Matematikai segédlet a horizontális fúziók esetén értelmezhető fúziós paradoxon és feloldása értelmezéséhez.

A fúziós paradoxon

Nehéz olyan közgazdasági modellt alkotni, melyben a fuzionált vállalatok jókora nyereségre tesznek szert, amennyiben a fúzió nem vezet monopólium létrejöttéhez.

A paradoxon létezésének bizonyítása

Induljunk ki egy Cournot-versenyző piacból, ahol a vállalatok száma $N \geq 2$. A vállalatok homogén terméket állítanak elő, költségviszonyaik egyformák. A vállalatok teljes költségfüggvénye:

$$C(q_i) = c \cdot q_i;\ i = 1,2,...,N$$

q_i *az i. vállalat kibocsátása*

Ekkor a határköltség minden egyes vállalat esetében: c

A piaci kereslet lineáris, így az inverz keresleti függvény:

$$P = a - bQ = a - b(q_i + Q_{-i})$$

Q_{-i}, *az i. vállalaton kívüli kibocsátás*

q_i, *az i. vállalat kibocsátása*

I. lépés

Ha bizonyítani szeretnénk, hogy a fúziót követően a fuzionált vállalatok profitja nem haladja meg a fúzió előtti szintet – igazolva ezzel a fúziós paradoxont – ahhoz *első lépésben meg kell határoznunk a piacon tevékenykedő vállalatok által Cournot-versenyben realizálható profitok nagyságát.*

Határozzuk meg a Cournot-versenyző piacon tevékenykedő tipikus „i." vállalat profitját!

$$P = a - bQ = a - b(q_i + Q_{-i})$$

$$P = a - bq_i - bQ_{-i}$$

$$MR_i = a - bQ_{-i} - 2bq_i$$

A profitmaximalizáló vállalati kibocsátás általános feltétele:

$$MR_i = c$$

$$a - bQ_{-i} - 2bq_i = c$$

Melyből adódik az *i.* vállalat többi N-1 számú vállalat kibocsátásra adott legjobb-válasza:

$$q_i^* = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{Q_{-i}^*}{2}$$

Mivel minden vállalat azonos költség-függvénnyel rendelkezik, és a döntési logika is ugyanaz, ezért azonos legjobb-válaszokat adnak! Ebből adódóan:

$$Q_{-i}^{*}=(N-1)\cdot\left(\frac{(a-c)}{2b}-\frac{Q_{-i}^{*}}{2}\right)=(N-1)\cdot q_i^{*}$$

A piacon a Cournot-Nash egyensúly az N számú vállalat legjobbválasz-függvényeinek metszéspontjában alakul ki, ebből adódóan:

$$q_i^{*}=\frac{(a-c)}{2b}-\frac{(N-1)\cdot q_i^{*}}{2}$$

Az egyenlet átrendezésével kapjuk az „i." Cournot-Nash egyensúlyi kibocsátását:

$$q_i^{*}=\frac{(a-c)}{(N+1)b}$$

Mivel a piacon minden egyes vállalatnak ugyanez a legjobb-válasza, ezért a Cournot-Nash egyensúlyi összpiaci kibocsátás:

$$Q^{*}=N\cdot\frac{(a-c)}{(N+1)b}$$

Ha a vállalatok által realizálható profit nagyságát akarjuk meghatározni, akkor szükségünk van az egyensúlyban érvényes piaci ár meghatározására is!

$$P^{*}=a-b\cdot\left(N\cdot\frac{(a-c)}{(N+1)b}\right)=\frac{(N+1)a-N(a-c)}{(N+1)}=\frac{a}{N+1}+\frac{N}{N+1}c$$

Most már nincs más dolgunk hátra, mint a profit meghatározása! A Cournot-versenyző piacon szereplő tipikus „i." vállalat profitja Cournot-Nash egyensúlyban:

$$\pi_i^{*}(q_i,Q_{-i})=(P^{*}-c)\cdot q_i^{*}=\left(\frac{a}{N+1}+\frac{N}{N+1}c-c\right)\cdot q_i^{*}=\left(\frac{a+Nc-(N+1)c}{N+1}\right)\cdot q_i^{*}=$$

$$\left(\frac{a+Nc-Nc-c}{N+1}\right)\cdot\frac{(a-c)}{(N+1)b}=\frac{(a-c)^2}{(N+1)^2 b}$$

$$\pi_i^{*}(q_i,Q_{-i})=\frac{(a-c)^2}{(N+1)^2 b}$$

II. lépés

Tegyük fel, hogy a piacon tevékenykedő N számú vállalatból M számú vállalat fuzionál. Tegyük fel továbbá, hogy $M\geq 2 \quad \Lambda \quad N\rangle M$. A fúziót követően N-M+1 vállalat versenyez egymással. Jelölje a továbbiakban q_m a fuzionált vállalatok kibocsátását, Q_{-m} a fúzióban részt nem vevő vállalatok összkibocsátását. Ekkor $Q_{-m}=q_{m+1}+q_{m+2}+\ldots+q_N$.

