Értékünk az ember

Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Program

Ferenczi Zoltán

OPERÁCIÓKUTATÁS

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
GYŐR

Magyarország célba ér

NEMZETI FEJLESZTÉSI TERV

Készült a HEFOP 3.3.1-P.-2004-09-0102/1.0 pályázat támogatásával.

Szerző: dr. Ferenczi Zoltán
egyetemi docens

Lektor: dr. Hajdu Ottó CSc
egyetemi docens

© Ferenczi Zoltán, 2006

A dokumentum használata

Mozgás a dokumentumban

A dokumentumban való mozgáshoz a Windows és az Adobe Reader megszokott elemeit és módszereit használhatjuk.

Minden lap tetején és alján egy navigációs sor található, itt a megfelelő hivatkozásra kattintva ugorhatunk a használati útmutatóra, a tartalomjegyzékre, valamint a tárgymutatóra. A ◀ és a ▶ nyilakkal az előző és a következő oldalra léphetünk át, míg a Vissza mező az utoljára megnézett oldalra visz vissza bennünket.

Pozícionálás a könyvjelzőablak segítségével

A bal oldali könyvjelző ablakban tartalomjegyzékfa található, amelynek bejegyzéseire kattintva az adott fejezet/alfejezet első oldalára jutunk. Az aktuális pozíciónkat a tartalomjegyzékfában kiemelt bejegyzés mutatja.

A tartalomjegyzék használata

Ugrás megadott helyre a tartalomjegyzék segítségével

Kattintsunk a tartalomjegyzék megfelelő pontjára, ezzel az adott fejezet első oldalára jutunk.

Keresés a szövegben

A dokumentumban való kereséshez használjuk megszokott módon a Szerkesztés menü Keresés parancsát. Az Adobe Reader az adott pozíciótól kezdve keres a szövegben.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az operációkutatás, mint fogalom a második világháború alatt alakult ki. A szövetségesek vezérkarainál szerveztek először olyan különböző szakmájú emberekből álló kutatócsoportokat, amelyeknek az volt a feladatuk, hogy tudományos eszközök segítségével javaslatokat dolgozzanak ki különböző hadműveleti döntések megalapozásához. Innen ered az elnevezése is: az operáció szó alapjelentése katonai művelet, hadművelet. Ezen tevékenység legfontosabb tanulsága az volt, hogy a problémák összetettsége, az ismeretlenek nagy száma, az egymásra ható tényezők közötti összefüggések bonyolultsága miatt nagy jelentősége van a team munkának és a problémák matematikai eszközökkel való megközelítésének.

Amikor az emberek a társadalmi-gazdasági élet problémái felé fordultak, természetes volt e bonyolult problémák megközelítése matematikai módszerekkel.

A gazdasági rendszerekkel kapcsolatos döntések előkészítésében a kvantitatív matematikai módszerek dominálnak. Ezen módszerek gazdasági alkalmazásának három irányzatát különböztetjük meg:

Ökonometria az a tudományos irányzat, amely a közgazdasági elmélet által megállapított törvényszerűségeket múltbeli tényadatok alapján és matematikai statisztikai módszerek felhasználásával számszerűsíti. Jellemző eszközei az ágazati kapcsolati elemzések, többváltozós összefüggés-vizsgálatok és az idősorok analízise.

Operációkutatás szűkebb értelemben olyan tudományos módszer, amely a döntések előkészítéséhez, a gazdasági optimum meghatározásához többnyire valamilyen matematikai szélsőérték feladatot alkalmaz. Jellemző eszközei a lineáris és nemlineáris programozási modellek, készletgazdasági modellek és a hálótervezés.

Kibernetika olyan tudományos irányzat, amely a bonyolult rendszerek felépítését és működését, valamint a rendszerek szabályozását és vezérlését tanulmányozza. Jellegzetes eszközei közé tartozik a számítógépes szimuláció.

Az ökonometria, az operációkutatás, a gazdaságirendszer-szimuláció a gazdasági modellezés tudományágait alkotják.

Befejezésül lássuk a két leggyakrabban idézett operációkutatási meghatározást:

Az egyik az angol operációkutatási társaság meghatározása (BEER, 1966): „Az operációkutatás tudományos módszerek alkalmazása az iparban, kereskedelemben, államigazgatásban és a honvédelemben olyan komplex problémák megoldására, amelyek emberekből, gépekből, anyagokból és pénzeszközökből álló nagy rendszerek irányításában és vezetésében lépnek fel.

A másik (HOWITZ, 1966): „Az operációkutatás a tudomány azon területe, amely az optimális döntések komplex előkészítésével és a döntési változatok legjobb realizálási módjának meghatározásával foglalkozik, főként gazdasági, szociológiai, műszaki és katonai területen, elsősorban matematikai modelleket használ fel és szoros kapcsolatban áll az elektronikus adatfeldolgozással”.

Az operációkutatással foglalkozó gazdasági szakember tevékenységének egyik fontos jellemzője az optimális döntések elősegítése. Az üzleti gyakorlatban gyakran a vállalatvezetés a döntéshozatalkor egy-egy fix gazdasági tényadatot használ fel, és nem gondol arra, hogy a jelenségek összefüggenek. E mondandó megvilágítására nézzük a következő esetet. Az üzletemberek gyakran végeznek piackutatást, hogy megbecsüljék, mennyit tudnak a gyártott termékeikből a jövőben eladni. A „piackutatás”-nak nevezett adatok alapján döntenek arról, hogy mennyi nyersanyagot vegyenek, hány munkást foglalkoztassanak stb.

Az operációkutatásnak más a gondolkodásmódja. Abból indulunk ki, hogy a vásárlók nem fix mennyiséget „akarnak megvásárolni”, hanem az értékesített mennyiség függ az ártól, a reklámkiadásoktól és más tényezőktől, amelyeket az üzletember befolyásolhat. Ez a gondolkodásmód feltételezi, hogy például a reklámköltség, a termék ára és minősége visszahatnak az értékesített mennyiségre.

Az optimalitást kereső üzletember (döntéshozó, operációkutató) nemcsak egyetlen lehetőséget, döntést vizsgál meg, mintha ez volna az egyetlen lehetséges választási lehetősége. Általában is igaz, hogy az üzletember előtt több lehetőség áll és ezek közül vannak olyanok, amely a céljai elérésére jobbak a többinél. Ezeket nevezzük optimális megoldásoknak. Így az üzletember költhet kevesebbet vagy többet a termék reklámozására, növelheti vagy csökkentheti készletei mennyiségét és a termék árát, növelheti a termék minőségét. Az operációkutató arra tud tanácsot adni, hogy a döntések melyik együttese közelíti meg az üzletember célját (céljait), vagyis mely döntések a legjobbak a cél elérése érdekében vagy másképpen szólva mely megoldások optimálisak.

Nem azt állítjuk az alkalmazott operációkutatási munkában, hogy meg tudjuk találni a lehető legjobb döntési változatokat, hiszen a rendelkezésre álló adatok korlátozottak és általában pontatlanok (hibával terheltek), az elemzési eszközök túlságosan bonyolultak, nehézkesek, továbbá az operációkutató tájékozottsága a vállalat működéséről általában nem kielégítő. Ezzel együtt azt állítjuk, hogy az operációkutatási módszerek következetes alkalmazása nagy valószínűséggel jobb eredményeket adnak, mint a kapcsolatokat nem feltáró tapasztalati szabályok.

A piacgazdaságban a verseny rövid idő alatt megsemmisítheti azokat a vállalatokat, amelyeknél a döntéselőkészítés hiányában vagy hibás célok kitűzése miatt a döntések rendszeresen rosszak és megerősödhetnek azok a vállalatok, amelyek optimális megoldásokhoz közeli döntési változatokat részesítik előnyben.

Modellezés és a modell

Az operációkutatás a gazdasági valóság lényegét, annak mennyiségi és minőségi összefüggéseit elsősorban matematikai modellek segítségével vizsgálja.

Definíció: A ***modell*** az objektív valóságnak az ember által alkotott leegyszerűsített képe. A leegyszerűsítés a lényeg megragadását és kiemelését szolgálja. A modell így a vizsgált objektum legfontosabb alkotórészeit, tulajdonságait, kapcsolatait tartalmazza.

A ***modellezés*** a következő lépésekre osztható:

- a probléma megfogalmazása,
- a matematikai modell és módszer kiválasztása,
- a modell paramétereinek (változóinak, konstansainak) meghatározása,
- a modell számszerű felírása,
- a modell megoldása,
- a megoldás gyakorlatban való megvalósítása,
- a szükséges korrekció elvégzése.

A *probléma megfogalmazása* azt jelenti, hogy a szóban forgó rendszert alaposan tanulmányozzák az operációkutatás részvevői és e végén a probléma jól meghatározott megfogalmazását adják. Ez a folyamat magába foglalja a gazdasági célok, a betartandó kényszerfeltételek, a vállalat vagy intézmény vizsgálandó területei közötti kapcsolatok, a lehetséges cselekvéssorozatok stb. meghatározását. Ez a folyamat döntő, mert nagymértékben befolyásolja a lényeg megragadását. Ebben a fázisban az operációkutatók megkeresik a vizsgált rendszer legfontosabb alkotórészeit, tulajdonságait és kapcsolatait. A probléma verbális megfogalmazását – a hagyományos operációkutatási megközelítés szerint – olyan matematikai modell megalkotása követi, amely a probléma lényegét tükrözi.

Definíció: A matematikai modellek idealizált reprezentációk, amelyek matematikai jelekkel és szimbólumokkal vannak kifejezve. Egy üzleti probléma matematikai modellje az az egyenlet- és egyenlőtlenségrendszer és azok a kapcsolódó matematikai kifejezések, amelyek leírják a probléma lényegét.

Így, ha n tevékenységgel kapcsolatban döntést kell hozni, akkor ezeket a *tevékenységi vagy döntési változókkal* (mondjuk $x_1, x_2, \ldots, x_n$) reprezentáljuk és ezek értékét kell meghatároznunk. A tevékenység során előállított haszon mérőszámát a változók függvényeként fejezhetjük ki:

Például $z = 2x_1 + 5x_2 + \ldots + 7x_n$.

Ezt a függvényt *célfüggvénynek* nevezzük, mert a tevékenység célját fejezi ki. A döntési változókra és a felhasznált erőforrásokra vonatkozó kényszerfeltételek rendszerint egyenletek vagy egyenlőtlenségek segítségével írhatók le. Például $x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 10$.

A feltételekben és célfüggvényben szereplő állandókat (együtthatókat, a jobb oldal konstansait) a modell *paramétereinek* nevezzük.

A kérdés az, hogyan kell megválasztani a döntési változókat, hogy az adott feltételek mellett a célfüggvény értéke a lehető legnagyobb legyen.

Az ilyen jellegű modellek felállításával, megoldásával és elemzésével foglalkozik az operációkutatás.

Ezen jegyzet soron következő fejezetei az említett modellek jellegzetességeivel, megoldási algoritmusával és elemzésével foglalkozik.

A matematikai modellnek a probléma verbális leírásával szemben az az előnye, hogy

- a matematikai modell tömören írja le a problémát,
- könnyebb áttekinteni az ok-okozati összefüggéseket,
- egyidejűleg tudjuk kezelni az összes kapcsolatot,

- láthatóvá válik, hogy milyen további adatok kellenek az elemzéshez,
- könnyen módosítható,
- közvetlen lehetővé teszi a számítógépes programcsomagok használatát.

A *matematikai modellek és módszerek* kiválasztásakor célunk a valóságos összefüggések, törvényszerűségek legjobb megközelítése. Ezért jól kell ismerni az egyes matematikai modellek és módszerek jellemző tulajdonságait, valamint az alkalmazhatóság feltételeit, továbbá ismerni kell a vizsgálandó terület szakmai vetületeit.

Ebben a tananyagban csak bizonyos típusú gazdasági döntések előkészítésére alkalmas matematikai modellekről és módszerekről lesz szó. Azt vizsgáljuk meg, hogy hogyan lehet matematikai módszerekkel helyes gazdasági elhatározások meghozatalához, más néven jó gazdasági programok kidolgozásához hozzájutni.

2. Lineáris programozás

> „A különböző tudományok matematikai megfogalmazása annyira hasonlóak egymáshoz, hogy ismeretük az egyik tudományban igen nagy segítséget nyújthat egy másik tanulmányozásánál”
>
> J. C. Maxwell

2.1. Bevezetés a lineáris programozásba

Gazdasági rendszerek matematikai vizsgálatára már a 19-edik században tettek kísérletet. A francia Walras az egész gazdasági mechanizmust próbálta sok ismeretlenes lineáris egyenletrendszerrel leírni az 1870-es években. Nyomában sokan alkalmaztak lineáris modelleket. Neumann János 1937-ben kidolgozott gazdasági egyensúly-modellje már általánosabb alakban vizsgálta az amerikai gazdaságot, lényegében már a lineáris programozás keretei között.

Nagy előrelépést jelentett az orosz L. V. Kantorovics munkássága. „A termelés szervezésének és tervezésének matematikai módszerei” című 1939-ben megjelent művében leírta, hogy a legfontosabb termelési feladatok nagy része kifejezhető matematikai alakban. A problémák megoldása olyan matematikai szélsőérték feladatokhoz vezet, amelyek lineáris függvényekkel írhatók le. Ezen feladatok megoldására Kantorovics a megoldó együtthatók módszerét alkalmazta. Maga a feladattípus később – G. B. Dantzig eredményei alapján – lineáris programozás elnevezéssel vált közismertté. A munkássága elismeréseként L. V. Kantorovics 1975-ben T. C. Koapmans-sal együtt közgazdasági Nobel díjat kapott. A második világháború alatt az amerikai hadvezetés légi, vízi, szárazföldi szállítási, bombázási stb. feladatok tervezésére használta fel. Éppen ezért akkoriban nem hozták nyilvánossá a kutatások eredményeit. G. B. Dantzig 1947-ben dolgozta ki az ún. szimplex módszert, amely jól gépesíthető, ezért általánosan elterjedt. Ma már mindennapos eszköz, amely segítségével az ipari országok vállalatai sok pénzt takarítanak meg. Használata az élet különböző területén gyorsan terjedt. E témakörből több tucat könyv jelent meg. A számítógépek elterjedése tette lehetővé a mindennapi alkalmazásokat.

Mi is valójában a lineáris programozás?

A jegyzetben található példák és feladatok megoldása során választ kaphatunk erre a kérdésre, de röviden a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Korlátozottan rendelkezésre álló gazdasági erőforrások lehető legjobb (optimális) elosztása egymással versenyző tevékenységek között a minél nagyobb gazdasági haszon elérése érdekében.

A lineáris szó arra utal, hogy a modellben szereplő függvények mindegyike lineáris. A programozás szó itt nem a számítógépes programozásra utal, hanem inkább a tervezés szinonimájaként szerepel.

Ezt a fejezetet olyan szemléltető példákkal kezdjük, amelyek elég kis méretűek ahhoz, hogy grafikusan is szemléltetni tudjuk a megoldásokat, s így az alapvető fogalmakat is könnyebben érthetővé tehetünk.

2.2. Lineáris modellek grafikus megoldása

A probléma tárgyalásához induljunk ki kétváltozós feladatokból. Ezek a feladatok nagyon egyszerűek, s megoldásukhoz elegendőek a középiskolai matematikai ismeretek. A kétváltozós feladatok grafikus megoldása pedig lehetővé teszi a lineáris programozás hátterének szemléltetését.

2.2.1. Példa maximumfeladatra

A csökkenő bevételek miatt a *Ferenczy & Fia Műanyag Kft.* vezetése a termelési szerkezet átalakítása mellett döntött. Több veszteséges termék gyártását beszünteti és az így felszabadult három erőforrást két új termék gyártására kívánják fordítani. A marketing osztály véleménye szerint a cég mindkét termékből („bukó-nyíló” és „nyíló” ablakok) el tudna adni annyit, amennyit a jelenlegi kapacitás mellett meg tudnak termelni.

A termelés három műhelyben folyik. Az 1. műhelyben az ablakkeretek öntése folyik, naponta 160 kg műanyagot tudnak felhasználni. A 2. műhelyben az ablakok szerelését és üvegezését végzik, naponta 120 munkaóra áll rendelkezésre. A 3. üzemben a „bukó-nyíló” ablakok további szerelését végzik. Itt a speciális zárszerkezetből naponta 60 db tudnak beszerelni.

Kérdés az, milyen mennyiségben gyártsák a két új terméket, hogy a profit a lehető legnagyobb legyen?

Az operációkutatási osztály megvizsgálva a termékek technológiai tervét látta, hogy – a termelés modelljének felírásához – a termelés folyamatát három mozzanatra „egyszerűsítheti”, azaz három erőforrás felhasználásával írhatja le a gazdasági tevékenységét:

- a termékek öntését műanyagból (napi 160 kg).
- a termékek összeszerelése (napi 120 munkaóra).
- A bukó-nyíló ablak további szerelése, speciális zárszerkezet szerelése (napi 60 db).

Továbbá ismert, hogy az első termék egy darabjának előállításához 2 kg műanyag, 3 munkaóra a szereléshez és az üvegezéshez valamint 2 db speciális zárszerkezet kell, a 2. termékhez pedig 4 kg műanyag, 2 munkaóra kell, de nincs szükség speciális zárszerkezetre. Az első termék 1 egységének termelése 60 ezer Ft, a második termék pedig 80 ezer Ft árbevétel realizálását teszi lehetővé.

Meghatározandó, hogy a kétféle terméket hány egységben célszerű termelni, hogy a lehető legnagyobb (maximális) legyen az árbevétel!

Írjuk fel a fenti szöveges feladat matematikai modelljét!

Jelölje x_1 a bukó-nyíló, illetve x_2 a másik ablak egyenlőre ismeretlen mennyiségét. Tehát x_1 és x_2 a modell döntési változója. Ekkor a célfüggvény így írható fel:

$z = 60\,x_1 + 80\,x_2$ és ennek keressük a maximumát.

A termeléshez szükséges erőforrások pedig:

Az első erőforrásból $2x_1 + 4x_2$ kg, a második erőforrásból $3x_1 + 2x_2$ munkaóra és a harmadik erőforrásból $2x_1$ db szükséges.

Így a feladat feltételeit és célfüggvényét a következőkben foglalhatjuk össze:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & x_1, & & x_2 \geq 0 \\
\text{b)} & 2x_1 & + & 4x_2 \leq 160 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 \leq 120 \\
 & 2x_1 & & \leq 60 \\
\text{c)} & z = 60x_1 & + & 80x_2 \rightarrow \text{maximum}
\end{array}
$$

(Mivel a feladat kétváltozós, ezért az x_1, x_2 tengelyű derékszögű koordinátarendszerben vizsgálhatjuk a feltételeknek megfelelő pontok halmazát.

Az a) feltétel a koordinátarendszer első negyedére, tehát a pozitív féltengelyek által határolt síknegyedre korlátozza a megoldási halmazt.

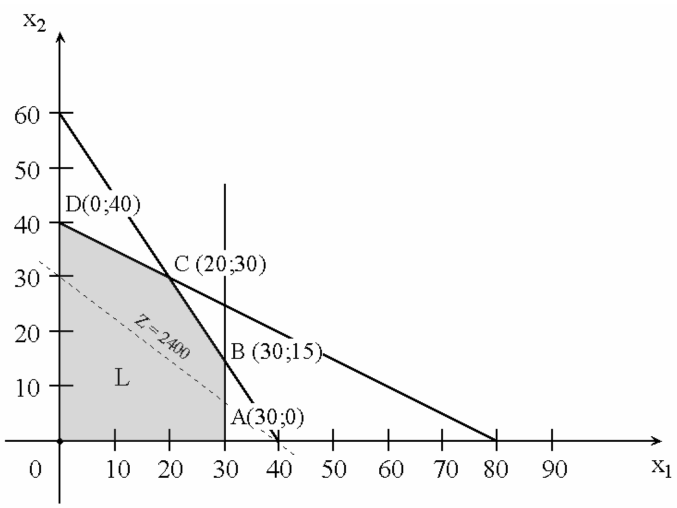
A b) feltétel egyenlőtlenségeinek mindegyike egy-egy egyenes és az alatta levő terület pontjait határozza meg.

A c) feltételben szereplő z függvényt célfüggvénynek nevezzük. A feladatban a célfüggvény maximuma – ha az létezik – adja az optimális megoldást (vagy megoldásokat).

Ábrázoljuk a koordinátarendszerben az egyeneseket. (1.2.1.1 ábra)

Az egyenlőtlenség feltételnek az egyenes és az „alatta" lévő pontok felelnek meg.

A lehetséges megoldások **L** halmazát a bevonalkázott OABCD sokszög belső- és határpontjai adják, mert ezek eleget tesznek mind az a) mind a b) feltételeknek. Ebből a zárt területből kell kiválasztani azt a pontot (vagy pontokat), amelyeknek x_1, x_2 koordinátái az optimális termékösszetételt adják, tehát amelyeket a z célfüggvénybe helyettesítve annak maximumát kapjuk.



1.2.1.1 ábra

Vizsgáljuk meg a célfüggvényt.

Rendezzük át $x_2 = -\frac{60}{80}x_1 + \frac{z}{80}$ alakba, így könnyen látható, hogy a z függvény egy $-60/80$ iránytangensű egyenes-sereget határoz meg, ha z-nek különböző értéket adunk.

Legyen z = 2400. (Ez a függvény látható az ábrán). Ezt az egyenest önmagával párhuzamosan fölfelé eltoljuk, akkor az L olyan pontjain megy keresztül, amelynél a z értéke növekszik. Tehát a z maximumát az L halmaz legszélső pontján veszi fel. Ez a pont egy csúcspont. A C pont koordinátái adják tehát az optimális megoldást.

Az elmondottakról győződjünk meg a csúcspontok koordinátáinak ismeretében. A pontok koordinátái egy-egy termékösszetételt adnak.

O(0;0) pont		Fel nem használt kapacitás
$x_1 = 0$	$2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \le 1$	$u_1 = 160$
$x_2 = 0$	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \le 1$	$u_2 = 120$
	$2 \cdot 0 \quad \le$	$u_3 = 60$
	$z = 60 \cdot 0 + 80 \cdot 0 =$	
A(30;0) pont		
$x_1 = 30$	$2 \cdot 30 + 4 \cdot 0 \le 1$	$u_1 = 100$
$x_2 = 0$	$3 \cdot 30 + 2 \cdot 0 \le 1$	$u_2 = 30$
	$2 \cdot 30 \quad =$	$u_3 = 0$
	$z = 60 \cdot 30 + 80 \cdot 0 = 1800$	
B(30;15) pont		
$x_1 = 30$	$2 \cdot 30 + 4 \cdot 15 \le 1$	$u_1 = 40$
$x_2 = 15$	$3 \cdot 30 + 2 \cdot 15 = 1$	$u_2 = 0$
	$2 \cdot 30 \quad =$	$u_3 = 0$
	$z = 60 \cdot 30 + 80 \cdot 15 = 3000$	
C(20;30) pont		
$x_1 = 20$	$2 \cdot 20 + 4 \cdot 30 = 1$	$u_1 = 0$
$x_2 = 30$	$3 \cdot 20 + 2 \cdot 30 = 1$	$u_2 = 0$
	$2 \cdot 20 \quad \le$	$u_3 = 20$
	$z = 60 \cdot 20 + 80 \cdot 30 = 3600$	
D(0;40) pont		
$x_1 = 0$	$2 \cdot 0 + 4 \cdot 40 = 1$	$u_1 = 0$
$x_2 = 40$	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 40 \le 1$	$u_2 = 40$
	$2 \cdot 0 \quad \le$	$u_3 = 60$
	$z = 60 \cdot 0 + 80 \cdot 40 = 3200$	

Számítással is meggyőződhettünk arról, hogy C pont az optimális megoldás.

2.2.2. Példa minimumfeladatra

Tegyük fel, hogy egy gazdaságban bizonyos állatok takarmányozási előírása szerint egy-egy állatnak az A tápanyagból legalább 36, a B-ből legalább 8, a C-ből pedig legalább 12 egységet kell kapnia naponta. Az etetésre két különböző takarmány áll a gazdaság rendelkezésére. Ezeknek egy-egy súlyegysége az egyes tápanyagból a következő táblázatban feltüntetett mennyiségeket tartalmazza:

Tápanyag	I. takarmány (g/kg)	II. takarmány (g/kg)
A	12	2
B	1	1
C	1	3

A kérdéses takarmányfajták fajlagos önköltsége 40, illetve 80 pénzegység. Határozzuk meg azt a programot, amelynél az önköltség minimális értéket veszi fel.

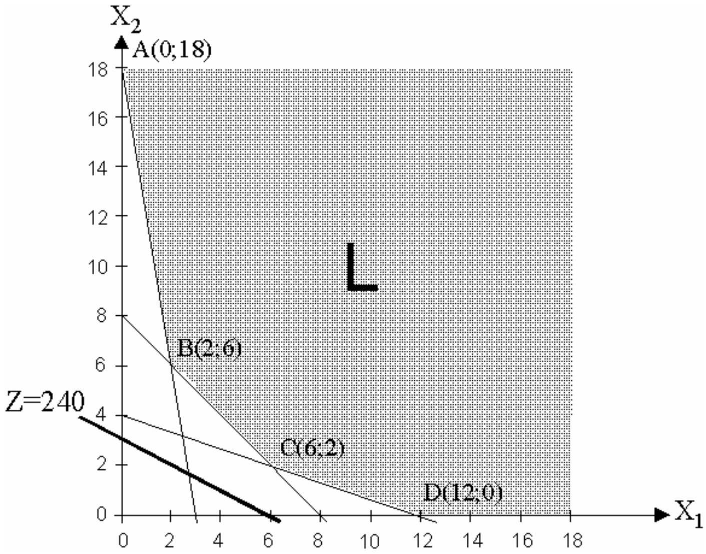
Ha az első takarmányból felhasznált mennyiséget x_1-gyel, a másodikból felhasználtat pedig x_2-vel jelöljük, akkor a megadott feltételeket így is felírhatjuk:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & x_1, & x_2 \geq & 0 \\
\text{b)} & 12x_1 + & 2x_2 \geq & 36 \\
 & x_1 + & x_2 \geq & 8 \\
 & x_1 + & 3x_2 \geq & 12 \\
\text{c)} & \multicolumn{3}{l}{z = 40x_1 + 80x_2 \rightarrow \text{minimum}}
\end{array}
$$

Az a), b) feltételeknek eleget tevő lehetséges takarmányozási programok L halmazát a 1.2.2.1 ábra mutatja.

