban és n oszlopban rendezzük el, akkor az így kapott számtáblázatot $k \times n$ típusú *mátrix*nak nevezzük:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

A mátrixokra az alábbi jelöléseket használjuk: $A, B, ..; (a_{ij}), (b_{ij}), \ldots$, ahol i a sorindex, j az oszlopindex. Az A mátrix egy általános elemét a_{ij}-vel vagy $(A)_{ij}$-vel jelöljük. A $k \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{k \times n}$-nel jelöljük.

Az $1 \times n$ típusú mátrixokat *sorvektorok*nak, a $k \times 1$ típusúakat pedig *oszlopvektorok*nak mondjuk. Két mátrixot egyenlőnek nevezünk, ha méreteik és a megfelelő helyen álló elemeik egyenlőek.

1.2. Definíció. Az olyan mátrixot, amelynek minden eleme 0, *zérusmátrix*-nak nevezzük.

1.3. Definíció. Az $(a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{T}^n$ vektort a mátrix i-edik sorának vagy sorvektorának nevezzük, az $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{pmatrix} \in \mathbb{T}^k$ vektort pedig a j-edik oszlopának vagy oszlopvektorának nevezzük. Ezen két vektor "metszetében" áll az a_{ij} elem.

1.4. Megjegyzés. Egy skalár is tekinthető egy 1×1 típusú mátrixnak.

1.5. Definíció. Az $n \times n$ típusú mátrixokat *négyzetes* vagy *kvadratikus mátrix*oknak nevezzük. Az $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ elemeket a *főátló* vagy *fődiagonális* elemeinek nevezzük, az $a_{1n}, \ldots, a_{n1}$ elemeket pedig a *mellékátló* elemeinek nevezzük:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & a_{1n} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1.6. Definíció. Tekintsük az $M_{k\times n}$ halmazt, és legyen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{k\times n}$. Ezen a halmazon értelmezzük az összeadást és a skalárszorzást az alábbi módon:

1. $A + B \doteq (a_{ij} + b_{ij}) \quad \in M_{k\times n}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & \dots & a_{kn}+b_{kn} \end{pmatrix},$$

2. $\alpha A = (\alpha a_{ij}) \quad \in M_{k\times n}$, ahol $\alpha \in \mathbb{T}$:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{k1} & \alpha a_{k2} & \dots & \alpha a_{kn} \end{pmatrix}.$$

1.7. Tétel. *A $k \times n$ típusú mátrixok halmaza az előbb bevezetett összeadásra és szorzásra nézve vektortér a $\mathbb{T}$ test felett.*

Bizonyítás. Az $M_{k\times n}$ halmaz zárt a műveletekre, hiszen ilyen típusú mátrixok összege is $M_{k\times n}$ típusú. Mivel a műveleteket tagonként végezzük, és $\mathbb{T}$ vektortér $\mathbb{T}$ felett, így ezek a tulajdonságok a mátrixokra is teljesülnek.
Az alábbi levezetésben ( ) a mátrix "zárójele", míg a csoportosítást a [ ] szögletes zárójelek mutatják.

1. (a) $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij})$,
   (b) $\Big[(a_{ij}) + (b_{ij})\Big] + (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij}) + \Big[(b_{ij}) + (c_{ij})\Big]$,
   (c) nullelem: $(a_{ij}) + (0) = (a_{ij})$,
   (d) additív inverz: $(a_{ij}) + (-a_{ij}) = (0)$.
2. (a) $[\alpha + \beta](a_{ij}) = \Big([\alpha + \beta]a_{ij}\Big) = (\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) + (\beta a_{ij}) = \alpha(a_{ij}) + \beta(a_{ij})$,
   (b) $\alpha\Big[(a_{ij}) + (b_{ij})\Big] = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \Big(\alpha[a_{ij} + b_{ij}]\Big) = (\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}) = (\alpha a_{ij}) + (\alpha b_{ij}) = \alpha(a_{ij}) + \alpha(b_{ij})$,
   (c) $[\alpha\beta](a_{ij}) = (\alpha\beta a_{ij}) = \alpha(\beta a_{ij})$,

(d) $1(a_{ij}) = (a_{ij})$.

□

1.8. Tétel. *Az $M_{k\times n}$ vektortér kn-dimenziós, egy lehetséges bázisa:*

$$\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix},\dots,\ \begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. A megadott mátrixok nyilván generátorrendszert alkotnak. Továbbá lineárisan függetlenek, hiszen

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix}+\dots+\alpha_{kn}\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\dots&\alpha_n\\\vdots&\ddots&\vdots\\\alpha_{(k-1)n+1}&\dots&\alpha_{kn}\end{pmatrix}$$

csak akkor lehet egyenlő a zérusmátrixszal, ha $\alpha_1 = \dots = \alpha_{kn} = 0$. □

1.9. Definíció. Az $(a_{ij}) \in M_{k\times n}$ mátrix *transzponáltja* az $(a_{ji}) \in M_{n\times k}$ mátrix. Jele: A^T

1.10. Példa. Legyen $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$. Ekkor $A^T = \begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$.

1.11. Definíció. Egy $A \in M_{n\times n}$ kvadratikus mátrixot *szimmetrikus*nak nevezünk, ha $A = A^T$, és *ferdeszimmmetrikus*nak, ha $A = -A^T$.

1.12. Példa. Az $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&7\end{pmatrix}$ mártix szimmetrikus, a $\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&-4\\-2&4&0\end{pmatrix}$ pedig ferdeszimmetrikus mátrix.

1.13. Következmény. $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Bizonyítás. A bizonyítást most is a mátrix általános elemével végezzük. Belátjuk, hogy a baloldali mátrix i-edik sorának j-edik eleme megegyezik a jobboldali mátrix i-edik sorának j-edik elemével.

1. $(A+B)^T_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = A^T_{ij} + B^T_{ij} = (A^T + B^T)_{ij}$,
2. $(\alpha A)^T_{ij} = (\alpha A)_{ji} = \alpha A_{ji} = \alpha A^T_{ij}$.

□

1.14. Definíció. Legyen $A \in M_{k\times n}$ és $B \in M_{n\times m}$. Az A és B *mátrixok szorzatá*nak azt a $k \times m$ típusú mátrixot nevezzük, melynek i-edik sorának j-edik eleme

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}.$$

Ezt a szorzást *sor-oszlop kompozíció*s szorzásnak nevezzük, mivel az $(AB)_{ij}$ elem kiszámításához az A mátrix i-edik sorát szorozzuk a B mátrix j-edik oszlopával úgy, hogy a megfelelő tagok szorzatait összeadjuk:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj} \end{pmatrix}$$

1.15. Megjegyzés. A mátrixok szorzása nem kommutatív, általában össze sem szorozhatóak fordított sorrendben.

1.16. Példa. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mutatja, hogy AB és BA is létezik és a méretük is egyenlő, de AB nem egyenlő BA-val.

1.17. Definíció. Az $E \in M_{n\times n}$ kvadratikus mátrixot n-edrendű *egységmátrix*nak nevezzük, ahol

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Az egységmátrixra teljesül, hogy $AE = EA = A$ bármely $A \in M_{n\times n}$ mátrix esetén. Használatos még az egységmátrixra a (δ_{ij}) jelölés, amit *Kronecker-deltának* nevezünk:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

1.18. Megjegyzés. Ha A négyzetes mátrix, akkor képezhetők az $A^2 = AA$, $A^3 = A^2A, \dots$ mátrixok, és $A^0 \doteq E$.

1.19. Tétel. *Ha $A \in M_{k\times n}$, $B, C \in M_{n\times m}$, továbbá $D \in M_{m\times l}$, akkor teljesülnek az alábbi egyenlőségek:*

1. $A[B + C] = AB + AC$,

2. $A[BD] = [AB]D$,
3. $A[\alpha B] = \alpha[AB]$.

Bizonyítás. A bizonyítást általános elemmel végezzük:

1. $\Big(A[B+C]\Big)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}(B+C)_{rj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}[b_{rj}+c_{rj}] = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj} + \sum_{r=1}^{n} a_{ir}c_{rj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB+AC)_{ij}$,

2. $\Big(A[BD]\Big)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}(BD)_{rj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\left[\sum_{s=1}^{m} b_{rs}d_{sj}\right] = \sum_{s=1}^{m}\left[\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rs}\right] d_{sj} = \sum_{s=1}^{m}(AB)_{is}d_{sj} = \Big([AB]D\Big)_{ij}$,

3. $\Big(A[\alpha B]\Big)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}(\alpha B)_{rj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}[\alpha b_{rj}] = \alpha \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj} = \Big(\alpha[AB]\Big)_{ij}$.

□

1.20. Következmény. Ha $A \in M_{n\times n}$ négyzetes mátrix, akkor $A^{k+l} = A^kA^l$.

1.21. Tétel. *Legyenek A, B összeszorozható mátrixok. Ekkor*

$$(AB)^T = B^TA^T.$$

Bizonyítás. Ha $A \in M_{k\times n}$, $B \in M_{n\times m}$, akkor $(AB)^T$ és B^TA^T is $m \times k$ típusú lesz, és

$\Big([AB]^T\Big)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr}b_{ri} = \sum_{r=1}^{n}(A^T)_{rj}(B^T)_{ir} = \sum_{r=1}^{n}(B^T)_{ir}(A^T)_{rj} = (B^TA^T)_{ij}$. □

1.22. Definíció. Legyen $A \in M_{n\times n}$ kvadratikus mátrix. Ha létezik olyan $B \in M_{n\times n}$ mátrix, melyre $AB = BA = E$, ahol E az $n \times n$ típusú egységmátrix, akkor A-t *invertálható mátrix*nak, és B-t az A *mátrix inverzének* nevezzük. Jele: A^{-1}.

1.23. Tétel. *Ha az $A \in M_{n\times n}$ mátrixnak létezik inverze, akkor az egyértelmű.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $B_1, B_2 \in M_{n\times n}$ inverzei A-nak. Ekkor

$$AB_1 = B_1A = E = AB_2 = B_2A,$$

ha beszorozzuk az első egyenlőséget B_2-vel:

$$\underbrace{(B_2A)}_{E}B_1 = B_2\underbrace{(B_1A)}_{E},$$

akkor azt kapjuk, hogy $B_1 = B_2$. □

1.24. Tétel. *Ha az $A_1, \dots, A_k \in M_{n\times n}$ mátrixok invertálhatóak, akkor a szorzatuknak is létezik inverze, és*

$$(A_1A_2\dots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\dots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy mindkét irányból szorozva őket egységmátrixot kapunk:

1. $(A_k^{-1}\dots A_2^{-1}A_1^{-1})(A_1A_2\dots A_k) = A_k^{-1}\dots A_2^{-1}\underbrace{(A_1^{-1}A_1)}_{E}A_2\dots A_k =$ $A_k^{-1}\dots\underbrace{(A_2^{-1}A_2)}_{E}\dots A_k = \dots = E,$
2. $(A_1A_2\dots A_k)(A_k^{-1}\dots A_2^{-1}A_1^{-1}) = A_1A_2\dots\underbrace{(A_kA_k^{-1})}_{E}\dots A_2^{-1}A_1^{-1} = \dots =$ $E.$

□

1.25. Tétel. *Invertálható mátrixok esetén az inverzképzés és a transzponálás sorrendje felcserélhető:* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Bizonyítás. Belátandó, hogy A^T inverze $(A^{-1})^T$:

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E,$$
$$(A^{-1})^TA^T = (AA^{-1})^T = E^T = E.$$

□

Rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén az $n\times n$ típusú mátrixok gyűrűt alkotnak (mátrixgyűrű). Ez a gyűrű egységelemes, E az egységelem. De nem kommutatív, és nem nullosztómentes. Valóban, két nem nulla mátrix szorzata lehet nulla:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Az alábbiakban a Gauss-féle eliminációt ismertetjük. Ennek segítségével meghatározhatjuk egy mátrix inverzét, és a későbbiekben lineáris egyenletrendszerek megoldására is használjuk.

1.26. Definíció. Az alábbi mátrixátalakításokat (műveleteket) *elemi sor (oszlop) átalakítások*nak nevezzük:

1. egy mátrix sorának (oszlopának) skalárszorosát hozzáadjuk egy másik sorához (oszlopához),
2. egy mátrix két tetszőleges sorát (oszlopát) felcseréljük,
3. egy mátrix sorát (oszlopát) zérustól különböző skalárral megszorozzuk.

1.27. Definíció. Két mátrixot *sorekvivalens*nek (oszlopekvivalensnek) nevezünk, ha egyik a másikból véges sok elemi sor átalakítással (oszlop átalakítással) előállítható.

1.28. Következmény. Ha B mátrix az A mátrixból véges sok sor (oszlop) átalakítással megkapható, akkor léteznek olyan sor (oszlop) átalakítások, amelyek segítségével B-ből A-t kapjuk.

1.29. Definíció. Mátrix egy sorának *vezető elem*e a sor első zérustól különböző eleme.

1.30. Definíció. Egy mátrixot *lépcsős mátrix*nak nevezünk, ha teljesíti az alábbi tulajdonságokat:

1. a mátrixban a zérustól különböző elemeket tartalmazó sorok megelőzik a csupa nulla sorokat,
2. ha a mátrixban van két olyan sor, ami tartalmaz zérustól különböző elemet, akkor a másodikban a vezető elem oszlopindexe nagyobb vagy egyenlő, mint az elsőben.

1.31. Példa. Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix lépcsős alakú.

1.32. Definíció. Egy mátrixot *trapéz alakú*nak nevezünk, ha lépcsős alakú és az egymás alatt álló sorokban a vezető elemek oszlopindexeinek különbsége 1.

1.33. Példa. A $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix trapéz alakú.

1.34. Definíció. Az $A \in M_{n\times n}$ mátrixot *háromszög alakú*nak vagy *felső trianguláris*nak nevezzük, ha $i > j$ esetén $a_{ij} = 0$, továbbá a főátlóban csupa nem nulla elem áll.

1.35. Példa. A $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix felső trianguláris.

1.36. Tétel. *Minden négyzetes mátrix sorekvivalens (oszlopekvivalens is) egy lépcsős mátrixszal.*

Bizonyítás. A lépcsős alakra hozás algoritmusát *Gauss-féle eliminációnak* nevezzük.

1. Megkeressük a legkisebb oszlopindexű vezető elemet tartalmazó sort, és sorcserével az első sorba tesszük. Tegyük fel, hogy az első sor első eleme nem nulla, ekkor az i-edik sorhoz hozzáadjuk az első sor $\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$-szeresét, $i = 2, \dots, n$. Ekkor a mátrix az alábbi alakú lesz:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \overline{a}_{22} & \dots & \overline{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \overline{a}_{n2} & \dots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$
2. Ha $\overline{a}_{22} \neq 0$, akkor az alatta lévő elemeket kinullázzuk, azaz az alatta lévő sorokhoz hozzáadjuk a 2. sor $\left(-\frac{\overline{a}_{j2}}{\overline{a}_{22}}\right)$-szeresét, $j = 3, \dots, n$. Ekkor a mátrix: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \overline{a}_{22} & \dots & \overline{a}_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \breve{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \breve{a}_{nn} \end{pmatrix}$.
3. Hasonlóan folytatva az eljárást, véges sok lépésben lépcsős alakú mátrixot kapunk.

