SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Lineáris programozási feladatok típusai és grafikus megoldása

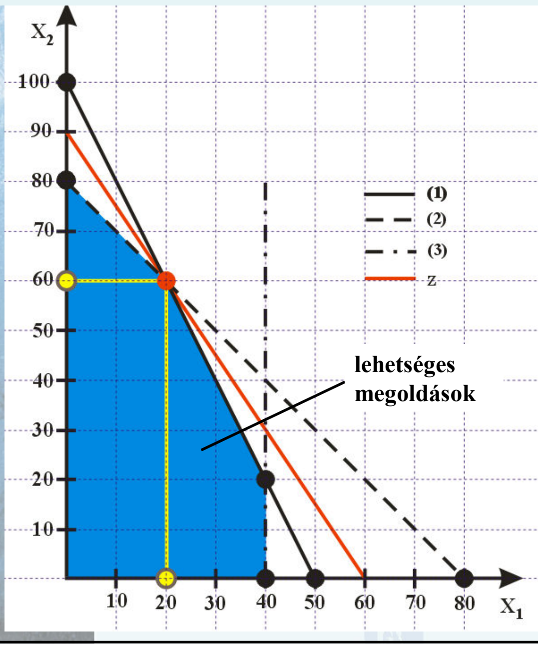
Alkalmazott operációkutatás

2. előadás

2008/2009. tanév
2008. szeptember 19.

Smahó Melinda

Maximumfeladat grafikus megoldása



$$2x_1 + x_2 \le 100 \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 \le 80 \quad (2)$$
$$x_1 \le 40 \quad (3)$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

Optimális megoldás:

$$x_1 = 20$$
$$x_2 = 60$$
$$z = 180$$

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Definíciók I.

- **Lehetséges megoldások halmaza:** az összes olyan pontok halmaza, amelyek kielégítik a lineáris programozási feladat valamennyi feltételét és az összes előjelkorlátozást.
- **Optimális megoldás:**
  - **Maximalizálási problémában:** olyan pont a lehetséges megoldások halmazában, amelyikhez a legnagyobb célfüggvényérték tartozik.
  - **Minimalizálási problémában:** olyan pont a lehetséges megoldások halmazában, amelyikhez a legkisebb célfüggvényérték tartozik

Smahó Melinda

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Definíciók II.

- **Maximum feladat:** olyan lineáris programozási feladat, amelyben a feltételek $\leq$ értelműek és a célfüggvény maximuma jelenti az optimumot.
- **Minimum feladat:** olyan lineáris programozási feladat, amelyben a feltételek $\geq$ értelműek és a célfüggvény minimuma jelenti az optimumot.

Smahó Melinda

Minimumfeladat

Egy állattartó telepen az állatok etetésére kétfajta (A és B jelű) tápot használnak. A tápok 4 fajta alapanyagot (vitamin, búza, lucerna, kukorica) tartalmaznak a táblázatban szereplő megoszlásban:

A táp összetétele: 1 kg = 0,2 kg vitamin + 0,1 kg lucerna + 0,7 kg kukorica

B táp összetétele: 1 kg = 0,2 kg búza + 0,2 kg lucerna + 0,6 kg kukorica

Az állatorvos szerint egy állatnak naponta legalább 5,8 kg tápot kell megennie az előírt összetételben.

	A táp	B táp	Előírt menny
Vitamin	0,2 kg	0 kg	0,2 kg
Búza	0 kg	0,2 kg	0,4 kg
Lucerna	0,1 kg	0,2 kg	1,0 kg
Kukorica	0,7 kg	0,6 kg	4,2 kg
1 kg költsége	30 Ft/kg	40 Ft/kg	5,8 kg

Feladat: Határozzuk meg a gazdaságos tápanyag összetételét, ha ismertek az egyes összetevők előírt mennyiségei és az A, illetve a B jelű táp kilogrammonkénti költségei. (Raffai, 101. o.)

Smahó Melinda

Minimumfeladat matematikai modellje

x_1= az A tápból szükséges mennyiség (a keverék előállításához)