A c)-t átrendezve $x_2 = -\frac{40}{80}x_1 + \frac{z}{80}$ kapjuk.

Látjuk, hogy egy − 40/80 meredekségű görbesereget határoz meg. Ábrázoljuk a z = 240 esetben.



1.2.2.1. ábra

Ezt az egyenest önmagával párhuzamosan eltolva különböző z értékeket kapunk. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy az origótól való távolodáskor a z értéke növekszik, az origóhoz közeledve a z értéke csökken. Tehát a z minimumát az **L** halmaz egyik szélső pontján veszi fel. A feladatunk esetében ez a C pont. Tehát az optimális programot a C pont koordinátái adják meg.

Számítással is ellenőrizzük az elmondottakat.

A(0;18) pont

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & 12 \cdot 0 + 2 \cdot 18 = 36 \\ x_2 = 18 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 18 \geq 8 \\ & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 18 \geq 12 \\ \hline & z = 40 \cdot 0 + 80 \cdot 18 = 1440 \end{array}$$

B(2;6) pont

$$\begin{array}{ll} x_1 = 2 & 12 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 36 \\ x_2 = 6 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 8 \\ & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \geq 12 \\ \hline & z = 40 \cdot 2 + 80 \cdot 6 = 560 \end{array}$$

C(6;2) pont

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = 2$$

$$\begin{aligned} 12 \cdot 6 + 2 \cdot 2 &\geq 36 \\ 1 \cdot 6 + 1 \cdot 2 &= 8 \\ 1 \cdot 6 + 3 \cdot 2 &= 12 \\ \hline z = 40 \cdot 6 + 80 \cdot 2 &= 400 \end{aligned}$$

D(12;0) pont

$$x_1 = 12 \qquad x_2 = 0$$

$$\begin{aligned} 12 \cdot 12 + 2 \cdot 0 &\geq 36 \\ 1 \cdot 12 + 1 \cdot 0 &\geq 8 \\ 1 \cdot 12 + 3 \cdot 0 &= 12 \\ \hline z = 40 \cdot 12 + 80 \cdot 0 &= 480 \end{aligned}$$

Tehát valóban az L halmaz C csúcspontján legkisebb a z függvény értéke. Ha az **L** halmaz bármely más pontját vizsgáljuk, akkor annak koordinátái kielégítik az a) és b) feltételeket, de a z függvénybe helyettesítve a z = 400 minimumnál minden esetben nagyobb értéket kapunk.

2.2.3. Optimális megoldás vizsgálata

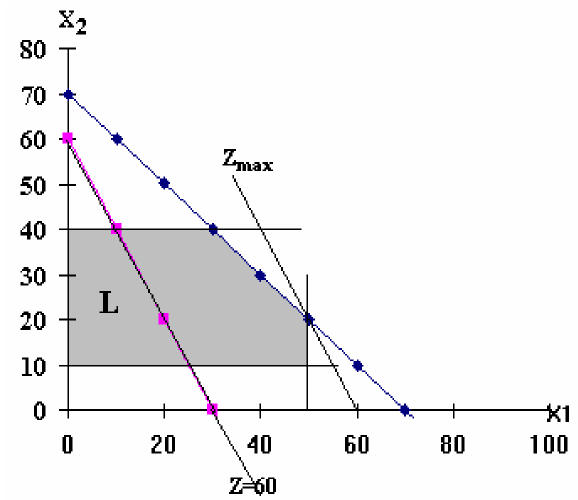
A gyakorlatban előfordulnak olyan feladatok is, amelyek az előbbiektől eltérő feltételekkel, így eltérő tulajdonságokkal is rendelkeznek. Vizsgáljunk meg néhány lehetséges esetet, mely jellemzi a z célfüggvény és az L halmaz viszonyát a síkon.

Egy optimális megoldás esete

Nézzük a következő feladatot:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & x_1,\ x_2 \geq 0 \\ \text{b)} & x_1 + x_2 \leq 70 \\ & x_1 \leq 50 \\ & x_2 \leq 40 \\ & x_2 \geq 10 \\ \text{c)} & z = 2x_1 + x_2 \to \text{maximum} \end{array}$$

Az **L** halmazon a z célfüggvény a maximumát csúcspontban veszi fel. Ebben az esetben a feladatnak egyetlen megoldása van.

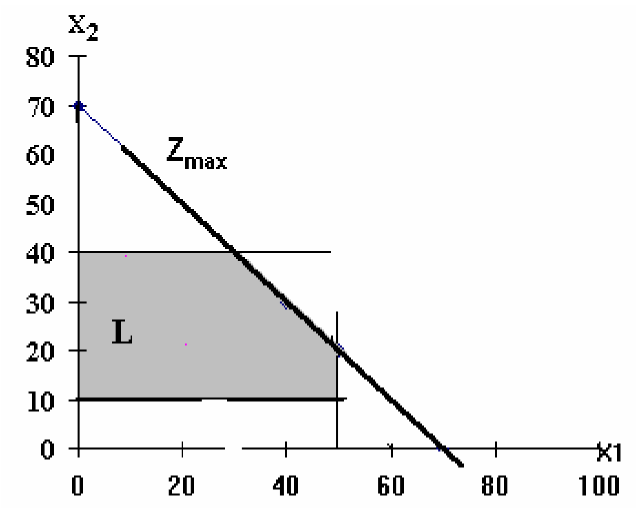


1.2.3.1 ábra

Alternatív optimum esete
Módosítsuk az előző feladat célfüggvényét

$$z = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{maximum -ra,}$$

azaz megváltoztattuk a célfüggvény meredekségét. Így párhuzamos lett az egyik oldallal.



1.2.3.2. ábra

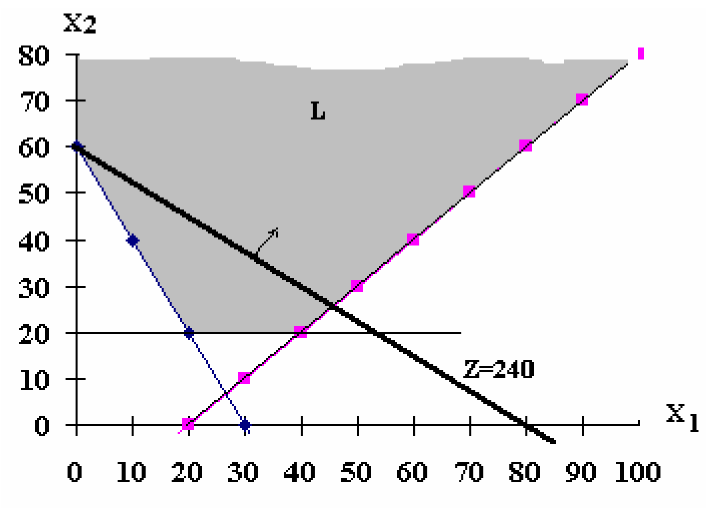
Ha egy maximum – vagy minimumfeladatnál – a célfüggvény párhuzamos a lehetséges megoldások halmazát határoló valamelyik egyenessel, akkor – mivel párhuzamos eltolás esetén az egész szakaszt lefedi – az optimális megoldást nem egy számpár (egy extremális pont), hanem egy szakasz (két extremális pontot összekötő szakasz) összes pontja adja. Ezt az esetet az „alternatív optimum" esetének nevezzük.

Célfüggvény nem korlátos

A feltételeink legyenek a következők:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & x_1, & x_2 \geq & 0 \\
\text{b)} & 2x_1 + & x_2 \geq & 60 \\
 & & x_2 \geq & 20 \\
 & x_1 - & x_2 \leq & 20 \\
\text{c)} & \multicolumn{3}{l}{z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.}
\end{array}
$$

Az L halmaz felülről nem korlátos. Ezért a célfüggvénynek nincs maximuma, hiszen a célfüggvény bármilyen értéket is felvehet az L halmazon, azaz a célfüggvény nem korlátos. Viszont jól látható, hogy ilyen megoldáshalmazon is értelmezhető a célfüggvény minimuma.



1.2.3.3 ábra

Ellentmondó feltételek esete
Adottak a következő feltételek:

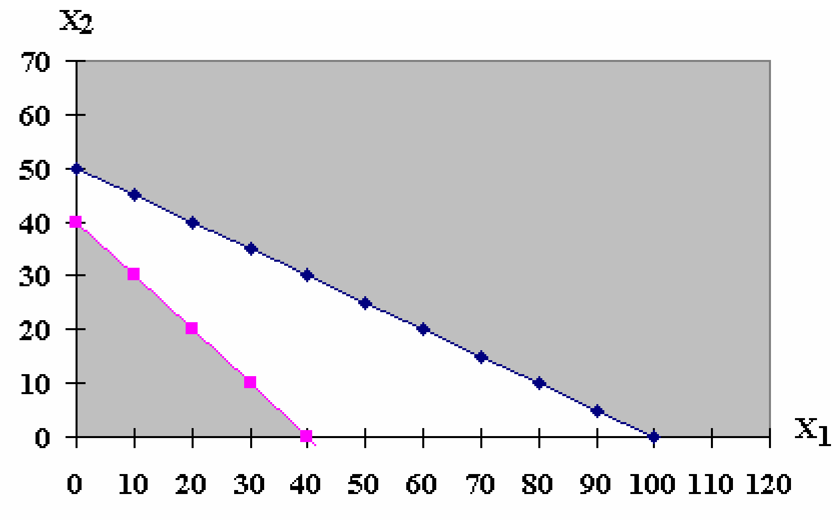
a) $x_1, \quad x_2 \geq 0$

b) $2x_1 + 4x_2 \geq 200$

$2x_1 + 2x_2 \leq 80$

c) $z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max.$

Az egyenlőtlenségek által meghatározott félsíkoknak nincs közös részük. Nincs egyetlen olyan pont sem, amely minden feltételnek eleget tenne. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az L halmaz üres, így a feladatnak nincs megoldása.



1.2.3.4 ábra

2.3. Lineáris programozási feladat általános megfogalmazása

Definíció: Olyan matematikai programozási feladatot nevezünk lineáris programozási feladatnak, amelyekben az *L* halmazt meghatározó feltételek első fokú egyenletek és egyenlőtlenségek, a célfüggvényük lineáris, és a bennük szereplő változók valós számértéket vehetnek fel.

Jelölje n egy gazdasági szervezet tevékenységeinek, m az erőforrásainak számát,

$x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ a tevékenységek terjedelmét, (melyek értelemszerűen csak nemnegatívak lehetnek),
$b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_m$ az erőforrások kapacitását,
a_{ij} a j-edik tevékenység fajlagos szükségletét az i-edik erőforrásból,
$c_1, c_2, \ldots, c_j, \ldots, c_n$ a tevékenységek fajlagos gazdasági eredményét,
akkor a gazdasági szervezet tevékenysége a következő modellel határozható meg: Az

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m
\end{aligned}
$$

feltételrendszer mellett keressük az

$$f(\underline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n$$

lineáris függvény, az ún. célfüggvény maximumát.

Vektor- és mátrixszimbólumokkal feladatunk sokkal tömörebben írható fel. Így megoldandó az

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \underline{x} \ge \underline{0}\\
&\text{b)} \quad A \cdot \underline{x} \le \underline{b} \text{ (vagy } =, \ge)\\
&\text{c)} \quad z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to \text{extrém}
\end{aligned}
$$

feladat.

A linearitás megkötése a gazdasági feladatok esetében elég szigorúnak látszik. A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy számos gazdasági probléma valóban leírható – a gyakorlatot kielégítő pontossággal – lineáris modellel.

2.4. Lineáris programozás matematikai modelljei

A 1.2. részben különböző gazdasági vonatkozású feladatokat oldottunk meg grafikus módszerrel. A feladatok megoldását az jelentette, hogy kiválasztottuk a lehetséges megoldások halmazából az optimális programot. A feladatok feltételeit minden esetben lineáris függvényekkel adtuk meg.

A gyakorlatban nemcsak két, hanem jóval több változót is tartalmazhatnak a feladatok és a feltételek száma is jóval nagyobb lehet. Ilyen esetben a grafikus módszer nem alkalmas a feladatok megoldására, más módszert kell alkalmaznunk. Ha a változók és a feltételek száma igen nagy, akkor csak számítógéppel érhetünk el eredményt. Mind a kézi, mind a számítógépi megoldáshoz az szükséges, hogy a feladatot megfelelő matematikai formába öntsük, tehát a gazdasági problémát átfogalmazzuk a matematika nyelvére. A gazdasági feladattól függően különböző matematikai modelleket fogalmazhatunk meg.

2.4.1. Maximumfeladat

Definíció: Maximumfeladatról akkor beszélünk, ha egyenlőtlenségei $\leq$ értelműek és a célfüggvény maximuma jelenti az optimumot.

	alapforma	kanonikus forma
a)	$\underline{x} \geq \underline{0}$	$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{u} \geq \underline{0}$
b)	$A \cdot \underline{x} \leq \underline{b}$	$A \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}$
c)	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max.$	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max.$

A kanonikus alak abban különbözik az alapfeladatokban megadott formákétól, hogy bevezeti az $\underline{u}$ ún. hiányváltozókat, melyeket duál változóknak is szokás nevezni.

2.4.2. Minimumfeladat

Definíció: Egy modellt akkor nevezünk minimumfeladatnak, ha egyenlőtlenségei $\geq$ értelműek és a célfüggvény minimuma jelenti az optimumot.

	alapforma	kanonikus forma
a)	$\underline{x} \geq \underline{0}$	$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0}$
b)	$A \cdot \underline{x} \geq \underline{b}$	$A \cdot \underline{x} - \underline{v} = \underline{b}$
c)	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \min.$	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \min.$

A $\underline{\mathbf{v}}$ változót *többletváltozónak* nevezzük.

2.4.3. Normálfeladat

Definíció: Egy maximumfeladatot normálfeladatnak nevezzük akkor, ha $\underline{b} \geq \underline{0}$ feltétel is teljesül.

	alapforma	kanonikus forma
a)	$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{b} \geq \underline{0}$	$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{u} \geq \underline{0}, \underline{b} \geq \underline{0}$
b)	$A \cdot \underline{x} \leq \underline{b}$	$A \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}$
c)	$\underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max.$	$\underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max.$

Példa:

a)	$x_1, \quad x_2 \geq 0$	$x_1, \quad x_2, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0$
b)	$4x_1 + 6x_2 \leq 60$	$4x_1 + 6x_2 + u_1 = 60$
	$x_1 \leq 9$	$x_1 + u_2 = 9$
	$3x_2 \leq 24$	$3x_2 + u_3 = 24$
c)	$z = 40x_1 + 20x_2 \to \max.$	$z = 40x_1 + 20x_2 \to \max.$

2.4.4. Módosított normálfeladat

Definíció: Egy modellt módosított normálfeladatnak nevezzük, ha egyenlőtlenségei $\leq$ értelműek, tartalmaz egyenleteket és célfüggvény maximumát keressük, továbbá a $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ vektorok minden koordinátája nemnegatív.

	alapforma	kanonikus forma
a)	$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{b}_1 \geq \underline{0}, \underline{b}_2 \geq \underline{0}$	$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{u} \geq \underline{0}, \underline{b}_1 \geq \underline{0}, \underline{b}_2 \geq \underline{0}$
b)	$A_1 \cdot \underline{x} \leq \underline{b}_1$	$A_1 \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}_1$
	$A_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2$	$A_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2$
c)	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to \max.$	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to \max.$

Például:

a)	$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq \underline{0}$	$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad u_1 \geq 0$
b)	$2x_1 - x_2 \leq 10$	$2x_1 - x_2 + u_1 = 10$
	$2x_1 + 2x_3 = 36$	$2x_1 + 2x_3 = 36$
	$x_2 - 2x_3 = 20$	$x_2 - 2x_3 = 20$
c)	$z = 6x_1 - 3x_2 + 15x_3 \to \max.$	$z = 6x_1 - 3x_2 + 15x_3 \to \max.$

2.4.5. Általános feladat

Definíció: Egy lineáris modellt általános feladatnak nevezünk, ha feltételei között a kapacitások *(b)* nemnegativitása mellett $\geq$ relációk is szerepelnek és maximum a cél

	alapforma	kanonikus forma
b)	$\underline{x} \geq \underline{0}$	$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{u} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0},$
	$A_1 \cdot \underline{x} \leq \underline{b}_1, \underline{b}_1 \geq \underline{0}$	$A_1 \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}_1 \geq \underline{0}$
	$A_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2 \geq \underline{0}$	$A_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2 \geq \underline{0}$
	$A_3 \cdot \underline{x} \geq \underline{b}_3 \geq \underline{0}$	$A_3 \cdot \underline{x} - \underline{v} = \underline{b}_3 \geq \underline{0}$
c)	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to \max.$	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to \max.$

Példa:

$$\begin{array}{llllll|lllllll}
\text{a)} & x_1, & x_2, & x & \geq & 0 & x_1, & x_2, & x_3, & u_1, & v & \geq & 0 \\
\text{b)} & & 5x_2 + & 5x & \leq & 80 & & 5x_2 + & 5x_3 + & u_1 & & = & 80 \\
 & -x_1 + & x_2 - & x & = & 10 & -x_1 + & x_2 + & x_3 & & & = & 10 \\
 & x_1 + & x_2 + & x & \geq & 18 & x_1 + & x_2 + & x_3 & & -v & = & 18 \\
\text{c)} & \multicolumn{5}{l|}{z = 10x_1 + 30x_2 + 10x_3 \to \max} & \multicolumn{7}{l}{z = 10x_1 + 30x_2 + 10x_3 \to \max}
\end{array}$$

Minden lineáris modell felírható normál, módosított normál, vagy általános feladatként.

2.5. Lineáris modellek megoldásának numerikus módszerei

2.5.1. Normálfeladat megoldása

Foglaljuk össze a vektor-, mátrixszimbólumokkal megadott

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & \underline{x} \geq \underline{0},\ \underline{b} \geq \underline{0} \\
\text{b)} & A \cdot \underline{x} \leq \underline{b} \\
\text{c)} & z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to \max.
\end{array}$$

normálfeladatról mondottakat.

Definíció: A feladat lehetséges megoldásainak nevezzük azokat az $\underline{x}$ vektorokat, amelyekre $A \cdot \underline{x} \leq \underline{b}$ *és* $\underline{x} \geq \underline{0}$ feltételek teljesülnek. Ezt a következőképpen írhatjuk le a halmazelmélet jeleivel:

$L = \{\underline{x} \,/\, A \cdot \underline{x} \leq \underline{b};\ \text{és}\ \underline{x} \geq \underline{0}\}$

Definíció: A feladat optimális megoldásának nevezzük az L-nek azon $\underline{x}_0$ vektorait, amelyekre $\underline{c}^T \cdot \underline{x}_0 \geq \underline{c}^T \cdot \underline{x},\ \forall \underline{x} \in L$ teljesül, *azaz*

$L_0 = \{\underline{x}_0 \,/\, \underline{x}_0 \in L\ \text{és}\ \underline{c}^T \underline{x}_0 \geq \underline{c}^T \underline{x},\ \forall x \in L\}$

Definíció: Bázismegoldásnak nevezünk minden olyan $\underline{x}_B$ vektort, amely eleme az L halmaznak és az A mátrixnak az $\underline{x}_B$ pozitív komponenseihez tartozó oszlopvektorai lineárisan független rendszert alkotnak.

Keressünk numerikus módszert az L_0 meghatározására:

A kétváltozós lineáris programozási feladatok grafikus megoldásánál azt tapasztaltuk, hogy a lehetséges megoldások halmaza mindig konvex halmaz volt, az optimális megoldást mindig az L határán találtuk (ha létezett). Sőt azt is tapasztaltuk, hogy mindig létezett optimális megoldás, ha az L halmaz konvex poliéder volt. Ebben az esetben az optimális megoldás az L halmaz valamelyik csúcspontján volt. Csak akkor nem volt optimális megoldás, ha az L halmaz üres volt, vagy pedig nem volt korlátos. Ezeket és a lineáris algebrából tanultakat figyelembe véve a többváltozós lineáris programozási feladatok numerikus megoldásánál következőkre támaszkodhatunk (felhasználva a lineáris algebra jelöléseit és fogalmait):

1. *Az* L *lehetséges megoldások halmaza konvex. Ezért: ha a* $z = \underline{c}^T \cdot \underline{x}$ *célfüggvény az* L *halmaz valamely* $\underline{x}_o$ *pontjában felveszi szélső értékét, akkor biztosan felveszi egy csúcspontjában is.*
2. *Az* L *halmaz csúcspontjait az* $A \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}$ *egyenletrendszer bázismegoldásaiból határozhatjuk meg az* $\underline{x} \geq \underline{0}$; $\underline{u} \geq \underline{0}$ *feltételek figyelembevételével.*

Ennek megfelelően alakítsuk át az 1.2.1. pontban tárgyalt maximumfeladatot:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + u_1 \qquad\quad &= 160 \\ 3x_1 + 2x_2 + \quad u_2 \quad &= 120 \\ 2x_1 + 0x_2 + \qquad u_3 &= \ \ 60 \end{aligned}$$

Oldjuk meg a lineáris algebrában tanult szimplex táblázat segítségével.

B_0	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	b
$\underline{e}_1$	2	4	1	0	0	160
$\underline{e}_2$	3	2	0	1	0	120
$\underline{e}_3$	2	0	0	0	1	60

Ha u_1, u_2 vagy u_3 oszlopában választunk generáló elemet, akkor u_1, u_2, u_3-hoz tartozó vektorok úgy kerülnek a bázisba, hogy a táblázat más elemei nem változnak meg (mert a generáló elem sorának és oszlopának minden eleme 0), azaz

	x_1	x_2	b
u_1	2	4	160
u_2	3	2	120
u_3	2	0	60

lesz. Ezért a normálfeladatok tárgyalásánál ezt tekintjük indulótáblázatnak. Ha további bázistranszformációkat hajtunk végre, akkor megkapjuk – a grafikus megoldásnál megismert – L lehetséges megoldások halmazának csúcspontjait. A célfüggvény értékének változásait is nyomon követhetjük, ha a táblázathoz hozzácsatoljuk az együtthatók sorvektorát és ezekre is elvégezzük az elemcserét.

Így kimondhatjuk:

3. *A normálfeladat indulótáblázatában, a* B_0 *bázisban az* $\underline{u}$ *duál változók szerepelnek. Így a normálfeladat induló* ***szimplex táblázata*** *a következő:*

B_0	$\underline{x}^T$	
$\underline{u}$	A	$\underline{b}$
z	$\underline{c}^T$	$\underline{0}$

ahol: $\underline{x}^T$ a primális változók sorvektora,
A az egyenlőtlenségrendszer együtthatóinak mátrixa,
$\underline{c}^T$ a célfüggvény együtthatóinak sorvektora,
$\underline{u}$ duális változók vektora,
$\underline{b}$ kapacitások vektora.

4. *A szimplex táblázatból a következők olvashatók ki:*
   a) A bázisban lévő változók értékei mindig az utolsó oszlopban olvashatók le.
   b) A bázisban nem lévő változók értékei nullák.
   c) A jobb alsó sarokban mindig a program célértékének -1*-szerese olvasható le.*
5. *A feladat bázismegoldásait oszlopvektor transzformációval állíthatjuk elő.*

Ezen ismeretek birtokában oldjuk meg 1.2.1 pontban leírt feladatot.

a) $\underline{x}_{1,} \quad x_2 \geq 0$

b)
$$2x_1 + 4x_2 \leq 160$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 120$$
$$2x_1 \leq 60$$

c) $z = 60x_1 + 80x_2 \rightarrow \max.$

Az induló szimplex táblázat:

B_0	x_1	x_2	$\underline{b}$
u_1	2	4	160
u_2	3	2	120
u_3	2	0	60
$-z$	60	80	0

Az indulótáblázatból egy lehetséges megoldás (program) olvasható le:

$$x_1 = 0 \qquad u_1 = 160$$
$$x_2 = 0 \qquad u_2 = 120 \qquad z = 0.$$
$$u_3 = 60$$

(grafikus megoldásnál ez a program az origóban levő csúcspontnak felel meg).

A program javítása úgy történik, hogy az egyik terméket bevonjuk a termelésbe. Azt a terméket célszerű bevonni a termelésbe – mivel a célfüggvény maximumát keressük –, melyiknek az egységre jutó tiszta hozama nagyobb. Vagyis azt a változót vigyük a bázisba, amelynek a célfüggvény sorában lévő értéke a legnagyobb pozitív szám. Így azt várhatjuk, hogy olyan csúcsponthoz jutunk, ahol a célfüggvény értéke jobban növekszik, mintha más csúcsponthoz jutnánk. (Nem biztos!). Ezt figyelembe véve célszerű a második terméket bevonni a termelésbe. Itt azt a megfontolást követhetjük, hogy a termelésbe bevont termékekből azt a maximális mennyiséget programozzuk, amennyit az erőforrások kapacitása megengeged. Ezt a maximális mennyiséget az erőforrások legszűkebb kapacitása határozza meg. Ezek közül a maximális mennyiségek közül a legkisebbet *szűk keresztmetszetnek* nevezzük.

Határozzuk meg a szűk keresztmetszetet: A második termék tiszta hozama (80) a nagyobb, ennek egy egységének előállításához az első erőforrásból 4 egység szükséges ezért 160 : 4 = 40 egység lenne termelhető az első erőforrás miatt. A második erőforrásból 2 egység szükséges a második termék egy egységének termeléséhez, ezért 120 : 2 = 60 egység lenne termelhető a második erőforrás miatt. Vagyis a szűk keresztmetszetet az első erőforrás jelenti. Ha tehát az x_2-t az u_1 kicserélésével vonjuk be a programba, akkor $x_2 = 40$ és $u_1 = 0$, vagyis az első erőforrást teljes egészében kihasználtuk. Matematikai értelemben ezzel a választással azt biztosítjuk, hogy a $\underline{b}$ vektor elemei továbbra is nemnegatívak maradnak. Így egy új bázist is előállítottunk. Az új bázisra (új programra) való áttérés mindig két változó szerepének felcserélését jelenti.