□

1.37. Definíció. *Elemi mátrix*oknak nevezzük az n-edrendű egységmátrixból egy elemi sor (oszlop) transzformációval előállítható mátrixot. Az elemi mátrixoknak három típusát különböztetjük meg aszerint, hogy milyen elemi átalakítással kaptuk az egységmátrixból:

1. sorcserével: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
2. sor szorozva skalárral: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

3. sorhoz hozzáadva másik sor skalárszorosát: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.38. Tétel. *Amilyen elemi átalakításokkal keletkezik az E egységmátrixból az ε elemi mátrix, ugyanolyan elemi átalakításokkal keletkezik az A-ból az εA mátrix.*

1.39. Megjegyzés. A tételt nem bizonyítjuk, de példákon keresztül jól látható, hogy az elemi átalakítások ekvivalensek a megfelelő elemi mátrixokkal való szorzással:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,
2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

1.40. Következmény. A Gauss-elimináció elvégezhető elemi mátrixokkal balról való szorzásokkal, vagyis minden négyzetes mátrix elemi mátrixokkal balról szorozva lépcsős mátrixszá alakítható.

1.41. Tétel. *Minden elemi mátrix invertálható, és inverze is elemi mátrix.*

1.42. Megjegyzés. Ismét példákon keresztül szemléltetjük az állítást:

1. típus: az ilyen mátrixnak önmaga az inverze, így visszafordítja a sorrendet:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. típus: ha a sor α-szorosa az eredetinek, akkor az inverzben ezt a sort $(1/\alpha)$-val kell szorozni:
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. típus: Ha az E-ből úgy kaptuk az elemi mátrixot, hogy egy sor λ-szorosát hozzáadtuk egy másik sorhoz, akkor inverzmátrixban ki kell vonni belőle:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

1.43. Tétel. *Az A mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a vele sorekvivalens mátrixok is azok, azaz ha $B = \varepsilon_k \cdots \varepsilon_1 A$ is invertálható, ahol $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ elemi mátrixok.*

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy A-nak létezik inverze. Ha $B = \varepsilon_k \cdots \varepsilon_1 A$, akkor B invertálható, mert az $(A^{-1}\varepsilon_1^{-1} \cdots \varepsilon_{k-1}^{-1}\varepsilon_k^{-1})$ mátrix az inverze:

$$(A^{-1}\varepsilon_1^{-1} \cdots \varepsilon_{k-1}^{-1}\underbrace{\varepsilon_k^{-1})(\varepsilon_k}_{E} \cdots \varepsilon_1 A) = E.$$

2. Tegyük fel, hogy $B = \varepsilon_k \cdots \varepsilon_1 A$, és B-nek létezik inverze. Ekkor $A = \varepsilon_1^{-1} \cdots \varepsilon_k^{-1} B$, így A invertálható, és az inverze $B^{-1}\varepsilon_k \cdots \varepsilon_1$.

□

1.44. Tétel. *Egy kvadratikus mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha sorekvivalens az egységmátrixszal.*

Bizonyítás. 1. Ha $A = \varepsilon_k \ldots \varepsilon_1 E$, akkor az előző tétel miatt A invertálható, mert az egységmátrixnak van inverze, mégpedig önmaga. Ekkor A inverze: $E\varepsilon_1^{-1} \ldots \varepsilon_k^{-1}$.

2. Ha A invertálható, akkor Gauss-eliminációval háromszög alakra hozható. Ugyanis ha trapéz alakot kapnánk, akkor lenne benne csupa nulla sor. Az olyan mátrixok, amik tartalmaznak csupa nulla sorokat, nem invertálhatóak, hiszen ha C i-edik sora 0, akkor tetszőleges D-vel szorozva:

$$CD = \begin{pmatrix}c_{11}&\ldots&c_{1n}\\0&\ldots&0\\c_{n1}&\ldots&c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_{11}&\ldots&d_{1n}\\0&\ldots&0\\d_{n1}&\ldots&d_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_{11}&\ldots&e_{1n}\\0&\ldots&0\\e_{n1}&\ldots&e_{nn}\end{pmatrix}\neq E.$$

A kapott háromszög alakú mátrixban skalárszorzással elérhetjük, hogy a főátlóban csak 1-esek álljanak. Ezeknek az egyeseknek a segítségével kinullázhatjuk a felettük álló elemeket, így megkapjuk az egységmátrixot.

□

1.45. Következmény. Ha egy A mátrix invertálható, akkor A és A^{-1} is felírható elemi mátrixok szorzataként.

Bizonyítás. Ha A invertálható, akkor $A = \varepsilon_k \ldots \varepsilon_1 E$. Ebből
$E = \underbrace{\varepsilon_1^{-1} \ldots \varepsilon_k^{-1}}_{A^{-1}} A$, tehát A^{-1} is elemi mátrixok szorzata. □

1.46. Következmény. Gauss-féle szimultán elimináció. Ha az $A \in M_{n\times n}$ átalakítható az egységmátrixszá, akkor ugyanezen átalakításokkal E-ből A^{-1}-et kapjuk.

Bizonyítás. Ha $E = \underbrace{\varepsilon_k \dots \varepsilon_1}_{A^{-1}} A$, akkor $\varepsilon_k \dots \varepsilon_1 E = A^{-1}$. $\square$

1.47. Példa. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Számítsuk ki A inverzét elemi sorátalakítások segítségével úgy, hogy az A mátrixon végrehajtott átalakításokat szimultán módon végrehajtjuk az egységmátrixon is az 1.46. következmény szerint:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

tehát $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Determináns

A determinánsok alapvető szerepet játszanak a lineáris egyenletrendszerek vizsgálatában.

2.1. Definíció. Az $(1, \dots, n)$ elemek egy permutációjában az *inverzió*k számának nevezzük az I számot, ami azt jelöli, hogy hány szomszédos elem cseréjével állítható elő a permutáció az $(1, \dots, n)$-ből.

2.2. Definíció. Az $A \in M_{n\times n}$ mátrix minden sorából és oszlopából válasszunk ki pontosan egy elemet, tehát összesen n darab elemet. Az első oszlopból kiválasztott elemet jelölje $a_{i_1 1}, \dots$, az n-edik oszlopból kiválasztott elemet pedig $a_{i_n n}$. Ezt az n darab számot összesen $n!$-féleképpen lehet kiválasztani, mert ennyi a sorindexek (azaz az $(1, \dots, n)$ számok) összes lehetséges permutációinak száma. Az A mátrix *determináns*ának az alábbi számot nevezzük:

$$\det A = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in P_n} (-1)^I a_{i_1 1} \ldots a_{i_n n},$$

ahol I az $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ permutációban az inverziók száma. Az összegzés az $(1,\ldots,n)$ elemek összes $(i_1,\ldots,i_n)$ permutációjára kiterjed. A determinánsra használatos még az $|A|$ és a $|\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n|$ jelölés is, ahol $\underline{a}_i$ a mátrix i-edik oszlop vektorát jelöli.

2.3. Példa. 1. Kétszer kettes mátrixok determinánsa:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

azaz a főátlóban lévő elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóbeliek szorzatát.

2. Háromszor hármas mátrixok determinánsa:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$. A 3×3-as esetben is a "főátló irányúak" szorzatainak és a "mellékátló irányúak" szorzatainak a különbsége a determináns.

abra

Megjegyezzük, hogy ilyen egyszerű számolási szabály a magasabbrendű determinánsokra nem létezik.

2.4. Tétel. *Legyen $A \in M_{n\times n}$. Ekkor a determináns rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

1. $|A| = |A^T|$;
2. *ha A tartalmaz csupa 0 sort, akkor $|A| = 0$;*
3. *sor vagy oszlopcsere esetén a determináns előjelet vált:*

$$|\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_i,\ldots,\underline{a}_j,\ldots,\underline{a}_n| = -|\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_j,\ldots,\underline{a}_i,\ldots,\underline{a}_n|;$$

4. *ha két sor vagy két oszlop megegyezik, akkor a determináns nulla:*

$$|\underline{a}_1,\ldots,\underline{a},\ldots,\underline{a},..,\underline{a}_n| = 0;$$

5. *ha egy sort skalárral szorzok, a skalár kiemelhető:*

$$|\underline{a}_1,\ldots,\lambda\underline{a}_i,\ldots,\underline{a}_n| = \lambda|\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n|;$$

6. *ha két sor vagy oszlop lineárisan függő, akkor a determináns nulla:*

$$|\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \lambda\underline{a}_i, .., \underline{a}_n| = 0;$$

7. *ha egy oszlopvektort (sorvektort) két vektor összegére bontjuk, akkor a determináns is szétbontható:*

$$|\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_i + \overline{a}_i, \ldots, \underline{a}_n| = |\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n| + |\underline{a}_1, \ldots, \overline{a}_i, \ldots, \underline{a}_n|;$$

8. *a determináns értéke nem változik, ha egy sor- (vagy oszlop)vektorának skalárszorosát hozzáadjuk egy másik sorához (vagy oszlopához):*

$$|\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \underline{a}_j, .., \underline{a}_n| = |\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \underline{a}_j + \lambda\underline{a}_i, .., \underline{a}_n|;$$

9. *trianguláris mátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata;*
10. *ha egy mátrix sor vagy oszlopvektorai lineárisan függőek, akkor a determinánsa nulla;*
11. *ha* $\det A \neq 0$, *akkor* A *oszlopvektorai lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. 1. A transzponált mátrixban ugyanazok az elemek vannak, mint az eredetiben, a belőlük képzett szorzatok is ugyanazok. Ha az eredeti determinánsban egy tag $a_{i_1 1} \ldots a_{i_n n}$ alakú, akkor a transzponált mátrix determinánsában: $a_{1 i_1} \ldots a_{n i_n}$ alakú lesz. Ahány elemcsere szükséges az $(i_1, \ldots, i_n)$ elemekből az $(1, \ldots, n)$ sorrend eléréséhez, ugyanannyi elemcserével fog kialakulni az $(1, \ldots, n)$-ből a sorindexek tényleges sorrendje, ez éppen az $(i_1, \ldots, i_n)$ permutációban az inverziók száma. Tehát a szorzatok előjele sem változik.

Ennek a tulajdoságnak köszönhető, hogy azok az állítások, melyek sorokra vonatkoznak, oszlopokra is teljesülnek, és fordítva.

2. Mivel a determináns minden tagjában szerepel nulla, így a tagok összege is nulla.
3. Sorcserénél minden tagban a sorindexek közül kettő fel van cserélve, így az invenziók száma minden tagban páratlan számmal nő vagy csökken (két elem cseréje mindig páratlan sok szomszédos elem cseréjével helyettesíthető). Ezért minden tag előjelet vált, tehát a determináns is előjelet vált.
4. Ha a mátrixban két sor megegyezik, akkor ezt a két sort megcserélve a mátrix nem változik, de az előző tulajdonság miatt a determináns előjelet vált. Ez csak akkor lehet igaz, ha a determináns nulla.
5. Ha egy sort skalárral szorzunk, a determináns minden tagja pontosan egyszer lesz megszorozva ezzel a skalárral, így maga a determináns is.
6. Ha két oszlop lineárisan függő, akkor:

$$|\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \lambda\underline{a}_i, .., \underline{a}_n| = \lambda|\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \underline{a}_i, .., \underline{a}_n| = \lambda 0 = 0.$$

7. Ha az i. oszlopvektor két vektor összegére bomlik, akkor a determináns minden tagjában pontosan egy összeadás szerepel, így:

$$|\underline{a}_1,\dots,(\underline{a}_i+\overline{\underline{a}}_i),\dots,\underline{a}_n| = \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in P_n} (-1)^I a_{j_1 1}\dots(a_{j_i i}+\overline{a}_{j_i i})\dots a_{j_n n} =$$

$$\sum_{(j_1,\dots,j_n)\in P_n} (-1)^I a_{j_1 1}\dots a_{j_i i}\dots a_{j_n n} + \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in P_n} (-1)^I a_{j_1 1}\dots \overline{a}_{j_i i}\dots a_{j_n n} =$$

$$|\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_i,\dots,\underline{a}_n| + |\underline{a}_1,\dots,\overline{\underline{a}}_i,\dots\underline{a}_n|.$$

8. Az előző tulajdonságok alapján:

$$|\underline{a}_1,..,\underline{a}_i,..,\underline{a}_j+\lambda\underline{a}_i,..,\underline{a}_n| = |\underline{a}_1,..,\underline{a}_i,..,\underline{a}_j,..,\underline{a}_n| + |\underline{a}_1,..,\underline{a}_i,..,\lambda\underline{a}_i,..,\underline{a}_n| =$$

$$|\underline{a}_1,..,\underline{a}_i,..,\underline{a}_j,..,\underline{a}_n| + \lambda\underbrace{|\underline{a}_1,..,\underline{a}_i,..,\underline{a}_i,..,\underline{a}_n|}_{0} = |\underline{a}_1,..,\underline{a}_i,..,\underline{a}_j,..,\underline{a}_n| = |A|.$$

9. Trianguláris mátrix determinánsában csak egyetlen tagban nem szerepel nulla, ez éppen az átlós elemek szorzata, pozitív előjellel.
10. Ha egy mátrix oszlopai lineárisan függőek, akkor létezik olyan oszlop, ami a többi lineáris kombinációja. Tegyük fel, hogy ez az utolsó oszlop (ez oszlopcserével elérhető), ekkor:

$$|\underline{a}_1,\dots,\lambda_1\underline{a}_1+\dots+\lambda_{n-1}\underline{a}_{n-1}| = |\underline{a}_1,\dots,\lambda_1\underline{a}_1| + \dots + |\underline{a}_1,\dots,\lambda_{n-1}\underline{a}_{n-1}| =$$

$$\lambda_1\underbrace{|\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_1|}_{0} + \dots + \lambda_{n-1}\underbrace{|\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_{n-1},\underline{a}_{n-1}|}_{0} = 0.$$

11. A 10. tulajdonság kontrapozíciója.

□

A determináns fogalmát másképpen is meg lehet fogalmazni. A következő definícióban a determinánst, mint bizonyos tulajdonságokkal rendelkező függvényt fogjuk meghatározni, utána belátjuk, hogy a két definíció ekvivalens.

2.5. Definíció. Legyen $A \in M_{n\times n}$, $A = (\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)$. *Determináns függvény*nek nevezzük a $\det : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ leképezést, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. oszlopvektoraiban additív:

$$\det(\underline{a}_1+\overline{\underline{a}}_1,\dots,\underline{a}_n) = \det(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n) + \det(\overline{\underline{a}}_1,\dots,\underline{a}_n),$$

2. oszlopvektoraiban homogén: $\det(\lambda\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n) = \lambda\det(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)$,
3. alternáló tulajdonságú (más szóval antiszimmetrikus):

$$\det(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_i,\dots,\underline{a}_j,\dots\underline{a}_n) = -\det(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_j,\dots,\underline{a}_i,\dots,\underline{a}_n),$$

4. az egységmátrix determinánsa 1: $\det(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n) = 1$, ahol $\underline{e}_1 = (1,0,\dots,0)^T;\dots;\underline{e}_n = (0,\dots,0,1)^T$.

2.6. Tétel. *A determinánsra adott 2.2. és 2.5. definíciók ekvivalensek.*

Bizonyítás. 1. Az első definícióból bebizonyított tulajdonságok között szerepelnek a második definíció követelményei.