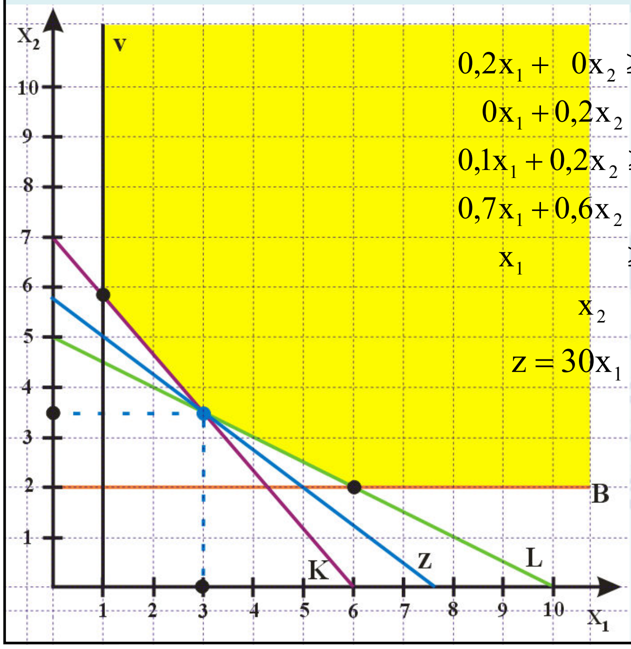
x_2 = a B tápból szükséges mennyiség (a keverék előállításához)

$$0{,}2x_1 + 0x_2 \geq 0{,}2 \quad \text{(vitamin)}$$
$$0x_1 + 0{,}2x_2 \geq 0{,}4 \quad \text{(búza)}$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \geq 1{,}0 \quad \text{(lucerna)}$$
$$0{,}7x_1 + 0{,}6x_2 \geq 4{,}2 \quad \text{(kukorica)}$$
$$x_1 \geq 0 \quad \text{(nemnegativitási feltétel)}$$
$$x_2 \geq 0 \quad \text{(nemnegativitási feltétel)}$$

$$z = 30x_1 + 40x_2 \to \min$$

Smahó Melinda

Minimumfeladat grafikus megoldása



$$
\begin{aligned}
0{,}2x_1 + 0x_2 &\geq 0{,}2 && \text{(V)}\\
0x_1 + 0{,}2x_2 &\geq 0{,}4 && \text{(B)}\\
0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 &\geq 1{,}0 && \text{(L)}\\
0{,}7x_1 + 0{,}6x_2 &\geq 4{,}2 && \text{(K)}\\
x_1 &\geq 0 && \text{(nemn. felt.)}\\
x_2 &\geq 0 && \text{(nemn. felt.)}
\end{aligned}
$$

$$z = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow \min$$

Optimális megoldás:

$\mathbf{x_1 = 3}$

$\mathbf{x_2 = 3{,}5}$

z= 230

Smahó Melinda

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Speciális esetek

- *Alternatív optimum*
- *Nem megoldható lineáris programozási feladat*
- *A célfüggvény nem korlátos*

Smahó Melinda

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Alternatív optimum

Egy autógyár személyautókat és teherautókat gyárt. A gyártás során minden egyes járműnek végig kell mennie a festőműhelyen és a karosszéria összeszerelő műhelyen. Ha a festőműhely csak teherautókat festene, naponta 40 darabot tudna lefesteni. Ha a festőműhely csak személyautókat festene, naponta 60 darabot tudna elkészíteni. Ha a karosszériaműhely csak személyautókat állítana össze, naponta 50 db-ot tudna megcsinálni, míg ha csak teherautókkal foglalkozna, akkor naponta 50 db-ot tudna elkészíteni. Minden teherautó 300 dollárral és minden személyautó 200 dollárral járul hozzá a profithoz. Alkalmazzuk a lineáris programozást a napi termelési terv meghatározásához úgy, hogy a vállalat profitja maximális legyen! (Winston, 68.o.)

Smahó Melinda

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Alternatív optimum

x_1= a naponta gyártott teherautók száma

x_2 = a naponta gyártott személyautók száma

Matematikai modell:

$$\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \le 1 \qquad \text{(festőműhely felt.)}$$

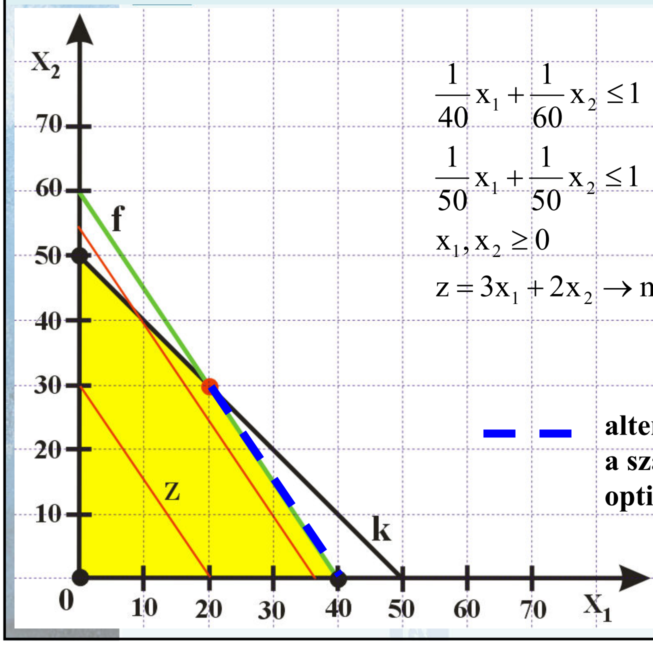
$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \le 1 \qquad \text{(karosszériaműhely felt.)}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max \quad \text{(száz dollárban)}$$