Az új bázisvektor az L lehetséges megoldási halmaz egy új csúcspontját jelenti. Ezt a báziscserével határozhatjuk meg. De nekünk az kell, hogy biztosan tudjuk, melyik csúcspont adja az optimális megoldást (ha van!).

Ezt a következő módon érhetjük el:

1. *Pozitív célelem felett választunk generáló elemet. (Ezzel biztosítjuk, hogy a célfüggvény értéke növekszik).*
2. *Pozitív számot választunk generáló elemnek* ($a_{ij} \geq 0$).
3. *Szűk keresztmetszetnél választunk generáló elemet.*

$$\left(\min \frac{b_i}{a_{ij}},\ a_{ij} \geq 0\right)$$

Az a_{ij} generáló elemet bekeretezzük. (Tételezzük fel, hogy a generáló elem egyértelműen meghatározható. A 2., és 3. feltételek teljesítése biztosítja, hogy az **x** és **u** vektorok nemnegatívak lesznek).

4. *Végrehajthatjuk az elemcserét a következőképpen:*

   a) *A generáló elem helyébe annak reciprokát írjuk.*
   b) *A generáló elem új sorát úgy kapjuk meg, hogy a régi sorát szorozzuk a generáló elem reciprokával.*
   c) *A generáló elem új oszlopát úgy kapjuk meg, hogy a régi oszlop elemeit szorozzuk a generáló elem reciprokának* -1*-szeresével.*
   d) *A táblázat többi elemét az ismert* ***bázistranszformációval*** *határozzuk meg.*

5. *Optimális megoldást kaptunk, ha*

   a) *az utolsó sor elemei* (c_j-k) *nem pozitívak*
      (a célfüggvény értéke tovább már nem növekszik) és
   b) *az utolsó oszlop elemei nem negatívak*
      (a megoldások sem negatívak).

Az elmondottakat kövessük végig a kijelölt feladaton:

Jelöljük B_0-val az induló szimplex táblázatot, B_1, B_2 stb. a javított táblázatokat.

B_0	x_1	x_2	$\underline{b}$
u_1	2	$\boxed{4}$	160
u_2	3	2	120
u_3	2	0	60
z	60	80	0

B_0 táblázatban leolvasható egy lehetséges megoldás:

$x_1 = 0 \qquad u_1 = 160$
$x_2 = 0 \qquad u_2 = 120$
$z = 0 \qquad u_3 = 60$

Generáló elemet az x_2 oszlopban választunk, mert a z sorában itt van a legnagyobb pozitív szám. Megállapíthatjuk a szűk keresztmetszetet. Az utolsó oszlop elemeit osszuk el az x_2 oszlop megfelelő elemével. A legkisebb hányadost adó elem lesz a generáló elem.

$$160 : 4 = 40, \quad 120 : 2 = 60$$

Tehát 4 lesz a generáló elem. Keretezzük be a B_0 táblázatban.

Új bázisra térünk rá, x_2 és u_1 helyet cserél

B_1	x_1	u_1
x_2		
u_2		
u_3		
$-z$		

B_1 táblázat kitöltése:
A generáló elem helyébe annak reciproka kerül.

A generáló elem új sora: a generáló elem régi sorának elemeit szorozzuk meg a generáló elem reciprokával:

$$2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},\ 160 \cdot \frac{1}{4} = 40$$

A generáló elem új oszlopa: a régi oszlop elemeit szorozzuk meg a generáló elem reciprokán −1-szeresével: $2 \cdot (-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2},\ 80 \cdot (-\frac{1}{4}) = -20$

A többi elemet a bázistranszformációnál megismertek szerint számítjuk.

$$3 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 2,\ 2 - 0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 2,\ 60 - 2 \cdot 80 \cdot \frac{1}{4} = 20$$

$$120 - 160 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 40,\ 60 - 0 \cdot 160 \cdot \frac{1}{4} = 60,\ 0 - 160 \cdot 80 \cdot \frac{1}{4} = -3200$$

Tehát a B_1 táblázat a következőképpen néz ki:

B_1	x_1	u_1	
x_2	½	¼	40
u_2	$\boxed{2}$	−½	40
u_3	2	0	60
$-z$	20	−20	−3200

Egy lehetséges megoldás:

$x_1 = 0$ $u_1 = 0$
$x_2 = 40$ $u_2 = 40$
$u_3 = 60$

$z = 3200$

A programot még javíthatjuk, mert az utolsó sorban van pozitív elem és van felette pozitív szám, amelyet generáló elemnek tudunk választani.

A szűk keresztmetszet:

$$40 : \frac{1}{2} = 80,\ 40 : 2 = 20,\ 60 : 2 = 30$$

Tehát a generáló elem a 2 lesz. Keretezzük be. Az előbbi számítást megismételve kapjuk a B_2 táblázatot:

B_2	u_2	u_1	$\underline{b}$
x_2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	30
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	20
u_3	-1	$\frac{1}{2}$	20
$-z$	-10	-15	-3600

Egy másik lehetséges megoldás:

$x_1 = 20 \qquad u_1 = 0$

$x_2 = 30 \qquad u_2 = 0$

$u_3 = 20$

$z = 3600$

A B_2 program tovább nem javítható, mert a tábla utolsó sorában nincs pozitív elem. Tehát az optimális megoldás:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 3600 \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ha összehasonlítjuk a számítással kapott eredményt a grafikus megoldásnál kapott eredménnyel, láthatjuk, hogy az optimális megoldáshoz az origóból kiindulva a szomszédos D(0;40) csúcspontokon keresztül haladva jutottunk a C(20;30) csúcspontig, az optimális megoldásig.

Megjegyzés: ha nem az x_2 oszlopában választottunk volna először generáló elemet, akkor az A(30;0) csúcsponton keresztül jutottunk volna el a C(20,30) csúcsponthoz.

A feladatmegoldások során az induló, majd a javított szimplex táblázatokat egymás mellé, vagy egymás alá is írjuk.

Nézzük a táblázatokat egymás mellé írva:

B_0	x_1	x_2	$\underline{b}$	B_1	x_1	u_1	$\underline{b}$	B_2	u_2	u_1	$\underline{b}$
u_1	2	$\boxed{4}$	160	x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	40	x_2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	30
u_2	3	2	120	u_2	$\boxed{2}$	$-\frac{1}{2}$	40	x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	20
u_3	2	0	60	u_3	2	0	60	u_3	-1	$\frac{1}{2}$	20
$-z$	60	80	0	$-z$	20	-20	-3200	$-z$	-10	-15	-3600

Alternatív optimum

Az 1.2.3 pontban grafikusan szemléltettük az alternatív optimum esetét. Vizsgáljuk meg, hogy a szimplex táblázatban hogyan vehető észre ez az eset. Oldjuk meg a következő feladatot.

$$\begin{array}{llcccccl}
\text{a)} & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \\
\text{b)} & & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & +x_5 & \leq 100 \\
 & & x_1 & & +x_3 & +x_4 & & \leq 50 \\
 & & & x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & \leq 80 \\
\hline
\text{c)} & z = & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +2x_5 & \to \max
\end{array}$$

A feladat normálfeladat, ezért az induló szimplex táblázatából kiindulva a már leírt eljárást kell megismételni.

Az egyes javított programok az alábbi táblázatban láthatók.

B_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Lehetséges megoldás:
u_1	1	2	1	0	1	100	$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$
u_2	1	0	$\boxed{1}$	1	0	50	$u_1 = 100,\ u_2 = 50,\ u_3 = 80$
u_3	0	1	1	1	1	80	
$-z$	2	1	3	2	2	0	$z = 0$
B_1	x_1	x_2	u_2	x_4	x_5	b	
u_1	0	2	−1	−1	1	50	$x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$
x_3	1	0	1	1	0	50	$x_3 = 50$
u_3	−1	1	−1	0	$\boxed{1}$	30	$u_2 = 0,\ u_1 = 50,\ u_3 = 30$
$-z$	−1	1	−3	−1	2	−150	$z = 150$
B_2	x_1	x_2	u_2	x_4	u_3	b	
u_1	$\boxed{1}$	1	0	−1	−1	20	$x_1 = x_2 = x_4 = 0$
x_3	1	0	1	1	0	50	$x_3 = 50,\ x_5 = 30$
x_5	−1	1	−1	0	1	30	$u_1 = 20,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0$
$-z$	1	−1	−1	−1	−2	−210	$z = 210$

B_3	u_1	x_2	u_2	x_4	u_3	b	
x_1	1	1	0	−1	−1	20	$x_2 = x_4 = 0$
x_3	−1	−1	1	$\boxed{2}$	1	30	$x_1 = 20,\ x_3 = 30,\ x_5 = 50$
x_5	1	2	−1	−1	0	50	$u_1 = u_2 = u_3 = 0$
$-z$	−1	−2	−1	0	−1	−230	$z = 230$

Ez egyben optimális megoldás is, mert a B_3 táblázat utolsó sorában nincs pozitív szám. Így a program tovább nem javítható. Viszont található benne nulla. Ez jelenti, hogy több megoldás is van, hiszen ha nulla felett választunk generáló elemet, akkor a −z sora nem változik a báziscsere folytán, de a bázisban egy elem kicserélődik és az értékük is változik. A B_3-as táblázatban a nulla felett csak egy pozitív szám van; ez lesz a generáló elem.

B_4	u_1	x_2	u_2	x_3	u_3	
x_1	½	½	½	½	−½	35
x_4	−½	−½	½	½	½	15
x_5	½	3⁄2	−½	½	½	65
−z	−1	−2	−1	0	−1	−230

Egy másik optimális megoldás:
$x_1 = 35,\ x_4 = 15,\ x_5 = 65$
$x_2 = x_3 = 0$
$u_1 = u_2 = u_3 = 0$
$z = 230$

A B_4 táblázatból látható, hogy optimális megoldást nyertünk, mert nincs pozitív szám. A számolást folytatni lehet, mert a nulla felett van pozitív szám, de akkor a B_3-as táblázatot kapjuk. Tehát két alternatív optimum van. *Az összes optimális megoldást az alternatív optimumok konvex lineáris kombinációja adja:*

$$\underline{x}_0 = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i \cdot \underline{x}_{0i}\ \text{, ahol}$$

$0 \le \lambda_i \le 1$ és $\sum_{i=1}^{10} \lambda_i = 1$, $\underline{x}_{0i}$ az i-edik alternatív optimum vektora és p az alternatív optimum száma.

A grafikus megoldásnál láttuk, hogy alternatív program esetén az optimális megoldásokat egy szakasz pontjai adják.

Feladatunk esetében például legyen $\lambda_1 = 0{,}4$ és $\lambda_2 = 0{,}6$ akkor:

$$\underline{x}_0 = 0{,}4 \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix} + 0{,}6 \cdot \begin{bmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21{,}0 \\ 0 \\ 0 \\ 9{,}0 \\ 39{,}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 0 \\ 12 \\ 9 \\ 59 \end{bmatrix}$$

egy új optimális megoldást kapunk.

$$z = 2 \cdot 29 + 3 \cdot 12 + 9 \cdot 2 + 2 \cdot 59 = 58 + 18 + 118 = 230$$

A célfüggvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy egy normálfeladat megoldása közben a következő táblázathoz jutottunk:

B_3	x_1	u_2	u_3	u_1	
x_4	0	2	−1	−1	20
x_2	−1	1	0	0	30
x_3	−2	0	−1	1	60
−z	2	−1	−1	−2	−250

Az utolsó sor első eleme itt pozitív. Ez azt jelenti, hogy a program értéke még növelhető lenne. Azonban a számításokat nem tudjuk folytatni, mert generáló elem csak pozitív lehet. Már pedig az x_1 oszlopában nincs pozitív szám.

Megmutatható, hogy ilyen esetben a célfüggvénynek nincs felső korlátja, vagyis a célfüggvény értéke tetszés szerint növelhető. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a *célfüggvény nem korlátos*, a feladatnak *nincs optimális* megoldása.

Degeneráció

Degeneráltnak nevezzük a lineáris programozási feladatot, ha optimális megoldásában $x_i = 0$ úgy fordul elő, hogy a hozzátartozó oszlopvektort bevontunk a bázisba.

Ez az eset kétféleképpen állhat elő:

a) Az indulótáblázat utolsó oszlopában eleve 0-ák szerepelnek.
b) A megoldás során legalább egyszer nem találunk egyértelműen generáló elemet, mert több egyenlő értékű keresztmetszet állt elő.

Nézzük az a) esetre a következő példát:

B_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b
u_1	6	0	−4	1	30
u_2	−4	−1	0	1	40
u_3	$\boxed{2}$	1	−1	0	0
−z	6	−1	−4	1	0

Lehetséges megoldás:
$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$
$u_1 = 30,\ u_2 = 40,\ u_3 = 0$

$z = 0$

Válasszunk generáló elemet az első oszlopban. Ez csak a 2 lehet, mert:

0 : 2 = 0

30 : 6 = 5

Tehát a szűk keresztmetszet a harmadik sorban van.

Így az új táblázat:

B_1	u_3	x_2	x_3	x_4	$\underline{b}$
u_1	−3	−3	−1	$\boxed{1}$	30
u_2	2	1	−2	1	40
x_1	½	½	−½	0	0
−z	−3	−4	−1	1	0

Lehetséges megoldás:
$x_1 = 0$
$x_2 = x_3 = x_4 = 0$
$u_1 = 30$, $u_2 = 40$, $u_3 = 0$
$z = 0$

Látható, hogy hiába hajtottuk végre a cserét, a célfüggvény értéke, sőt maga a program is változatlan maradt.

Még javítható a program: x_4 oszlopában választhatunk generáló elemet

B_2	u_2	x_2	x_3	u_1	
x_4	−3	−3	−1	1	30
u_2	5	4	−1	−1	10
x_1	½	½	−½	0	0
−z	0	−1	0	−1	−30

Lehetséges megoldás:
$x_2 = x_3 = 0$
$x_1 = 0$, $x_4 = 30$
$u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = 10$
$z = 30$

Ez egyben alternatív optimum is.

A b) esetre példa a következő:

B_0	x_1	x_2	$\underline{b}$
u_1	1	−3	2
u_2	3	1	6
u_3	−4	1	2
−z	4	−1	0
B_1	u_1	x_2	$\underline{b}$
x_1	1	−3	2
u_2	−3	10	0
u_3	4	−11	10
−z	−4	11	−8

Generáló elemet most csak az első oszlopban tudunk választani. Mivel Azonban 2:1 és 6:3 egyenlő, ezért 1 és 3 is választható generáló elemnek. Ezért bármelyiket is választjuk generáló elemnek a következő táblázat $\underline{b}$ oszlopában megjelenik a nulla. És ez valóban degenerált programot szolgáltat.

A degeneráció csak a gépi számításoknál jelent komoly problémát, mert a gép – ellentétben a gondolkodó emberrel – nem veszi észre, hogy gyakorlatilag nem is végez tényleges munkát, hanem csak egy meghatározott ciklust ismétel. Természetesen a degeneráció gépi számítások esetén is megoldott.

2.5.2. Módosított normálfeladat megoldása

A 1.3.4. pontban megfogalmaztuk ezt a feladattípust. Mátrix- és vektor-szimbólumokkal így írható le:

$$
\begin{array}{ll}
\text{a)} & \underline{x} \geq \underline{0},\ \underline{b}_1 \geq \underline{0},\ \underline{b}_2 \geq \underline{0} \\
\text{b)} & A_1 \cdot \underline{x} = \underline{b}_1 \\
 & A_2 \cdot \underline{x} \leq \underline{b}_2 \\
\text{c)} & z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max
\end{array}
$$

A feladat kanonikus formája:

$$
\begin{array}{ll}
\text{a)} & \underline{x} \geq \underline{0},\ \underline{b}_1 \geq \underline{0},\ \underline{b}_2 \geq \underline{0} \\
\text{b)} & A_1 \cdot \underline{x} + \underline{u}_1^* = \underline{b}_1 \ = \underline{b}_1 \\
 & A_2 \cdot \underline{x} + \underline{u}_2 = \underline{b}_2 \\
\text{c)} & z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max
\end{array}
$$

Ebből a formából látszik, hogy az $\underline{u}_1^*$ vektornak egyenlőnek kell lenni a nullvektorral.

Írjuk fel a normálfeladatnál megszokott szimplex induló táblázatot:

B_0	$\underline{x}^T$	
$\underline{u}_1^*$	A_1	$\underline{b}_1$
$\underline{u}_2$	A_2	$\underline{b}_2$
$-z$	$\underline{c}^T$	$\underline{0}$

A normálfeladatnál már itt leolvasható volt egy lehetséges bázismegoldás. Most nem, mert itt az olvasható le, hogy $\underline{u}_1^* = \underline{b}_1$, holott $\underline{u}_1^* = \underline{0}$ a követelmény. Tehát először azt kell megvizsgálni, hogy az L lehetséges megoldások halmaza nem üres-e, azaz van-e egyáltalán lehetséges megoldás. Megfelelő bázistranszformációval úgy kell átalakítani a táblázatot, hogy a csillaggal jelölt változók kikerüljenek a bázisból (ekkor értékük nulla lesz).

Ha ez nem sikerül, akkor a feladatnak nincs megoldása.

Célul tűzzük ki, hogy a feltételek között szereplő egyenletek teljesüljenek, azaz $\underline{1}^T \cdot A_1 \cdot \underline{x} = \underline{1}^T \cdot \underline{b}_1$ teljesüljön. ($\underline{1}^T$ az összegző vektor.) Ezért egy úgynevezett *másodlagos célfüggvényt* vezetünk be és ennek teljesülését vizsgáljuk. Így a feladatot visszavezetjük normálfeladatra.

Az induló szimplex táblázat így módosul:

B_0	$\underline{x}^T$	
$\underline{u}_1^*$ $\underline{u}_2$	A_1 A_2	$\underline{b}_1$ $\underline{b}_2$
$-z$ z^*	$\underline{c}^T$ $\underline{1}^T \cdot A_1$	0 $\underline{1}^T \cdot \underline{b}_1$

Az utolsó sor a másodlagos célfüggvény együtthatóit tartalmazza. Ha a másodlagos célfüggvény szerint végezzük a számítást és csillaggal jelölt változók kikerülnek a bázisból (értékük nullává válik), valamint az utolsó sor összes eleme 0 lesz, akkor a feladatnak van lehetséges megoldása. Ezután már az elsődleges célfüggvény szerint végezzük a számítást.

Oldjuk meg példaként a 1.3.4. pontban felírt feladatot:

a) $x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \quad\quad &\leq 10 \\ x_1 \quad + x_3 &= 18 \\ x_2 - 2x_3 &= 20 \end{aligned}$$

c) $z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$

Másodlagos célfüggvény a két egyenlet összege lesz, azaz

$$x_1 + x_2 - x_3 = 38$$

Az induló táblázat:

B_0	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
u_1	2	−1	0	10
u_2^*	1	0	1	18
u_3^*	0	1	−2	20
$-z$	2	−1	5	0
z^*	1	1	−1	38

Generáló elemet a másodlagos célfüggvény szerint a csillaggal jelzett változók sorában a szűk keresztmetszet mentén választunk. (Ezzel elérjük, hogy az u^*-ok értéke nulla, a változók értéke pozitív lesz.)

Generáló elemet az x_1 és x_2 oszlopában választhatnánk. Ha x_1 oszlopban választunk, akkor a szűk keresztmetszet

$$10 : 2 = 5$$
$$18 : 1 = 18$$

az u_1 sorában van. Így nem a csillagos változók kerülnek ki a bázisból. Így nem kerülnénk közelebb egy lehetséges megoldáshoz. Ezért próbálkozzunk az x_2 oszlopában: Itt csak az u_3^* sorában van pozitív elem, ezért 1 lesz a generáló elem. (Ha itt sem találtunk volna generáló elemet, akkor a harmadik oszlopban vizsgálódunk, ha ott sem találnánk a szűk keresztmetszetet a *-os sorban, akkor a feladatnak nem lenne lehetséges megoldása sem!)

B_1	x_1	u_3^*	x_3	b
u_1	2		−2	30
u_2^*	1		1	18
x_2	0		−2	20
−z	2		3	20
z^*	1		1	18
B_2	x_1	u_3^*	u_2^*	b
u_1	4			66
x_3	1			18
x_2	2			56
−z	−1			−34
z^*	0			0

Az x_2 és u_3^* helyet cserél. Hagyjuk üresen u_3^* oszlopát, hogy ne tudjunk a következő lépésben itt generáló elemet választani. (Ha nem így tennénk, visszajöhetne a bázisba!)

Láthatjuk, hogy $u_2^* = u_3^* = 0$ és az utolsó sor minden eleme nulla. Tehát a feladatnak van lehetséges bázismegoldása, amely a táblázatból leolvasható:

$$x_1 = 0 \qquad u_3^* = 0$$
$$x_2 = 56 \qquad u_1 = 66 \qquad z = 34$$
$$x_3 = 18 \qquad u_2^* = 0$$

Ez egyben optimális megoldása is a feladatnak, mert a z sorban már nincs pozitív szám.

Ez a program az eredeti feladat feltételeit kielégíti.

Összefoglalva az elmondottakat a megoldás technikája a következő:

1. *Az indulótáblázatot kibővítjük az egyenletekből szerkesztett másodlagos célfüggvénnyel, bevezetjük a csillagos jelölést az egyenletek sorában.*
2. *Generáló elem választás:*

- *másodlagos célfüggvény eleme felett választunk*
- *pozitív számot*
- *a szűk keresztmetszet mellett*
- *csak a csillagos sorokban*

- *a kicserélt* u^* *oszlopot elhagyjuk.*

3. *Ha másodlagos célfüggvény elemei mind nullák, akkor a feladat egy lehetséges bázismegoldása olvasható le a táblázatról.*
4. *Ezt a lehetséges bázismegoldást javítjuk az elsődleges célfüggvény szerint.*
5. *Nincs optimális megoldása a feladatnak, ha*

- *nincs lehetséges bázismegoldás (a csillagos sorok nem cserélhetők ki)*
- *az elsődleges célfüggvény nem korlátos.*

2.5.3. Az általános feladat megoldása

Az általános feladatot könnyen átalakíthatjuk módosított normálfeladattá. Ugyanis az

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & \underline{x} \geq \underline{0} \\
\text{b)} & A_1 \cdot \underline{x} \leq \underline{b}_1 \geq 0 \\
 & A_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2 \geq 0 \\
 & A_3 \cdot \underline{x} \geq \underline{b}_3 \geq 0 \\
\text{c)} & z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max
\end{array}$$

feladat $A_3 \cdot \underline{x} \geq \underline{b}_3$ egyenlőtlensége egy $\underline{v}_3 \geq \underline{0}$ többletváltozó bevezetésével egyenletté alakítható:

$$A_3\,\underline{x} - \underline{v}_3 = \underline{b}_3$$

Így már módosított normálfeladattá alakult a feladat.

Oldjuk meg a következő általános feladatot.

$$\begin{array}{lrrrrl}
\text{a)} & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \\
\text{b)} & & x_2 + & x_3 & \leq & 160 \\
 & -x_1 + & x_2 + & x_3 & = & 100 \\
 & x_1 + & x_2 + & x_3 & \geq & 180 \\
\text{c)} & \multicolumn{5}{l}{z = 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 \rightarrow \max}
\end{array}$$

Bevezetve a $v_3 \geq 0$ segédváltozót, a feladat módosított normálfeladat lesz:

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & & x_2 + & x_3 & & \leq 160 \\
 & -x_1 + & x_2 + & x_3 & & = 100 \\
 & x_1 + & x_2 + & x_3 & - v_3 & = 180 \\
z & = 2x_1 + & 6x_2 + & 2x_3 & & \rightarrow \max \\
z^* & = & 2x_2 + & 2x_3 & - v_3 & = 280
\end{array}$$

Tehát az induló táblázat:

B_0	x_1	x_2	x_3	v_3	b
u_1	0	1	1	0	160
u_2^*	−1	$\boxed{1}$	1	0	100
u_3^*	1	1	1	−1	180
−z	2	6	2	0	0
z^*	0	2	2	−1	280

B_1	x_1	u_2^*	x_3	v_3	b
u_1	1		0	0	60
x_2	−1		1	0	100
u_3^*	$\boxed{2}$		0	−1	80
−z	8		−4	0	−600
z^*	2		0	−1	80

Itt még nem olvasható le a feladatnak egy lehetséges megoldása sem.

B_3	u_3^*	u_2^*	x_3	v_3	b
u_1			0	$\boxed{½}$	20
x_2			1	−½	140
x_1			0	−½	40
−z			−4	4	−920
z^*			0	0	0

Lehetséges megoldás:

$x_1 = 40$ $u_1 = 20$

$x_2 = 140$ $u_2^* = 0$

$x_3 = 0$ $u_3^* = 0$

$z = 920$

B_4	u_3^*	u_2^*	x_3	u_1	b
v_3			0	2	40
x_2			1	1	160
x_1			0	1	60
−z			−4	−8	−1080

Lehetséges megoldás:

$x_1 = 60$ $u_2^* = u_3^* = u_1 = 0$

$x_2 = 160$ $v_3 = 40$

$x_3 = 0$

$z = 1080$

Ez egyben optimális megoldás.

2.5.4. Minimumfeladatok megoldása

Az elmondottak alapján elvileg bármely lineáris programozási feladat megoldható, ha annak egyáltalán van megoldása. Ahhoz azonban, hogy módszerünket alkalmazni tudjuk, úgy kell átfogalmazni az adott feladatot, hogy az eleget tegyen az alábbi két követelménynek:

- A feltételi egyenlőtlenségek jobb oldalán nemnegatív szám szerepeljen.

- Az optimumot a célfüggvény maximuma jelentse.