2. A mátrix oszlopvektorai $\mathbb{R}^n$-beli vektorok, előállíthatók a természetes bázis lineáris kombinációiként:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = a_{1i} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{ni} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

vagyis $\underline{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\underline{e}_j$. Ekkor használva a 2.5. definícióbeli tulajdonságokat:

$$\det A = \det(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = \det\Big(\sum_{j_1=1}^{n} a_{j_1 1}\underline{e}_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{j_n n}\underline{e}_{j_n} \Big) =$$

$$\sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in P_n} a_{j_1 1} \ldots a_{j_n n} \det(\underline{e}_{j_1}, \ldots, \underline{e}_{j_n}).$$

Mivel $(\underline{e}_{j_1}, \ldots, \underline{e}_{j_n})$ az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$-ből oszlopcserékkel állítható elő, mégpedig annyival, amennyi a $(j_1, \ldots, j_n)$ permutációban az inverziók száma. Tehát az alternáló tulajdonság miatt:

$$\det(\underline{e}_{j_1}, \ldots, \underline{e}_{j_n}) = (-1)^I \underbrace{\det(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)}_{1},$$

így megkaptuk a 2.2. definícióbeli determináns előállítást.

□

2.7. Megjegyzés. Természetesen a determináns 2.4. tételbeli tulajdonságai bebizonyíthatóak a 2.5. definíció alapján is. Például a 2. tulajdonság:

$$\det(\underline{0}, \ldots, \underline{a}_n) = \det(0\underline{0}, \ldots, \underline{a}_n) = 0 \det(\underline{0}, \ldots, \underline{a}_n) = 0.$$

2.8. Tétel. *Ha egy mátrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek, akkor a determinánsa nem nulla.*

Bizonyítás. Ha az oszlopvektorok lineárisan függetlenek, akkor bázist alkotnak, és lineáris kombinációjukként felírhatóak a természetes bázis elemei. Ekkor

$$1 = \det E = \det(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n) = \det(\sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1 1}\underline{a}_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_n n}\underline{a}_{i_n}) =$$

$$\sum_{(i_1,..,i_n)\in P_n} \lambda_{i_1 1}..\lambda_{i_n n} \det(\underline{a}_{i_1},..,\underline{a}_{i_n}) = \sum_{(i_1,..,i_n)\in P_n} (-1)^I \lambda_{i_1 1}..\lambda_{i_n n} \det(\underline{a}_1,..,\underline{a}_n).$$

Ha $\det(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)$ nulla lenne, akkor az egész kifejezés nulla lenne. □

2.9. Tétel (Determinánsok szorzás tétele). *Mátrixok szorzatának determinánsa egyenlő a tényező mátrixok determinánsának szorzatával:*

$$|AB| = |A||B|$$

.

Bizonyítás. Legyen $AB = C = (c_{ij}) = (\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_n)$. Mivel $c_{lj} = \sum_{i=1}^{n} a_{li}b_{ij}$, ezért $\underline{c}_j = \sum_{i=1}^{n} \underline{a}_i b_{ij}$. Ekkor

$$\det(\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_n) = \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} \underline{a}_{i_1} b_{i_1 1},\dots,\sum_{i_n=1}^{n} \underline{a}_{i_n} b_{i_n n}\right) =$$

$$\sum_{(i_1,..,i_n)\in P_n} b_{i_1 1}..b_{i_n n} \det(\underline{a}_{i_1},..,\underline{a}_{i_n}) = \sum_{(i_1,..,i_n)\in P_n} (-1)^I b_{i_1 1}..b_{i_n n} \underbrace{\det(\underline{a}_1,..,\underline{a}_n)}_{|A|}$$

$$= \underbrace{\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in P_n} (-1)^I b_{i_1 1}\dots b_{i_n n}}_{|B|} |A| = |B||A|.$$

□

2.10. Tétel. *Négyzetes mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.*

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy A invertálható. Ekkor $AA^{-1} = E$. Mivel $|E| \neq 0$, a determinánsok szorzástétele alapján $|A||A^{-1}| = |E| \neq 0$, így $|A| \neq 0$ és $|A^{-1}| \neq 0$.

2. Ha A determinánsa nem nulla, akkor oszlopai lineárisan függetlenek, így bázist alkotnak. Ebben a bázisban felírva az $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ vektorokat (a természetes bázis vektorait), azt kapjuk, hogy $\underline{e}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\underline{a}_i$, vagyis $e_{lj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_{li}$. Ez azt jelenti, hogy $E = BA$, ahol B a b_{ij} számokból alkotott mátrix, amely kielégíti az inverzmátrix definícióját, tehát A invertálható.

□

2.11. Definíció. Legyen $A \in M_{n\times n}$, $n \geq 2$ és $1 \leq k \leq n$. Jelöljünk ki a mátrixban k darab sort $(i_1, \dots, i_k)$, és k darab oszlopot $(j_1, \dots, j_k)$. Ezen oszlopok és sorok metszéspontjában álló elemek egy $k \times k$ típusú mátrixot alkotnak, és ennek a mátrixnak a determinánsát az eredeti mátrix k-adrendű *aldeterminánsának* nevezzzük és az $|A_k|$ jelölést használjuk rá. A mátrix azon elemei amelyek nem tartoznak a kijelölt sorokhoz, illetve oszlopokhoz, egy $(n-k) \times (n-k)$ típusú mátrixot alkotnak, amit a k-adrendű aldeterminánshoz tartozó *adjungált aldeterminánsnak* nevezünk.

2.12. Megjegyzés. Egy $A \in M_{n\times n}$ mátrixnak $\binom{n}{k}\binom{n}{k}$ darab különböző k-adrendű aldeterminánsa van, és ugyanennyi az $(n-k) \times (n-k)$ típusúak száma.

2.13. Definíció. Egy $A \in M_{n\times n}$ mátrix $|A_k|$ aldeterminánsához tartozó *adjungált algebrai aldeterminánsnak* nevezzük az $|A_k|^* = (-1)^{I+J}|A_{n-k}|$ előjellel ellátott adjungált aldeterminánst. Itt $I = i_1 + \dots + i_k$, vagyis az $|A_k|$ aldeterminánshoz kiválasztott sorok indexeinek összege, és $J = j_1 + \dots + j_k$ ahol $j_1, \dots, j_k$ az $|A_k|$ aldeterminánsban az oszlopok indexeit jelöli.

2.14. Megjegyzés. Egy $A \in M_{n\times n}$ mátrix esetén ha $|A_k|^* = (-1)^{I+J}|A_{n-k}|$, akkor $|A_{n-k}|^* = (-1)^T|A_k|$, és T-ben éppen azoknak a sor és oszlopindexeknek az összege szerepel, amelyek nincsenek $I + J$-ben, tehát

$$T = \underbrace{2(1 + \dots + n)}_{\text{összes sor és oszlopindex összege}} - (I + J) = \underbrace{n(n-1)}_{\text{páros}} - (I + J),$$

így T paritása megegyezik $I + J$ paritásával, $|A_{n-k}|^*$ és $|A_k|^*$ előjele megegyezik.

2.15. Tétel (Laplace-féle kifejtési tétel). *Az $A \in M_{n\times n}$ mátrixban jelöljünk ki k darab oszlopot (vagy sort), és tekintsük az összes olyan k-adrendű aldeterminánst, amelyekben pontosan ezek az oszlopok (sorok) szerepelnek. Jelölje ezeket az aldeterminánsokat $|\underset{1}{K_k}|, \dots, |\underset{r}{K_k}|$ és a hozzájuk tartozó algebrai adjungált aldeterminánsokat pedig $|\underset{1}{K_k}|^*, \dots, |\underset{r}{K_k}|^*$. Ekkor*

$$|A| = |\underset{1}{K_k}||\underset{1}{K_k}|^* + \dots + |\underset{r}{K_k}||\underset{r}{K_k}|^*.$$

2.16. Lemma. *Tekintsünk egy k-adrendű aldeterminánst $(|K_k|)$ és a hozzá tartozó adjungált algebrai aldeterminánst $(|K_k|^*)$. Ekkor a $|K_k|$ és $|K_k|^*$ aldeterminánsok egy-egy tetszőlegesen kiválasztott tagjának a szorzata tagja lesz $|A|$-nak.*

Bizonyítás. (Lemma)

1. Tegyük fel, hogy K az első k darab sorhoz és az első k darab oszlophoz tartozó aldetermináns. Ekkor
$$|K_k| = \sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in P_k} (-1)^L a_{l_1 1}\ldots a_{l_k k},$$
$$|K_k|^* = \sum_{(m_{k+1},\ldots,m_n)\in P_{n-k}} (-1)^M a_{m_{k+1} k+1}\ldots a_{m_n n},$$
mert az adjungált aldeterminánsban a sor és oszlopindexek éppen a $k+1,\ldots,n$ számok. Két tetszőlegesen választott tag szorzata:
$$(-1)^L a_{l_1 1}\ldots a_{l_k k}(-1)^M a_{m_{k+1} k+1}\ldots a_{m_n n} =$$
$$= (-1)^{M+L} \underbrace{a_{l_1 1}\ldots a_{l_k k} a_{m_{k+1} k+1}\ldots a_{m_n n}}_{n \text{ darab tényező szorzata}}.$$
$L+M$ éppen az $(l_1,\ldots,l_k,m_{k+1},\ldots,m_n)$ permutációban az inverziók száma, mert az első k darab sorindex és a második $n-k$ darab sorindex nem állhat inverzióban egymással: $1 \le l_i \le k < k+1 \le m_{k+j} \le n$, tehát $l_i < m_{k+j}$ (két elem akkor áll inverzióban egymással, ha a nagyobb megelőzi a kisebbet a permutációban). Tehát ez a tag szerepel az A mátrix determinánsában.
2. Most tetszőleges k darab sor és oszlop esetén vizsgáljuk a két tag szorzatát. Legyen az aldetermináns $|K'_k|$. Ekkor sor és oszlopcserékkel el lehet érni, hogy az $i_1,\ldots,i_k$ sorhoz és a $j_1,\ldots,j_k$ oszlophoz tartozó aldetermináns az első k darab sorba és oszlopba kerüljön. Minden ilyen csere előjelváltással jár, hiszen maguk az aldeterminánsok nem változnak, de a sorindexek és oszlopindexek összege eggyel csökken. Ahhoz, hogy az i_1-edik sor az első sorba kerüljön i_1-1 szomszédos sor cseréréje van szükség. Hasonlóan ahhoz, hogy az i_k-adik sor a k-adik sorba kerüljön, i_k-k darab szomszédos sort kell megcserélni. Összesen tehát
$$i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k-\underbrace{2(1+2+\cdots+k)}_{\text{páros}}$$
darab sorcsere és oszlopcsere szükséges, és az adjungált algebrai aldetermináns $|K'_k|^*)$ előjele $(-1)^{I+J}$ lesz, tehát annyi, amennyi eredetileg volt. így az első pontban leírtak alapján az $|K'_k||K'_k|^*$-beli szorzatok is szerepelnek a determinánsban.

□

Bizonyítás. (Laplace tétel) A lemma alapján tudjuk, hogy a $|\underset{1}{K_k}||\underset{1}{K_k}|^* + \cdots + |\underset{r}{K_k}||\underset{r}{K_k}|^*$ kifejezés valamennyi tagja szerepel A determinánsában. Az világos, hogy a $|\underset{1}{K_k}||\underset{1}{K_k}|^* + \cdots + |\underset{r}{K_k}||\underset{r}{K_k}|^*$-ben szereplő tagok különböznek. Belátjuk, hogy ez éppen annyi tagot jelent, amennyiből $|A|$ áll (ez $n!$ darab tag). A k darab oszlop rögzítése után a k darab sort $\binom{n}{k}$-féleképpen választhatjuk ki. Egy $|\underset{i}{K_k}||\underset{i}{K_k}|^*$ szorzatban pedig $k!(n-k)!$ darab tag van (hiszen egy $k \times k$ típusú determinánsnak $k!$ darab tagja van), így összesen

$$\binom{n}{k} k!(n-k)! = n!$$

darab tag van, ami valóban a determináns összes tagját jelenti. □

2.17. Megjegyzés. A Laplace tétel leggyakrabban használt speciális esete az egy sor vagy egy oszlop szerinti kifejtés, amikor az aldeterminánsok 1×1 típusúak, az adjungált algebrai aldeterminánsok pedig $(n-1) \times (n-1)$ típusúak.

2.18. Példa. Egy 4×4 típusú mátrix determinánsát valamely oszlopa szerinti kifejtéssel 4 darab 3×3 típusú determináns kiszámítására vezethetjük vissza. Az első oszlop szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$0(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.19. Tétel (Ferde kifejtési tétel). *Ha az $A \in M_{n\times n}$ mátrixot kifejtjük egy oszlopa (sora) szerint úgy, hogy egy másik oszlop (sor) elemeihez tartozó adjungált algebrai aldeterminánsokat használjuk, akkor az eredmény nulla lesz:*

$$a_{1j}|\underset{1k}{A_{n-1}}|^* + \cdots + a_{nj}|\underset{nk}{A_{n-1}}|^* = 0,$$

ahol $|\underset{ik}{A_{n-1}}|^*$ az a_{ik} elemhez tartozó adjungált algebrai aldetermináns, és $k \neq j$.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az

$$a_{1j}|\underset{1k}{A_{n-1}}|^* + \cdots + a_{nj}|\underset{nk}{A_{n-1}}|^*$$

kifejezés nem más, mint annak a mátrixnak a k-adik oszlop szerinti kifejtése, amelynek a j-edik és a k-adik oszlopa megegyezik, így ez a determináns nulla. □

2.20. Tétel. *Egy $A \in M_{n\times n}$ mátrix B inverzének (ha létezik) b_{ij} elemét kiszámíthatjuk az alábbi módon:*

$$b_{ij} = \frac{1}{|A|}|\underset{ji}{A_{n-1}}|^*,$$

ahol $|\underset{ji}{A_{n-1}}|^*$ az a_{ji} elemhez tartozó adjungált algebrai aldetermináns, vagy másképpen a transzponált mátrix $(A^T)_{ij}$ eleméhez tartozó adjungált algebrai aldetermináns.

Bizonyítás. Az állítás egyszerű számítással adódik.

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(B)_{kj} = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}|\underset{jk}{A_{n-1}}|^*,$$

ami éppen a ferde kifejtési tétel sorokra vonatkozó változata miatt $i \neq j$ esetén nulla. Ha pedig $i = j$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}|\underset{ik}{A_{n-1}}|^* = |A|,$$

mert ez éppen A-nak az i-edik sora szerinti kifejtése. Tehát

$$(AB)_{ij} = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}|\underset{jk}{A_{n-1}}|^* = \delta_{ij} = (E)_{ij}.$$

□

2.21. Példa. Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ekkor $|A| = ad - cb$, $|A_{11}|^* = d$, $|A_{12}|^* = -c$, $|A_{21}|^* = -b$, $|A_{22}|^* = a$, így $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

3. Mátrix rangja

3.1. Megjegyzés. Az előző fejezet 2.21. definíciója szerint egy $(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ *vektorrendszer rang*ján az általa generált altér dimenzióját értjük:

$$\mathrm{rg}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = \dim \mathcal{L}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n),$$

ami tulajdonképpen a benne szereplő lineárisan független vektorok maximális száma.

3.2. Tétel. *Az* $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ *vektorrendszer rangját nem változtatják meg az alábbi átalakítások (úgynevezett ranginvariás átalakítások):*

1. *vektor szorzása* $\lambda \neq 0$ *skalárral,*
2. *egy vektor skalárszorosának hozzáadása egy másik vektorhoz,*
3. *vektorok felcserélése,*
4. *olyan vektor elhagyása, amely lineárisan kombinálható a többiből.*

Bizonyítás. Definíció alapján könnyen belátható. □

3.3. Definíció. Legyen A egy $n \times k$ típusú mátrix. A mátrix sorvektorai által alkotott vektorrendszer rangját a *mátrix rang*jának nevezzük.