Ekkor az inverz keresleti függvény:

$$P=a-b(q_m+Q_{-m})$$

Melyből a fuzionált vállalat határbevétele:

$$MR_m=a-bQ_{-m}-2bq_m$$

A fuzionált vállalat úgy választja meg kibocsátását, hogy profitja maximális legyen. Ezért:

$$MR_m=c$$

$$a-bQ_{-m}-2bq_m=c$$

Melyből adódik a fuzionált vállalat többi N-M számú vállalat kibocsátásra adott legjobb-válasza:

$$q_m^* = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{Q_{-m}^*}{2}$$

Mivel minden vállalat azonos költség-függvénnyel rendelkezik, és a döntési logika is ugyanaz, ezért azonos legjobb-válaszokat adnak! Ebből adódóan:

$$Q_{-m}^* = (N-M)\cdot\left(\frac{(a-c)}{2b} - \frac{Q_{-m}^*}{2}\right) = (N-M)\cdot q_m^*$$

A piacon a Cournot-Nash egyensúly az N-M+1 számú vállalat legjobbválasz-függvényeinek metszéspontjában alakul ki, ebből adódóan:

$$q_m^* = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{(N-M)\cdot q_m^*}{2}$$

Az egyenlet átrendezésével kapjuk a fuzionált vállalat Cournot-Nash egyensúlyi kibocsátását:

$$q_m^* = \frac{(a-c)}{(N-M+2)b}$$

Mivel a piacon minden egyes vállalatnak (melyek száma a fúzió után: N-M+1) ugyanez a legjobb-válasza, ezért a Cournot-Nash egyensúlyi összpiaci kibocsátás:

$$Q^* = (N-M+1)\cdot\frac{(a-c)}{(N-M+2)b}$$

Ha a vállalatok által realizálható profit nagyságát akarjuk meghatározni, akkor szükségünk van az egyensúlyban érvényes piaci ár meghatározására is!

$$P^* = a - b\cdot\left((N-M+1)\cdot\frac{(a-c)}{(N-M+2)b}\right) = \frac{aN - aM + 2a - aN + aM - a + cN - cM + c}{(N-M+2)} =$$

$$\frac{a+(N-M+1)c}{(N-M+2)}$$

Most már nincs más dolgunk hátra, mint a profit meghatározása! A Cournot-versenyző piacon szereplő tipikus „i." vállalat profitja Cournot-Nash egyensúlyban:

$$\pi_m^*(q_m, Q_{-m}) = (P^* - c)\cdot q_m^* = \left(\frac{a+(N-M+1)c}{(N-M+2)} - c\right)\cdot q_m^* = \left(\frac{a+(N-M+1)c-(N-M+2)c}{(N-M+2)}\right)\cdot q_m^* =$$

$$\left(\frac{a-c}{(N-M+2)}\right)\cdot\frac{(a-c)}{(N-M+2)b} = \frac{(a-c)^2}{(N-M+2)^2 b}$$

$$\pi_m^*(q_m, Q_{-m}) = \frac{(a-c)^2}{(N-M+2)^2 b}$$

Miután meghatároztuk a fúzió előtti és utáni profitok nagyságát, nincs más dolgunk, mint összehasonlítani a két eset profitjainak nagyságát!

$$\pi_i^*(q_i, Q_{-i}) = \frac{(a-c)^2}{(N+1)^2 b}$$

$$\pi_m^*(q_m, Q_{-m}) = \frac{(a-c)^2}{(N-M+2)^2 b}$$

A fúziós paradoxon teljesülése
A fúziótól azt várnánk, hogy a fúziót követően a fuzionált vállalatok profitja magasabb lesz, mint előtte!

$$\mathrm{M}\frac{(a-c)^2}{(N+1)^2 b} \leq \frac{(a-c)^2}{(N-M+2)^2 b}$$

$$\mathrm{M}(N-M+2)^2 \leq (N+1)^2$$

Belátható, hogy az egyenlőtlenség nem teljesül egyetlen olyan számpárra sem, melyre igaz, hogy $N \rangle M \geq 2$!