Mivel bármely feladat átalakítható e két követelménynek megfelelően, ezért módszerünket (a primál szimplex módszert) valóban alkalmazhatjuk bármilyen lineáris programozási feladat megoldására.

Példaként tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & x_1,\quad x_2,\quad x_3 \geq 0 \\ \text{b)} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 120 \\ & -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq -60 \\ \hline \text{c)} & z = x_1 - 4x_2 - x_3 \to \min \end{array}$$

Könnyen átalakíthatjuk az eddig megismert maximumfeladatok valamelyikévé. Felhasználhatjuk azt a közismert tényt, hogy egy f(x) függvény minimuma ott van, ahol a −f(x) függvény maximuma, továbbá azt, hogy

$$\min f(x) = -\max(-f(x))$$

Tehát a feladatunk így alakítható át:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & x_1,\quad x_2,\quad x_3 \geq 0 \\ \text{b)} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 120 \\ & x_1 - 2x_2 - 2x_3 \geq 60 \\ \text{c)} & -z = -x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max \end{array}$$

Most már alkalmazhatjuk az eddigi számítási eljárásunkat. Ez egy általános maximumfeladat. Az induló szimplex táblázat bal alsó sarkában a −z mínusz egyszeresét írjuk, azaz z-t. Így a táblázat jobb alsó sarkában az eredeti célfüggvény előjelhelyes értékét olvashatjuk le!

B_0	x_1	x_2	x_3	v_2	$\underline{b}$
u_1	1	1	1	0	120
u_2^*	$\boxed{1}$	−2	−2	−1	60
z	−1	4	1	0	0
z^*	1	−2	−2	−1	60
B_1	u_2^*	x_2	x_3	v_2	$\underline{b}$
u_1		$\boxed{3}$	3	1	60
x_1		−2	−2	−1	60
z		2	−1	−1	60
z^*		0	0	0	0
B_2		u_1	x_3	v_2	$\underline{b}$
x_2		1/3	1	1/3	20
x_1		2/3	0	−1/3	100
z		−2/3	−3	−5/3	20

Az optimális program tehát: $x_1 = 100$ $u_1 = 0$
$x_2 = 20$ $u_2^* = 0$
$x_3 = 0$ $v_2 = 0$
$z = 20$

2.5.5. Korlátozott változójú feladatok

A gazdasági feladatok lineáris programozási modelljében gyakran vannak olyan korlátozások, amelyek egyetlen változóra vonatkoznak. Ha pl. x_i jelenti az *i*-edik termékből gyártandó darabszámot, akkor előírhatják, hogy ebből a termékből legalább k_i darabot kell gyártani (hiszen már szerződést kötöttünk ennyi darabra). Ekkor azt mondjuk a k_i az x_i változó alsó korlátja. Ezt a feltételt

$$x_i \geq k_i$$

formában írhatjuk fel.

Ha pedig tudja az operációkutatási osztály, hogy az *i*-edik termékből legfeljebb f_i darabot tud a piacon értékesíteni, akkor ennek a feltételnek a matematikai formája

$$x_i \leq f_i$$

és azt mondjuk, hogy f_i az x_i változó felső korlátja.

Ha a feladatban szereplő változók legalább egyikének van alsó korlátja – a szokásos nem negatívitási feltételt biztosító $x_i \geq 0$ korláton kívül –, akkor *alulról korlátozott változójú vagy alsó korlátos lineáris programozási* feladatról beszélünk. Ennek mátrix-vektor szimbólumokkal kifejezett alakja:

$$\begin{array}{c} \underline{x} \geq 0 \\ A \cdot \underline{x} \leq \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{k} \\ \hline z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to \max, \end{array}$$

ahol $\underline{k}$ vektor elemei a változók alsó korlátjai. Az eddigi ismereteink alapján ezen feladatok is megoldhatók a szimplex módszerrel. A problémát csak az okozza, hogy a $\geq$ reláció miatt a szimplex táblázatba be kell írni a u^*-os sorokat és be kell vezetni az alsó korlátok mindegyikéhez egy $\underline{v}$ eltérésváltozót. Ez azonban nagymértékben megnöveli a táblázat méretét és a számítást is nehezebbé teszi. Még a számítógépes megoldásnál is előnyös, ha kisebb modellt kell kezelni. Ezért igen előnyös lenne, ha az egyedi korlátok nem növelnék a sorokat és az oszlopokat sem.

Nézzük a matematikai modellt. Vezessük be egy $\underline{y} \geq \underline{0}$ vektort úgy, hogy az $\underline{x} \geq \underline{k}$ egyenlőtlenséget egyenletté alakítsa a következőképpen:

$$\underline{x} = \underline{y} + \underline{k}$$

Ezt írjuk be a modell $\underline{x}$ változója helyébe.

Ekkor kapjuk:

$$\begin{array}{c} A(\underline{y} + \underline{k}) \leq \underline{b} \\ \underline{y} + \underline{k} \geq \underline{k} \\ \hline z = \underline{c}^T(\underline{y} + \underline{k}) \to \max, \end{array}$$

a kijelölt szorzások elvégzése és a rendezés után a következő rendszert kapjuk:

$$\begin{array}{c} A\underline{y} \leq \underline{b} - A \cdot \underline{k} \\ \underline{y} \geq \underline{0} \\ \hline z = \underline{c}^T \cdot \underline{y} + \underline{c}^T \cdot \underline{k} \to \max, \end{array}$$

Mivel $\underline{c}^T\underline{k}$ egy skalár szorzat és elemei konstansok, ezért ez egy szám lesz. Hasonló okok miatt az $A \cdot \underline{k}$ szorzat egy konstans elemeket tartalmazó vektor. Ezért a szimplex módszernél megszokott formába írhatjuk a modellt, ha $\underline{b}' = \underline{b} - A\underline{k}$ és $z' = \underline{c}^T \cdot \underline{y}$ jelölést alkalmazzuk:

$$\begin{array}{c} A\underline{y} \leq \underline{b}' \\ \underline{y} \geq \underline{0} \\ \hline z' = \underline{c}^T \cdot \underline{y} \to \max, \end{array}$$

Ennek a megoldása a már jól ismert szimplex módszerrel előállítható.

Ha ennek a modellnek az optimális megoldása $\underline{y}_0$, akkor az eredeti feladat optimális megoldása az $\underline{x}_0 = \underline{y}_0 + \underline{k}$ és $z_0 = \underline{c}^T \cdot \underline{x}_0$ lesz.

Látható, hogy az alulról korlátozott változójú feladatnak és az átalakított feladat feltételrendszerében ugyanaz az A mátrix szerepel és a célfüggvényben szereplő $\underline{c}^T$ vektor is azonosak. Így nem növekedett az induló táblázat mérete.

Az elmondottak illusztrálására nézzük a következő feladatot:

$$\begin{array}{cccccccc}
x_1 & +4x_2 & +x_3 & +2x_4 & & \le & 90 \\
 & 3x_2 & & +x_4 & +2x_5 & \le & 50 \\
x_1 & +2x_2 & & +x_4 & +x_5 & = & 60 \\
x_1 & & +x_3 & & +x_5 & = & 80 \\
 & & & & x_1 & \ge & 40 \\
 & & & & x_2 & \ge & 0 \\
 & & & & x_3 & \ge & 20 \\
 & & & & x_4 & \ge & 2 \\
 & & & & x_5 & \ge & 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$z = 80x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 100x_4 + 20x_5 \to \max$$

Az elmondottak szerint a változók alsó korlátait tartalmazó vektor

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 20 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Az } A \cdot \underline{k} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 20 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 \\ 2 \\ 42 \\ 60 \end{bmatrix},$$

$$\text{illetve } \underline{c}^T \cdot \underline{k} = \begin{bmatrix} 80 & 60 & 20 & 100 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 20 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3800$$

Így a megoldandó modell:

$$\begin{array}{rrrrrl}
y_1 & +4y_2 & +y_3 & +2y_4 & & \le 26 \\
 & 3y_2 & & +y_4 & +2y_5 & \le 48 \\
y_1 & +2y_2 & & +y_4 & +y_5 & =18 \\
y_1 & & +y_3 & & +y_5 & =20 \\
\hline
z' = 80y_1 & +60y_2 & +20y_3 & +100y_4 & +20y_5 & \to \max
\end{array}$$

A feladat optimális megoldása

$$\underline{y}_0 = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix};\ z_0' = 1600$$

Az eredeti feladat optimális megoldása $\underline{x}_0 = \underline{y}_0 + \underline{k}$ szerint pedig:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 20 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 0 \\ 25 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

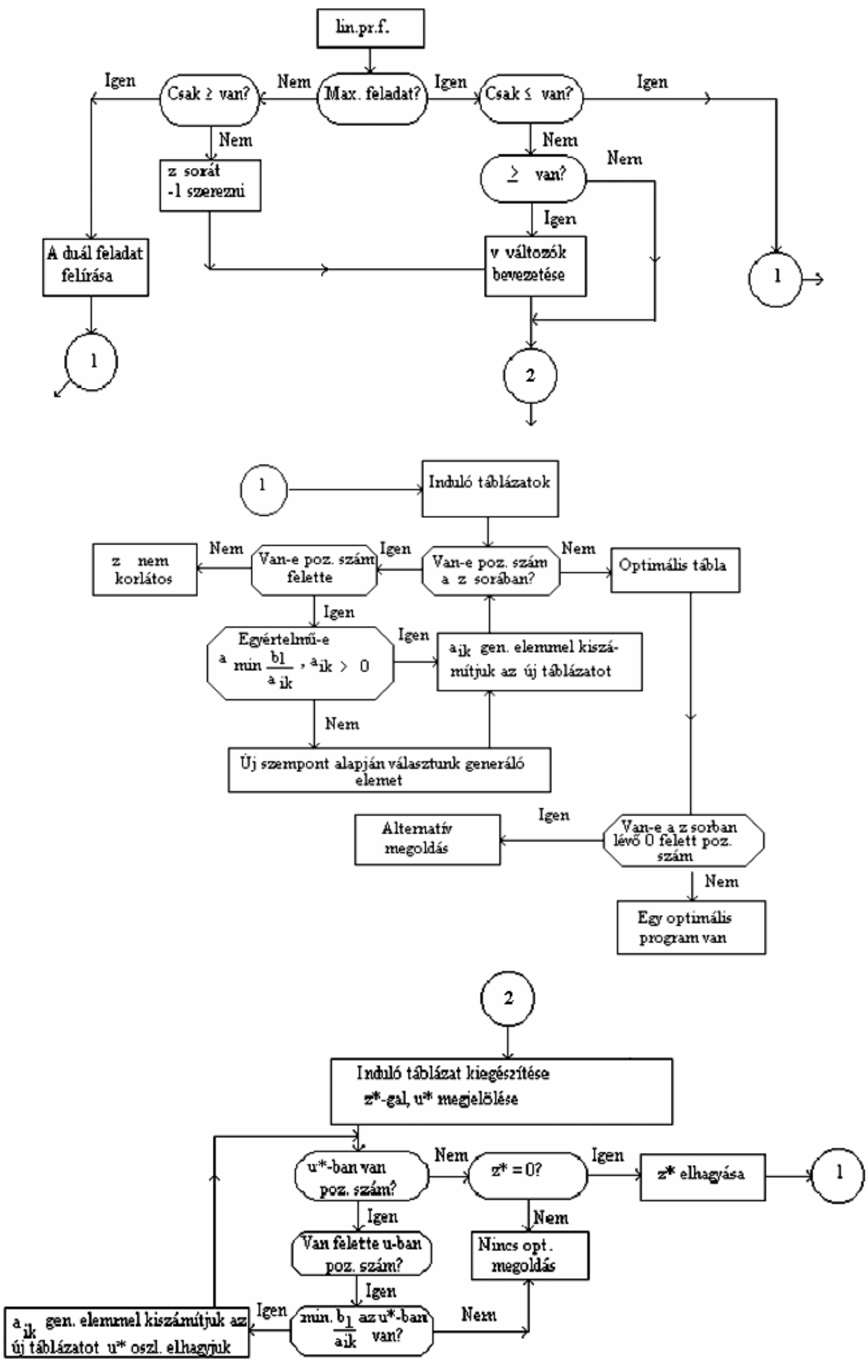
Valóban kielégíti az eredeti feladat feltételeit és

$$z_0 = z_0'' + \underline{c}^T \cdot \underline{k} = 1600 + 3800 = 5400$$

A felülről korlátozott változójú lineáris programozási feladatok minden nehézség nélkül megoldhatók a tanult szimplex módszerrel, csupán az egyedi feltételek bővítik a táblázat sorait, de az oszlopait nem. Így nem okoz akkora méretváltozást.

2.6. A lineáris programozási feladatok megoldásának logikai sémája

A 1.5. részben elmondottakat összefoglaló és a lineáris programozási feladatok megoldásához útmutatást adó **folyamatábra** látható a 1.6.1. ábrán. A jelölések megegyeznek a 1.5. pontban használt jelölésekkel, ezért e fejezetet áttanulmányozónak igen értékes segítséget nyújt a lineáris programozási feladatok megoldása folyamatában.


lin.pr.f.
Max. feladat?
Csak ≥ van?
Csak ≤ van?
Igen
Nem
z sorát -1 szerezni
≥ van?
v változók bevezetése
A duál feladat felírása
1
2
Induló táblázatok
Van-e poz. szám felette
Van-e poz. szám a z sorában?
z nem korlátos
Optimális tábla
Egyértelmű-e
a_{ik} gen. elemmel kiszámítjuk az új táblázatot
Új szempont alapján választunk generáló elemet
Alternatív megoldás
Van-e a z sorban lévő 0 felett poz. szám
Egy optimális program van
Induló táblázat kiegészítése z*-gal, u* megjelölése
u*-ban van poz. szám?
z* = 0?
z* elhagyása
Van felette u-ban poz. szám?
Nincs opt. megoldás
az u*-ban van?
a_{ik} gen. elemmel kiszámítjuk az új táblázatot u* oszl. elhagyjuk

1.6.1 ábra

2.7. A szimplex módszer változatai

A szimplex módszer négy alapműveletre épül és jól algoritmizálható. A most tárgyalt módszer az ún. **primál szimplex** módszer. Az alapműveletek száma a feladat méretétől, az adatsűrűségtől (a mátrix nullától különböző adatainak az összes adathoz mért arányától), az egyenletek és egyenlőtlenségek megoszlásától függ.

A lineáris programozási feladatok egyes típusai kedvezőbb műveleti ráfordítással oldhatók meg a következő szimplex módszerekkel:

- Duál szimplex algoritmus
- Korlátozott változós szimplex algoritmus
- Módosított szimplex algoritmus

Az érdeklődők a jegyzet végén található irodalmakban megtalálhatják ezen módszerek tárgyalását.

3. Dualitás

3.1. Dualitás fogalma

A lineáris programozási feladatoknál mind elméleti, mind gyakorlati szempontból nagy jelentősége van a dualitás elvének. Ez azt jelenti, hogy ugyanazon az adathalmazon két feladatot értelmezhetünk. Minden lineáris programozási feladathoz hozzárendelünk bizonyos szabály szerint egy másik lineáris programozási feladatot, amelyet a kiindulási feladat duáljának nevezünk.

Definíció: Az

$$\begin{array}{rcr} \underline{x} \geq \underline{0} & & \underline{y} \geq \underline{0} \\ A\underline{x} \leq \underline{b} & & A^T\underline{y} \geq \underline{c} \\ f(\underline{x}) = \underline{c}^T\underline{x} \rightarrow max & \textit{és az} & g(\underline{y}) = \underline{b}^T\underline{y} \rightarrow min \end{array}$$

feladatok egymásnak duáljai. A kiinduló feladatot primál, a belőle származtatott feladatot duál feladatnak nevezzük. A maximumfeladat kanonikus alakja $A\underline{x} + \underline{u} = \underline{b}$, a minimumfeladaté pedig $\underline{A}^T\underline{y} - \underline{w} = \underline{c}$.

A duál feladat változóinak száma a primál feladat feltételeinek számával, a feltételi egyenleteinek száma a primál változók számával egyezik meg. A primál feladatban szereplő ≤ relációk helyett a duálban ≥ relációk szerepelnek. A duál feladat együttható mátrixa megegyezik a primál feladat együttható mátrixának transzponáltjával.

A duál feladat megismerése számos előnnyel jár:

- *felhasználható a primál feladatok optimális megoldásának meghatározására*
- *fontos gazdasági jelentést hordoz az optimális megoldása*

3.1.1. Egy termelésprogramozási feladat duáljának gazdasági értelmezése

Nézzük az 1.2.1. pontban felvetett problémát: adott kapacitások mellett a legnagyobb hozamot biztosító termelésszerkezetet kellett meghatározni.

Ez a következő feladathoz vezetett:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 & \leq & 160 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 120 \\ 2x_1 \qquad & \leq & 60 \\ \hline \end{array}$$

$$f(\underline{x}) = 60x_1 + 80x_2 \rightarrow \max$$

A feladattal kapcsolatban felmerülhet az a kérdés: mennyit ér a vállalatnak az erőforrások egységnyi mennyisége, vagy másképpen fogalmazva, ha valaki (pl. külső termeltető) az erőforrásokat le akarná kötni, vagy meg akarná vásárolni, akkor milyen árajánlatot készítsünk. Ha az erőforrások egységárát rendre y_1, y_2, y_3 jelöljük, akkor a vásárlónak a

$$g(\underline{y}) = 160y_1 + 120y_2 + 60y_3$$

függvény értékének csökkentésére kell törekedni. Másrész, az eladó azt tartja szem előtt, hogy az egyes termékekhez felhasznált erőforrások összértéke nem lehet kisebb, mint a szóban forgó termék ára, mert akkor nem éri meg eladni az erőforrást, azaz:

$$\begin{array}{rcl} 2y_1 + 3y_2 + 2y_3 & \geq & 60 \\ 4y_1 + 2y_2 \qquad & \geq & 80 \end{array}$$

korlátozza az eladás-vétel szándékot.

Így az eredeti feladat duálja:

$$\begin{array}{rrrcc} y_1, & y_2, & y_3, & \geq & 0 \\ 2y_1 & +3y_2 & +2y_3 & \geq & 60 \\ 4y_1 & +2y_2 & & \geq & 80 \\ \hline g(y) = 160y_1 & +120y_2 & +60y_3 & \rightarrow & \min \end{array}$$

3.1.2. Példa minimumfeladat duáljára

Nézzük az 1.2.2. példában ismertetett takarmányadag problémát. Tegyük fel, hogy a számba vett 3 tápanyag értékesítésével egy másik cég (versenytárs) foglalkozik. Tudja, hogy annyi tápanyagot tud eladni (naponta és állatonként) amennyi a takarmányadagban előírtan benne van. Ha a tápanyagok egységárát rendre y_1, y_2, y_3 jelenti, akkor a cég célfüggvénye $g(\underline{y})=36y_1+8y_2+12y_3 \rightarrow \max$ lesz. (Az értékesített tápanyagok árainak öszszege maximális legyen). Az árak azonban olyanok lehetnek csak, hogy az ezen tápanyagokból készült takarmányadagok ne kerüljenek többe, mint az 1.2.2. feladatban meghatározott eladási ára. Vagyis teljesülni kell a következő feltételeknek:

$12y_1 + y_2 + y_3 \le 40$

$2y_1 + y_2 + 3y_3 \le 80$

Ez a feladat az eredeti feladat *duálja.*

Mátrix-vektor szimbólumokkal felírva a probléma:

a primál feladat	és	a duál feladat
$\underline{x} \ge \underline{0}$		$\underline{y} \ge \underline{0}$
$A\underline{x} \ge \underline{b}$		$A^T \cdot \underline{y} \le \underline{c}$
$f(\underline{x}) = \underline{c}^T \underline{x} \to \min$		$g(\underline{y}) = \underline{b}^T \cdot \underline{y} \to \max$

Matematikai szempontból teljesen mindegy, hogy melyik a primál és melyik a duál feladat. (Gazdasági szempontból persze nem mindegy).

3.2. A dualitás felhasználható előnyei

3.2.1. Minimumfeladatok megoldása

Egy minimumfeladat duálpárja egy maximumfeladat. Ezt felhasználva bizonyos minimumfeladat típus könnyebben megoldható a duál párján keresztül, mint a 1.5.4. pontban ismertetett módon.

Nézzünk erre egy példát:

duálja:

a) $x_1, \quad x_2 \ge 0$

b) $2x_1 + x_2 \ge 10$

$x_1 + x_2 \ge 7$

$x_1 \ge 2$

$x_2 \ge 4$

c) $z = 5x_1 + 4x_2 \to \min$

a) $u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4 \ge 0$

b) $2u_1 + u_2 + u_3 \le 5$

$u_1 + u_2 + u_4 \le 4$

c) $z = 10u_1 + 7u_2 + 2u_3 + 4u_4 \to \max$

Ha a 1.5.4 pontban ismertetett megoldást alkalmaznánk a minimumfeladat megoldására, akkor még be kellene vezetni a $\underline{v}$ többlet változókat és a másodlagos célfüggvényt. Így 6 sorból és 6 oszlopból álló táblázatot kapnánk. Ha a duálján keresztül oldjuk meg, akkor a 3x5 táblázatot kapunk csak.

Nézzük a megoldás lépéseit:

B_0	u_1	u_2	u_3	u_4	
x_1	2	1	1	0	5
x_2	1	1	0	1	4
z	10	7	2	4	0

B_1	x_1	u_2	u_3	u_4	
u_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
z	−5	2	−3	4	−25
B_2	x_1	x_2	u_3	u_4	
u_1	1	−1	1	−1	1
u_2	−1	2	−1	2	3
z	−3	−4	−1	0	−31

A B_2 táblázatból leolvasható mind a primál, mind a duál feladat megoldása:

- *A primál feladat változóinak értéke a z sor értékeinek* −1*-szerese.*
- *A duál feladat változóinak értéke az utolsó oszlopban olvasható.*

		Hiányváltozók
Primál feladat megoldása:	$x_1 = 3$	$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 1,\ u_4 = 0$
	$x_2 = 4$	$z_{min} = 31$
Duál feladat megoldása:	$y_1 = 1$	
	$y_2 = 3$	$z_{max} = 31$
	$y_3 = 0$	
	$y_4 = 0$	

3.2.2. A duál gazdasági jelentése

Négy terméket állítsunk elő négy erőforrás felhasználásával. Az egyébként normál maximumfeladat alapadatai a következő szokásos táblázatban látható.

B_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{b}$
u_1	1	1	0	1	120
u_2	0	1	1	1	80
u_3	1	1	1	0	50
u_4	1	0	1	0	60
−z	12	12	10	8	0

A harmadik bázistranszformáció után a következő táblázatot kaptuk:

B_3	u_3	x_2	$\underline{u_2}$	u_1	$\underline{b}$
x_4					75
x_3					5
x_1					45
u_4					10
−z	−7	−3	−3	−5	−1190

A táblázat belső elemei nem hordoznak most információt, ezért nem írtuk ki! A táblázat utolsó sorában negatív számok, az utolsó oszlopában pedig nemnegatív számok vannak, tehát leolvasható mind a primál mind a duál feladat optimális megoldása:

Primál feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0^T=[45, 0, 5, 75] \text{ és } \underline{u}^T=[0, 0, 0, 10] \quad z_0 = 1190.$$

Duál feladat optimális megoldása:

$$\underline{y}_0^T= [5, 3, 7, 0] \text{ és } \underline{w}^T = [0, 3, 0, 0] \quad z_0 = 1190.$$

Definíció: A duál feladat optimális megoldásának komponenseit az erőforrások elszámolható árának, vagy árnyékárának nevezzük.

A számítógépes programcsomagok egy része árnyékár helyett a duál ár (dual price) elnevezést használja.

Az árnyékár vagy duál ár gazdasági jelentése:

Az i-edik feltétel (az i-edik erőforrás) duál ára (árnyékára) megmutatja, hogy mennyivel javul (maximum feladat esetén nő, minimum feladat esetén csökken) az optimális célfüggvény értéke, ha b_i egy egységnyivel nő.

A feladat gazdasági értékelés:

- Az első erőforrás árnyékára 5 forint. Ez azt jelenti, ha 1 egységgel növelnénk az első erőforrás kapacitását, akkor a célfüggvény értéke 5 forinttal növekedne. Ha van a kapacitás bővítésére lehetőség és annak ára kisebb mint 5 forint, akkor azt érdemes bővíteni, mert a célfüggvény növekménye nagyobb a költségnél.
- Ugyanez mondható el a 2. és a 3. erőforrásról (ez a $\underline{y}_0^T$ vektor komponenseiből olvasható ki).
- A 4. erőforrás árnyék ára 0, tehát bővítése nem növeli a célfüggvény értékét.
- Az egyes termékek fajlagos önköltségét megkapjuk, ha az erőforrások árnyékárainak vektorát szorozzuk az A technológiai mátrixszal.

$$[5\ 3\ 7\ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [12, 15, 10, 8]$$

Látható, hogy az x_2 termék fajlagos önköltsége 15 forint, nagyobb, mint a modellben adott hozama (12), ezért nem is szerepel az optimális megoldásban.

Az erőforrások árnyékárai a következő fontos információt adják:

- Ha a termék árnyékáron számolt önköltsége nagyobb, mint a hozama, nem szerepel az optimális programban
- Az optimális megoldásban szereplő termék árnyékáron mért ráfordítása egyenlő a hozammal.
- Erőforráskészlet árnyékáron számolt összértéke egyenlő az optimális megoldás célfüggvény értékével:

$$[5\ 3\ 7\ 0] \cdot \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix} = 1190 \text{ Ft.}$$

3.3. Egyenletet tartalmazó feladat duálja

Eddig a duális feladatpárt olyan feladatokra fogalmaztuk meg, ahol vagy csak $\leq$ (maximum feladat eset) vagy csak a $\geq$ (minimum feladat eset), relációk fordultak elő. Ha egyenlőség fordul elő, például $3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 8$, akkor ezt helyettesíthetjük két egyenlőtlenségi feltétellel a következőképpen: $3x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 8$ illetve $3x_1 + 5x_2 - 7x_3 \geq 8$. Szorozzuk meg -1-gyel az első formát, kapjuk $-3x_1 - 5x_2 + 7x_3 \geq -8$. Így már csak $\geq$ reláció fordul elő, amely minimum feladatok esetén előnyös.