3.4. Megjegyzés. A zérusmátrix rangja nulla, az n-edrendű egységmátrix rangja n.

3.5. Tétel. *Az* $A \in M_{n\times k}$ *mátrix rangja egyenlő egy maximális rendű, zérustól különböző aldeterminánsának a rendjével.*

Bizonyítás. Az $A = (a_{ij}) \in M_{n\times k}$ mátrix egy maximális rendű, el nem tűnő aldeterminánsának rendje legyen r, értéke $|A_r| = D_0$, azaz az $(r+1)$-edrendű aldeterminánsok mind nullával egyenlőek. Természetesen $r \leq \min(n, k)$.

1. Először megmutatjuk, hogy ha tekintjük az $|A_r|$ aldeterminánsban szereplő sorokat, akkor ezek lineárisan függetlenek. Tegyük fel, hogy $|A_r|$ sorai és oszlopai az első r darab sorban, illetve r darab oszlopban vannak, ez sor- és oszlopcserékkel mindig elérhető:

$$B = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 = (a_{11}, & a_{12}, & \dots & , a_{1r}) \\ \underline{b}_2 = (a_{21}, & a_{22}, & \dots & , a_{2r}) \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{b}_r = (a_{r1}, & a_{r2}, & \dots & , a_{rr}) \end{pmatrix}.$$

   Mivel $\det B \neq 0$, ezért $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_r)$ lineárisan független vektorrendszer, tehát

$$\lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1r} \end{pmatrix}}_{\underline{b}_1^\top} + \dots + \lambda_r \underbrace{\begin{pmatrix} a_{r1} \\ \vdots \\ a_{rr} \end{pmatrix}}_{\underline{b}_r^\top} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{0}} \quad \text{esetén} \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0. \tag{3.1}$$

Most tekintsük az A mátrix első r darab sorát:

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 = (a_{11}, & a_{12}, & \dots & , a_{1k}) \\ \underline{a}_2 = (a_{21}, & a_{22}, & \dots & , a_{2k}) \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{a}_r = (a_{r1}, & a_{r2}, & \dots & , a_{rk}) \end{pmatrix},$$

és vizsgáljuk meg, hogy lineárisan függetlenek-e. Mivel a

$$\overline{\lambda}_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1k} \end{pmatrix}}_{\underline{a}_1^\top} + \dots + \overline{\lambda}_r \underbrace{\begin{pmatrix} a_{r1} \\ \vdots \\ a_{rk} \end{pmatrix}}_{\underline{a}_r^\top} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{0}}$$

egyenletrendszer első r darab egyenlete megegyezik a (3.1) egyenletrendszerrel amely csak nulla együtthatók esetén tejesül így szükségképpen $\overline{\lambda}_1 = \dots = \overline{\lambda}_r = 0$. Ez azt jelenti, hogy $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r)$ lineárisan független vektorrendszer.

2. Be kell még látni, hogy $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r)$ maximális lineárisan független vektorrendszer, azaz az A mátrixnak nem lehet több lineárisan független sora. Ha $r = n$ akkor az állítás nyilvánvaló, ha $r < n$ akkor legyen $m, j \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $r < m \leq n$, $1 \leq j \leq k$ és tekintsük az alábbi $(r+1)$-edrendű determinánst:

$$D_{mj} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{mj} \end{vmatrix}.$$

Természetesen ez a determináns nulla:

(a) Ha $j \leq r$, akkor a determinánsban van két egyforma oszlop, így az nulla.

(b) Ha $j > r$, akkor ez egy $(r+1)$-ed rendű aldeterminánsa A-nak. Mivel feltettük, hogy $|A_r|$ maximális rendű el nem tűnő aldetermináns, így $D_{mj} = 0$.

Ha most kifejtjük az utolsó oszlop szerint a D_{mj} determinánst:

$$D_{mj} = a_{1j} \underset{1j}{|A_{n-1}|^*} + \dots + a_{mj} \underbrace{\underset{mj}{|A_{n-1}|^*}}_{A_r \neq 0} = 0,$$

akkor

$$a_{mj} = \frac{-1}{|A_r|}(a_{1j}|\underset{1j}{A_{n-1}}|^*) - \dots\frac{1}{|A_r|}(a_{rj}|\underset{rj}{A_{n-1}}|^*).$$

Tehát a_{mj} minden $j \in \{1, \dots, k\}$ esetén ilyen alakba írható, ugyanezekkel az együtthatókkal, mert $|\underset{ij}{A_{n-1}}|^* \doteq |\underset{i}{A_{n-1}}|^*$ $(i = 1, \dots, r)$ valójában nem függ j-től, ezért

$$\frac{-|\underset{1}{A_{n-1}}|^*}{|A_r|}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1k} \end{pmatrix}}_{\underline{a}_1^\top} + \dots + \frac{-|\underset{r}{A_{n-1}}|^*}{|A_r|}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{r1} \\ \vdots \\ a_{rk} \end{pmatrix}}_{\underline{a}_r^\top} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}}_{\underline{a}_m^\top}.$$

Ekkor $\underline{a}_m$ lineárisan kombinálható az $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r)$ vektorokból, így ezek maximális lineárisan független sorvektorrendszert alkotnak az A mátrixban, azaz A rangja r.

□

3.6. Következmény. Mátrix rangja egyenlő transzponáltjának a rangjával, azaz oszloprendszerének rangjával.

3.7. Következmény. A mátrix rangja Gauss-eliminációval meghatározható: lépcsős alakra hozzuk, és a nem nulla sorok száma adja a mátrix rangját.

Ez abból következik, hogy egyrészt a Gauss-elimináció nem változtatja meg a mátrix rangját, másrészt egy lépcsős alakú mátrix rangja nyilvánvalóan a nem nulla sorainak számával egyenő.

3.8. Példa. Meghatározzuk az alábbi 3×3-as mátrix rangját.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

a Gauss-eliminációt használva.

Az aldeterminánsokat használva is megoldjuk a feladatot.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = (1\cdot3\cdot10+2\cdot4\cdot4+3\cdot2\cdot7)-(3\cdot3\cdot4+2\cdot2\cdot10+1\cdot4\cdot7) = 104-104 = 0,$$

azonban $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 1 \neq 0.$

4. Lineáris egyenletrendszerek

4.1. Definíció. Legyen $A = (a_{ij}) \in M_{k\times n},\ \ b_i \in \mathbb{T}\ \ (i = 1, \dots, k)$, ahol a $\mathbb{T}$ az $\mathbb{R}$ vagy a $\mathbb{C}$ számtestek valamelyikét jelöli. *Lineáris egyenletrendszer*nek nevezzük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1}x_1+ & \dots & +a_{kn}x_n = & b_k \end{array} \tag{4.2}$$

Az $x_1, \dots, x_n$ szimbólumokat ismeretleneknek nevezzük. Ha bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \dots,\ \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix},$$

akkor az egyenletrendszert vektoriális alakba írhatjuk:

$$\underline{a}_1 x_1\ + \dots +\ \underline{a}_n x_n = \underline{b}.$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$A\underline{x} = \underline{b}, \qquad \text{ahol}\ \ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ekkor A-t az egyenletrendszer *alapmátrix*ának nevezzük, az

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

mátrix pedig az egyenletrendszer *kibővített mátrix*a.

4.2. Definíció. A $\underline{c} = c_1, \dots, c_n$ szám n-est a (4.2) *egyenletrendszer megoldás*ának nevezzük, ha $x_1, \dots, x_n$ helyébe írva igaz egyenlőségeket kapunk, azaz a szám n-es kielégíti a lineáris egyenletrendszert.

Ha egy lineáris egyenletrendszernek létezik megoldása, akkor *megoldható*nak nevezzük, ha nem létezik megoldása, akkor pedig *ellentmondásos*nak. Ha az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor *határozott*nak nevezzük, ha végtelen sok akkor *határozatlan*nak.

4.3. Definíció. Az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert *homogén*nek nevezzük, ha $\underline{b} = \underline{0}$, ellenkező esetben pedig *inhomogén*nek.

4.4. Megjegyzés. Egy lineáris egyenletrendszer vizsgálatánál az első kérdés az, hogy létezik-e megoldása vagy sem (megoldható vagy ellentmondásos), a második kérdés pedig az, hogy hogyan lehet megtalálni az összes megoldást. A következőkben megadunk egy eljárást, amellyel meghatározhatjuk ezeket a megoldásokat

4.5. Definíció. Két lineáris egyenletrendszert *ekvivalens*nek nevezünk, ha a megoldáshalmazuk megegyezik.

4.6. Tétel. *Az alábbi átalakítások a (4.2) lineáris egyenletrendszer ekvivalens átalakításai, tehát nem változtatják meg a megoldáshalmazát:*
1. *két egyenlete felcserélése,*
2. *egy egyenlet szorzása zérustól különböző konstanssal,*
3. *egy egyenlet konstansszorosának hozzáadása egy másik egyenlethez.*

Bizonyítás. 1. Nyilvánvaló.
2. Ha $\underline{c}$ megoldása az i-edik egyenletnek akkor a

$$\lambda(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) = \lambda b_i, \quad \lambda \neq 0,$$

egyenletnek is megoldása, és fordítva.
3. Ha a j-edik egyenlethez adjuk hozzá az i-edik λ-szorosát, és $\underline{c}$ kielégíti az eredeti egyenletrendszert, akkor az új egyenletrendszer j-edik egyenletét is kielégíti:

$$(\lambda a_{i1} + a_{j1})x_1 + \cdots + (\lambda a_{in} + a_{jn})x_n =$$
$$= \underbrace{\lambda(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)}_{\lambda b_i} + \underbrace{(a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n)}_{b_j} = \lambda b_i + b_j.$$

Mivel a többi egyenlet változatlan marad, $\underline{c}$ megoldása lesz az új egyenletrendszernek is. Megfordítva, ha $\underline{c}$ megoldása az új egyenletrendszernek, akkor a j-edik kivételével minden egyenlete megegyezik az eredetivel, és

$$\lambda b_i + b_j = (\lambda a_{i1} + a_{j1})x_1 + \cdots + (\lambda a_{in} + a_{jn})x_n =$$
$$= \underbrace{\lambda(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)}_{\lambda b_i} + (a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n)$$

miatt $(a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n) = b_j$, tehát az eredeti egyenletrendszer valamennyi egyenletét kielégíti. □

4.7. Tétel. *Ha egy lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa sorekvivalens egy másik lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixszával, akkor a két lineáris egyenletrendszer ekvivalens.*

Bizonyítás. Ha két mátrix sorekvivalens, akkor egyik a másikból elemi mátrixokkal való szorzásokkal megkapható. Legyen az egyenletrendszer $A\underline{x} = \underline{b}$ és ε elemi mátrixok szorzata. Ekkor $(A|\underline{b})$ sorekvivalens $(\varepsilon A|\varepsilon\underline{b})$-vel, és a hozzájuk tartozó egyenletrendszerek:

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= \underline{b} \\ (\varepsilon A)\underline{x} &= \varepsilon\underline{b}. \end{aligned}$$

Látható, hogy a két egyenletrendszernek ugyanazok a megoldásai, hiszen ha $A\underline{c} = \underline{b}$ akkor

$$(\varepsilon \underbrace{A)\underline{c}}_{\underline{b}} = \varepsilon\underline{b},$$

és fordítva, ha $(\varepsilon A)\underline{c} = \varepsilon\underline{b}$ teljesül, akkor ε^{-1}-el szorozva $A\underline{c} = \underline{b}$ adódik (ε invertálható az 1.41. tétel miatt). □

4.8. Tétel. *Ha egy lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa lépcsős mátrix, akkor az egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha nincs olyan sora, amelynek csak az utolsó eleme nem nulla.*

Bizonyítás. 1. Ha van olyan sor a kibővített mátrixban, amelynek csak az utolsó eleme nem nulla, akkor az egyenletrendszer természetesen ellentmondásos.

2. Ha az egyenletrendszer mátrixa lépcsős alakú, akkor véges sok átalakítással (oszlopcserékkel) trapéz alakra hozható:

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \dots & +a_{1l}x_l+ & \dots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ 0\ + & a_{22}x_2+ & \dots & +a_{2l}x_l+ & \dots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\ & & \dots & & \dots & & \\ 0\ + & 0\ + & \dots & +a_{ll}x_l+ & \dots & +a_{ln}x_n = & b_l\,, \\ 0\ + & 0\ + & \dots & +\ 0\ + & \dots & +\ 0\ \ = & 0 \\ & & \dots & & \dots & & \\ 0\ + & 0\ + & \dots & +\ 0\ + & \dots & +\ 0\ \ = & 0 \end{array}$$

ahol $a_{11} \neq 0, \dots, a_{ll} \neq 0$. Ilyenkor az $x_n, \dots, x_{l+1}$ ismeretleneknek tetszőleges értéket adhatunk, ezek függvényében x_l meghatározható, ezután $x_n, \dots, x_{l+1}, x_l$ segítségével x_{l-1} kifejezhető és így tovább. Tehát legyen $x_n = t_n, \dots, x_{l+1} = t_{l+1}$, ahol $t_n, \dots, t_{l+1} \in \mathbb{T}$ tetszőleges. Ekkor

$$x_l = \frac{b_l}{a_{ll}} - \frac{a_{ll+1}}{a_{ll}}t_{l+1} - \dots - \frac{a_{ln}}{a_{ll}}t_n,$$

$$x_{l-1} = \frac{b_{l-1}}{a_{l-1l-1}} - \frac{a_{l-1l}}{a_{l-1l-1}}x_l - \dots - \frac{a_{l-1n}}{a_{l-1l-1}}t_n,$$

$$\vdots$$

végül x_1 kifejezhető $t_n, \ldots, t_{l+1}, x_l, \ldots, x_n$ függvényében. □

4.9. Megjegyzés. Mivel Gauss-eliminációval minden lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa lépcsős alakra hozható, három esetet különböztethetünk meg.

1. Ha a lépcsős alakú kibővített mátrixban van olyan sor amelyben csak az utolsó elem nem nulla, akkor nincs megoldás, az egyenletrendszer ellentmondásos.

2. Ha az alapmátrix háromszög alakra hozható ($n \times n$-es egyenletrendszer esetén), akkor az egyenletrendszerben nincsenek szabadon választható paraméterek. Ekkor az $x_1, \ldots, x_n$ ismeretlenek értéke egyértelmű, pontosan egy megoldás van.

3. Ha a kibővített mátrix lépcsős alakjában nincs olyan sor, amelynek csak az utolsó eleme nem nulla, és az alapmátrix nem háromszög alakú, akkor az egyenletrendszerben vannak olyan ismeretlenek, amelyeknek tetszőleges értéket adhatunk. Ekkor végtelen sok megoldás létezik, az egyenletrendszer határozatlan.

4.10. Példa. 1. Az előző megjegyzés első esete áll fenn, ha az elimináció után például az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 0 &= 2 \end{aligned}$$

Ekkor az egyenletrendszer ellentmondásos.

2. A második eset áll fenn, ha az elimináció után az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Ekkor $x_3 = 1$-et a második egyenletbe behelyettesítve $x_2 = 1$ adódik, melyeket az első egyenletbe behelyettesítve az $x_1 = 1$ eredményt kapjuk. Tehát a megoldás egyértelmű.