A fúziós paradoxon feloldása

Tegyük fel, hogy a piacon Stackelberg verseny érvényesül. Ekkor a piacon versenyző N számú vállalat, L számú vezető- és F számú követő vállalatra osztható. A vállalatok homogén terméket állítanak elő, költségfüggvényei azonosak. Teljes-költség függvényük:

$$C(q_i) = c \cdot q_i;\ i = 1,2,\ldots,N$$

q_i *az i. vállalat kibocsátása*
Ekkor a határköltség minden egyes vállalat esetében: c

Vizsgáljuk meg, hogy a fuzionáló vezető vállalatok profitja és a követő vállalatok profitja, hogyan viszonyul egymáshoz Stackelberg-Nash egyensúlyban!

Ezen feltételrendszerben:

1. a vállalatok száma: $N = L + F$.
2. a piaci kibocsátás: $Q = Q^L + Q^F$, ahol $Q^L = \sum_{l=1}^{L} q_l$, $Q^F = \sum_{f=1}^{F} q_f$

Ezen a piacon először a korábban fuzionált vezető vállalatok lépnek először. A saját profitmaximalizáló kibocsátásuk meghatározásakor figyelembe veszik a követő vállalatok lehetséges legjobb-válaszát! Éppen ezért első lépésben meghatározzuk a tipikus követő vállalat, valamint a követő vállalatok csoportjának legjobb-válaszát!

I. lépés

A tipikus nem fuzionáló, követő vállalat és a követő vállalatok csoportja profitmaximalizálást eredményező kibocsátásának (legjobb-válaszának meghatározása)

A vázolt feltételrendszerben az inverz keresleti függvény

$$P = a - b\left(Q^L + Q_{F-f}\right) - bq_f$$

Melyből a tipikus „f" követő vállalat határbevétele:

$$MR_f = a - bQ^L - bQ_{F-f} - 2bq_f$$

A tipikus „f" követő vállalat úgy választja meg kibocsátását, hogy profitja maximális legyen. Ezért:

$$MR_f = c$$

$$a - bQ^L - bQ_{F-f} - 2bq_f = c$$

Melyből adódik a fuzionált vállalat többi N-M számú vállalat kibocsátásra adott legjobb-válasza:

$$q_f^* = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{Q^{L*}}{2} - \frac{Q_{F-f}^*}{2}$$

Mivel az összes többi, N-L-1 számú követő vállalat azonos költség-függvénnyel rendelkezik, és a döntési logika is ugyanaz, ezért azonos legjobb-válaszokat adnak! Ebből adódóan:

$$Q_{F-f}^* = (N-L-1)\cdot\left(\frac{(a-c)}{2b} - \frac{Q^{L*}}{2} - \frac{Q_{F-f}^*}{2}\right) = (N-L-1)\cdot q_f^*$$

A piacon a Stackelberg-Nash egyensúly a vállalatok legjobbválasz-függvényeinek metszéspontjában alakul ki, ebből adódóan:

$$q_f^* = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{Q^{L*}}{2} - \frac{(N-L-1)\cdot q_f^*}{2}$$

Az egyenlet átrendezésével kapjuk a tipikus követő vállalat Stackelberg-Nash egyensúlyi kibocsátását:

$$q_f^* = \frac{(a-c)}{(N-L+1)b} - \frac{Q^{L*}}{(N-L+1)}$$

Mivel a piacon minden egyes követő vállalatnak (melyek száma: N-L) ugyanez a legjobb-válasza, ezért a Stackelberg-Nash egyensúlyi követő kibocsátás:

$$Q_F^* = \frac{(N-L)(a-c)}{(N-L+1)b} - \frac{(N-L)Q^{L*}}{(N-L+1)}$$

II. lépés

A tipikus, fúzióban részt vevő, vezető vállalat és a vezető vállalatok csoportja profitmaximalizálást eredményező kibocsátásának (legjobb-válaszának meghatározása)

A tipikus vezető vállalat a következő inverz keresleti függvénnyel szembesül:

$$P = a - b(Q^F + Q_{L-l}) - bq_l$$

Melybe a tipikus „l" vezető vállalat beépíti a követők legjobbválasz-függvényét:

$$P = a - b\left(\frac{(N-L)(a-c)}{(N-L+1)b} - \frac{(N-L)Q^L}{(N-L+1)} + Q_{L-l}\right) - bq_l$$

$$P = \frac{a(N-L+1) - (N-L)(a-c) - (N-L)Q^L b + (N-L+1)Q_{L-l}b - (N-L+1)bq_l}{(N-L+1)}$$

$$P = \frac{a + (N-L)c - (N-L)Q^L b - b(N-L+1)(Q_{L-l} + q_l)}{(N-L+1)}$$

$$P = \frac{a + (N-L)c - (N-L)Q^L b - b(N-L+1)Q^L}{(N-L+1)}$$

$$P = \frac{a + (N-L)c + Q^L b((N-L) - (N-L+1))}{(N-L+1)}$$

$$P = \frac{a + (N-L)c - Q^L b}{(N-L+1)}$$

Az átalakítások után az inverz keresleti görbe egy egyszerűsített változatát kapjuk, mely azonban azért nem megfelelő számunkra, mert nincs benne a tipikus követő vállalat kibocsátása, s mivel az ő termékei iránti inverz keresletet szeretnénk meghatározni, ezért szükség van további átalakításokra!