Az elmondottakat szemléltessük a következő példán:

Írjuk fel az alábbi feladat duálját úgy, hogy minden duális változóra is fennálljon a nemnegativitási feltétel!

$$\begin{array}{cccccc}
x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \\
x_1 & +5x_2 & -x_3 & +2x_4 & \leq & 8 \\
2x_1 & +x_2 & +4x_3 & -x_4 & = & 10 \\
x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & \geq & 12 \\
\hline
z = 6x_1 & +8x_2 & +x_3 & +7x_4 & \rightarrow & \min
\end{array}$$

Alkalmazzuk az elmondottakat:

$$\begin{array}{ccccccc}
-x_1 & -5x_2 & +x_3 & -2x_4 & \geq & -8 \\
-2x_1 & -x_2 & -4x_3 & +x_4 & \geq & -10 \\
2x_1 & +x_2 & +4x_3 & -x_4 & \geq & 10 \\
x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & \geq & 12 \\
\hline
z=6x_1 & +8x_2 & +x_3 & +7x_4 & \rightarrow & \min
\end{array}$$

Így a modellünk egy általános minimum feladat lett, amelynek a duálpárja egy normál maximum feladat:

$$\begin{array}{cccccc}
u_1, & u_2, & u_3, & u_4 & \geq & 0 \\
-u_1 & -2u_2 & +2u_3 & +u_4 & \leq & 6 \\
-5u_1 & -u_2 & +u_3 & +3u_4 & \leq & 8 \\
u_1 & -4u_2 & +4u_3 & -u_4 & \leq & 1 \\
-2u_1 & +u_2 & -u_3 & +u_4 & \leq & 7 \\
\hline
z=-8u_1 & -10u_2 & +10u_3 & +12u_4 & \rightarrow & \max
\end{array}$$

Így már egy normál maximum feladatot kell megoldani!

3.4. Dualitással kapcsolatos tételek

A lineáris programozási feladatok induló szimplex táblázata nemcsak a primál, hanem egyúttal a duál feladat összes adatát is tartalmazza.

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \underline{x}^T & \\
\hline
\underline{u} & A & \underline{b} \\
\hline
 & \underline{c}^T &
\end{array}$$

A továbbiakban be fogjuk látni, hogy ugyanannak az eljárásnak a keretében alakul ki mind a primál, mind a duál feladatnak a megoldása. Ha megtaláltuk a primál feladat optimumát, akkor már ismert duálisának is az optimuma.

Tegyük fel, hogy elemi transzformációk sorozatával sikerült a primál feladat bázisát alkotó első r darab vektort (jelen esetben a r darab egységvektort) kicserélni az első r darab primál változónak megfelelő vektorral. Az így kapott táblát mátrix algebrai jelölésekkel, áttekinthető formában csak akkor tudjuk felírni, ha magát az induló táblát az alábbi partícionált formában adjuk meg.

	$\underline{x}_1^T$	$\underline{x}_2^T$	
$\underline{u}_1$	A_{11}	A_{12}	$\underline{b}_1$
$\underline{u}_2$	A_{21}	A_{22}	$\underline{b}_2$
	$\underline{c}_1^T$	$\underline{c}_2^T$	0

Az A_{11} mátrixblokk – a transzformációnak megfelelően – r×r típusú nemszinguláris mátrix, mert a jelzett transzformáció csak így hajtható végre.

A táblázatban szereplő többi mátrixblokk és vektor típusa ennek megfelelően értendő. A táblázat jobb alsó sarkába zérust írtunk. Ennek jelentésével a későbbiekben foglalkozunk. Most már fel tudjuk írni a transzformáció következtében megváltozott szimplex táblát (Bázistranszformációt alkalmazva A_{11} generáló elem reciproka A_{11}^{-1}.):

	$\underline{u}_1^T$	$\underline{x}_2^T$	
$\underline{x}_1$	A_{11}^{-1}	$A_{11}^{-1}A_{12}$	$A_{11}^{-1}\underline{b}_1$
$\underline{u}_2$	$-A_{21}A_{11}^{-1}$	$A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$	$\underline{b}_2-A_{21}A_{11}^{-1}\underline{b}_1$
	$-\underline{c}_1^T A_{11}^{-1}$	$\underline{c}_2^T-\underline{c}_1^T A_{11}^{-1}A_{12}$	$-\underline{c}_1^T A_{11}^{-1}\underline{b}_1$

Ezen tábla alapján kimondhatjuk a következő három tételt:

1. Tétel: Ha a tábla utolsó oszlopában nincs negatív elem, akkor az $\underline{x}_1 = A_{11}^{-1}\underline{b}_1$ vektor a primál feladatnak egy megvalósítható megoldása, amely mellett az első *r* darab feltétel egyenlőség formájában teljesül és a többi feltételnél a baloldal éppen annyival kevesebb a jobb oldalon álló mennyiségnél, mint amennyit a $\underline{b}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}\underline{b}_1$ vektor megfelelő komponense mutat.

Bizonyítás:
Mivel a tábla utolsó oszlopában nincs negatív elem – a feltétel szerint – ezért

$$A_{11}^{-1}\underline{b}_1 \geq \underline{0}\text{, amiből következik } \underline{x}_1 \geq \underline{0}.$$

Most még azt kell bizonyítani, hogy $\underline{x}_1$ eleget tesz az $A\underline{x}_1 = \underline{b}$ feltételnek is. Az A mátrixot partícionált alakba írva, valamint felhasználva a $\underline{b}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}\underline{b}_1 \geq \underline{0}$ egyenlőtlenséget, kapjuk:

$$A\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}\underline{b}_1 \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ A_{21}A_{11}^{-1}\underline{b}_1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{bmatrix} = \underline{b}$$

Ezzel a tételt bizonyítottuk.

Látható az is, hogy az első r darab feltétel egyenlőség formájában teljesül.

Az $\underline{x}_1$ lehetséges megoldásnál a célfüggvény értéke pedig:

$$\underline{c}^T\underline{x}_1 = \left[\underline{c}_1^T, \underline{c}_2^T\right] \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}\underline{b}_1 \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \underline{c}_1^T A_{11}^{-1}\underline{b}_1$$

Ez a kifejezés is megtalálható a táblázatban, mégpedig a táblázat jobb alsó sarkában ellenkező előjellel. Most már azt is megmondhatjuk, hogy az induló táblánál a jobb alsó sarokba azért írtunk zérust, mert ehhez a táblához tartozó lehetséges programnál a célfüggvény értéke zérus.

Látható tehát, hogyha *egy szimplex tábla utolsó oszlopában nincs negatív elem, akkor az a primál feladatnak mindig egy lehetséges megoldását adja,* melyet a – lineáris algebrában tanult – egyenletrendszerek megoldásához hasonlóan olvasunk le a táblából. *Azon* x_i *változók értéke, melyeknek megfelelő oszlopvektorok bekerültek a bázisba, megegyezik a tábla utolsó oszlopának* i*-edik elemével, míg a többi változó értéke zérus.*

2. Tétel: Ha a tábla utolsó sorában nincs pozitív elem, akkor az $\underline{u}_1^T = \left[\underline{c}_1^T A_{11}^{-1}, \underline{0}^T\right]$ vektor a duális feladat egy megvalósítható megoldása, amely mellett az első *r* darab feltétel egyenlőség formájában teljesül, míg a többi egyenlőtlenségben a bal oldal éppen annyival nagyobb a jobb oldalnál, mint amennyit a $\underline{c}_1^T A_{11}^{-1} A_{12} - \underline{c}_2^T$ vektor megfelelő komponense mutat.

Bizonyítás:

A bizonyítást az előbbi tételhez hasonlóan végezzük el. Vagyis bizonyítanunk kell egyrészt azt, hogy $\underline{u}_1^T \geq \underline{0}^T$, másrészt $\underline{u}_1^T A = \underline{c}^T$. Mivel a tábla utolsó sorában nincs pozitív elem, azért

$$-\underline{c}_1^T A_{11}^{-1} \leq \underline{0}$$

amiből következik

$$\underline{c}_1^T A_{11}^{-1} \geq \underline{0}$$

és így $\underline{u}_1^T \geq \underline{0}$. A feltétel értelmében $\underline{c}_2^T - \underline{c}_1^T A_{11}^{-1} A_{12} \leq \underline{0}$ amiből következik:

$$\underline{c}_2^T \leq \underline{c}_1^T A_{11}^{-1} A_{12}.$$

Ennek alapján írhatjuk:

$$\underline{u}_1^T A = \left[\underline{c}_1^T A_{11}^{-1}, \underline{0}\right] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\underline{c}_1^T, \underline{c}_1^T A_{11}^{-1} A_{12}\right] \geq \left[\underline{c}_1^T, \underline{c}_2^T\right] = \underline{c}^T$$

Ezzel a tételt bizonyítottuk.

A táblához tartozó lehetséges duális megoldás itt is leolvasható a táblából.

A bázisból kikerült u_j *eltérés változók, jelen esetben duális változók értéke megegyezik a tábla utolsó sorának* j*-edik elemének ellenkező előjellel vett értékével, míg a többi duális változó értéke zérus.*

Ehhez az $\underline{u}_1$ lehetséges megoldáshoz tartozó célfüggvény érték:

$$\underline{u}_1^T \underline{b} = \left[\underline{c}_1^T A_{11}^{-1} \underline{b}_1, \underline{0}^T\right] \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{bmatrix} = \underline{c}_1^T A_{11}^{-1} \underline{b}_1$$

3. Tétel: Ha a tábla utolsó oszlopában nincs negatív elem és az utolsó sorában nincs pozitív elem, akkor az $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} \underline{b}_1 \\ \underline{0} \end{bmatrix}$ a primál és az $\underline{u}_0^T = \left[\underline{c}_1^T A_{11}^{-1}, \underline{0}^T\right]$ a duál feladat optimális megoldása, melyekhez tartozó célfüggvényértékek azonosak, azaz $\max \underline{c}^T \underline{x}_0 = \min \underline{u}_0^T \underline{b} = \underline{c}_1^T A_{11}^{-1} \underline{b}_1$.

Bizonyítás:

Az 1. tétel értelmében az $\underline{x}_0$ a primál feladatnak, a 2. tétel értelmében az $\underline{u}_0^T$ a duál feladatnak egy megvalósítható megoldása. Tehát csak azt kell bizonyítani, hogy mind a kettő optimális megoldás.

Legyen

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \end{bmatrix}$$

a primál feladat egy tetszőleges megoldása.

Ehhez a megoldáshoz tartozó primál feladat célfüggvény értéke:

$$\underline{z} = \underline{c}^T \underline{y} = \left[\underline{c}_1^T, \underline{c}_2^T\right] \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \end{bmatrix} = \underline{c}_1^T \underline{y}_1 + \underline{c}_2^T \underline{y}_2 \,.$$

Mivel $\underline{y}_1 \geq \underline{0}$ és $\underline{c}_2^T \leq \underline{c}_1^T A_{11}^{-1} A_{12}$, azért fennáll a következő egyenlőtlenség sorozat:

$$z = \underline{c}_1^T \underline{y}_1 + \underline{c}_2^T \underline{y}_2 \leq \underline{c}_1^T \underline{y}_1 + \underline{c}_1^T A_{11}^{-1} A_{12} \underline{y}_2 =$$

$$= \underline{c}_1^T A_{11}^{-1} \left[A_{11} \underline{y}_1 + A_{12} \underline{y}_2\right] \leq \underline{c}_1^T A_{11}^{-1} \underline{b}_1 = z_0 \,.$$

Tehát bebizonyítottuk, hogy a primál feladat bármely $\underline{y}$, lehetséges megoldásához tartozó célfüggvényérték nem nagyobb, mint az $\underline{x}_0$ megoldáshoz tartozó célfüggvényérték, amiből következik, hogy $\underline{x}_0$ valóban optimális megoldása a primál feladatnak.

Hasonlóan bizonyítjuk, hogy az adott feltételek mellett $\underline{u}_0^T$ a duál feladat optimális megoldása. Legyen $\underline{t}^T = \left[\underline{t}_1^T, \underline{t}_2^T\right]$ a duál feladat egy tetszőleges megvalósítható megoldása. A hozzátartozó célfüggvényérték:

$$g(t) = \underline{t}^T \underline{b} = \left[\underline{t}_1^T, \underline{t}_2^T\right] \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{bmatrix} = \underline{t}_1^T \underline{b}_1 + \underline{t}_2^T \underline{b}_2 \,.$$

Mivel $\underline{t}^T \geq \underline{0}^T$ és $\underline{b}_2 \geq A_{21} A_{11}^{-1} \underline{b}_1$, azért fennáll a következő egyenlőtlenség sorozat:

$$g(\underline{u}) = \underline{t}_1^T \underline{b}_1 + \underline{t}_2^T \underline{b}_2 \geq \underline{t}_1^T \underline{b}_1 + \underline{t}_2^T A_{21} A_{11}^{-1} \underline{b}_1 =$$

$$\left[\underline{t}_1^T A_{11} + \underline{t}_2^T A_{21}\right] A_{11}^{-1} \underline{b}_1 \geq \underline{c}_1^T A_{11}^{-1} \underline{b}_1 = g(\underline{u}_0) \,.$$

A tételt ezzel bizonyítottuk.

Az is látható, hogy a primál és duál feladat optimális megoldásához tartozó célfüggvényértékek egyenlők, azaz

$$z_0 = g(\underline{u}_0) \,.$$

A most bebizonyított 3 tétel alapján belátható az ún. ***dualitás tétel:***

Ha a primál és duál feladatok közül valamelyiknek van megvalósítható megoldása és véges optimuma, akkor a másiknak is van megvalósítható megoldása és véges optimuma, továbbá a két feladat optimum értékei egyenlők.

A 3. tételből következik, hogy amennyiben a feladatpár bármelyikének van optimális megoldása (ez csak véges lehet), akkor a duálisának is van. Hiszen a feladatpár bármelyikének optimalizálásához az szükséges, hogy a táblában két olyan lehetséges megoldás szerepeljen, amely megfelel az első két tétel alatti feltételeknek. Ugyancsak a 3. tételből következik, hogy a két feladat optimum értékei egyenlők.

4. Tétel: Amennyiben mind a primál, mind a duál feladatnak van megvalósítható megoldása és a megoldásoknak megfelelő célfüggvény érték z, illetve g, akkor $z(\underline{x}) \le g(\underline{u})$.

Bizonyítás:
Legyen $\underline{x}$ a primál feladatnak, $\underline{u}$ a duál feladatnak egy tetszőleges megoldása. Ezek után írható:

$$A\underline{x} \le \underline{b} \text{ illetve } \underline{u}^T A \ge \underline{c}^T .$$

Szorozzuk meg a primál feladatra vonatkozó egyenlőtlenség mindkét oldalát balról $\underline{u}^T$-vel és a duálra vonatkozót jobbról $\underline{x}$-vel, akkor

$$\underline{u}^T A\underline{x} \le \underline{u}^T \underline{b} \text{ illetve } \underline{u}^T A\underline{x} \ge \underline{c}^T \underline{x} .$$

Ezen két egyenlőtlenség alapján írhatjuk:

$$z = \underline{c}^T \underline{x} \le \underline{u}^T \underline{b} = g .$$

5. Tétel: Ha a primál feladat célfüggvénye nem korlátos az L halamazon, akkor a duál feladatnak nincs megvalósítható megoldása.

Bizonyítás:
Ha $z \to \infty$, akkor nincsen olyan g, melyre a fenti egyenlőtlenség teljesülne. Mivel g a duál feladat megvalósítható megoldásához tartozó célfüggvényérték és ez nem létezik, így nem létezik lehetséges megoldás sem.

Az 5. tétellel kapcsolatban meg kell mondanunk, hogy ez a tétel nem megfordítható. Ha ugyanis a feladatpár egyik oldalának nincs megvalósítható megoldása, akkor abból még nem következik, hogy a duálisának van, de a célfüggvény ott nem korlátos. Ugyanis, előfordulhat olyan eset, hogy sem a primál, sem a duál feladatnak sincs megvalósítható megoldása.

3.5. Egyenletet tartalmazó lineáris programozási feladat duálja

Az eddigiek során a duális feladatpárt az általános alakú feladattal kapcsolatban fogalmaztuk meg. Vagyis, ha egy feladat duálisát fel akartuk írni, akkor azt először általános alakú feladattá kellett átalakítani, amennyiben eredetileg nem ilyen alakú volt. Utána duálisának felírása már nem okozott nehézséget. Ezzel a módszerrel minden feladat duálisa felírható. Előnye abban van, hogy a duális változókra is ki kell kötni a nemnegativitási feltételt. Van azonban hátránya is. Nézzük ugyanis a következő lineáris programozási feladatot:

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$z = \underline{c}^T \underline{x} \to \max$$

Írjuk fel ennek a feladatnak a duálisát. Először általános alakú feladattá kell alakítanunk:

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$A\underline{x} \leq \underline{b}$$
$$-A\underline{x} \leq -\underline{b}$$

$$z = \underline{c}^T \underline{x} \to \max .$$

Most már fel tudjuk írni a duálisát:

$$\left[\underline{u}_1^T, \underline{u}_2^T\right] \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \geq \underline{c}^T$$
$$\underline{u}_1^T \geq \underline{0}_2^T, \underline{u}_2^T \geq \underline{0}^T$$

$$g = \left[\underline{u}_1^T, \underline{u}_2^T\right] \begin{bmatrix} \underline{b} \\ -\underline{b} \end{bmatrix} \to \min$$

Ez a feladat így is írható:

$$\left[\underline{u}_1^T - \underline{u}_2^T\right]A \geq \underline{c}^T$$
$$\underline{u}_1^T \geq \underline{0}^T, \underline{u}_2^T \geq \underline{0}^T$$
$$\overline{\left[\underline{u}_1^T - \underline{u}_2^T\right]\underline{b} \to \min}$$

(Vegyük észre, hogy $\underline{u}_1$ és $\underline{u}_2$ elemeinek a száma egyenlő.)

Ha az A mátrix m×n típusú, akkor a duális feladatban 2m számú duális változó szerepel. Vezessük be az $\underline{u}^T = \underline{u}_1^T - \underline{u}_2^T$ jelölést. Ezzel a duális feladat a következő alakú lesz:

$$\underline{u}^T A \geq \underline{c}^T$$
$$\overline{\underline{u}^T \underline{b} \to \min}$$

Itt azonban az $\underline{u}^T$ vektorról nem köthetjük ki a nem-negatívitást. A duális feladat ily módon való felírásánál az előny az, hogy ebben a formában csak m számú duális változó szerepel és így a feltételrendszer mérete csökken.

3.6. Gyakorló példák

A dualitással kapcsolatban elmondottakat gyakoroljuk a következő példákon!

3.6.1. Példa

Egy normálfeladat optimális megoldását mutatja a következő táblázat:

B_2	x_1	x_2	u_1	u_3	
x_3	1	0	$\boxed{1}$	0	8
u_2	3	1	0	1	18
x_4	1	2	0	1	6
u_4	-1	1	-1	0	2
$-z$	-12	-4	-17	-10	-196

Feladat:

a) Írja fel a primál feladat optimális megoldását a hiányváltozókkal együtt.
b) Írja fel a duál feladat optimális megoldását!
c) Írja fel az eredeti feladat modelljét!

d) Írja fel a duál feladatot!
e) Értékelje az erőforrásokat!
f) Írja fel a termékek árnyékáron számolt önköltségét!

Megoldás:

a) $\underline{x}_0^T = [0, \; 0, \; 8, \; 6] \quad \underline{u}^T = [0, \; 18, \; 0, \; 2] \quad z_0 = 196$

b) $\underline{y}_0^T = [17, \; 0, \; 10, \; 0] \quad \underline{w}^T = [12, \; 4, \; 0, \; 0] \quad z_0 = 196$

c) a generáló elemeket visszafelé választva:

B_1	x_1	x_2	x_3	u_3	
u_1	1	0	1	0	8
u_2	3	1	0	1	18
x_4	1	2	0	$\boxed{1}$	6
u_4	0	1	1	0	10
$-z$	5	-4	17	-10	-60

B_0	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	0	$\boxed{1}$	0	8
u_2	2	-1	0	-1	12
u_3	1	2	0	$\boxed{1}$	6
u_4	0	1	1	0	10
$-z$	15	16	17	10	0

c)

$$\begin{array}{rrrrcr}
x_1 & & +x_3 & & \le & 8 \\
2x_1 & -x_2 & & -x_4 & \le & 12 \\
x_1 & +2x_2 & & +x_4 & \le & 6 \\
 & x_2 & +x_3 & & \le & 10 \\
\hline
z = 15x_1 & +16x_2 & +17x_3 & +10x_4 & \rightarrow & \max
\end{array}$$

d) Duálfeladat:

$$\begin{array}{rrrrcr}
y_1 & +2y_2 & +y_3 & & \ge & 15 \\
 & -y_2 & +2y_3 & +y_4 & \ge & 16 \\
y_1 & & & +y_4 & \ge & 17 \\
 & -y_2 & +y_3 & & \ge & 10 \\
\hline
g = 8y_1 & +12y_2 & +6y_3 & +10y_4 & \rightarrow & \min
\end{array}$$

e) Az erőforrások árnyékára a duál feladat optimális megoldásának komponensei. Tehát, ha az első erőforrás kapacitását 1 egységgel növeljük, azaz 9 lesz, akkor a célfüggvény értéke 17 egységgel növekszik. A második erőforrás árnyékára 0, tehát a kapacitás növelése nem módosítja a célfüggvényt stb.

f) A termékek önköltsége árnyékáron számolva.

$$[17,\quad 0,\quad 10,\quad 0]\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=[27,\quad 20,\quad 17,\quad 10]$$

Látható, hogy az első és második változó azért nem jelent meg az optimális megoldásban, mert önköltsége nagyobb, mint a hozama.

3.6.2. Példa

Egy általános lineáris programozási feladat megoldása során az alábbi táblázatot kaptuk:

B_1	x_1	x_2	$^*u_1$	v_1	
x_3	3	0	1	− 1	6
u_2	4	1	1	− 1	8
$^*u_3$	− 2	1	− 1	$\boxed{1}$	2
− z	− 22	5	− 11	11	− 66

Feladat:

a) Értékelje a táblázatot!
b) Olvasson le, vagy állítson elő egy lehetséges megoldást, ha létezik.
c) Állítsa elő a feladat optimális megoldását.
d) Írja fel a duál feladat optimális megoldását.
e) Írja fel az eredeti feladatot!
f) Írja fel a duál feladatot!

Megjegyzés:
Ha a duál feladat megoldását is értelmezni kívánjuk, akkor a * oszlopokat is ki kell tölteni.

Megoldás:

a) Még nem olvasható le egy lehetséges megoldás.

b) Válasszunk generáló elemet a v_1 oszlopban!

B_2	x_1	x_2	$*u_1$	$*u_3$	
x_3	1	1	0	1	8
u_2	$\boxed{2}$	2	0	1	10
v_1	−2	1	−1	1	2
−z	0	−6	0	−11	−88

c) Itt már leolvasható a primál feladatra egy lehetséges megoldás, amely egyben optimális is.

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} z_0 = 88. \text{ Alternatív optimum.}$$

Ekkor a hiányváltozók: $\underline{u} = [0, 10, 0]^T$, $v_1=2$.

d) A duális feladat optimális megoldása:

$$\underline{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} z_0 = 88. \text{ Degenerált.}$$

Ekkor a többlet változók: $\underline{w}=[0, 6, 0]^T$.

A primál feladat egy másik optimális megoldása:

Válasszunk generáló elemet az x_1 oszlopban!

B_3	u_2	x_2	$*u_1$	$*u_3$	b
x_3	−0,5	0	0	−0,5	3
x_1	0,5	1	0	0,5	5
v_1	1	3	−1	2	12
−z	0	−6	0	−11	−88

Primál megoldás: $\underline{x}_{02} = [5, \quad 0, \quad 3]^T$, $z_{opt} = 88$, $\underline{u} = [0, \quad 0, \quad 0]^T$.

A duál feladat optimális megoldása:

$$\underline{y}_0 = [0, \quad 0, \quad 11]^T,\ z_{opt} = 88,\ \underline{w} = [0, \quad 6, \quad 0]^T.$$

e) Visszafelé választva generáló elemeket kapjuk a kiinduló táblázatot

	x_1	x_2	x_3	v_1	
$*u_1$	3	0	1	−1	6
u_2	1	1	−1	0	2
$*u_3$	1	1	1	0	8
−z	11	5	11	0	0

Így az eredeti feladat algebrai formája:

$$\begin{array}{rrrcl} 3x_1 & & +x_3 & \geq & 6 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq & 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 8 \\ \hline z=11x_1 & +5x_2 & +11x_3 & \to & \max \end{array}$$

A duálpárja:

Rendezzük a relácó jeleket a szokott formában:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1, & x_2, & x_3 & \leq & 0 \\ -3x_1 & & -x_3 & \leq & -6 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq & 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 8 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & \leq & -8 \\ \hline g=11x_1 & +5x_2 & +11x_3 & \to & \max \end{array}$$

Ekkor a duál feladat:

$$\begin{array}{rrrrcl} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 & \geq & 0 \\ -3y_1 & +y_2 & +y_3 & -y_4 & \geq & 11 \\ & y_2 & +y_3 & -y_4 & \geq & 5 \\ -y_1 & -y_2 & +y_3 & -y_4 & \geq & 11 \\ \hline g=-6y_1 & +2y_2 & +8y_3 & -8y_4 & \to & \min \end{array}$$

Ha $y_3 - y_4 = y$ helyettesítést végzünk, akkor a duál feladat így írható fel:

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y \text{ előjel kötetlen,}$$

$$\begin{array}{rrrcl} -3y_1 & +y_2 & +y & \geq & 11 \\ & y_2 & +y & \geq & 5 \\ -y_1 & -y_2 & +y & \geq & 11 \\ \hline g=-6y_1 & +2y_2 & +8y & \to & \min \end{array}$$

4. Érzékenységvizsgálat

Az operációkutatási csoport munkája nem ér véget az általa megfogalmazott modell optimális megoldásának meghatározásával. Gyakran tanulmányozni kell azt is, milyen hatással van a szimplex módszerrel előállított *optimális megoldásra* az, ha a *modell paraméterei* (b_i, c_j és a_{ij}) *különböző lehetséges értékeket* vesznek fel.