3. A harmadik esetet kapjuk, ha például:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Ekkor az egyenletrendszer határozatlan, x_3 tetszőlegesen megválasztható, x_2 és x_1 ennek függvényében adható meg. Legyen tehát $x_3 = t$, $t \in \mathbb{T}$

tetszőleges. Ekkor $x_2 = 2 - t$ és $x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 1$, azaz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.11. Tétel (Kronecker-Capelli-tétel). *Az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor megoldható, ha az alapmátrix rangja megegyezik a kibővített mátrix rangjával, azaz $\mathrm{rg}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = \mathrm{rg}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b})$ vagy másképpen $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$.*

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy a lineáris egyenletrendszer megoldható, azaz létezik $(c_1, \dots, c_n)$ úgy, hogy $\underline{a}_1 c_1 + \dots + \underline{a}_n c_n = \underline{b}$. Ekkor $\underline{b} \in \mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$, tehát $\mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = \mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b})$, így $\mathrm{rg}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = \mathrm{rg}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b})$.

2. Ha $\mathrm{rg}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = \mathrm{rg}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b})$, akkor definíció szerint

$$\dim \mathcal{L}(\underbrace{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n}_{n \text{ db}}) = \dim \mathcal{L}(\underbrace{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}}_{n+1 \text{ db}}),$$

de ez $\mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \subset \mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b})$ miatt csak akkor lehetséges, ha $\mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = \mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b})$. Ekkor $\underline{b} \in \mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$, tehát $\underline{b}$ lineárisan kombinálható az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorokból, így léteznek olyan $c_1, \dots, c_n$ számok, hogy $\underline{b} = \underline{a}_1 c_1 + \dots + \underline{a}_n c_n$, ami azt jelenti, hogy a $c_1, \dots, c_n$ szám n-es megoldása a lineáris egyenletrendszernek. □

4.12. Megjegyzés. Az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek a $\underline{0}$ mindig megoldása.

Ha $A \in M_{n \times n}$ és A invertálható, akkor $\underline{x} = A^{-1}\underline{0}$ miatt csak a nullvektor lesz megoldása az egyenletrendszernek. Ha A nem invertálható, akkor alapmátrixát nem lehet háromszög alakra hozni, így a 4.9. megjegyzésben leírtak alapján lesz nem triviális megoldása is. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $|A| = 0$.

Általában, ha $A \in M_{k \times n}$, akkor $A\underline{x} = \underline{0}$-nak akkor és csak akkor van nem triviális megoldása, ha A oszlopai lineárisan függőek, azaz $\mathrm{rg}(A) < n$.

4.13. Tétel (Cramer-szabály). *Egy $A\underline{x} = \underline{b}$, n ismeretlenes n darab egyenletből álló lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van pontosan egy megoldása, ha az alapmátrix determinánsa nem nulla. Ekkor az egyetlen $(x_1, \dots, x_n)$ megoldást az*

$$x_i = \frac{d_i}{|A|} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

alakban kapjuk, ahol d_i azt az $n \times n$-es mátrixhoz tarozó determinánst jelöli, amelyet úgy kapunk, hogy az alapmátrix i-edik oszlopát kicseréljük a $\underline{b}$ oszloppal.

Bizonyítás. 1. Ha $A\underline{x} = \underline{b}$ egyértelműen megoldható, akkor a 4.9. megjegyzés miatt mátrixa háromszög alakra hozható, tehát sor- és oszlopvektorai lineárisan függetlenek, így $|A| \neq 0$.

2. Ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható, és A^{-1}-gyel szorozva az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszert, azt kapjuk, hogy $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$, és ez a felírás egyértelmű. Tehát

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{(A)_{ji}}{|A|} b_j = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} (A)_{ji} b_j = \frac{d_i}{|A|},$$

mert $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (A)_{ji} b_j$ éppen annak a determinánsnak az i-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyben az i-edik oszlop helyén a $\underline{b}$ oszlopvektor szerepel. □

4.14. Példa. Az alábbi egyenletrendszert Cramer-szabállyal is megoldhatjuk, hiszen az alapmátrix determinánsa nem nem nulla:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Ekkor

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1 \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 2.$$

4.15. Tétel. *Lineráris egyenletrendszer megoldáshalmazának geometriai interpretációja.*

1. Az $A\underline{x} = \underline{0}$, $A \in M_{k\times n}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{T}^n$-ben, melynek dimenziója $n - \mathrm{rg}(A)$.

2. Az $A\underline{x} = \underline{b}$, $A \in M_{k\times n}$ inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai lineáris sokaságot alkotnak $\mathbb{T}^n$-ben, melynek iránytere megegyezik az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazával.

Bizonyítás. 1. Legyen az $A\underline{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ megoldása és $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ tetszőleges. Belátandó, hogy $\lambda\underline{x}_1 + \mu\underline{x}_2$ is megoldás. Mivel

$$A(\lambda\underline{x}_1 + \mu\underline{x}_2) = \lambda \underbrace{(A\underline{x}_1)}_{\underline{0}} + \mu \underbrace{(A\underline{x}_2)}_{\underline{0}} = \underline{0},$$

így a megoldások halmaza zárt a lineáris kombináció képzésre nézve, tehát altér.

2. Legyen az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek $\underline{y}_1, \underline{y}_2$ megoldása. Ekkor $A\underline{y}_1 = \underline{b}$ és $A\underline{y}_2 = \underline{b}$, így

$$A(\underline{y}_1 - \underline{y}_2) = A\underline{y}_1 - A\underline{y}_2 = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\underline{y}_1 - \underline{y}_2$ vektor benne van az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer H megoldás alterében, így $\underline{y}_1 \in \underline{y}_2 + H$. Természetesen minden $\underline{y}$ megoldásvektorra $\underline{y} \in \underline{y}_2 + H$ teljesül, vagyis az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai egy H irányterű lineáris sokaság elemei. Továbbá, ezen lineáris sokaság minden eleme megoldása az egyenletrendszernek: ha $\underline{y} \in \underline{y}_2 + H$, akkor $\underline{y} = \underline{y}_2 + \underline{h}$, ahol $\underline{h} \in H$, így

$$A(\underline{y}) = A(\underline{y}_2 + \underline{h}) = A\underline{y}_2 + \underbrace{A\underline{h}}_{\underline{0}} = A\underline{y}_2 = \underline{b}.$$

3. Most megmutatjuk, hogy az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaltere $(n - \mathrm{rg}(A))$-dimenziós. Ehhez megadunk egy megoldásokból álló lineárisan független rendszert, amely generálja ezt az alteret. A 4.8. tétel bizonyításában leírtak alapján, ha tekintjük az egyenletrendszer lépcsős alakját, akkor abban az $x_{l+1}, \dots, x_n$ ismeretleneknek tetszőleges értéket adhatunk. Itt a lépcsős alakban l darab nem nulla sor szerepel, tehát $l = \mathrm{rg}(A)$. Ha úgy választjuk meg az $x_{l+1}, \dots, x_n$ értékeket, hogy az egyik 1-el egyenlő, a többi nullával, akkor az így kapott

$$\begin{array}{lclccccl}
\underline{u}_1 & = & (& x_{11}, & x_{12}, & \dots, & x_{1l}, & 1,0,\dots,0), \\
\underline{u}_2 & = & (& x_{21}, & x_{22}, & \dots, & x_{2l}, & 0,1,\dots,0), \\
 & \vdots & & & & & & \\
\underline{u}_{n-l} & = & (& x_{(n-l)1}, & x_{(n-l)2}, & \dots, & x_{(n-l)l}, & 0,0,\dots,1)
\end{array}$$

megoldásvektorok lineárisan függetlenek. Vegyük észre, hogy minden megoldás előáll ezen vektorok lineáris kombinációjaként, hiszen például az $x_{l+1} = \alpha_{l+1}, \dots, x_n = \alpha_n$ értékekhez tartozó $\underline{u}$ megoldásvektor szükségképpen $\underline{u} = \alpha_{l+1}\underline{u}_1 + \dots + \alpha_n\underline{u}_{n-l}$ alakban áll elő. (Hiszen az utolsó $n - l$ koordináta rögzítése után a megoldás egyértelmű.) Tehát az $\underline{u}_{n-l}, \dots, \underline{u}_n$ vektorok generálják a megoldásalteret, és a vektorrendszer rangja $n - l = n - \mathrm{rg}(A)$, így az általuk generált altér is $(n - \mathrm{rg}(A))$-dimenziós. □

A fenti tétel és a bizonyítása alapján adódik a következő. Ha $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldható, akkor "általános megoldása"

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{h},$$

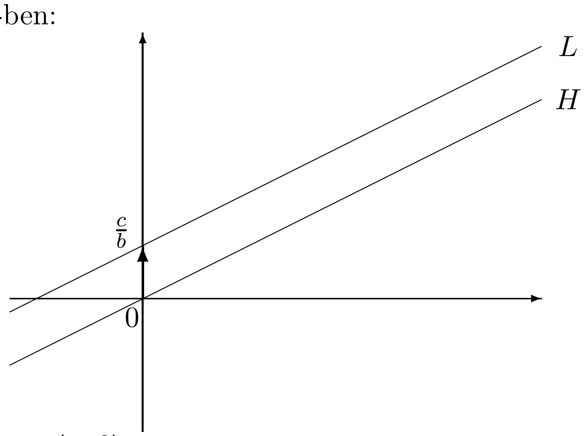
ahol $\underline{x}_0$ egy (partikuláris) megoldás, $\underline{h}$ pedig a megfelelő homogén egyenletrendszer "általános megoldása".

4.16. Megjegyzés. $\mathbb{T}^n$ minden H alteréhez létezik olyan homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek megoldáshalmaza a H altér.

4.17. Példa. Az

$$ax + by = c,$$

lineáris egyenlet(rendszer)nek $b \neq 0$ esetén $y = \dfrac{c}{b} - \dfrac{a}{b}x$ a megoldása. Ez egy L egyenes $\mathbb{R}^2$-ben:



Ez előáll mint a $\left(0, \dfrac{c}{b}\right)$ vektor (azaz az egyenlet egy partikuláris megoldása) és a homogén egyenlet megoldását jelentő $H = \left\{ \left(x, -\dfrac{a}{b}x\right) \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$ altér (azaz egyenes) összege.

5. fejezet

Lineáris leképezések

1. Vektorterek lineáris leképezései

1.1. Definíció. Legyen V_1, V_2 vektortér a $\mathbb{T}$ test felett (itt $\mathbb{T}$ vagy az $\mathbb{R}$ vagy a $\mathbb{C}$ számtestet jelöli). A $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ leképezést *lineáris*nak nevezzük, ha bármely $\underline{x}, \underline{y} \in V_1$ és tetszőleges $\lambda \in \mathbb{T}$ esetén teljesül, hogy

1. $\varphi(\underline{x} + \underline{y}) = \varphi(\underline{x}) + \varphi(\underline{y})$, azaz a leképezés *additív*,
2. $\varphi(\lambda \underline{x}) = \lambda \varphi(\underline{x})$, vagyis a leképezés *homogén*.

1.2. Megjegyzés. Az 1. és 2. tulajdonságot helyettesíti az alábbi tulajdonság:

3. $\varphi(\lambda \underline{x} + \mu \underline{y}) = \lambda \varphi(\underline{x}) + \mu \varphi(\underline{y}) \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in V_1, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{T}$,

tehát 1. és 2. akkor és csak akkor teljesül, ha 3. fennáll.

1.3. Definíció. Egy $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ lineáris leképezést *izomorfizmus*nak nevezünk, ha bijektív. Ilyenkor azt mondjuk, hogy V_1 és V_2 izomorf vektorterek. Jele: $V_1 \cong V_2$.

1.4. Példa. 1. A $\varphi : V \longrightarrow V$, $\varphi(\underline{x}) = \underline{x}$ identikus leképzés lineáris és bijektív, tehát izomorfizmus.

2. Az $\mathcal{O} : V_1 \longrightarrow \{\underline{0}\}$, $\mathcal{O}(\underline{x}) = \underline{0}$ leképezés lineáris.

3. Ha $A \in M_{k\times n}$, akkor a $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $\varphi(\underline{x}) = A\underline{x}$ leképezés lineáris. Valóban,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum a_{ki}x_i \end{pmatrix},$$

így

$$\varphi(\underline{x} + \underline{y}) = A(\underline{x} + \underline{y}) = \begin{pmatrix} \sum a_{1i}(x_i + y_i) \\ \vdots \\ \sum a_{ki}(x_i + y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1i}x_i + \sum a_{1i}y_i \\ \vdots \\ \sum a_{ki}x_i + \sum a_{ki}y_i \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum a_{ki}x_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum a_{1i}y_i \\ \vdots \\ \sum a_{ki}y_i \end{pmatrix} = A\underline{x} + A\underline{y} = \varphi\underline{x} + \varphi\underline{y},$$

tehát φ additív. Hasonlón igazolható a homogenitás.

4. Legyen $(a) = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ bázis a V vektortéren, $(e) = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ a kanonikus bázis $\mathbb{R}^n$-ben, és legyen az $\underline{x}$ vektor előállítása ebben a bázisban $\underline{x} = x_1\underline{a}_1 + \dots + x_n\underline{a}_n$. Ekkor a

$$\kappa : V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \kappa(\underline{x}) = x_1\underline{e}_1 + \dots + x_n\underline{e}_n = (x_1, \dots, x_n) \tag{1.3}$$

leképezést *koordinátaleképezés*nek nevezzük.

5. $\mathbb{R}^n$-ben az origóra tükrözés, origón átmenő egyenesre tükrözés, illetve az origó körüli forgatás lineáris leképezések.

6. A szabad vektorok terében a pont körüli forgatás, pontra tükrözés és a tengelyes tükrözés lineáris leképezések.

1.5. Tétel. *A $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ lineáris leképezés a V_1 zérusvektorát a V_2 zérusvektorába viszi át:*

$$\varphi(\underbrace{\underline{0}}_{\in V_1}) = \underbrace{\underline{0}}_{\in V_2}.$$

Bizonyítás. Mivel $\varphi(\underline{0}) = \varphi(\underline{0}+\underline{0}) = \varphi(\underline{0})+\varphi(\underline{0}) = 2\varphi(\underline{0})$, így $\varphi(\underline{0})$-t kivonva mindkét oldalból $\varphi(\underline{0}) = \underline{0}$ adódik. □

1.6. Tétel (Lineáris leképezések első alaptétele). *Legyen $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ lineáris leképezés és $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ bázis V_1-ben. Ha a $\psi : V_1 \longrightarrow V_2$ lineáris leképezés olyan, hogy $\varphi(\underline{a}_i) = \psi(\underline{a}_i)$ $(i = 1, \dots, n)$, akkor $\varphi \equiv \psi$, azaz $\varphi(\underline{x}) = \psi(\underline{x})$ bármely $\underline{x} \in V_1$ esetén.*

Bizonyítás. Ha φ és ψ a bázisvektorokon megegyezik, és az $\underline{x} \in V_1$ vektor előállítása ebben a bázisban $\underline{x} = x_1\underline{a}_1 + \dots + x_n\underline{a}_n$, akkor

$$\varphi(\underline{x}) = \varphi(x_1\underline{a}_1 + \dots + x_n\underline{a}_n) = x_1\varphi(\underline{a}_1) + \dots + x_n\varphi(\underline{a}_n) =$$

$$x_1\psi(\underline{a}_1) + \dots + x_n\psi(\underline{a}_n) = \psi(x_1\underline{a}_1 + \dots + x_n\underline{a}_n) = \psi(\underline{x}),$$

tehát φ és ψ azonosak. □

1.7. Tétel (Lineáris leképezések második alaptétele). *Ha $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ bázis V_1-ben és $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n)$ tetszőleges vektorrendszer V_2-ben, akkor egyértelműen létezik olyan $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ lineáris leképezés, melyre*

$$\varphi(\underline{a}_i) = \underline{u}_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Bizonyítás. Legyen $\underline{x} \in V_1$ tetszőleges, $\underline{x} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n$ és definiáljuk a $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ leképezést az $\underline{x}$ vektoron a következőképpen:

$$\varphi(\underline{x}) \doteq x_1\underline{u}_1 + \cdots + x_n\underline{u}_n.$$

Belátjuk, hogy φ lineáris.