Smahó Melinda

Alternatív optimum



$$\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \le 1 \qquad \text{(f)}$$

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \le 1 \qquad \text{(k)}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max \quad \text{(száz dollárban)}$$

alternatív optimum, a szakasz minden pontja optimális

Smahó Melinda

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Nem megoldható lineáris programozási feladat

Az autókereskedők azt szeretnék, hogy az autógyár naponta legalább 30 teherautót és 20 személyautót gyártson.

$$\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \le 1$$

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \le 1$$

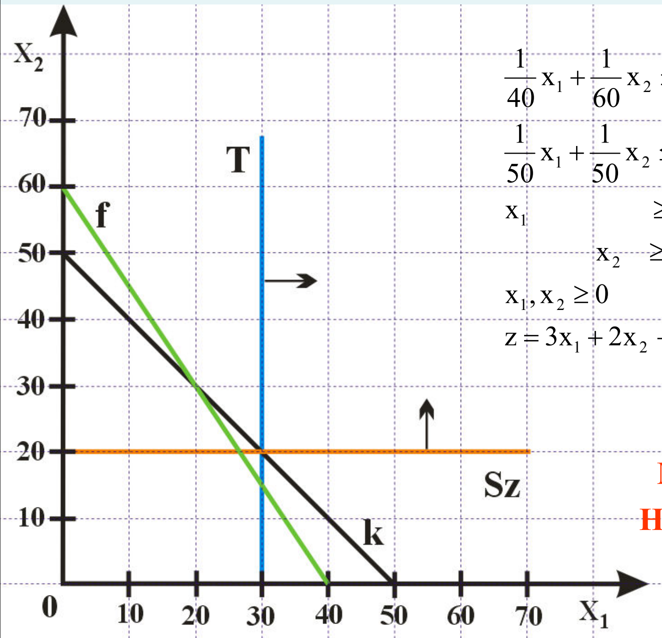
$$\boxed{\begin{array}{lll} x_1 & & \ge 30 \\ & x_2 & \ge 20 \end{array}}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max \quad \text{(száz dollárban)}$$

Smahó Melinda

Nem megoldható lineáris programozási feladat



$$\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \le 1 \quad \text{(f)}$$

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \le 1 \quad \text{(k)}$$

$$x_1 \ge 30 \quad \text{(t)}$$

$$x_2 \ge 20 \quad \text{(sz)}$$

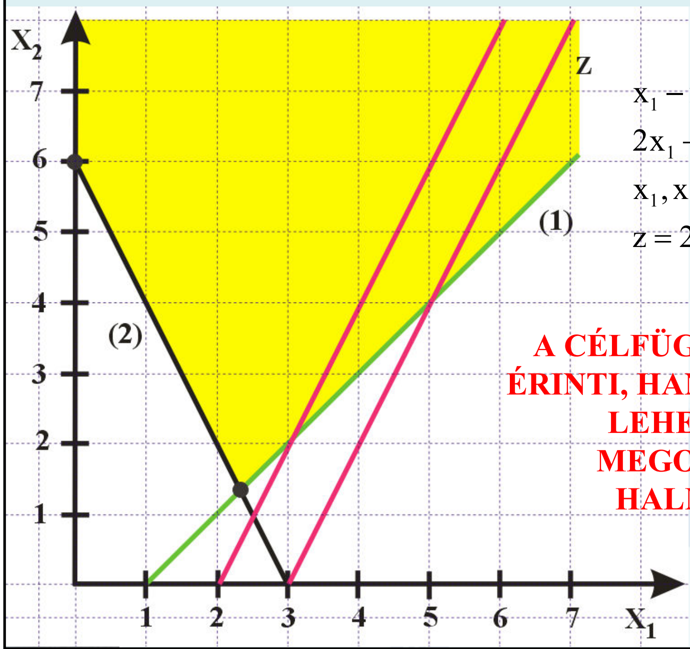
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max \quad \text{(száz dollárban)}$$

LEHETSÉGES MEGOLDÁSOK HALMAZA ÜRES!