A gyakorlat azt mutatja, hogy mindig van néhány olyan paraméter, amelynek bármilyen értelmes értéket adhatunk anélkül, hogy befolyásolná az optimális megoldást. Lehetnek azonban olyan paraméterek, amelyek kismértékű változása is egy új optimális megoldáshoz vezetnének.

Az optimális megoldás változatlansága azt jelenti, hogy a bázisváltozók továbbra is bázisváltozók maradnak. Ez egy termelésprogramozási feladatnál azt jelenti, hogy az eddig nem gyártott termékeket továbbra sem gyártjuk, míg a korábban az optimális megoldásban szereplő termékeket esetleg más mennyiségben gyártunk és a célfüggvény értéke is változhat.

Különösen figyelemreméltó az a helyzet, ha a célfüggvény értéke lényegesen rosszabb lesz. Ezért az érzékenységvizsgálat alapvető célja ezeknek a különösen érzékeny paramétereknek az azonosítása és a gyakorlat számára fontos értékeinek feltárása.

Definíció: Érzékenységvizsgálat olyan elemző eljárás, amely során felderíthető, hogy milyen hatással vannak az optimális megoldásra a modell paramétereinek *(b_i, c_j és a_{ij})* értékeiben bekövetkezett változások.

Különösen fontos ez a tevékenység akkor, ha a modell egy jövőbeni döntés megalapozását szolgálja. Ekkor ugyanis csak becsült adatokkal lehet a modellt számszerűsíteni. Gyakorlatban legtöbbször a *kapacitások* és a *célfüggvény együtthatói* változásainak hatását kell vizsgálni.

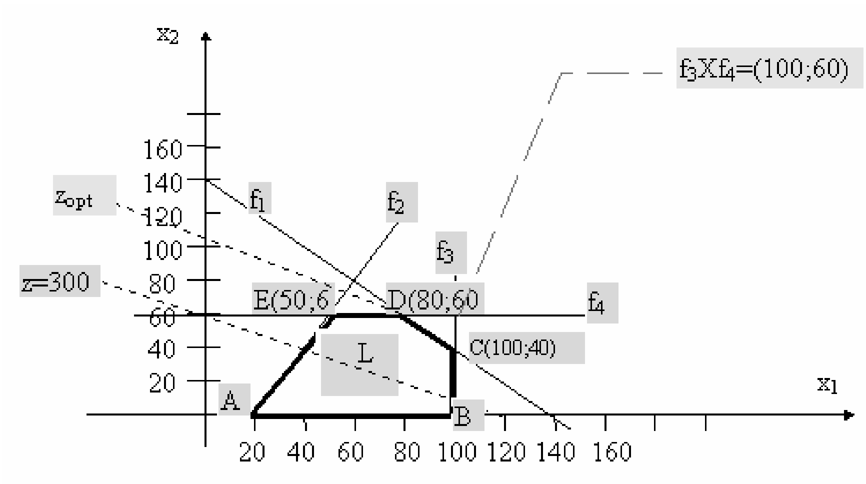
4.1. Érzékenységvizsgálat lényegének szemléltetése

Vizsgáljuk meg a következő lineáris modell grafikus megoldását!

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 140 \\ 2x_1 & - & x_2 & \geq & 40 \\ x_1 & & & \leq & 100 \\ & & x_2 & \leq & 60 \\ \hline z = 30x_1 & + & 50x_2 & \rightarrow & \max \end{array}$$

A grafikus megoldás a 3.1.1. ábrán látható.

Optimális megoldása a D pontban van: $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \end{bmatrix}$ és z_0=5400.



3.1.1. ábra

Változtassuk meg az első erőforrás kapacitását!

Ez grafikusan azt jelenti, hogy az f_1 egyenest önmagával párhuzamosan eltoljuk. Ekkor az optimális megoldás is változik (végig szalad a D pont az f_4 egyenesen a (100;60) pontig. Ha f_1 elhagyja ezt a pontot, akkor az optimális megoldás már nem változik a b_1 további növelésére, hiszen már nem játszik szerepet az L lehetséges megoldási halmaz csúcspontjainak kialakításában. Ez azt jelenti, ha az első erőforrás kapacitása 160-nál nagyobb lesz, akkor ez az erőforrás már nem korlátozza a termelést. Tehát a b_1 érzékeny paraméter, de csak 160 értékig.

Vizsgáljuk meg a b_3 *paramétert!*
Jól látható, hogy az f_3 egyenest hiába toljuk el párhuzamosan, egyáltalán nem változik az optimális megoldás. A harmadik erőforrás növelése (a többi erőforrás kapacitásának változatlan hagyása esetén) nem növeli a célfüggvény értékét.

Vizsgálja meg az olvasó a többi erőforrás kapacitás-változásának hatását!
Algebrai úton is vizsgálhatjuk ezt a problémát. Az első kapacitást növeljük (most még ismeretlen) $p_1 \geq 0$-val, azaz az első korlátozó feltétel így alakul:

$$x_1 + x_2 \leq 140 + p_1.$$

Átalakítva úgy, hogy az ismeretlenek a baloldalon legyenek:

$$x_1 + x_2 - p_1 \leq 140.$$

A megoldandó modell pedig a következő lesz:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & - & p_1 & \leq & 140 \\
2x_1 & - & x_2 & & & \geq & 40 \\
x_1 & & & & & \leq & 100 \\
 & & x_2 & & & \leq & 60 \\
\hline
z = 30x_1 & + & 50x_2 & & & \to & \max
\end{array}$$

Az optimális megoldás: $x_1=100$, $x_2=60$, $p_1=20$, $z_{op}=6000$.

Az eredmény azt meséli el, ha az első erőforrást 20 egységgel megnöveljük, akkor az optimális termelési szerkezet megváltozhat és a célfüggvény értéke növekedhet 600 egységgel. Ha a bővítés költsége 600-nál kisebb, akkor érdemes az erőforrást növelni.

Ha két vagy több erőforrás kapacitásának változtatására is van mód (pl. az első erőforrás maximum 20%-kal, a második legfeljebb 40%-kal, azaz $0 \leq p_1 \leq 28$, $0 \leq p_2 \leq 16$), akkor a megoldandó modell:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & - & p_1 & & & \leq & 140 \\
2x_1 & - & x_2 & & & - & p_2 & \geq & 40 \\
x_1 & & & & & & & \leq & 100 \\
& & x_2 & & & & & \leq & 60 \\
& & & & p_1 & & & \leq & 28 \\
& & & & & & p_2 & \leq & 16 \\
\hline
z = 30x_1 & + & 50x_2 & & & & & \to & \max
\end{array}
$$

A 3.1.1. ábrán szemléltetve, ez azt jelenti, hogy az f_1 és f_2 egyeneseket toljuk el önmagukkal párhuzamosan és vizsgáljuk az L halmaz változását.

Gyakorlatban gyakran előforduló probléma a célfüggvény együtthatóinak (a termék fajlagos haszna, költsége, ára stb.) változása. Kérdés az, hogyan változik az optimális megoldás (adott erőforrások mellett), ha a célfüggvény egy vagy több együtthatója megváltozik.

A 3.1.1. ábrán szemléltetve ezt a problémát azt jelenti, hogy a célfüggvény meredekségének megváltozása hogyan befolyásolja az optimális megoldást.

Hozzuk y= mx+b alakra a célfüggvényt, azaz:

$$x_2 = -\frac{30}{50}x_1 + \frac{H}{50}.$$

A célfüggvény meredeksége $-3/5$. Ekkor az optimális megoldás a D(80;60) pont és mindaddig a D lesz az optimális megoldás, amíg a meredekség $-1 \leq m \leq 0$. Ha $m = -1$, azaz a két termék azonos hasznot hoz, akkor a C és a D pont is optimális megoldás. Viszont, ha az első termék haszna nagyobb lesz, mint a második terméké, akkor már C lesz az optimális megoldás.

4.2. Az érzékenységvizsgálat esetei

Az érzékenységvizsgálat alapvető célja a modell érzékeny paramétereinek meghatározása, azaz azon paraméterek meghatározása, amelyek nem nagyon változtathatók meg anélkül, hogy az optimális megoldás ne változnék.

Az érzékenységvizsgálat során a következő kérdésekre keresünk választ:

1. *A kapacitásvektor mely komponenseit és milyen mértékben változtathatjuk meg anélkül, hogy az optimális bázis ne változzon?*

2. *Milyen mértékben módosíthatjuk a célfüggvény együtthatóit, hogy az optimális bázis ne változzon?*
3. *Hogyan változtatja meg az optimális megoldást, ha új feltételt írunk a modellbe?*
4. *Hogyan változtatja meg az optimális megoldást, ha új változót vezetünk be a modellbe?*

4.2.1. A kapacitásvektor komponenseinek változása

Hogyan határozhatók meg az érzékeny paraméterek?

A b_i paraméterek esetén már beláttuk, hogy erre vonatkozó információt az optimális szimplex táblázatban is látható duális változók értékei adják, amelyeket az erőforrások árnyékárának neveztünk el. Megállapítottuk, hogy

- ha az optimális megoldásban az i-edik erőforrás árnyékára pozitív és értéke y_{0i}, akkor b_i egy egységnyi változására a célfüggvény értéke y_{0i}-val változik, azaz b_i érzékeny paraméter.
- ha y_{0i}=0, akkor az optimális megoldás nem változik a b_i változtatására.

E két tulajdonságból következik, hogy azon erőforrásokra figyeljünk, amelyekhez pozitív árnyékár tartozik (különösen akkor, ha az árnyékár nagy pozitív szám).

A kérdés továbbá az, hogy milyen intervallumban változhat a szóban forgó paraméter, hogy közben optimális maradjon a megoldás? Ez úgy is felfogható, hogy egy b_i változtatásakor újabb és újabb modellt oldunk meg.

Így az érzékenység vizsgálatnak igen nagy számítási igénye lenne, ha az egyes paraméter minden egyes új változásánál elölről kellene kezdeni a szimplex módszert.

Szerencsére rendelkezésünkre áll a dualitásnál a 2.4. pontban leírtak, amelyből következik:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & A_{11}^{-1}\cdot A_{12} \\ -A_{21}\cdot A_{11}^{-1} & A_{22}-A_{21}\cdot A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{0} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{b}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1}\underline{b}_1 \\ \underline{b}_2-A_{21}A_{11}^{-1}\cdot\underline{b}_1 \end{bmatrix},$$

ahol a baloldali mátrix a szimplex táblázaton a bázistranszformáció után kapott mátrix, $\underline{b}_1$ a bázistranszformáció során a bázisból kikerült duál változókhoz tartozó $\underline{b}$-beli komponensek, $\underline{b}_2$ a bázisában maradt $\underline{u}$ duál változókhoz tartozó $\underline{b}$-beli komponensek,

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{-1}\underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}\cdot\underline{b}_1 \end{bmatrix}$$ a báziscsere után a táblázat utolsó oszlopa.

Az elmondottakat alkalmazzuk az 1.5.1. pontban megadott feladatra.

Az eredeti feladat:

$$\begin{array}{rcrcrl}
2x_1 & + & 4x_2 & \le & 160 & b_1 \\
3x_1 & + & 2x_2 & \le & 120 & b_2 \\
2x_1 & & & \le & 60 & b_3 \\
\hline
z = 60x_1 & + & 80x_2 & \to & \text{max!} & \\
c_1 & & c_2 & & &
\end{array}$$

A megoldás során a B_2 szimplex táblázatban kapott táblázatot egészítsük ki a szóban forgó paraméterekkel:

		b_2	b_1		
	B_2	u_2	u_1		
c_2	x_2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	30	0
c_1	x_1	0,5	−0,25	20	0
0	u_3	−1	0,5	20	b_3
	−2	−10	−15	−3600	
		0	0		

Ekkor a felírt egyenletek:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0{,}5 & -0{,}25 \\ -1 & -0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés:
Ezek az összefüggések nem csak optimális táblázatra igazak, ezért felhasználhatók a számítások ellenőrzésére is.

Vizsgáljuk meg, hogy a b_1, b_2, b_3 kapacitások illetve a c_1, c_2 célfüggvényértékek milyen határok között változhatnak, hogy a táblázatunk továbbra is optimális maradjon.

Mint tudjuk, az optimalitás feltétele: a táblázat utolsó oszlopának elemei nem negatívak, a táblázat utolsó sorának elemei nem pozitívak legyenek, azaz

$$\begin{bmatrix} -0{,}25 & \frac{3}{8} \\ 0{,}5 & -0{,}25 \\ -1 & +0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ha feltételezzük, hogy csak az első erőforrás kapacitása változik, (a többi az eredeti feladatbeli értéket veszi fel), akkor

$$\begin{bmatrix} -0{,}25 & \frac{3}{8} \\ 0{,}5 & -0{,}25 \\ -1 & +0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 120 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & +\frac{3}{8} & b_1 \\ 60 & 0{,}25 & b_1 \\ -120 & 0{,}5 & b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ lesz.}$$

Ebből adódik, hogy

$$\begin{array}{lllllllll} -30 & +\frac{3}{8} & \cdot b_1 & & \geq & 0 & \Rightarrow & b_1 & \geq & 80, \\ \cdot\ 60 & -0{,}25 & \cdot b_1 & & \geq & 0 & \Rightarrow & 240 & \geq & b_1, \\ -120 & +0{,}5 & \cdot b_1 & +60 & \geq & 0 & \Rightarrow & b_1 & \geq & 120. \end{array}$$

Tehát, ha $80 \leq b_1 \leq 240$, akkor az optimális megoldás szerkezete nem változik és

$$z_0 = [10, \quad 15] \cdot \begin{bmatrix} 120 \\ b_1 \end{bmatrix} = 1200 + 15b_1,$$

ezért $2400 \leq z_0 \leq 4800$ lesz.

4.2.2. A célfüggvény együtthatóinak változása

Itt is a dualitásnál megismert tételekre hivatkozhatunk és felhasználhatjuk az ismert összefüggést:

$$[\underline{0}, \quad \underline{c}_2^T] - [\underline{c}_1^T, \quad \underline{0}^T] \cdot \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \\ -A_{21} \cdot A_{11}^{-1} & A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} A_{12} \end{bmatrix} =$$

$$= [-\underline{c}_1^T \cdot A_{11}^{-1}, \ \underline{c}_2^T - \underline{c}_1^T \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}],$$

ahol $\underline{c}_1^T$ a bázisba bekerült változók célfüggvény együtthatói, $\underline{c}_2^T$ a bázisba be nem került célfüggvény együtthatói, $\left[-\underline{c}_1^T \cdot A_{11}^{-1},\ \underline{c}_2^T - \underline{c}_1^T \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}\right]$ a báziscsere után a táblázat utolsó sora.

Alkalmazzuk ezt az előbbi feladatra:

$$[0, \quad 0] - [c_2, \quad c_1, \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} -0{,}25 & \frac{3}{8} \\ 0{,}5 & -0{,}25 \\ -1 & -0{,}5 \end{bmatrix} = [-10, \quad -15].$$

Az optimalitás feltétele:

$$[0, \quad 0] - [c_2, \quad c_{,1} \quad 0] \begin{bmatrix} -0{,}25 & \frac{3}{8} \\ 0{,}5 & -0{,}25 \\ -1 & +0{,}5 \end{bmatrix} \leq [0, \quad 0] \text{ legyen.}$$

Ha feltételezzük, hogy csak az első változó együtthatója c_1 változik, akkor az optimalitási feltétel szerint:

$$[0, \quad 0] - [80, \quad c_1, \quad 0] \begin{bmatrix} -0{,}25 & \frac{3}{8} \\ 0{,}5 & -0{,}25 \\ -1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \leq [0, \quad 0].$$

Ebből adódik, hogy

$$\begin{array}{rcrcccccl} -80 \cdot (-0{,}25) & - & 0{,}5c_1 & \leq & 0 & \Rightarrow & 40 & \leq & c_1, \\ -80 \cdot \frac{3}{8} & - & c_1(-0{,}25) & \leq & 0 & \Rightarrow & c_1 & \leq & 120. \end{array}$$

Tehát, ha $40 \leq c_1 \leq 120$, akkor az optimális megoldás szerkezete nem változik és a célfüggvény értéke:

$$z_0 = [80, \quad c_1, \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} = 2400 + 20c_1,$$

ezért $z_0 = 3200 \leq z_0 \leq 4800$ lesz.

Hasonlóan kaphatjuk meg a többi komponens értékeinek korlátait is.

Látható, hogy ez az eredeti feladatok újra optimalizálása nélkül is elég munkaigényes a számítás. Viszont a tényleges gazdasági modellek ilyen fajta elemzése nagy haszonnal jár. A lineáris programozási modellek megoldására kidolgozott számítógépes programok valamilyen módon tartalmazzák az érzékenység vizsgálati eredményeket is. Ezek jó információt adnak a probléma további elemzéséhez. Ezért a következő fejezetben bemutatjuk a lineáris programozási feladatok megoldására kidolgozott EXCEL táblázatkezelőben található Solver programot, amely érzékenység vizsgálata az előbb bemutatott matematikai elveken alapul.

4.3. Paraméteres programozás

Az érzékenység vizsgálat során azt a kérdést tettük fel, hogy miképpen változik meg a feladat optimális megoldása, ha a feladatban szereplő paraméterek (a_{ij}, b_i, c_j)egyikét vagy többet megváltoztatunk. Ez több szempontból is fontos:

- sokszor a modellben szereplő paraméterek egyike vagy másika becsült adat, ezért feltehetjük: mi volna, ha ez és ez volna az értéke,
- érdekelhet bennünket, hogy az erőforrások növekedése (b_i-k változása) mennyire változtatja meg a termelési szerkezetet,
- valamint a termékek piaci árában (c_j-k) bekövetkező változások mennyire befolyásolják az optimális megoldást.

Definíció: Paraméteresnek nevezzük azokat a lineáris modelleket, amelyeknek A, $\underline{b}$, $\underline{c}^T$ elemei között függvények is szerepelnek. Ha ezek a függvények egyváltozósak és első fokúak, akkor a modellt egyparaméteres lineáris modellnek nevezzük.

Ilyen feladatok akkor adódnak, ha például ugyanazon fajlagos mutatókat tartalmazó **A** mátrix esetén többféle $\underline{b}$ (kapacitás-), illetve $\underline{c}^T$ (egységár-) vektorhoz kell az optimális programot meghatározni. Ilyenkor nem szükséges az egész programozást minden $\underline{b}$-re és $\underline{c}$-re külön-külön elvégezni, hanem csak az optimális program stabilitását kell megvizsgálni.

Két olyan esettel foglalkozunk, amelyek primál szimplex módszerrel megoldhatók.

4.3.1. Paraméter a célfüggvényben szerepel:

A szokásos mátrix-, vektorszimbólumokkal a következő formában írható fel:

$$\begin{array}{c} \underline{x} \geq \underline{0} \\ A \cdot \underline{x} \leq \underline{b} \\ \hline z = \left(\underline{p}^T + \underline{q}^T \cdot t\right) \cdot \underline{x} \to \max! \end{array}$$

ahol a t skalár paraméter értéke változhat $\alpha \leq t \leq \beta$ intervallumban.

Definíció: Egy parametrikus programozási feladatot megoldani annyit jelent, mint meghatározni azokat a bázisokat és *t*-nek azon intervallumait, amelyekben a feladat optimális megoldásai vannak.

Megoldás algoritmusa:

1. Tételezzük fel, hogy a fenti feladathoz tartozó induló táblázat a feladat egy lehetséges bázis megoldását adja. Ha a feladat nem normálfeladat, akkor a módosított normálfeladat és az általános feladatnál elmondottak szerint előállítunk egy lehetséges megoldást (másodlagos célfüggvény segítségével), azaz vizsgálhatjuk a következő szimplex táblázatot.

	$\underline{x}^T$	
$\underline{u}$	A	$\underline{b}$
$-z$	$\underline{p}^T + \underline{q}^T \cdot t$	0

2. Korábbról tudjuk, hogy ez a táblázat akkor ad optimális megoldást, ha az utolsó sorában nincs pozitív elem. Mivel itt az utolsó sor elemei a t paraméter függvényei és így a t értékétől függően is negatívak lehetnek. Ezért azt kell vizsgálni, hogy meg tudjuk-e a t paramétert úgy választani, hogy a táblázat utolsó sorában ne legyen pozitív elem.

Nyilvánvaló, hogy erre a válasz a

$$\underline{p}^T + \underline{q}^T t \leq 0$$

egyenlőtlenség-rendszer megoldása.

A jobb érthetőség miatt térjünk át a vektor koordinátára, azaz oldjuk meg a

$$p_j + q_j \cdot t \leq 0, \text{ ahol } j = 1, \ldots, n$$

egyenlőtlenségrendszert.

a) Ha minden j-re, $q_j < 0$ akkor osztva q_j-vel és átrendezve kapjuk a $-\frac{p_j}{q_j} \le t$, vagyis a $\max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right) \le t \le +\infty$ intervallumban az említett lineáris függvények mindegyike nem pozitív. Ez azt jelenti, hogyha t ezen intervallumban mozog, akkor a táblázatban optimális megoldás olvasható le.

b) Ha minden j-re $q_j > 0$, akkor $t \le -\frac{p_j}{q_j}$, vagyis a $-\infty < t \le \min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)$ intervallumban az említett lineáris függvények mindegyike nem pozitív.

c) Ha a q_j számok között pozitívak és negatívak is vannak, akkor $q_j < 0$ esetben a $\max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)$ adja a karakterisztikus intervallum alsó, $q_j > 0$ esetben $\min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)$ adja a felső határát.

d) A $q_j = 0$ esettel azért nem kell foglalkozni, mert $p_j \le 0$ esetén a j oszlop úgysem vonható be a bázisba, tehát a karakterisztikus intervallumot nem befolyásolja. Ha pedig $p_j > 0$, akkor a táblázat biztosan nem optimális.

Az elmondottak alapján a karakterisztikus intervallum alsó és felső határának értéke:

$$t_0 = \begin{cases} -\infty, \text{ha } q_j > 0 \text{ minden } j\text{-re} \\ \max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right) \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{és}$$

$$t_1 = \begin{cases} +\infty, \text{ha } q_j < 0 \text{ minden } j\text{-re} \\ \min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right) \text{egyébként} \end{cases}.$$

Így leolvasható egy karakterisztikus intervallum és a modell egy optimális megoldása:

$$\underline{x}_0^1(t), \underline{u}_0^1(t), z_0^1(t);\ t_0 \le t \le t_1 .$$

(Az optimális megoldások a paraméter függvényei.)

3. Ha a 2. feltétel nem teljesül, akkor primál transzformációval próbáljuk kielégíteni.
4. Ha egy $(t_0; t_1)$ karakterisztikus intervallumot meghatároztunk, akkor megvizsgáljuk, hogy a $t > t_1$ paraméter értékek mellett a célsor aktuális elemei közül melyik válik pozitívvá a t megváltoztatására. Az ehhez tartozó oszlopvektort transzformálva vagy teljesül a 2. és akkor újabb optimális megoldást nyertünk, vagy a 3. szerint járunk el és jutunk el a $(t_1; t_2)$ intervallumhoz feltéve, hogy ez még része az $(\alpha; \beta)$ intervallumnak.

A 4. lépés ismétlését addig folytatjuk, míg $(\alpha; \beta)$ intervallum minden pontját be nem soroltuk valamelyik karakterisztikus intervallumba, vagy meg nem állapítottuk, hogy ott nincs megoldás.

A kritikus pontok könnyebb megkeresése érdekében a táblázatot érdemes átalakítani a következőképpen:

	$\underline{x}^T$	
$\underline{u}$	A	$\underline{b}$
z	$\underline{p}^T$ $\underline{q}^T$	0 0

r számú transzformáció után a táblázat így néz ki:

	u	,…,	u_r	x_{r+1}	,…,	x_n	b
x_1 . x_r r_{i+1} . u_m				a'_{ij}			b'_i
z	p_1 q_1	,…,	p_j		,…,		P Q
t_k	$-\dfrac{p_1}{q_1}$	…	$-\dfrac{p_j}{q_j}$				

A táblázat t_k *sorában feltüntetett* $-\frac{p_j}{q_j}$ *hányadosok megadják a karakterisztikus intervallum alsó és felső határát. Egyben azt is megadják, hogy melyik oszlopban kell generáló elemet választani a további optimális megoldások előállítása érdekében.*

(A $\max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)$, ha $q_j < 0$; vagy a $\min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)$, ha $q_j > 0$ értékek oszlopában.)

Példa

Nézzük a következő általános feladatot:

$$\begin{array}{rcl} x_1,\ x_2,\quad x_3 & \geq & 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 12 \\ \hline z = (-5+t)\,x_1 + (8-t)x_2 + x_3 & \to & \min \end{array}$$

A t értéke a [0; 10] intervallumban változhat.

Alkalmazzuk a szimplex módszert:

B_0	x_1	x_2	x_3	v_1	
u_1^*	$\boxed{1}$	2	−1	−1	8
u_2	−1	1	2	0	12
z	5 − t	t − 8	−1	0	0
z^*	1	2	−1	−1	8
B_1	u_1^*	x_2	x_3	v_1	
x_1	⋮	$\boxed{2}$	−1	−1	8
u_2	⋮	3	1	−1	20
z	⋮	−18 + 3t	4 − t	5 − t	−40 + 8t

Itt már leolvasható egy lehetséges megoldás:

$$x_1 = 8,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 0,$$
$$u_1 = 0,\quad u_2 = 20,\quad v_1 = 0$$
$$z = -40 + 8t$$

Vizsgáljuk meg, hogy optimális-e? Ez itt nem látszik, mert a *z* sorában szereplő értékek t-nek függvényei.