Ha $\underline{y} = y_1\underline{a}_1 + \cdots + y_n\underline{a}_n$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$, akkor

$$\varphi(\lambda\underline{x} + \mu\underline{y}) = \varphi\left(\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i\underline{a}_i + \mu\sum_{i=1}^{n} y_i\underline{a}_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu y_i)\underline{a}_i\right) \doteq$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu y_i)\underline{u}_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i\underline{u}_i + \mu\sum_{i=1}^{n} y_i\underline{u}_i = \lambda\varphi(\underline{x}) + \mu\varphi(\underline{y}),$$

tehát teljesül az 1.2. megjegyzésben szereplő 3. tulajdonság. □

1.8. Tétel. *Legyen V_1 és V_2 véges dimenziós vektortér a $\mathbb{T}$ test felett. A V_1 és a V_2 vektorterek akkor és csak akkor izomorfak, ha dimenziójuk megegyezik, azaz $V_1 \cong V_2 \iff \dim V_1 = \dim V_2$.*

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy $V_1 \cong V_2$, ekkor létezik közöttük $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ izomorf leképezés. Megmutatjuk, hogy ha $(a) = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ bázis V_1-ben, akkor $\varphi((\underline{a}_1), \ldots, \varphi(\underline{a}_n))$ bázis V_2-ben, azaz V_2 dimenziója szintén n.

(a) Lineárisan függetlenek. Ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{T}$ és

$$\underline{0} = \lambda_1\varphi(\underline{a}_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(\underline{a}_n) = \varphi(\underbrace{\lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{a}_n}_{\underline{a}}),$$

akkor $\varphi(\underline{a}) = \underline{0} = \varphi(\underline{0})$, így φ injektivitása miatt $\underline{a} = \underline{0}$. Mivel az (a) bázisban a nullvektor előállítása egyértelmű, ezért $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, tehát a $(\varphi(\underline{a}_1), \ldots, \varphi(\underline{a}_n))$ vektorokból a nullvektor csak triviális lineáris kombinációként állítható elő.

(b) Generátorrendszer. Legyen $\underline{b} \in V_2$ tetszőleges. Ekkor φ szürjektivitása miatt létezik olyan $\underline{a} \in V_1$, hogy $\varphi(\underline{a}) = \underline{b}$, és legyen $\underline{a} = \lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{a}_n$ az $\underline{a}$ vektor felírása az (a) bázisban. Mivel

$$\underline{b} = \varphi(\underline{a}) = \varphi(\lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{a}_n) = \lambda_1\varphi(\underline{a}_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(\underline{a}_n),$$

így $(\varphi(\underline{a}_1), \ldots, \varphi(\underline{a}_n))$ valóban generátorrendszer.

2. Tegyük fel, hogy $\dim V_1 = \dim V_2$, és legyen $(a) = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ bázis V_1-ben, $(b) = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ pedig bázis V_2-ben. Ha az $\underline{a}$ vektor előállítása az (a) bázisban $\underline{a} = \lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{a}_n$, akkor definiáljuk a $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ leképezést úgy, hogy

$$\varphi(\underline{a}) = \varphi(\lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{a}_n) = \lambda_1\underline{b}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{b}_n.$$

Megmutatjuk, hogy φ izomorfizmus.

(a) Lineáris. Az előző tétel bizonyításában szereplő módszerrel: Legyen $\underline{x} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n$ és $\underline{y} = y_1\underline{a}_1 + \cdots + y_n\underline{a}_n$. Ekkor

$$\varphi(\lambda\underline{x} + \mu\underline{y}) = \varphi\left(\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i\underline{a}_i + \mu\sum_{i=1}^{n} y_i\underline{a}_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu y_i)\underline{a}_i\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu y_i)\underline{u}_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i\underline{u}_i + \mu\sum_{i=1}^{n} y_i\underline{u}_i = \lambda\varphi(\underline{x}) + \mu\varphi(\underline{y}).$$

(b) Injektív. Legyen $\underline{x} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n$, $\underline{y} = y_1\underline{a}_1 + \cdots + y_n\underline{a}_n$, és indirekt tegyük fel, hogy $\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{y})$, de $\underline{x} \neq \underline{y}$. Ekkor

$$\underline{0} = \varphi(\underline{x}) - \varphi(\underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\underline{b}_i - \sum_{i=1}^{n} y_i\underline{b}_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\underline{b}_i\ ,$$

tehát $x_i - y_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ mert a (b) bázisban a nullvektort csak egyféleképpen lehet lineáris kombinációként előállítani. Innen $x_i = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ miatt $\underline{x} = \underline{y}$.

(c) Szürjektív. Ha $\underline{b} \in V_2$ felírása a (b) bázisban $\underline{b} = \lambda_1\underline{b}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{b}_n$, akkor $\underline{b}$ éppen annk az $\underline{a} \in V_1$ vektornak a φ általi képe, amelynek előállítása az (a) bázisban: $\underline{a} = \lambda_1\underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{a}_n$. □

1.9. Következmény. A $\kappa : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ koordinátaleképezés (1.3) izomorfizmus, tehát minden $\mathbb{R}$ fölötti n-dimenziós vektortér izomorf $\mathbb{R}^n$-el.

1.10. Megjegyzés. Az 1.8. tétel és az 1.9. következmény jelentőssége abban áll, hogy így a vektorterekben történő számolások $\mathbb{R}^n$-ben elvégezhetők, és teljesen mindegy számunkra, hogy a vektor milyen geometriai vagy algebrai objektum. Bázis rögzítése után a vektorokat egyértelműen jellemzik a koordinátáik, és ez a megfeleltetés a koordináta n-esek és a vektorok között műveletartó.

1.11. Definíció. Legyenek V_1, V_2 véges dimenziós $\mathbb{T}$ feletti vektorterek és $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ lineáris leképezés. A

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{\underline{v} \in V_1 \mid \varphi(\underline{v}) = \underline{0}\}$$

halmazt a leképezés *magterének* vagy *nullterének* nevezzük.

1.12. Tétel. *A $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ lineáris leképezés Ker$\varphi \subset V_1$ magtere altér.*

Bizonyítás. 1. Kerφ zárt az összeadásra nézve. Legyen $\underline{x}, \underline{y} \in \mathrm{Ker}\varphi$, azaz $\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{y}) = \underline{0}$. Ekkor

$$\varphi(\underline{x} + \underline{y}) = \varphi(\underline{x}) + \varphi(\underline{y}) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0},$$

tehát $(\underline{x}+\underline{y}) \in \mathrm{Ker}\varphi$.

2. $\mathrm{Ker}\varphi$ zárt a skalárszorzásra nézve. Legyen $\underline{x} \in \mathrm{Ker}\varphi$ és $\lambda \in \mathbb{T}$. Ekkor

$$\varphi(\lambda\underline{x}) = \lambda\varphi(\underline{x}) = \lambda\underline{0} = \underline{0},$$

így $\lambda\underline{x} \in \mathrm{Ker}\varphi$. □

1.13. Definíció. A $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ lineáris leképezés *képtere* a

$$\varphi(V_1) = \{\underline{y} \in V_2 \mid \ \exists\underline{x} \in V_1 \ : \ \varphi(\underline{x}) = \underline{y}\}$$

halmaz.

1.14. Tétel. *A $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ lineáris leképezés $\varphi(V_1)$ képtere altér.*

Bizonyítás. 1. $\varphi(V_1)$ zárt az összeadásra nézve. Legyen $\underline{y}_1, \underline{y}_2 \in \varphi(V_1)$. Ekkor létezik $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in V_1$ úgy, hogy $\varphi(\underline{x}_1) = \underline{y}_1$, $\varphi(\underline{x}_2) = \underline{y}_2$, így

$$\underline{y}_1 + \underline{y}_2 = \varphi(\underline{x}_1) + \varphi(\underline{x}_2) = \varphi(\underbrace{\underline{x}_1 + \underline{x}_2}_{\in V_1}) \in \varphi(V_1).$$

2. $\varphi(V_1)$ zárt a skalárszorzásra nézve. Legyen $\lambda \in \mathbb{T}$ és $\underline{y} \in \varphi(V_1)$. Ekkor létezik $\underline{x} \in V_1$ úgy, hogy $\varphi(\underline{x}) = \underline{y}$, ezért

$$\lambda\underline{y} = \lambda\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underbrace{\lambda\underline{x}}_{\in V_1}) \in \varphi(V_1).$$

□

1.15. Definíció. A $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ lineáris leképezés magterének dimenzióját a leképezés *defektus*ának nevezzük, a képterének dimenzióját pedig a leképezés *rang*jának nevezzük. Jele: $\dim \mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{def}\varphi$, $\dim \varphi(V_1) = \mathrm{rg}\varphi$.

1.16. Tétel. *A $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ lineáris leképezés akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}\varphi = \{\underline{0}\}$.*

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy φ injektív és $\underline{a} \in \mathrm{Ker}\varphi$, azaz $\varphi(\underline{a}) = \underline{0}$. Mivel $\varphi(\underline{0}) = \underline{0}$, így $\varphi(\underline{a}) = \varphi(\underline{0})$, ami φ injektivitása miatt csak akkor lehetséges, ha $\underline{a} = \underline{0}$. Ekkor φ magtere csak a nullvektort tartalmazza.

2. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathrm{Ker}\varphi = \{\underline{0}\}$, de φ nem injektív, azaz létezik $\underline{x}, \underline{y} \in V_1$ úgy, hogy $\underline{x} \neq \underline{y}$, de $\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{y})$. Ekkor

$$\underline{0} = \varphi(\underline{x}) - \varphi(\underline{y}) = \varphi(\underline{x} - \underline{y}),$$

azaz $(\underline{x} - \underline{y}) \in \mathrm{Ker}\varphi = \{\underline{0}\}$, tehát $\underline{x} - \underline{y} = \underline{0}$ miatt $\underline{x} = \underline{y}$ adódik, ami ellentmondás. □

1.17. Tétel (Homomorfia tétel). *Legyenek V_1, V_2 véges dimenziós vektorterek a $\mathbb{T}$ test felett. Ekkor*

$$V_1/Ker\varphi \cong \varphi(V_1),$$

azaz V_1-nek a φ nulltere szerinti faktortere izomorf φ képterével.

Bizonyítás. Legyen $\Phi : V_1/\mathrm{Ker}\varphi \longrightarrow \varphi(V_1),\ \Phi(\underline{x} + \mathrm{Ker}\varphi) \doteq \varphi(\underline{x})$. Belátjuk, hogy ez a Φ leképezés izomorfizmus.

1. Lineáris. Ha $\underline{x}, \underline{y} \in V_1,\ \lambda, \mu \in \mathbb{T}$, akkor

$$\Phi(\lambda(\underline{x} + \mathrm{Ker}\varphi) + \mu(\underline{y} + \mathrm{Ker}\varphi)) = \Phi((\lambda\underline{x} + \mathrm{Ker}\varphi) + (\mu\underline{y} + \mathrm{Ker}\varphi)) =$$
$$\Phi((\lambda\underline{x} + \mu\underline{y}) + \mathrm{Ker}\varphi) = \varphi(\lambda\underline{x} + \mu\underline{y}) =$$
$$\lambda\varphi(\underline{x}) + \mu\varphi(\underline{y}) = \lambda\Phi(\underline{x} + \mathrm{Ker}\varphi) + \mu\Phi(\underline{y} + \mathrm{Ker}\varphi).$$

2. Injektív. Az 1.16. tétel alapján elegendő belátni, hogy $\mathrm{Ker}\Phi = \{\underline{0} + \mathrm{Ker}\varphi\}$. Ha $\underline{x} + \mathrm{Ker}\varphi \in \mathrm{Ker}\Phi$, akkor

$$\underline{0} = \Phi(\underline{x} + \mathrm{Ker}\varphi) = \varphi(\underline{x}),$$

tehát $\underline{x} \in \mathrm{Ker}\varphi$. Ekkor $\underline{x} + \mathrm{Ker}\varphi = \underline{0} + \mathrm{Ker}\varphi$.

3. Szürjektív. Ha $\underline{y} \in \varphi(V_1)$, akkor létezik $\underline{x} \in V_1$ úgy, hogy $\varphi(\underline{x}) = \underline{y}$. Ekkor a $V_1/\mathrm{Ker}\varphi$ faktortér $\underline{x}+\mathrm{Ker}\varphi$ elemének a Φ általi képe: $\Phi(\underline{x}+\mathrm{Ker}\varphi) = \varphi(\underline{x}) = \underline{y}$. □

1.18. Következmény (Nullitás és rangtétel). Legyenek V_1, V_2 véges dimenziós vektorterek a $\mathbb{T}$ test felett és $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ lineáris leképezés. Ekkor

$$\dim V_1 = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \varphi(V_1),$$

vagyis $\dim V_1 = \mathrm{def}\varphi + \mathrm{rg}\varphi$.

Bizonyítás. A homomorfia tétel szerint $V_1/\mathrm{Ker}\varphi \cong \varphi(V_1)$, tehát dimenziójuk megegyezik: $\dim(V_1/\mathrm{Ker}\varphi) = \dim \varphi(V_1)$. A harmadik fejezetbeli, faktorterek dimenziójára vonatkozó 4.9. tétel szerint $\dim(V_1/\mathrm{Ker}\varphi) = \dim V_1 - \dim \mathrm{Ker}\varphi$, innen

$$\dim V_1 = \dim(V_1/ker\varphi) + \dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim \varphi(V_1) + \dim \mathrm{Ker}\varphi.$$

□

2. Bázis- és koordinátatranszformáció

Vektorokkal tényleges számításokat a koordináták felhasználásával szoktunk végezni. Gyakran a kiinduló ("régi") bázis helyett egy másik ("új") bázis használata a célszerű. A "régi" bázisban kifejezve az "új" bázis elemeit, kapjuk a bázistranszformáció S mátrixát. Ha most egy vektor "új" koordinátáit akarjuk meghatározni, akkor a "régiek" oszlopvektorát S^{-1}-gyel kell szorozni. Ennek levezetése ezen szakasz célja.

2.1. Definíció. Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $(a) = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ és $(b) = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ pedig két bázis V-ben. Ezen két bázis közötti *bázistranszformáció* mátrixa az az $S = (s_{ij}) \in M_{n\times n}$ mátrix, amelynek j-edik oszlopa tartalmazza a $\underline{b}_j$ vektor koordinátáit az (a) bázisban. Tehát, ha

$$\begin{array}{ccccc} s_{11}\underline{a}_1 + & \dots & + s_{n1}\underline{a}_n & = & \underline{b}_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ s_{1n}\underline{a}_1 + & \dots & + s_{nn}\underline{a}_n & = & \underline{b}_n \end{array}, \quad \text{akkor } S = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix},$$

azaz $\underline{b}_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\underline{a}_i \quad (j = 1, \dots, n)$. Jele: $(a) \xrightarrow{S} (b)$.