Smahó Melinda

A célfüggvény nem korlátos



$$x_1 - x_2 \le 1 \qquad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \ge 6 \qquad (2)$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$z = 2x_1 - x_2 \to \max$$

A CÉLFÜGGVÉNY NEM ÉRINTI, HANEM METSZI A LEHETSÉGES MEGOLDÁSOK HALMAZÁT!

Smahó Melinda

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

A célfüggvény nem korlátos

- **Maximum feladat esetén:** a lehetséges megoldások halmazában találhatók olyan pontok, amelyekhez tetszőlegesen nagy z értékek tartoznak *(növekvő z irányába haladva sosem hagyjuk el a lehetséges megoldások halmazát)*.

- **Minimum feladat esetén:** a lehetséges megoldások halmazában találhatók olyan pontok, amelyekhez tetszőlegesen kicsi z érték tartozik *(csökkenő z irányába haladva sosem hagyjuk el a lehetséges megoldások halmazát)*.

Smahó Melinda

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Lineáris programozási feladatok típusai és matematikai modelljei

Smahó Melinda

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Maximum feladat

Maximum feladat: olyan lineáris programozási feladat, amelyben a feltételek ≤ értelműek és a célfüggvény maximuma jelenti az optimumot.

Alapforma

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$A \cdot \underline{x} \leq \underline{b}$$
$$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max$$

Kanonikus forma

$$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{u} \geq \underline{0}$$
$$A \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}$$
$$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max$$

hiányváltozó

Smahó Melinda

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Minimum feladat

Minimum feladat: olyan lineáris programozási feladat, amelyben a feltételek ≥ értelműek és a célfüggvény minimuma jelenti az optimumot.

Alapforma

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$A \cdot \underline{x} \geq \underline{b}$$
$$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \min$$

Kanonikus forma

$$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0}$$
$$A \cdot \underline{x} - \underline{v} = \underline{b}$$
$$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \min$$

többletváltozó

Smahó Melinda

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Normál feladat

Normál feladat: olyan maximumfeladat, amelynél a $\underline{\mathbf{b}} \geq \underline{\mathbf{0}}$ feltétel is teljesül

Alapforma

$$\underline{x} \geq \underline{0}\,,\ \underline{b} \geq \underline{0}$$
$$A \cdot \underline{x} \leq \underline{b}$$
$$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max$$

Kanonikus forma

$$\underline{x} \geq \underline{0}\,,\ \underline{u} \geq \underline{0}\,,\ b \geq \underline{0}$$
$$A \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}$$
$$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max$$

Smahó Melinda

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Módosított normál feladat

- **Módosított normál feladat:** olyan lineáris programozási feladat, amelynek egyenlőtlenségei $\leq$ értelműek, tartalmaz egyenleteket és a célfüggvény maximumát keressük, továbbá $\underline{\mathbf{b}}_1$ és $\underline{\mathbf{b}}_2$ vektorok minden koordinátája nemnegatív

Alapforma

$$\underline{x} \geq \underline{0}\,,\ \underline{b}_1 \geq \underline{0}\,,\ \underline{b}_2 \geq \underline{0}$$
$$A_1 \cdot \underline{x} \leq \underline{b}_1$$
$$A_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2$$
$$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max$$

Kanonikus forma

$$\underline{x} \geq \underline{0}\,,\ \underline{u} \geq \underline{0},\ \underline{b}_1 \geq \underline{0}\,,\ \underline{b}_2 \geq \underline{0}$$
$$A_1 \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}_1$$
$$A_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2$$
$$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max$$

Smahó Melinda

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Általános feladat

Általános feladat: olyan lineáris programozási feladat, amelynek feltételei között a kapacitások (**b**) nemnegativitása mellett ≥ relációk is szerepelnek és maximum a cél

Alapforma

$\underline{x} \geq \underline{0}$

$A_1 \cdot \underline{x} \leq \underline{b}_1 \quad \underline{b}_1 \geq \underline{0},$

$A_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2 \quad \underline{b}_2 \geq \underline{0}$

$A_3 \cdot \underline{x} \geq \underline{b}_3 \quad \underline{b}_3 \geq \underline{0}$

$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to \max$

Kanonikus forma

$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{u} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0}$

$A_1 \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}_1 \quad \underline{b}_1 \geq \underline{0},$

$A_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2 \quad \underline{b}_2 \geq \underline{0}$

$A_3 \cdot \underline{x} - \underline{v} = \underline{b}_3 \quad \underline{b}_3 \geq \underline{0}$

$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to \max$

Smahó Melinda

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
JOG- ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Köszönöm a figyelmet!

Smahó Melinda