Ha ez optimális megoldás, akkor teljesülni kell a

$$\begin{array}{lllllll} & -18+3t & \le & 0 & \Rightarrow & t & \le & 6, \\ \text{és} & 4-t & \le & 0 & \Rightarrow & 4 & \le & t, \\ \text{és} & 5-t & \le & 0 & \Rightarrow & 5 & \le & t \end{array}$$

egyenlőtlenségeknek.

Tehát, ha $5 \le t \le 6$, akkor az $\underline{x} = [8,\ 0,\ 0]^T$ optimális megoldás és $z_{opt} = -40 + 8t$.

Ha $6 \le t$, akkor $-18 + 3t$ pozitív lesz, tehát itt választunk generáló elemet.

B_2	u_1^*	x_1	x_3	v_1	
x_2		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4
u_2		$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	8
z		$+9-1,5t$	$-5+0,5t$	$-4+0,5t$	$32-4t$

Leolvasható egy lehetséges megoldás:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0, & x_2 = 4, & x_3 = 0, \\ u_1 = 0, & u_2 = 8, & v_1 = 0, \\ z = 32 - 4t & & \end{array}$$

Optimális, ha

$$\begin{array}{llllllll} & 9-1,5t & \le & 0 & \rightarrow & 6 & \le & t, \\ \text{és} & -5+0,5t & \le & 0 & \rightarrow & t & \le & 10, \\ \text{és} & -4+0,5t & \le & 0 & \rightarrow & t & \le & 8. \end{array}$$

Tehát, ha $6 \le t \le 8$, akkor az $\underline{x} = [0,\ 4,\ 0]$ optimális megoldás és $z_{opt} = 32 - 4t$.

Ha $8 \le t$, akkor $-4 + 0,5t$ pozitív lesz, ezért itt választhatunk generáló elemet:

B_3	u_1^*	x_1	x_3	u_2	
x_2	$\vdots$	-1	2	1	12
v_1	$\vdots$	-3	5	2	16
z	$\vdots$	-3	$15-2t$	$8-t$	$96-12t$

Leolvasható egy lehetséges megoldás:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 12, \quad x_3 = 0,$$
$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad v_1 = 16,$$
$$z = 96 - 12t.$$

Optimális, ha

$$15 - 2t \le 0 \rightarrow \frac{15}{2} \le t,$$
$$\text{és} \quad 8 - t \le 0 \rightarrow 8 \le t.$$

Tehát, ha $8 \le t \le +\infty$, akkor optimális az $\underline{x} = [0,\ 12,\ 0]$ megoldás és $z_{opt} = 96 - 12t$.

Oldjuk meg a feladatot az ajánlott táblázat segítségével is!

A feladat induló táblázata:

B_0	x_1	x_2	x_3	v_1	$\underline{b}$
u_1^*	$-\boxed{1}$	2	−1	−1	8
u_2	−1	1	2	0	12
p	5	−8	−1	0	0
q	−1	1	0	0	0
z^*	1	2	−1	−1	8
B_1	u_1	x_2	x_3	v_1	
x_1		$\boxed{2}$	−1	−1	8
u_2		3	1	−1	20
p		−18	4	5	−40
q		3	−1	−1	8
z^*		0	0	0	0
$t_k = -p/q$		6	4	5	

Itt még nem olvasható le egy lehetséges megoldás.

Előállítjuk a z^*-t és e szerint választunk generáló elemet.

A z^* eltűnt, tehát egy lehetséges megoldás olvasható le.

Állítsuk elő a $t_k = -p/q$ értékeket!

$$t_0 = \max_{q_j < 0} \left(-\frac{p_j}{q_j} \right) = 5 \quad \text{és} \quad t_1 = \min_{q_j > 0} \left(-\frac{p_j}{q_j} \right) = 6.$$

Tehát a feladat leolvasható lehetséges megoldása a $5 \le t \le 6$ intervallumban optimális és az optimális megoldás:

$$\underline{x}_{opt\,1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad z_{opt} = -40 + 8t.$$

Generáló elemet a $\min\limits_{q_j > 0} \left(-\dfrac{p_j}{q_j} \right)$ értékek oszlopában választva, a B_2-es táblázat:

B_2	x_1	x_3	v_1	$\underline{b}$
x_2	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	4
u_2	$-3/2$	$5/2$	$1/2$	8
p	9	-5	-4	32
q	$-3/2$	$1/2$	$1/2$	-4
$t_k = -p/q$	6	10	8	

A t_k sorból látszik: $\max\limits_{q_j < 0} \left(-\dfrac{p_j}{q_j} \right) = 6 = t_1$ és $t_2 = \min\limits_{q_j > 0} \left(-\dfrac{p_j}{q_j} \right) = 8$, tehát $6 \le t \le 8$ esetén az optimális megoldás:

$$\underline{x}_{opt\,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad z_{\ opt} = 32 - 4t.$$

A generáló elemet megint a $\min\limits_{q_j > 0} \left(-\dfrac{p_j}{q_j} \right)$ értéknél választva:

B_3	x_1	x_3	u_2	b
x_2	-1	2	1	12
v_1	-3	5	2	16
p	-3	15	8	96
q	0	-2	-1	-12
$t_k = -p/q$	–	$15/2$	8	

Tehát a $8 \le t < +\infty$ esetén az optimális megoldás:

$$x_{opt\,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad z_{opt} = 96 - 12t.$$

Ezzel elő is állítottuk az összes karakterisztikus intervallumot és a hozzátartozó optimális megoldást is.

Összefoglalva a megoldást:

A t értékei	$5 \le t \le 6$	$6 \le t \le 8$	$8 \le t \le 10$
Optimális program Célfüggvény értéke	(8, 0, 0) $-40 + 8t$	(0, 4, 0) $32 - 4t$	(0, 12, 0) $96 - 12t$

4.3.2. Paraméter a $\underline{b}$ vektorban

Mátrix- és vektorszimbólumokkal a feladat:

$$\underline{x} \ge 0$$
$$A \cdot \underline{x} \le \underline{b} + \underline{d} \cdot t$$
$$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to \text{maximum},$$

ahol $\alpha \le t \le \beta$.

Ilyen típusú feladatot a duálpárján keresztül oldhatjuk meg. Így a t paraméter a célfüggvénybe kerül és a 3.3.1. pontban foglaltak szerint járhatunk el.

4.4. Érzékenységvizsgálat EXCEL táblázatkezelővel

A lineáris és a nemlineáris programozási feladatok megoldására és az optimális megoldás utóelemzésére jól felhasználható a gyakorlatban igen elterjedt EXCEL táblázatkezelő. Ebben a pontban egy konkrét feladaton azt mutatjuk meg, hogyan lehet a SOLVER makrót programozási feladok megoldására és érzékenységvizsgálatra felhasználni.

4.4.1. Solver program bemutatása

Az operációkutatás különböző modelljeinek tényleges megoldása hosszadalmas, számítógép nélkül sokszor reménytelenül megoldhatatlan feladat. Ezért ezen megoldási eljárásokra különböző számítógépes programcsomagokat készítettek, amelyek különböző számítógép környezetben különböző hatékonysággal használhatók. Ezek egyike az EXCEL táblázatkezelőn található SOLVER beépülő makró.

Az operációkutatással foglalkozó munkák ismertetik a különböző optimumszámítási modelleket, azok fő jellemzőit és megoldási algoritmusait. Láttuk, hogy a modellek egy jó részének megoldása visszavezethető lineáris modell megoldására. Ezért kitüntetett szerepe van a megoldási algoritmusok között a lineáris programozási feladatok megoldási algoritmusának. Ennek ismeretét általában megkövetelik a hallgatóktól. Egyes speciális modellek (szállítási, hozzárendelési, egészértékű, hiperbolikus stb.) megoldására több (egyszerűsített?) matematikai módszert és eljárást dolgoztak ki és oktatnak a felsőoktatási intézményekben. Ezek lehetőséget adnak hatékony számítógépes programok megírására.

Ebben a fejezetben azt ismertetjük, hogy hogyan lehet felhasználni a matematikai programozási feladatok megoldására a szinte minden munkahelyen rendelkezésre álló EXCEL táblázatkezelőt. Az EXCEL kézikönyvek legtöbbje csak említést tesz arról, hogy az EXCEL táblázatkezelő SOLVER *beépülő makró programja* alkalmas lineáris programozási feladatok megoldására, de nem foglakozik a feladatok megoldásával, mert „ezek megértése és alkalmazása magasabb szintű matematikai ismereteket feltételez”.

Azok a hallgatók és azok a mérnökök, közgazdászok stb., akik tanulmányozták és megértették az operációkutatásban használatos optimumszámítási modelleket – a modellek számszerűsítése után – igen eredményesen használhatják az EXCEL táblázatkezelőt a problémák megoldására, mert nemcsak a számításokat végzi el, hanem *üzeneteivel segíti* a probléma megoldását.

Az EXCEL alapfokú ismeretét feltételezve fogjuk ismertetni matematikai programozási feladatok EXCEL-beli megoldását.

A munkát kezdjük azzal, hogy tervezzük meg a *programozási feladat* megoldásának EXCEL környezetét.

Tervezzük és határozzuk meg:

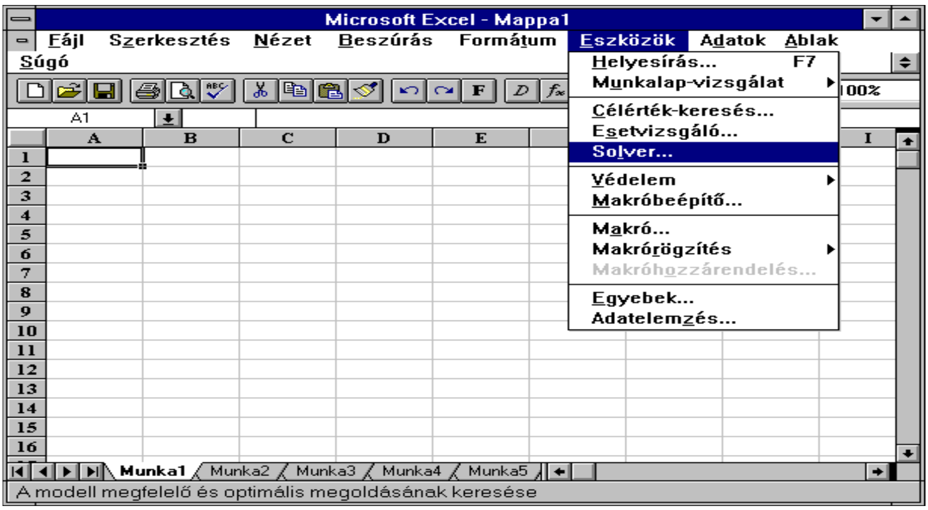
- a modell *változóit* és azok helyét a munkatáblázaton,
- *a korlátozó feltételeket* és azok helyét a munkatáblázaton,
- a *célfüggvény kiszámítási* módját és helyét a munkatáblázaton.

Sokféleképpen helyezhetők el a szóban forgó értékek, ezért most összefoglaljuk azokat a fő tartományokat, amelyeket a feladatok SOLVER-rel történő megoldás során ki kell jelölni:

- Válasszuk ki azt a *cellatartományt* (sort vagy oszlopot vagy kétdimenziós tömböt), amelyben a *változók értékei* jelennek meg. Minden változónak feleltessünk meg egy cellát, így a tartomány annyi cellából fog állni, ahány változó van a feladatban. Töltsük fel ezek értékét 0-val.
- Helyezzük el az *alapadatokat: az együttható mátrixot, a jobb oldal vektorát, a célfüggvény együttható vektorát* stb.

- Jelöljük ki azokat a cellákat, ahol elhelyezzük a *korlátozó feltételeket kifejező egyenletek és egyenlőtlenségek bal oldalát.* (A feltételeket megfogalmazhatjuk mátrix–vektor szorzással, de lehet a változók és az együtthatók szorzatának összegével is. Az $A\underline{x}$ szorzás elvégezhető a függvényvarázsló segítségével: MSZORZAT(A; $\underline{x}$), vagy a változó cellák és az együtthatókat tartalmazó cellák szorzatösszegeként, vagy ha nem tároljuk az adatokat a munkatáblázaton, akkor a változó cellák és az együtthatók szorzatának összegeként).
- Jelöljünk ki egy *cellát* a célfüggvény képletének.

A probléma definiálása a SOLVER-rel:
A fenti előkészítés után hívjuk meg az **Eszközök** menü SOLVER parancsát. Ha a SOLVER nem jelenik meg az **Eszközök** lenyíló menüben, akkor a **Makróbeépítő**vel telepíteni kell!



1. Válasszuk a SOLVER parancsot!

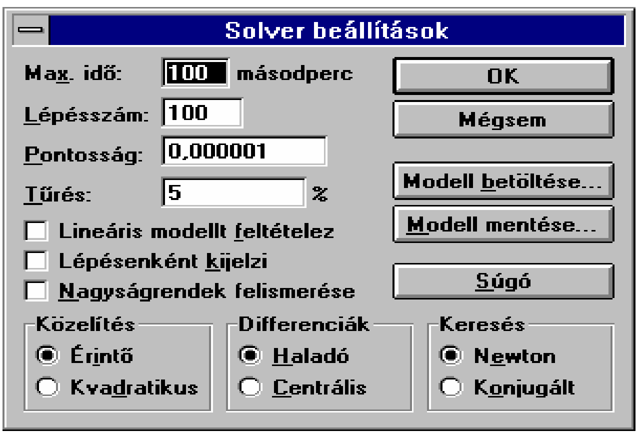
2. A ***Célcella*** mezőbe írjuk be a célcella cellahivatkozását vagy nevét vagy álljunk a kurzorral a célcellára.
3. Ha azt szeretnénk, hogy a célfüggvény értéke a lehető legnagyobb legyen, a **Max,** ha azt, hogy a célfüggvény értéke a lehető legkisebb legyen, a **Min** választókapcsolót jelöljük be. Ha pedig a célértéket egy adott értékre akarjuk beállítani, akkor az **Érték** választókapcsolót jelöljük be és írjuk be a mezőbe a kívánt értéket.
4. A **Módosuló cellák** mezőbe írjuk be a változókat tartalmazó cellatartomány nevét vagy hivatkozását, vagy jelöljük ki a kurzorral. Ha azt szeretnénk, hogy a SOLVER ajánljon változó cellákat, akkor kattintsunk az **Ajánlat** gombra. Legfeljebb 200 változót adhatunk meg.
5. A **Korlátozó feltételek** mezőt a következőképpen töltetjük ki: Nyomjuk meg a **Felvesz** gombot, ekkor megnyílik a következő párbeszédablak:

A **Cellahivatkozás** mezőbe írjuk be azt a cellacímet vagy jelöljük ki, ahol a korlátozó feltétel baloldala van, majd válasszuk ki a relációt az alábbi módon:

A relációk között az **int** a változók egészértékűségét biztosítja. A **Korlátozó feltétel** mezőbe írjuk be a korlátozó feltételek jobb oldalát tartalmazó cella címét vagy jelöljük ki, vagy írjuk be a jobb oldal értékét. A **Felvesz** lenyomásával a feltétel bekerül a kialakítandó modellbe. Végezzük el ezt a műveletet annyiszor, ahány korlátozó feltétel van. Itt kell megadni a változók nem negatívitási feltételt is! Minden változó cellához két (egy alsó és egy felső) korlát tartozhat. Egy problémában legfeljebb 1000 cellához rendelhetünk korlátot. Az utolsó korlátozó feltétel felvétele után az **OK**-val léphetünk vissza a **Solver paraméterek** panelhez.

Ha a problémát az elmondottak szerint definiáltuk a SOLVER program számára, akkor gondolhatunk a megoldásra. Az eddig elmondottakból viszont nem derül ki a modell megoldásának körülményei: Mennyi időt szánunk a megoldásra, legfeljebb hány iterációt végezzen a program (hiszen végtelen ciklusba is kerülhet a megoldás során), milyen pontossággal kívánjuk előállítani a változó értékét (hiszen közelítő számítást végzünk!), lineáris-e a modell stb.?

Ezeknek a nem lényegtelen körülményeknek a figyelembevételére szolgál a **Beállítások párbeszédpanel,** amelyet a **Beállítás** gomb megnyomásával nyithatjuk ki:



A párbeszédpanelen megjelenő beállítások olyan alapértékeket jelentenek, amelyek a legtöbb probléma megoldásánál megfelelők. A beállításokat most nem részletezzük (a **Súgó** gomb megnyomására részletes magyarázatot kapunk), konkrét feladatok esetén magyarázzuk a konkrét feladathoz szükséges beállítás okát. Viszont minden esetben szükséges figyelembe venni, hogy lineáris-e a modell vagy nem, ha igen, akkor a **Lineáris modellt feltételez**-t x-re kell állítani. Az **OK** megnyomásával visszatérhetünk a Solver párbeszédpanelhez és kérhetjük a megoldás előállítását a **Megoldás** gomb megnyomásával. A modell nagyságától függően rövidebb-hosszabb idő múlva különböző üzenet jelenik meg a képernyőn.

4.4.2. Példa érzékenységvizsgálatra

Az elmondottakat alkalmazzuk a következő feladat megoldására:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \\
x_1 & + & 4x_2 & & x_3 & + & 2x_4 & & & \leq & 90 \\
 & & 3x_2 & & & + & x_4 & + & 2x_5 & \leq & 50 \\
x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 60 \\
x_1 & & & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 80 \\
\hline
8x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & + & 10x_4 & + & 2x_5 & \rightarrow & \max
\end{array}$$

Helyezzük el a feladat együttható mátrixát a táblázat egy kijelölt helyén. A célfüggvény együtthatóit a megszokott módon az együttható mátrix alá, a jobb oldal értékeit a mátrix mellé.

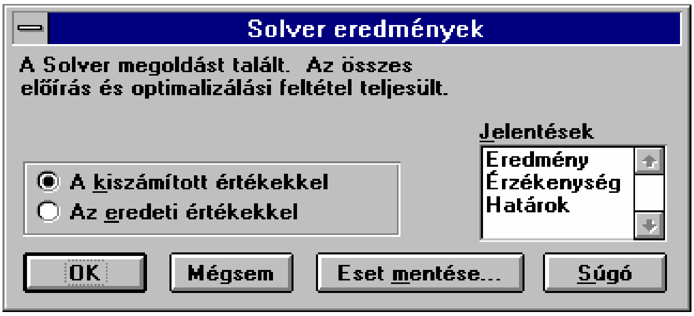
Fogalmazzuk meg a korlátozó feltételeket és a célfüggvényt:

- Az *egyenlőtlenségrendszer bal oldalát* úgy kapjuk, hogy összeszorozzuk az *együttható mátrixot az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektorral,* amelyet a C11:C15-ben található vektor reprezentál. Az eredmény a H12:H15-ben látható.
- A célfüggvény képlete a H9 cellában látható.
- A kapacitásvektor G5:G8-ben látható.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
							Lineáris programozás	
Változó								
X1	X2	X3	X4	X5	REL	KAPAC		
1	**4**	**1**	**2**	**0**	**<=**	**90**	Erőforrás1	**90**
0	**3**	**0**	**1**	**2**	**<=**	**50**	Erőforrás2	**50**
1	**2**	**0**	**1**	**1**	**=**	**60**	Erőforrás3	**60**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**=**	**80**	Erőforrás4	**80**
8	**6**	**2**	**10**	**2**	max	CÉL	=MSZORZAT(A9:E9;C11:C15)	
Célegyü	**ttható**							
X1		**55**					**A*x**	
X2		**0**					=MSZORZAT(a5:e6;c11:c15)	
X3		**25**					=MSZORZAT(a5:e6;c11:c15)	
X4		**5**					=MSZORZAT(a7:e8; c11:c15)	
X5		**0**					=MSZORZAT(a7:e8; c11:c15)	

Ezen előkészítés után hívjuk meg a SOLVER programot! A lenyíló menübe írjuk be a kért paramétereket a következő módon:

A **Megoldás** gomb benyomása után különböző üzenet jelenik meg:



Ha megoldást talált, akkor a *Solver eredmények* párbeszédpanelon kijelöléssel kérhetjük az eredményeket. Kérhetjük mind a három jelentést, egészértékű feladatok esetén nem készíthető *Érzékenység és Határok* jelentés. Az **OK** gomb megnyomására többszöri képernyő változás után a jelentéseket elhelyezi a munkafüzetünk azonos nevű munkalapjára.

Nyissuk fel az *Eredmény jelentés* munkalapot:

Microsoft Excel 5.0 Eredmény jelentés Készült: 97.2.15 18:17

Célcella (Max)

Cella	Név	Végérték
$I$9	CÉL	540

Módosuló cellák

Cella	Név	Végérték
$D$11	X1	55
$D$12	X2	0
$D$13	X3	25
$D$14	X4	5
$D$15	X5	0

Ebben leolvasható a célcella és a módosuló cellák eredeti és a végértéke, a korlátozó feltételek teljesülése.

Korlátozó feltételek

Cella	Név	Cellaérték	Képlet	Állapot	Eltérés
$J$5	erő1	90	$J$5<=$H$5	Éppen	0
$J$6	erő2	5	$J$6<=$H$6	Bőven	45
$J$7	erő3	85	$J$7=$H$7	Éppen	0
$J$8	erő4	80	$J$8=$H$8	Éppen	0
$D$11	X1	80	$D$11>=0	Bőven	80
$D$12	X2	0	$D$12>=0	Éppen	0
$D$13	X3	1,20437E−11	$D$13>=0	Éppen	0
$D$14	X4	5	$D$14>=0	Bőven	5
$D$15	X5	0	$D$15>=0	Éppen	0

Az *Érzékenység jelentés* munkalapon elemző táblázatok találhatók:

Az egyik táblázat a változók *redukált vagy csökkentett költségét* adja meg és azzal kapcsolatos értékeket. Ebben a táblázatban összefoglalóan láthatók a c_j és a b_i paraméterek változásának következményei:

Microsoft Excel 5.0 Érzékenység jelentés

Módosuló cellák

Cella	Név	Végérték	Csökkentett költség	0 Célegyüttható	Megengedhető növekedés	Megengedhető csökkenés
\$D\$11	X1	55	0	8	4	2,666666667
\$D\$12	X2	0	−14	6	14	1E+30
\$D\$13	X3	25	0	2	8	4
\$D\$14	X4	5	0	10	8	4
\$D\$15	X5	0	−4	2	4	1E+30

A *redukált költség* a bázisba nem került változókat értékeli. Ha a változó bekerült a bázisba, akkor a redukált költség értéke 0, ha nem, akkor negatív vagy pozitív.

Maximum cél esetén értéke negatív és azt jelzi, hogy legalább ennyivel kellene növelni az eredeti célegyüttható értékét ahhoz, hogy ez a változó bekerüljön a megoldásba.

Min cél esetén értéke pozitív és azt jelzi, hogy legalább ennyivel kellene csökkenteni az eredeti célegyüttható értékét ahhoz, hogy ez a változó bekerüljön a megoldásba.

A másik táblázat az *erőforrások árnyékárat* adja meg és ezekkel kapcsolatos értékeket. Az *árnyékárak az* erőforrásokat értékelik

Cella	Név	Végérték	0 Árnyékár	Feltétel jobb oldala	Megengedhető növekedés	Megengedhető csökkenés
\$J\$5	Erő1	90	2	90	90	10
\$J\$6	Erő2	5	0	50	1E+30	45
\$J\$7	Erő3	60	6	60	25	55
\$J\$8	Erő4	80	0	80	10	50

Az árnyékárak értékei akkor nem nullák, ha egyenlőség formában teljesül az erőforrásra előírt feltételi relációi.

Azt jelzi, hogy a teljesen kihasznált erőforrás kapacitásának (végtelen kicsiny) egységgel való növelése maximum cél esetén mekkora célérték növeléssel jár, minimum cél esetén az erőforrás kapacitásának (végtelen kicsiny) egységgel való csökkenése mekkora célérték csökkenéssel jár.

Az árnyékárak mellett láthatók azok a megengedhető változások, amelyek következtében még lehetséges megoldásokat kapunk. Például a harmadik erőforrás árnyékára 6, ezért ez *érzékeny* paraméter és az erőforrás növelhető 25 egységgel, így azt várhatjuk, hogy 150-nel növekszik a célfüggvény értéke. Erről úgy győződhetünk meg, hogy az eredeti feladat jobboldalának vektorában a harmadik erőforrás értékét 85-re változtatjuk és újra indítjuk a SOLVER programot. A Megoldás gomb megnyomása után újra elkészíti a már bemutatott módon az optimális megoldást és az érzékenységjelentést.

Hasonló módon elemezhető a célfüggvény együtthatóiban történő változás következményei is. Addig folytatható a vizsgálat, amíg a gyakorlatnak megfelelő megoldást nem kapunk.

5. Szállítási feladatok

5.1. A feladat megfogalmazása

Adott m számú telephelyen $t_1, t_2, \ldots, t_m$ mennyiségű homogénnek tekinthető termék van, amelyet n számú megrendelőkhöz kell elszállítani, akiknek az igényük rendre $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Ismertes az i-edik feladótól a j-edik megrendelőhöz a fajlagos szállítási költség, c_{ij}.

Kérdés az: *Honnan hová mennyit szállítsunk, hogy a szállítási összköltség a lehető legkisebb legyen?*

Tételezzük fel, hogy a feladóknál tárolt mennyiség egyenlő a rendelt mennyiséggel. A modell felírásához vezessük be az x_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, .., n$) döntési változókat, amelyek a F_i feladótól a R_j megrendelőhöz szállított mennyiséget jelenti. Akkor az $x_{ij} \geq 0$ változókat úgy kell meghatároznunk, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = t_i \tag{4.1.}$$

és minden $j = 1, 2, \ldots, n$-re

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} = r_j \text{ teljesüljön} \tag{4.2}$$

és

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{ij}x_{ij} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$$

a lehető legkisebb legyen.

A (4.1.) egyenlőség azt fejezi ki, hogy az i-edik feladótól a különböző megrendelőknek elszállított mennyiségek összege pontosan t_i legyen, a (4.2) egyenlőség szerint pedig a j-edik megrendelőnek a különböző feladótól elszállított mennyiség r_j legyen.