2.2. Tétel. *Legyen $(a) = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ és $(b) = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ bázis a V vektortéren, az $(a) \longrightarrow (b)$ bázistranszformáció mátrixa S. Ekkor S invertálható mátrix, és a $(b) \longrightarrow (a)$ bázistranszformáció mátrixa S^{-1} .*

Bizonyítás. Legyen $(b) \xrightarrow{T} (a)$, így $\underline{b}_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\underline{a}_i$ és $\underline{a}_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}\underline{b}_k$. Ekkor egyrészt

$$\underline{b}_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\underline{a}_i = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} t_{ki}\underline{b}_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_{ij}t_{ki}\underline{b}_k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} t_{ki}s_{ij}}_{(TS)_{kj}} \underline{b}_k = \sum_{k=1}^{n} (TS)_{kj}\underline{b}_k,$$

másrészt

$$\underline{b}_j = \sum_{k=1}^{n} \delta_{kj}\underline{b}_k = \sum_{k=1}^{n} (E)_{kj}\underline{b}_k,$$

ami minden $j = 1, \dots, n$ estén teljesül. A báziselőállítás egyértelműsége miatt ez csak akkor lehetséges, ha $TS = E$, vagyis S invertálható és inverze T. $\square$

2.3. Tétel. *Legyenek* $(a) = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ *és* $(b) = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ *bázisok a* V *vektortéren és* S *a bázistranszformáció mátrixa:* $(a) \xrightarrow{S} (b)$*. Ha* $\underline{x} \in V$ *felírása az* (a) *bázisban* $\underline{x} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n$ *és a* (b) *bázisban* $\underline{x} = \overline{x}_1\underline{b}_1 + \cdots + \overline{x}_n\underline{b}_n$*, továbbá* X *és* $\overline{X}$ *jelöli az* $\underline{x}$ *vektor* (a)*-ra, illetve* (b)*-re vonatkozó koordinátáinak oszlopvektorát:*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix},$$

akkor

$$\overline{X} = S^{-1}X.$$

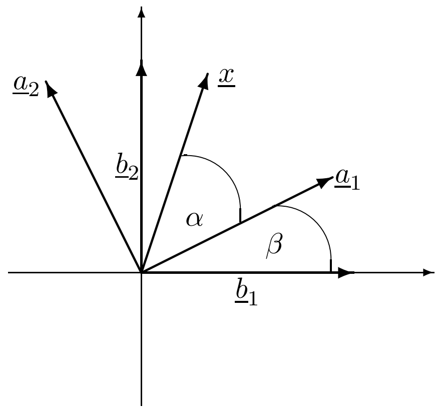
Bizonyítás. Felírjuk az $\underline{x}$ vektort kétféleképpen az (a) bázisban: egyrészt $\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\underline{a}_i$, másrészt

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j\underline{b}_j = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ij}\underline{a}_i\right)}_{\underline{b}_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij}\overline{x}_j\right) \underline{a}_i.$$

Mivel a megfelelő koordinátákanak meg kell egyezniük, azt kapjuk, hogy $x_i = \sum_{j=i}^{n} s_{ij}\overline{x}_j \quad (i = 1, \dots, n)$, tehát $X = S\overline{X}$, illetve $\overline{X} = S^{-1}X$. □

2.4. Definíció. Ha (a) és (b) bázisok a V vektortéren, és a bázistranszformáció mátrixa, azaz $S : (a) \xrightarrow{S} (b)$, akkor az S^{-1} mátrixot az (a) és (b) bázisokhoz tartozó *koordinátatranszformáció* mátrixának nevezzük.

2.5. Példa. Legyen $\mathbb{R}^2$-ben $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}$ a "régi" bázis, és $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ az "új" bázis.



Ekkor a bázistranszformáció mátrixa úgy kapható, hogy a "régi" bázisban kifejezzük az "új" bázis tagjait:

$$S = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

A koordinátatranszformáció mátrixát pedig (azonkívül, hogy a 2.3. tétel miatt éppen S^{-1}) úgy kapjuk, hogy az "új" bázisban fejezzük ki a "régi" bázistagjait:

$$\underline{a}_1 = \cos\beta \underline{b}_1 + \sin\beta \underline{b}_2, \quad \underline{a}_2 = -\sin\beta \underline{b}_1 + \cos\beta \underline{b}_2,$$

tehát

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Ha az $\underline{x}$ vektor a "régi" bázisban $\underline{x} = \cos\alpha \underline{a}_1 + \sin\alpha \underline{a}_2$ alakú, akkor az "új" (azaz a "természetes") bázisban $\underline{x} = \cos(\alpha+\beta)\underline{b}_1 + \sin(\alpha+\beta)\underline{b}_2$ alakú. Használva a koordinátatranszformáció S^{-1} mátrixát

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

adódik. A szorzást elvégezve, az ismert addíciós képletekhez jutunk.

3. Lineáris transzformációk

3.1. Definíció. Legyen V egy véges dimenziós vektortér a $\mathbb{T}$ test felett. A $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris leképezést *lineáris transzformáció*nak vagy *lineáris operátor*nak nevezzük. A V vektortéren értelmezett lineáris transzformációk halmazát $\mathcal{T}_V$ -vel jelöljük.

3.2. Definíció. Legyen $(a) = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ a V vektortér bázisa. A $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris *transzformáció mátrixa* az (a) bázisra vonatkozóan az az $A \in M_{n\times n}$ mátrix, amelynek j-edik oszlopában a $\varphi(\underline{a}_j)$ vektor (a) bázisbeli koordinátái állnak. Tehát ha $\varphi(\underline{a}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\underline{a}_i \quad (j = 1, \dots, n)$, azaz

$$\begin{array}{cccc} a_{11}\underline{a}_1+ & \dots & +a_{n1}\underline{a}_n = & \varphi(\underline{a}_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n}\underline{a}_1+ & \dots & +a_{nn}\underline{a}_n = & \varphi(\underline{a}_n) \end{array}, \quad \text{akkor} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3.3. Tétel. *Legyen $(a) = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ bázis a V vektortéren és $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris transzformáció, melynek mátrixa A. Ha $\underline{x} = x_1\underline{a}_1 + \dots + x_n\underline{a}_n$ és $\varphi(\underline{x}) = x'_1\underline{a}_1 + \dots + x'_n\underline{a}_n$, továbbá X és X' jelöli $\underline{x}$ illetve $\varphi(\underline{x})$ koordinátáit az (a) bázisra vonatkozóan:*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

akkor

$$X' = AX.$$

Bizonyítás. Felírjuk a $\varphi(\underline{x})$ vektort az (a) báziban kétféleképpen: egyrészt $\varphi(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x'_i\underline{a}_i$, másrészt

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{x}) &= \varphi\left(\sum_{j=1}^n x_j\underline{a}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j\varphi(\underline{a}_j) = \sum_{j=1}^n x_j\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\underline{a}_i\right) = \\ & \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)\underline{a}_i. \end{aligned}$$

A megfelelő koordinátákat egyenlővé téve: $x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i = 1, \dots, n)$, tehát $X' = AX$. □

3.4. Példa. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a leképezés, ami minden vektorhoz hozzárendeli annak merőleges vetületét az [x,y] síkra, azaz $\varphi(x, y, z) = (x, y, 0)$. Ekkor φ mátrixa a természetes bázisra vonatkozóan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ez a mátrix tartalmazza oszlopaiban a bázisvektorok képét.

3.5. Tétel. *Bázistranszformáció és lineáris transzformáció közötti kapcsolat. Legyenek* $(a) = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ *és* $(b) = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ *bázisok a* V *vektortéren, a bázistranszformáció mátrixa pedig* $S:\ (a) \xrightarrow{S} (b)$. *Legyen* $\varphi : V \longrightarrow V$ *lineáris transzformáció, melynek az* (a) *bázisra vonatkozó mátrixa* A, *a* (b) *bázisra vonatkozó mátrixa pedig* B. *Ekkor*

$$B = S^{-1}AS.$$

Bizonyítás. Felírjuk a $\varphi(\underline{b}_j)$ vektort kétféleképpen az (a) bázisban: egyrészt

$$\varphi(\underline{b}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\underline{b}_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} s_{ki}\underline{a}_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ki} b_{ij} \right)}_{(SB)_{kj}} \underline{a}_k,$$

másrészt

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{b}_j) \quad &= \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ij}\underline{a}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\varphi(\underline{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\underline{a}_k \right) = \\ &\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} s_{ij} \right)}_{(AS)_{kj}} \underline{a}_k. \end{aligned}$$

Mivel ez minden $j = 1, \ldots, n$ esetén teljesül, így $SB = AS$, vagyis $B = S^{-1}AS$. □

3.6. Példa. Ha a 3.4. példában szereplő leképezés mátrixára vagyunk kíváncsiak az $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ bázisra vonatkozóan, akkor az alábbi módon számíthatjuk ki:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.7. Definíció. Az $A, B \in M_{n\times n}$ *mátrixokat hasonlónak* nevezzük, ha létezik olyan $C \in M_{n\times n}$ reguláris ($|C| \neq 0$) mátrix, amelyre $B = C^{-1}AC$.

3.8. Következmény. Hasonló mátrixok determinánsa és rangja megegyezik.

Bizonyítás. 1. A determinánsok szorzástételét alkalmazva:

$$|B| = |C^{-1}AC| = |C^{-1}||A||C| = |\underbrace{C^{-1}C}_{E}||A| = |A|.$$

2. A rangra vonatkozó állítás annak a következménye, hogy egy reguláris mátrixszal való szorzás nem változtatja meg egy mátrix rangját. Ha $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$, ahol $\underline{a}_i$ itt az A mátrix i-edik oszlopvektorát jelöli, akkor $CA = (C\underline{a}_1, \dots, C\underline{a}_n)$. Így ha A oszlopvektorai lineárisan függők, akkor CA oszlopai is azok:

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \dots + \alpha_n\underline{a}_n = \underline{0} \quad \overset{C\cdot/}{\Longrightarrow} \quad \alpha_1C\underline{a}_1 + \dots + \alpha_nC\underline{a}_n = \underline{0}$$

és megfordítva, ha CA oszlopai függők, akkor A oszlopai is azok:

$$\alpha_1C\underline{a}_1 + \dots + \alpha_nC\underline{a}_n = \underline{0} \quad \overset{C^{-1}\cdot/}{\Longrightarrow} \quad \alpha_1\underline{a}_1 + \dots + \alpha_n\underline{a}_n = \underline{0}.$$

□

3.9. Következmény. Az $M_{n\times n}$ halmazon a mátrixok hasonlósága ekvivalencia reláció (tehát indukál egy osztályozást, az egymással hasonló mátrixok azonos osztályba kerülnek).

Bizonyítás. Jelölje $A \sim B$ azt, hogy az A mátrix hasonló a B mátrixhoz.
1. Reflexív. $A \sim A$, mivel $A = E^{-1}AE$.
2. Szimmetrikus. Ha $A \sim B$, akkor létezik C úgy, hogy $B = C^{-1}AC$. Ekkor $A = (C^{-1})^{-1}BC^{-1}$, tehát $B \sim A$.
3. Tranzitív. Ha $A \sim B$ és $B \sim D$, akkor léteznek C, S mátrixok úgy, hogy $B = C^{-1}AC$ és $D = S^{-1}BS$. Ekkor

$$D = S^{-1}BS = S^{-1}(C^{-1}AC)S = (S^{-1}C^{-1})A(CS) = (CS)^{-1}A(CS),$$

tehát $A \sim D$. □

3.10. Definíció. A $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris transzformációt *automorfizmus*nak nevezzük, ha bijektív (vagyis izomorfizmus).

3.11. Tétel. *A $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris transzformáció akkor és csak akkor automorfizmus, ha mátrixa tetszőleges bázisban reguláris.*

Bizonyítás. Az 1.18. következmény szerint $\dim V = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \varphi(V)$, így $\varphi(V) = V$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 0$, ami az 1.16. tétel alapján azzal ekvivalens, hogy φ injektív. Tehát φ pontosan akkor injektív, ha szürjektív. Ekkor

$$\varphi \text{ bijektív} \iff \varphi(V) = V \iff \mathrm{rg}\varphi = n.$$

Viszont egy lineáris transzformáció rangja pontosan akkor lesz n, ha mártixának rangja n, vagyis reguláris. ($\varphi(\underline{x}) = \underline{y}$ azt jelenti, hogy $Ax = \underline{y}$, és pontosan akkor létezik minden $\underline{y} \in V$ esetén ilyen x, ha A invertálható: $x = A^{-1}\underline{y}$.) □

3.12. Tétel. *Ha $\varphi : V \longrightarrow V$ automorfizmus, akkor φ^{-1} is automorfizmus, és ha φ mátrixa A, akkor φ^{-1} mátrixa A^{-1}.*

Bizonyítás. Ha φ automorfizmus akkor bijektív, ezért invertálható, és inverze szintén bijektív. Jelölje φ^{-1} mátrixát B. Mivel $\varphi\varphi^{-1} = Id$, ezért $AB = E$, tehát $B = A^{-1}$. □

3.13. Tétel. *Ha $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris operátor, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. *φ automorfizmus,*
2. *φ injektív,*
3. *φ szürjektív,*
4. *$Ker\varphi = \{\underline{0}\}$,*
5. *$\varphi(V) = V$,*
6. *$rg\varphi = n$,*
7. *φ mátrixa reguláris (tetszőleges bázisban).*

Bizonyítás. A tétel a 3.11. tétel bizonyításban leírtaknak a következménye. □

3.14. Definíció. Legyen V egy véges dimenziós vektortér. A V-n értelmezett lineáris transzformációk $\mathcal{T}_V$ halmazán bevezetjük az alábbi műveleteket: ha $\varphi, \psi \in \mathcal{T}_V$ és $\lambda \in \mathbb{T}$, akkor bármely $\underline{x} \in V$ esetén

1. $(\varphi + \psi)(\underline{x}) \doteq \varphi(\underline{x}) + \psi(\underline{x})$,
2. $(\lambda\varphi)(\underline{x}) \doteq \lambda\varphi(\underline{x})$,
3. $(\varphi \circ \psi)(\underline{x}) \doteq \varphi(\psi(\underline{x}))$.

3.15. Tétel. *Egy V véges dimenziós vektortér összes lineáris operátorainak $\mathcal{T}_V$ halmaza az összeadásra és a skalárszorzásra nézve vektorteret alkot.*

Bizonyítás. A 3.3. tételbenben leírtak alapján minden lineáris transzformáció mátrixszával való szorzásként hat (rögzített bázisban) és minden $(n \times n)$-es mátrixszal való szorzás lineáris transzformáció, így a lineáris operátorok reprezentálhatók a mátrixukkal. A $\mathcal{T}_V$-beli műveletek pedig a megfelelő mátrixműveleteket jelentik: ha $\varphi, \psi \in \mathcal{T}_V$ mátrixa A illetve B, akkor

1. $(\varphi + \psi)(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}) + \psi(\underline{x}) = A\underline{x} + B\underline{x} = (A + B)\underline{x}$,
2. $(\lambda\varphi)(\underline{x}) = \lambda\varphi(\underline{x}) = (\lambda A)\underline{x}$.

Mivel az $(n \times n)$-es mátrixok halmaza a mátrixok összeadására illetve skalárszorzására nézve vektortér, ezért a lineáris transzformációk is teljesítik a vektortéraxiómákat. $\square$

3.16. Megjegyzés. A V n-dimenziós vektortér lineáris transzformációinak vektortere n^2-dimenziós, mivel az $M_{n\times n}$ vektortér n^2-dimenziós volt.