Mellékszámítás:

$$Q^L = Q_{L-l} + q_l$$

$$-bQ^L = -bQ_{L-l} - bq_l$$

Ezt behelyettesítve az egyszerűsített inverz keresleti függvénybe a következő inverz keresleti függvény adódik:

$$P = \frac{a + (N-L)c - bQ_{L-l}}{(N-L+1)} - \frac{b}{(N-L+1)} q_l$$

Ekkor a tipikus „l" vezető vállalat határbevétele:

$$MR_l = \frac{a + (N-L)c - bQ_{L-l}}{(N-L+1)} - \frac{2b}{(N-L+1)} q_l$$

A vezető vállalat úgy választja meg kibocsátását, hogy profitja maximális legyen. Ezért:

$$MR_f = c$$

$$\frac{a + (N-L)c - bQ_{L-l}}{(N-L+1)} - \frac{2b}{(N-L+1)} q_l = c$$

$$\frac{a + (N-L)c - (N-L+1)c - bQ_{L-l}}{(N-L+1)} - \frac{2b}{(N-L+1)} q_l = 0$$

$$\frac{a-c}{(N-L+1)} - \frac{bQ_{L-l}}{(N-L+1)} - \frac{2b}{(N-L+1)} q_l = 0$$

Melyből adódik a tipikus vezető vállalat többi vállalat kibocsátásra adott legjobb-válasza:

$$q_l^* = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{Q_{L-l}}{2}$$

Mivel az összes többi, L-1 számú vezető vállalat azonos költség-függvénnyel rendelkezik, és a döntési logika is ugyanaz, ezért azonos legjobb-válaszokat adnak! Ebből adódóan:

$$Q_{L-l}^* = (L-1) \cdot \left(\frac{(a-c)}{2b} - \frac{Q_{L-l}}{2} \right) = (L-1) \cdot q_l^*$$

A piacon a Stackelberg-Nash egyensúly a vállalatok legjobbválasz-függvényeinek metszéspontjában alakul ki, ebből adódóan:

$$q_l^* = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{(L-1) \cdot q_l^*}{2}$$

Az egyenlet átrendezésével kapjuk a tipikus vezető vállalat Stackelberg-Nash egyensúlyi kibocsátását:

$$q_l^* = \frac{(a-c)}{(L+1)b}$$

Mivel a piacon minden egyes vezető vállalatnak (melyek száma: L) ugyanez a legjobb-válasza, ezért a Stackelberg-Nash egyensúlyi vezető kibocsátás:

$$Q_L^* = \frac{L(a-c)}{(L+1)b}$$

III. lépés A követő vállalatok kibocsátása, a teljes piaci kibocsátás, piaci ár és az árrés Stackelberg-Nash egyensúlyban

A tipikus követő vállalat legjobb-válaszfüggvénye az első lépésben levezetettek szerint:

$$q_f^* = \frac{(a-c)}{(N-L+1)b} - \frac{Q^{L*}}{(N-L+1)}$$

Melybe behelyettesítve a vezető vállalatok legjobb-válaszát a következő összefüggés adódik:

$$q_f^* = \frac{(a-c)}{(N-L+1)b} - \frac{\frac{L(a-c)}{(L+1)b}}{(N-L+1)} = \frac{(a-c)}{(N-L+1)b} - \frac{L(a-c)}{(N-L+1)(L+1)b} = \frac{(L+1)(a-c)-L(a-c)}{(N-L+1)(L+1)b}$$

$$q_f^* = \frac{(a-c)}{(N-L+1)(L+1)b}$$

Mivel a piacon minden egyes követő vállalatnak (melyek száma: N-L) ugyanez a legjobb-válasza, ezért a Stackelberg-Nash egyensúlyi követő kibocsátás:

$$Q_F^* = \frac{(N-L)(a-c)}{(N-L+1)(L+1)b}$$

Az összpiaci kibocsátás ekkor:

$$Q = Q^L + Q^F = \frac{L(a-c)}{(L+1)b} + \frac{(N-L)(a-c)}{(N-L+1)(L+1)b} = \frac{L(N-L+1)(a-c)+(N-L)(a-c)}{(N-L+1)(L+1)b}$$

$$= \frac{(a-c)[L(N-L+1)+(N-L)]}{(N-L+1)(L+1)b} = \frac{(a-c)(NL-L^2+N)}{(N-L+1)(L+1)b}$$

$$Q = \frac{(a-c)(NL-L^2+N)}{(N-L+1)(L+1)b}$$

Szükségünk van a Steckelberg-Nash egyensúlyi piaci árra a profitok meghatározásához! Mivel az összpiaci kibocsátást meghatároztuk, nincs más hátra, mint behelyettesíteni a kapott összefüggést az inverz keresleti függvénybe!

$$P^* = a - b\left[\frac{(a-c)(NL-L^2+N)}{(N-L+1)(L+1)b}\right] = \frac{a(N-L+1)(L+1)-(a-c)(NL-L^2+N)}{(N-L+1)(L+1)}$$

$$= \frac{a(NL-L^2+L+N-L+1)-(a-c)(NL-L^2+N)}{(N-L+1)(L+1)} = \frac{a+c(NL-L^2+N)}{(N-L+1)(L+1)}$$

$$P^* = \frac{a+c(NL-L^2+N)}{(N-L+1)(L+1)}$$

Mivel a vállalatok által realizált profit nagysága megegyezik az árrés és a kibocsátás szorzatával, melyből az utóbbit ismerjük a profitok meghatározásához már csak az árrést kell meghatároznunk!

$$P^* - c = \frac{a + c\left(NL - L^2 + N\right)}{\left(N - L + 1\right)\left(L + 1\right)} - c = \frac{a + c\left(NL - L^2 + N\right) - \left(NL - L^2 + L + N - L + 1\right)c}{\left(N - L + 1\right)\left(L + 1\right)}$$

$$P^* - c = \frac{a - c}{\left(N - L + 1\right)\left(L + 1\right)}$$

IV. lépés

A tipikus, fuzionáló vezető és a tipikus követő vállalat profitja Stackelberg-Nash egyensúlyban

$$\pi_l^*\left(N, L\right) = \left(P^* - c\right)q_l^* = \left(\frac{a - c}{\left(N - L + 1\right)\left(L + 1\right)}\right) \cdot \frac{\left(a - c\right)}{\left(L + 1\right)b} = \frac{\left(a - c\right)^2}{\left(N - L + 1\right)\left(L + 1\right)^2 b}$$

$$\pi_f^*\left(N, L\right) = \left(P^* - c\right)q_f^* = \left(\frac{a - c}{\left(N - L + 1\right)\left(L + 1\right)}\right) \cdot \frac{\left(a - c\right)}{\left(N - L + 1\right)\left(L + 1\right)b} = \frac{\left(a - c\right)^2}{\left(N - L + 1\right)^2\left(L + 1\right)^2 b}$$

V. lépés

Létezik-e a fúziós paradoxon?

Tegyük fel, hogy további két vállalat fuzionál a követő vállalatok közül és ennek hatására a vezető fuzionált vállalatok száma eggyel nő, a követőké kettővel csökken, vagyis a vezetők száma L+1 a követőké N-2 lesz!

Ekkor a vezető profitok Stackelberg-Nash egyensúlyban:

$$\pi_l^*\left(N, L\right) = \frac{\left(a - c\right)^2}{\left(N - L - 1\right)\left(L + 2\right)^2 b}$$

A fúziós paradoxon teljesülésének vizsgálata:

A fúziótól azt várnánk, hogy a fúziót követően a fuzionált vállalatok profitja magasabb lesz, mint előtte! Ennek megfelelően:

$$\pi_l^*\left(N, L\right) \geq 2 \cdot \pi_f^*\left(N, L\right)$$

$$\frac{\left(a - c\right)^2}{\left(N - L - 1\right)\left(L + 2\right)^2 b} \geq 2 \cdot \frac{\left(a - c\right)^2}{\left(N - L + 1\right)^2\left(L + 1\right)^2 b}$$

$$2 \cdot \left(N - L - 1\right)\left(L + 2\right)^2 - \left(N - L + 1\right)^2\left(L + 1\right)^2 \leq 0$$

Belátható, hogy az átalakításokkal kapott egyenlőtlenség teljesül minden olyan N, L számpárra, melyre $N \rangle L \geq 2$. Vagyis ez esetben nem létezik a fúziós paradoxon!

Győr, 2008. november 26.

Kovács Norbert
egyetemi tanársegéd
SZE, GT