3.17. Definíció. Egy $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris operátort (illetve mátrixát) diagonalizálhatónak nevezünk, ha létezik olyan bázis V-ben, amelyre vonatkozóan φ mátrixa diagonális.

3.18. Következmény. Egy mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Bizonyítás. A 3.5. tétel szerint egy lineáris transzformáció különböző bázisokra vonatkozó mátrixai hasonlóak. $\square$

3.19. Definíció. A $\underline{0} \neq \underline{x} \in V$ vektor a $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris operátor sajátvektora, ha létezik $\lambda \in \mathbb{T}$ úgy, hogy $\varphi(\underline{x}) = \lambda\underline{x}$. Ekkor a $\lambda \in \mathbb{T}$ számot az $\underline{x}$ sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek nevezzük.

3.20. Definíció. A $H \subset V$ alteret a $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris oprátor invariáns alterének nevezzük, ha $\varphi(H) \subset H$, azaz bármely $\underline{h} \in H$ esetén $\varphi(\underline{h}) \in H$.

3.21. Példa. 1. A V és a $\{\underline{0}\}$ triviális alterek mindig invariánsak.

2. Kerφ invariáns altér, mert ha $\underline{x} \in \text{Ker}\varphi$, akkor $\varphi(\underline{x}) = \underline{0} \in \text{Ker}\varphi$.

3. $\varphi(V)$ invariáns altér, mert ha $\underline{y} \in \varphi(V) \subset V$, akkor $\varphi(\underline{y}) \in \varphi(V)$.

4. Egy $\underline{x}$ sajátvektor által generált altér invariáns, mert ha $H = \{\mu\underline{x} \mid \mu \in \mathbb{T}\}$ és az $\underline{x}$-hez tartozó sajátérték λ, akkor

$$\varphi(\underbrace{\mu\underline{x}}_{\in H}) = \mu\varphi(\underline{x}) = \underbrace{\mu\lambda}_{\in\mathbb{T}}\,\underline{x} \in H.$$

5. $\mathbb{R}^2$-ben az origó körüli forgatásnak illetve a két dimenziós szabad vektorok terében a pont körüli forgatásnak nincs sajátvektora, és nincs nem triviális invariáns altér.

6. A λ-nyújtásnál $(\varphi(\underline{x}) = \lambda\underline{x})$ minden vektor a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, és minden altér invariáns.

3.22. Tétel. *A $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris oprátor mátrixa akkor és csak akkor diagonalizálható, ha V-ban létezik φ sajátvektoraiból álló bázis.*

Bizonyítás. 1. Ha φ mátrixa diagonális az $(a) = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ bázisban, azaz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

akkor $\varphi(\underline{a}_i)$ koordinátái az (a) bázira vonatkozóan éppen az A mátrix i-edik oszlopában szereplő számok. Ekkor

$$\varphi(\underline{a}_i) = 0\underline{a}_1 + \dots + \lambda_i \underline{a}_i + \dots + 0\underline{a}_n = \lambda_i \underline{a}_i,$$

tehát $\underline{a}_i$ sajátvektora a φ lekepezésnek (a λ_i sajátértékkel) minden $(i = 1, \dots, n)$ esetén, így (a) sajátvektorokból álló bázis.

2. Ha $(a) = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ sajátvektorokból álló bázis, és a megfelelő sajátértékek $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, akkor belátjuk, hogy az (a) bázisra vonatkozóan φ mátrixa diagonális. Mivel $\varphi(\underline{a}_j) = \lambda_j \underline{a}_j$, ezért $\varphi(\underline{a}_j)$ koordinátái az (a) bázisban $(0, \dots, \lambda_j, \dots, 0)$, és φ mátrixa a bizonyítás első részében szereplő A mátrixszal egyezik meg. □

3.23. Tétel. *Ha a $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris leképezésnek λ sajátértéke, akkor a λ-hoz tartozó sajátvektorok*

$$\mathcal{L}_\lambda = \{\underline{x} \in V \mid \varphi(\underline{x}) = \lambda \underline{x}\ \}$$

halmaza (kiegészítve a nullvektorral) invariáns alteret alkot.

Bizonyítás. 1. $\mathcal{L}_\lambda$ altér. Ha $\underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{L}_\lambda$ és $\alpha, \mu \in \mathbb{T}$, akkor

$$\varphi(\alpha\underline{x} + \mu\underline{y}) = \alpha\varphi(\underline{x}) + \mu\varphi(\underline{y}) = \alpha\lambda\underline{x} + \mu\lambda\underline{y} = \lambda(\alpha\underline{x} + \mu\underline{y}),$$

tehát $(\alpha\underline{x} + \mu\underline{y})$ is sajátvektor.

2. $\mathcal{L}_\lambda$ invariáns altér. Ha $\underline{x} \in \mathcal{L}_\lambda$, akkor $\varphi(\underline{x})$ szintén sajátvektor:

$$\varphi(\varphi(\underline{x})) = \varphi(\lambda\underline{x}) = \lambda\varphi(\underline{x}).$$

□

3.24. Definíció. Legyen λ a $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris transzformáció sajátértéke. A $\mathcal{L}_\lambda$ altér dimenzióját a λ sajátérték geometriai multiplicitásának nevezzük.

3.25. Tétel. *A $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris transzformáció különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. A bizonyítást a különböző sajátértékek száma szerinti teljes indukcióval végezzük.

$n = 1$ esetén igaz az állítás, hiszen egy sajátértékhez tartozó sajátvektor lineáris független, mivel nem lehet nullvektor.

Tegyük fel, hogy n-re igaz a tétel: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ különböző sajátértékek és $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ hozzájuk tartozó lineárisan független sajátvektorok. Vegyünk most egy λ_{n+1} sajátértéket, amely különbözik az előzőektől és legyen $\underline{x}_{n+1}$ egy hozzá tartozó sajátvektor. Belátjuk, hogy $(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n, \underline{x}_{n+1})$ lineárisan független vektorendszer. Ha

$$\alpha_1\underline{x}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{x}_n + \alpha_{n+1}\underline{x}_{n+1} = \underline{0},$$

akkor

$$\varphi(\alpha_1\underline{x}_1+\cdots+\alpha_n\underline{x}_n+\alpha_{n+1}\underline{x}_{n+1}) = \alpha_1\varphi(\underline{x}_1)+\cdots+\alpha_n\varphi(\underline{x}_n)+\alpha_{n+1}\varphi(\underline{x}_{n+1}) = \underline{0}.$$

Felhasználva, hogy $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{n+1}$ sajátvektorok:

$$\alpha_1\lambda_1\underline{x}_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n\underline{x}_n + \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\underline{x}_{n+1} = \underline{0}$$

adódik. Ha az első egyenlőséget megszorozzuk λ_{n+1}-el és kivonjuk belőle az utolsó egyenletet, akkor

$$\underbrace{(\lambda_{n+1}-\lambda_1)}_{\neq 0}\alpha_1\underline{x}_1 + \cdots + \underbrace{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}_{\neq 0}\alpha_n\underline{x}_n + \underbrace{(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+1})}_{=0}\alpha_{n+1}\underline{x}_{n+1} = \underline{0},$$

vagyis

$$\underbrace{(\lambda_{n+1}-\lambda_1)}_{\neq 0}\alpha_1\underline{x}_1 + \cdots + \underbrace{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}_{\neq 0}\alpha_n\underline{x}_n = \underline{0}.$$

Mivel a feltevés szerint $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ lineárisan független vektorok, így $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Ekkor az első egyenletből $\alpha_{n+1}\underline{x}_{n+1} = \underline{0}$ marad, amiből $\underline{x}_{n+1} \neq \underline{0}$ miatt $\alpha_{n+1} = 0$. Tehát az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{n+1}$ vektorokból a nullvaktor csak triviális lineáris kombinációként állíható elő, így lineárisan függetlenek. □

3.26. Következmény. Egy n-dimenziós vektortéren értelmezett lineáris operátornak legfeljebb n darab különböző sajátértéke lehet.

3.27. Következmény. Ha egy n-dimenziós vektortéren értelmezett lineáris operátornak pontosan n darab különböző sajátértéke van, akkor létezik a vektortéren sajátvektorokból álló bázis, ebben a bázisban az operátor mátrixa diagonális és a főátlóban a megfelelő sajátértékek szerepelnek.

3.28. Definíció. Egy $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris operátor karakterisztikus egyenlete:

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

ahol A lineáris operátor mátrixa, és a $\det(A-\lambda E)$ λ-ra vonatkozó polinomot a φ karakterisztikus polinomjának nevezzük.

3.29. Tétel. *A $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris operátor sajátértékei a karakterisztikus egyenlet megoldásai a $\mathbb{T}$ testben.*

Bizonyítás. A $\lambda \in \mathbb{T}$ szám akkor és csak akkor sajátértéke a φ-nek, ha létezik $\underline{x} \in V$ úgy, hogy $\varphi(\underline{x}) = \lambda\underline{x}$, és jelölje X az $\underline{x}$ vektor koordinátáiból képzett vektort. Ekkor

$$AX = E(\lambda X) \quad \Longleftrightarrow \quad AX - \lambda EX = \underline{0} \quad \Longleftrightarrow$$
$$(A - \lambda E)X = \underline{0}.$$

Ez egy n egyenletből álló n ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

amelynek pontosan akkor van a zérusvektortól különböző megoldása, ha az alapmátrix determinánsa nulla. Tehát λ akkor és csak akkor sajátértéke φ-nek, ha $\det(A - \lambda E) = \underline{0}$. □

3.30. Megjegyzés. A $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris operátor karakterisztikus egyenlete egy n-edfokú egyenlet, amelynek megoldásai a φ sajátértékei. Egy λ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat az $(A - \lambda E)X = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásával tudjuk meghatározni. (Ennek az egyenletrendszernek a megoldástere éppen az $\mathcal{L}_\lambda$ altér, melynek a zérusvektor kivételével minden vektora sajátvektor.)

3.31. Tétel. *A $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris operátor karakterisztikus polinomja nem függ a bázis választásától.*

Bizonyítás. A 3.5. tétel alapján egy lineáris operátor különböző bázisokban felírt mátrixai hasonlóak, tehát azt kell belátnunk, hogy hasonló mátrixok hoztartozó karakterisztikus polinomok megegyeznek. Legyen φ mátrixa az (a) bázisra vonatkozóan A, a (b) bázisra vonatkozóan B és a bázistranszformáció mátrixa $S: \ (a) \xrightarrow{S} (b)$. Ekkor $B = S^{-1}AS$, és

$$\det(B - \lambda E) = \det(S^{-1}AS - \lambda E) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}ES) =$$
$$\det\left[(S^{-1})(A - \lambda E)(S)\right] = \det\underbrace{(S^{-1}S)}_{E}\det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E).$$

□

3.32. Tétel. *Minden $\mathbb{C}$ feletti vektortér és minden páratlan dimenziós $\mathbb{R}$ feletti vektortér lineáris operátorának van sajátértéke.*

Bizonyítás. 1. Az algebra alaptétele kimondja, hogy minden $\mathbb{C}$ feletti n-edfokú egyenletnek van gyöke, így az operátor karakterisztikus egyenlete megoldható.

2. Ha egy n-edfokú egyenletnek a z komplex szám gyöke, akkor $\overline{z}$ is gyöke. Ha n páratlan, akkor az n darab gyöke között kell hogy legyen olyan, amelyre $z = \overline{z}$, vagyis valós megoldás is létezik. □

3.33. Definíció. Egy $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris operátor λ sajátértékének algebrai multiplicitásán azt a számot értjük, ahányszoros gyöke λ a karakterisztikus egyenletnek.

3.34. Példa. Ha a karakterisztikus egyenlet $(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0$, akkor két sajátértéke van az operátornak, a $\lambda_1 = 2$ sajátérték algebrai multiplicitása 2, míg a $\lambda_2 = -1$ sajátérték algebrai multiplicitása 1.

3.35. Definíció. Egy $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris operátor spektruma a sajátértékeinek olyan sorozata, amelyben minden sajátérték annyiszor szerepel, amennyi az algebrai multiplicitása.

3.36. Példa. A 3.34. példa esetén a spektrum: $2, 2, -1$.

3.37. Definíció. Legyen V egy n-dimenziós vektortér. A $\varphi : V \longrightarrow V$ lineári s operátor spekruma teljes, ha pontosan n tagból áll.

3.38. Következmény. Komplex számtest feletti vektortéren értelmezett lineáris operátor spektruma mindig teljes.

3.39. Tétel. *Legyen λ egy sajátértéke a $\varphi : V \longrightarrow V$ lineária transzformációnak. Ekkor λ geometriai multiplicitása kisebb vagy egyenlő mint az algebrai multiplicitása.*

Bizonyítás. Ha λ_0 geometriai multiplicitása $\dim \mathcal{L}_{\lambda_0} = k$, akkor $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ egy k dimenziós invariáns altér. Ennek az altérnek egy $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ sajátvektorokból álló bázisát kiegészithetjük V egy bázisává, és ebben a bázisban φ mátrixa illetve a karakterisztikus polinom:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}, \quad P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_0-\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_0-\lambda & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0-\lambda & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{vmatrix}.$$

Tehát $P(\lambda) = (\lambda_0-\lambda)^k \cdot P^*(\lambda)$, így λ algebrai multiplicitása legalább k. □

3.40. Következmény. Egy $\mathbb{C}$ feletti vektortéren értelmezett lineáris operátor akkor és csak akkor diagonalizálható, ha minden sajátértékének algebrai multiplicitása megegyezik a geometriai multiplicitásával.

3.41. Következmény. Egy $\mathbb{R}$ feletti vektortéren értelmezett lineáris operátor akkor és csak akkor diagonalizálható, ha spektruma teljes és minden sajátértékének algebrai multiplicitása megegyezik a geometriai multiplicitásával.

3.42. Tétel (Jordan-féle normál alak). *Minden $\mathbb{C}$ feletti vektortéren értelmezett lineáris transzformációhoz létezik olyan bázis, amelyben az operátor mátrixa az alábbi, (úgynevezett Jordan-féle tömbökből álló) Jordan-féle normál alakú:*

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 0 & \dots & 0 & & & & & \\
1 & \lambda_1 & \dots & 0 & & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & & & & \\
0 & \dots & 1 & \lambda_1 & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & \lambda_k & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & 1 & \lambda_k & \dots & 0 \\
 & & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & 0 & \dots & 1 & \lambda_k
\end{pmatrix}.$$

Irodalomjegyzék

[1] Bélteky Károly: Analitikus geometria és lineáris algebra : I. éves nappali tanárszakos, matematikus és matematikus levelező hallgatók részére, *Budapest, Tankönyvkiadó* (1989).

[2] Fuchs László: Bevezetés az algebrába és a számelméletbe, *Budapest, Tankönyvkiadó* (1990).

[3] Gaál István, Kozma László: Lineáris algebra, *Debrecen, Kossuth Egyetemi K.* (2002).

[4] Halmos Pál: Véges dimenziós vektorterek, *Budapest, Müszaki Könyvkiadó* (1984).

[5] Kovács Zoltán: Geometria : az euklidészi geometria metrikus megalapozása, *Debrecen, Kossuth Egyetemi K.* (2002).

[6] Szendrei Ágnes: Diszkrét matematika : logika, algebra, kombinatorika, *Szeged, Polygon* (1994).

Tárgymutató