Az alapfeladatban megköveteljük, hogy $t_1 + t_2 + \cdots + t_m = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ azaz a készletek összege egyenlő legyen az igények összegével.

Tömören így fogalmazhatjuk meg a klasszikus szállítási feladatot:

Definíció: Szállítási feladatoknak nevezzük azon lineáris programozási feladatokat, amelyek matematikai modellje:

a) $x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$,

b) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = t_i > 0$,

c) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = r_j > 0$,

d) $\sum_{i=1}^{m} t_i = \sum_{j=1}^{n} r_j$,

e) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$

alakú, vagy ilyen alakra hozható.

A modellből látható, hogy a klasszikus szállítási feladat *lineáris programozás módosított normál* feladatának felel meg.

Mátrix-vektor szimbólumokkal megfogalmazva:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{t} \\ \underline{r} \end{bmatrix} \text{ és } \underline{1}\underline{t} = \underline{1}\underline{r},$$

$$\underline{x} \geq \underline{0},$$

$$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to \min!$$

ahol A_1 az első m db, A_2 a következő n db egyenlet együttható mátrixa, $\underline{x} = [x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{mn}]^T$ az m·n db ismeretlen vektora, $\underline{c}^T = [c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{mn}]^T$ a fajlagos költségek sorvektora, $\underline{t} = [t_1, t_2, \cdots, t_m]^T$ a feladók készletének vektora, $\underline{r} = [r_1, r_2, \cdots, r_n]^T$ a megrendelők igényét kifejező vektor.

5.2. Példa egy klasszikus szállítási feladatra

Tegyük fel, hogy három gazdaság napi 50, 30, 20 t zöldséget termel egy szezonban, amelyet négy konzervgyár vásárol fel 40, 30, 20, 10 t/nap kapacitásának megfelelően. Az integrátor érdekelt abban, hogy az összes szállítási költség a lehető legkisebb legyen, mert jelentős költséget jelent a termelési költségek mellet. Kérdés az: *honnan, hová és mennyit szállítsanak, hogy a szállítási költség a lehető legkisebb legyen?*

Egy tonna szállítási költségét a következő táblázat mutatja:

Rendeltetési helyek

		R_1	R_2	R_3	R_4	Készlet (t)
Feladók	F_1	8	10	9	2	50
	F_2	1	6	4	10	30
	F_3	3	4	5	1	20
	Igény(t)	40	30	20	10	100 t

Például a táblázatban az első sor első oszlopában lévő 8-as azt jelenti, hogy az F_1 feladóhelyről az R_1 rendeltetési helyre 8 ezer forintba kerül az egy tonna termék szállítása.

Jelöljük az i-edik feladóhelyről a j-edik rendeltetési helyre egyenlőre ismeretlen szállítandó mennyiséget x_{ij}-vel és a feltételrendszer felírásához azt a megszorítást tesszük, hogy minden feladótól el kell szállítani a terméket, valamint minden megrendelő igényét ki kell elégíteni, akkor az előbbi feltételeket a következő matematikai formulával fogalmazhatjuk meg:

a) $x_{ij} \geq 0$, ahol i= 1, 2, 3: j=1, 2, 3, 4

b) $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 30$
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 20$

c) $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40$
$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30$
$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20$
$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10$

A szállítási költséget pedig a $K = 8x_{11} + 10x_{12} + 9x_{13} + 2x_{14} + x_{21} + 6x_{22} + 4x_{23} + 10x_{24} + 3x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} + x_{34}$ lineáris függvény fejezi ki.

Ennek a függvénynek keressük a minimumát a felírt feltételek mellett. Látható, hogy ez a feladat megfelel a 4.1 pontban megfogalmazott alapfeladatnak.

Szállítási feladattal állunk szemben akkor is, ha meg kell határozni egy gépcsoport munkatervét egynél több termék gyártása esetén, egy munkahelyen a munkák szétosztását, beruházások szétosztását, az ipari feldolgozásra szánt termékek (cukorrépa, napraforgó, tej, vágóállat stb.) feldolgozó üzemek közötti elosztását.

Írjuk fel a 4.2 pontban ismertetett feladat szimplex táblázatát: a feladókhoz tartozó feltételek duál változóit jelöljük u_1, u_2, u_3, illetve a megrendelőkhöz tartozó feltételek duál változóit v_1, v_2, v_3, v_4-gyel.

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	
$^*u_1$	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	50
$^*u_2$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	30
$^*u_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	20
$^*v_1$	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	40
$^*v_2$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	30
$^*v_3$	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	20
$^*v_4$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	10
z	−8	−10	−9	−2	−1	−6	−4	−10	−3	−4	−5	−1	0
Z^*	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	200

Jegyezzünk meg egy-két olyan észrevételt, amelyre majd később hivatkozunk.

a) Észrevehetjük, hogy az együtthatómátrix x_{ij}-k feletti oszlopvektora minden i és j mellett $\begin{bmatrix} \underline{e}_i \\ \underline{e}_j \end{bmatrix}$ alakban írható, ahol $\underline{e}_i$ egy $(m\times 1)$, $\underline{e}_j$ pedig $(n\times 1)$ típusú egységvektor.

b) Az m db feladót és n db igénylőt tartalmazó feladatban nm db primál és m + n db duál változó van.

c) Az együttható mátrix rangja: m+n−1. Ez úgy látható be, hogy az első m sor összege egyenlő a további n sor összegével, azaz lineárisan összefüggő rendszert alkot, ezért biztos, hogy a rang legfeljebb m+n−1 lehet.

d) A feladat duál párja a következő:

$$\begin{array}{lllllllll}
u_1 & & & + v_1 & & & & \le & 8 \\
u_1 & & & & + v_2 & & & \le & 10 \\
u_1 & & & & & + v_3 & & \le & 9 \\
u_1 & & & & & & + v_4 & \le & 2 \\
 & u_2 & & + v_1 & & & & \le & 1 \\
 & u_2 & & & + v_2 & & & \le & 6 \\
 & u_2 & & & & + v_3 & & \le & 4 \\
 & u_2 & & & & & + v_4 & \le & 10 \\
 & & u_3 & + v_1 & & & & \le & 3 \\
 & & u_3 & & + v_2 & & & \le & 4 \\
 & & u_3 & & & + v_3 & & \le & 5 \\
 & & u_3 & & & & + v_4 & \le & 1
\end{array}$$

$$z = 50u_1 + 40u_2 + 20u_3 + 40v_1 + 30v_2 + 20v_3 + 10v_4 \to \max$$

A dualitásnál tárgyaltuk, hogy ebben az esetben a duál változók előjel kötetlenek.

e) Tudjuk, hogy a primál feladat azon változóihoz tartozó duálegyenlőtlenségek, amelyek bekerültek a programba egyenlőség formájában teljesülne, vagyis $u_i + v_j = \boxed{c_{ij}}$.

Ebben a modellben feltételeztük, hogy a feladók összes készlete egyenlő az igénylők összes igényével. A gyakorlatban ez nem mindig van így. Ekkor a relációk helyes megválasztásával tudjuk a lineáris programozási modellt felírni. Ha a készlet nagyobb, mint az igény, akkor a készletre felírt feltételekben ≤ relációt kell írni, mert lesz olyan feladó, ahol készlet marad. Előfordul a gyakorlatban az az eset is, amikor nem lehet szállítani bizonyos feladótól bizonyos megrendelőnek technikai okok miatt (pl. egy hidat lezártak stb.). Ebben az esetben az x_{ij}-t vagy nem írjuk be a modellbe, vagy $x_{ij}=0$ egyenlőséget is feltüntetjük. Ekkor a hozzátartozó szállítási költség nulla. Ez a modell akkor is lineáris programozási feladat, amelynek megoldása semmilyen elvi problémát nem jelent.

A szállítási feladatokat kiemeljük a lineáris programozási feladatok közül, mert láttuk e feladatok speciális struktúráját és ez lehetővé teszi a szimplex módszernél egyszerűbb, de legalábbis annál kisebb számítás- és memóriaigényű módszer kidolgozását.

5.3. Szállítási feladat megoldása disztribúciós módszerrel

A szállítási feladatok lineáris programozási modelljének és megoldásának gyenge pontja a viszonylagos nagy méret, mert m darab feladó és n darab megrendelő esetén a modell m + n feltételt és m x m változót tartalmaz. (Már 10 feladót és 10 igénylőt tartalmazó modell esetén 20 x 100 méretű mátrixot kell kezelni a szimplex táblázaton úgy, hogy közben a táblázatban igen sok 0 szerepel. Ezért a matematikusok a fent említett specifikumokat kihasználva dolgozták ki a *szállítási szimplex* módszer, amely a magyar szakirodalomban *disztribúciós módszer* néven terjedt el.

5.3.1. Disztribúciós módszer lényege és indulótáblázata

A disztribúciós módszer lényege, hogy a x_{ij}, c_{ij}, t_i és r_j „peremadatokból” felépített indulótáblázaton jelöl ki egy lehetséges bázismegoldást a primál feladatra anélkül, hogy számon tartaná a szimplex táblázatbeli transzformációs változtatásokat és fokozatosan előállítja a duál feladat egy lehetséges bázismegoldását. Ezt az eljárást akkor lehet csak alkalmazni, ha $\sum t_i = \sum r_j$.

A szállítási feladat disztribúciós induló táblázata:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & R_1 & R_2 & \cdots & R_n & \\ \hline F_1 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & t_1 \\ F_2 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_n & c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} & t_m \\ \hline & r_1 & r_2 & \cdots & r_n & \sum t_i = \sum r_j \end{array}$$

A konkrét feladatunk esetében:

	R_1	R_2	R_3	R_4	
F_1	8	10	9	2	50
F_2	1	6	4	10	30
F_3	3	4	5	1	20
	40	30	20	10	$100 = \Sigma t_i = \Sigma r_j$

Ha $\Sigma\, t_i > \Sigma\, r_j$, azaz a készletek nagyobbak, mint az igények, akkor úgy járunk el, hogy egy *fiktív megrendelőt* állítunk be $r_{n+1} = \Sigma\, t_i - \Sigma\, r_j$ megrendeléssel.

Tehát az induló táblázatot kiegészítjük egy új oszloppal, melynek az oszlopában csupa nulla áll (fiktív szállítás költsége nulla), az r_{n+1} peremérték pedig a $\Sigma\, t_i - \Sigma\, r_j$-vel egyenlő.

Nézzünk erre egy példát:

	R_1	R_2	R_3	R_4	
F_1	3	4	2	1	100
F_2	2	5	10	4	80
	10	20	60	50	

A táblázatból leolvasható, hogy a feladó helyen 180 egység áll rendelkezésre, míg a rendeltetési helyek igénye csak 140 egység. Tehát bevezetünk egy fiktív (névleges) megrendelőt 40 egység igénnyel. Így az induló táblázat a következő lesz.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	
F_1	3	4	2	1	0	100
F_2	2	5	10	4	0	80
	10	20	60	50	40	180

Ha a rendeltetési helyek igénye nagyobb, mint a feladóhelyek készlete, azaz $\sum t_i < \sum r_j$, akkor *fiktív (névleges) feladót* vezetünk be $t_{m+1} = \sum r_j - \sum t_i$ készlettel. Természetesen erről a feladóhelyről történő szállítási költség minden rendeltetési helyre zérus.

Például, ha az előbbi feladatban a feladók készlete 60, 50 lennének, egyéb adatok változatlansága mellett, akkor a disztribúciós táblázat:

	R_1	R_2	R_3	R_4	
F_1	2	4	2	1	60
F_2	2	5	10	4	50
F_3	0	0	0	0	30
	10	20	60	50	140

Gyakran merül fel olyan probléma, hogy valamely feladó valamely megrendelőnek nem szállíthat (természeti, műszaki stb. akadályok). Ilyenkor úgy járhatunk el (tekintettel arra, hogy csak a költségmátrixot ismerjük), hogy a megfelelő viszonylatok szállítási költségét a disztribúciós táblázatban végtelen nagynak tekintjük. Ezt a végtelen nagy költséget a szakirodalomban M-mel szokás jelölni és *tiltótarifának* nevezik.

5.3.2. Lehetséges bázismegoldás előállítása

A bázisvektorok kiválasztását a hozzájuk tartozó cij elemek generáló elemszerű bekeretezésével jelezzük és a hozzájuk tartozó bázisváltozók konkrét értékét a keretre írjuk:

$$\boxed{c_{ij}}^{\,x_{ij}}$$

A bázisváltozók értéke $x_{ij} = \min(t_i, r_j)$ legyen. Az így kiválasztott c_{ij} elemeket *kötött helyeknek* nevezzük. A kötött helyek száma az együtthatómátrix rangjával egyenlő, ami m+n−1.

Lehetséges bázismegoldás előállítására szolgáló módszerek közül hármat ismertetünk.

„Északnyugati sarok” módszer

Kiindulunk egy elosztási feladat disztribúciós táblázatából: Az első feladó készletéből kielégítjük az első, második stb. megrendelő teljes igényét, ha az első feladónak kimerül a készlete, folytatjuk a második feladó készletével az első kielégítetlen megrendelőnél és így tovább, amíg az utolsó feladó készletéből az utolsó megrendelő igényét is ki nem elégítjük.

Így egy m+n−1 kötött helyet tartalmazó bázismegoldáshoz jutunk általában.

Előfordul, hogy egy feladó és megrendelő készlete egyszerre egyenlítődik ki, akkor a feladat *degenerált*. Ilyenkor is m+n−1 kötött helyet jelölünk ki; nullát írunk a generáló elem fölé.

A konkrét feladat esetében:

	R_1	R_2	R_3	R_4	
F_1	$\boxed{8}^{40}$	$\boxed{10}^{10}$	9	2	50
F_2	1	$\boxed{6}^{20}$	$\boxed{4}^{10}$	10	30
F_3	3	4	$\boxed{5}^{10}$	$\boxed{1}^{10}$	20
	40	30	20	10	100

Az eljárás előnye, hogy gyorsan előállítható egy lehetséges bázismegoldás. Hátránya az, hogy általában messze esik a kapott bázismegoldás az optimális megoldástól.

A szállítási költség:

$$K = 40 \cdot 8 + 10 \cdot 10 + 20 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 10 \cdot 1 = 640 \text{ e Ft.}$$

„Sor- és oszlopminimum" módszer

Ezzel a módszerrel olyan bázismegoldást keresünk, amely a célt is igyekszik figyelembe venni.

Lényege, hogy a legkisebb költségű helyeket választjuk generáló elemnek és a feltételeket igyekszünk kielégíteni. Az eljárást a legnagyobb peremadatnál célszerű kezdeni.

	R_1	R_2	R_3	R_4	
F_1	$\downarrow \boxed{8}^{40} \leftarrow$	10 —	9 —	$\boxed{2}^{10}$	$\leftarrow$50
F_2	$\boxed{1}^{0} \rightarrow$	$\downarrow \boxed{6}^{10}$	$\boxed{4}^{20}$	10	30
F_3	3	$\rightarrow$ $\boxed{4}^{20}$	5	1	20
	40	30	20	10	

Szállítási költség: $K = 40 \cdot 8 + 10 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 10 \cdot 6 + 20 \cdot 4 + 20 \cdot 4 =$ 580 e Ft

Ez a bázismegoldás *degenerált,* mert van olyan bázisváltozó, amelynek értéke nulla.

„Vogel-Korda" módszer

Most is a disztribúciós táblázatból indulunk ki.

Képezzük mindegyik sor és oszlop két-két legkisebb költség-elemének különbségét. Írjuk ezeket az értékeket a táblázat mellé, illetve alá.

A legnagyobb differenciához tartozó sor, vagy oszlop legkisebb elemét lekötjük úgy, hogy a hozzátartozó megrendelőt, vagy feladót elégítjük ki. $x_{ij} = \min(t_i;r_j)$ értékkel kötjük le.

A kielégített sort, vagy oszlopot elhagyjuk és a maradék táblázattal megismételjük az eljárást, korrigálva a peremadatokat is.

Alkalmazzuk az elmondottakat a feladatunkra:

	R_1	R_2	R_3	R_4		d_1
F_1	8	10	9	$\boxed{2}$ 10	50	6 ← a legnagyobb különbség
F_2	1	6	4	10	30	3
F_3	3	4	5	1	20	2
	40	30	20	10		
d_1	2	2	1	1		

Hagyjuk el az R_4 oszlopot és korrigáljuk az F_1 készletet!

	R_1	R_2	R_3		d_2
F_1	8	10	9	40	1
F_2	$\boxed{1}$ 30	6	4	30	3 ← a legnagyobb különbség
F_3	3	4	5	20	1
	40	30	20		
d_2	2	2	1		

Hagyjuk el az F_2 sort és korrigáljuk R_1 igényét!

	R_1	R_2	R_3		d_3
F_1	8	10	9	40	1
F_3	3	$\boxed{4}$ 20	5	20	1
	10	30	20		
d_3	5	6 ← a legnagyobb különbség	4		

Hagyjuk el az F_3 sort és korrigáljuk R_2 igényét!

Itt már csak egy sor van, ezért a lehetséges program:

	R_1	R_2	R_3	
F_1	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{9}$ 20	40
	10	10	20	

A táblázatokat nem szükséges a kihagyott sor és oszlop után újra leírni, elegendő a kihagyott sort és oszlopot áthúzni. Ezt mutatja a következő táblázat:

	R_1	R_2	R_3	R_4		d_1	d_2	d_3
F_1	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{9}$ 20	$\boxed{2}$ 10	50 40 20	6	1	1
~~F_2~~	~~$\boxed{1}$ 30~~	~~6~~	~~4~~	~~10~~	~~30~~	~~3~~	~~3~~	
~~F_3~~	~~3~~	~~$\boxed{4}$ 20~~	~~5~~	~~1~~	~~20~~	~~2~~	~~1~~	~~1~~
	40 10	30 10	20	10				
d_1	2	2	1	1				
d_2	2	2	1					
d_3	5	6	4					

Tehát egy lehetséges megoldás:

$$x_{11} = 10,\ x_{12} = 10,\ x_{13} = 20,\ x_{14} = 10,\ x_{21} = 30,\ x_{32} = 20, \text{ a többi értéke } 0.$$

A szállítási költség:

$$K = 10 \cdot 8 + 10 \cdot 10 + 20 \cdot 9 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 1 + 20 \cdot 4 = 490 \text{ e Ft.}$$

A módszer előnye, hogy a megadott példák nagy százalékánál a kapott bázismegoldás egyben optimális megoldás is. Ezért a nagyméretű feladatok közelítő megoldását gyakran így határozzák meg.

5.3.3. Optimalitás-vizsgálat

Lehetséges bázismegoldást már elő tudunk állítani. De nem tudjuk, hogy az optimális-e. A szimplex táblánál a duális változók leolvashatók és abból tudjuk eldönteni az optimalitást. A duál változók értékei itt nem láthatók, de kiszámíthatjuk értéküket, mert a primálbázisban lévő változókhoz tartozó duál feltételek mindig egyenlőség formájában teljesülnek.

Az optimalitás vizsgálatához felhasználhatjuk a 4.3. pontban b), c), d) megállapításokat és kimondhatjuk a következő tételt.

Tétel: A szállítási feladat $\underline{x}^T = [x_{11,} x_{12,} \cdots, x_{mn}]$ lehetséges megoldása és a duál párjának $[\underline{u}^T, \underline{v}^T] = [u_1, u_2, \cdots, u_m, v_{1,} \cdots, v_n]$ megoldása akkor és csak akkor optimális, ha $u_j + v_j = \boxed{c_{ij}}$.

Bizonyítás: Ha $\underline{x}$ és $[\underline{u}^T, \underline{v}^T]$ optimális megoldás, akkor a dualitás tételéből következik: $[\underline{u}^T, \underline{v}^T] \cdot \begin{bmatrix} \underline{t} \\ \underline{r} \end{bmatrix} = \underline{c}^T \cdot \underline{x}$

Felhasználva $\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{t} \\ \underline{r} \end{bmatrix}$ összefüggést, kapjuk $[\underline{u}^T, \underline{v}^T] \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{c}^T \cdot \underline{x}$.

Mivel $\underline{x} \geq \underline{0}$, ezért

$$[\underline{u}^T, \underline{v}^T] \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \underline{c}^T .$$

Rátérve a koordinátákra:

$$u_i + v_j = \boxed{c_{ij}},$$

ahol c_{ij} kötött elem, hiszen a feladatnak u_i és v_j lehetséges megoldása.

A fenti tételt a következőképpen alkalmazhatjuk az optimalitás ellenőrzésére.

1. A kötött $\boxed{c_{ij}}$ értékéhez felírjuk az $u_i + v_j = \boxed{c_{ij}}$ feltételi egyenleteket. Így egy m + n − 1 egyenletből álló m + n ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert kapunk.
2. Az egyik ismeretlen értéke szabadon megválasztható. Legyen $u_1 = 0$, akkor a többi $\boxed{c_{ij}} - u_i$ vagy $\boxed{c_{ij}} - v_j$ szerint számolható.
3. Ha az így kapott u_i, v_j értékek minden (i, j) párra kielégítik a duálfeladat többi feltételeit is, azaz: $u_i + v_j \leq c_{ij}$ teljesül, amit gyakorlatban $c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$ alakra hozhatunk, akkor a primál feladat lehetséges bázismegoldása egyben optimális is.
4. Az optimális megoldáshoz tartozó költséget a $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ kifejezéssel számoljuk ki.
5. Ha van olyan c_{ij}, hogy $c_{ij} - (u_i + v_j) \leq 0$, akkor a primál feladat célfüggvény értéke csökkenthető. (A program javítható.)

Az így meghatározott duál változókat *potenciáloknak* nevezi a szakirodalom.

Az optimalitás kritériuma tehát: $c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$.

Vizsgáljuk meg, hogy a 4.3.2.2 pontban előállított bázismegoldás optimális-e! (Tudjuk, hogy nem optimális, hiszen a Vogel-Korda módszerrel kapott költség kevesebb.)

Induljunk ki a lehetséges bázismegoldásból:

	R_1	R_2	R_3	R_4	
F_1	$\boxed{8}$ 40	10	9	$\boxed{2}$ 10	50
F_2	$\boxed{1}$ 0	$\boxed{6}$ 10	$\boxed{4}$ 20	10	30
F_3	3	$\boxed{4}$ 20	5	1	20
	40	30	20	10	

Írjuk fel a potenciálrendszert! Felírható, mert a kötött helyek száma 6 és ez egyenlő az m+n−1 kritikus számmal.

$$u_1 + v_1 = 8$$
$$u_1 + v_4 = 2$$
$$u_2 + v_1 = 1$$
$$u_2 + v_2 = 6$$
$$u_2 + v_3 = 4$$
$$u_3 + v_2 = 4$$

Legyen $u_1 = 0$, akkor $v_1 = 8$, $v_4 = 2$, $u_2 = -7$, $v_2 = 13$, $v_3 = 11$, $u_3 = -9$.

Szokás szerint ezt a disztiribúciós táblázat szélén tüntetjük fel és így egyszerűbb is a számításuk.

Nézzük: A táblázatban csak a kötött elemeket hagyjuk meg és induljon ki az $u_1 = 0$-ból:

	$v_1=8$	$v_2=13$	$v_3=11$	$v_4=2$
$u_1 = 0$	8			2
$u_2 = -7$	1	6	4	
$u_3 = -9$		4		

$$u_1 + v_1 = 8 \rightarrow v_1 = 8$$
$$u_1 + v_4 = 2 \rightarrow v_4 = 2$$
$$u_2 + v_1 = 1 \rightarrow u_2 = -7$$
$$u_2 + v_2 = 6 \rightarrow v_2 = 13$$
$$u_2 + v_3 = 4 \rightarrow v_3 = 11$$
$$u_3 + v_2 = 4 \rightarrow u_3 = -9$$

Vizsgáljuk meg a $c_{ij} - (u_i + v_j)$ értékeket, ehhez csak a költségelemekre és potenciálokra van szükség és indexként c_{ij}-hez írjuk. c_{ij}

u_i	8	13	11	2
0		10_{-3}	9_{-2}	
−7				10_{15}
−9	3_4		5_3	1_8

$$\begin{aligned} 10 - (0 + 13) &= -3 \\ 9 - (0 + 11) &= -2 \\ 10 - (-7 + 2) &= 15 \\ 3 - (-9 + 8) &= 4 \\ 5 - (-9 + 11) &= 3 \\ 1 - (-9 + 2) &= 8 \end{aligned}$$

A lábindexek azt mutatják, hogy mennyivel változik a szállítási költség, ha arra a helyre egy egységgel több szállítást tervezünk.

Látható, hogy van olyan (i, j) pár, amelynél

$$c_{ij} - (u_i + v_j) \le 0$$

teljesül, tehát a program *nem optimális.*

5.3.4. Huroktranszformáció

További transzformációval kell javítani a bázismegoldást. A transzformáció (vektorcsere) egy sajátos módjára ad lehetőséget a szállítási modell speciális struktúrája.

Tegyük fel, hogy a disztribúciós táblán egy nem optimális megoldás látható. Az eddig elmondottakból tudjuk, hogy minden x_{ij} bázisváltozóhoz tartozik egy $\boxed{c_{ij}}$ kötött elem és fordítva. A javítást célzó bázistranszformációt úgy végezzük el, hogy a kötött elemek közül egyet szabaddá teszünk és egy szabad elemet lekötünk. A változtatást úgy kell megtenni, hogy a szállított mennyiségek összege sor és oszlopirányban ne változzon. Ezt a következő lépéssorozattal érhetjük el:

a) Induljunk ki egy szabad c_{ij} elemből és ezt kössük össze egy ugyanabban a sorban lévő c_{ik} kötött elemmel, amelynek az oszlopában további kötött elem van!
b) Ezt a c_{ik} elemet kössük össze az oszlopának egy olyan c_{gk} kötött elemével, amelynek sorában még van további kötött elem!
c) A c_{gk}-ből folytatva addig ismételjük az a), b) lépést, míg vissza nem jutunk a c_{ij} elemre.

Az így kapott alakzatot körnek vagy huroknak nevezi a szakirodalom.

Definíció: A disztribúciós forma olyan vektorrendszerét, amely a disztribúciós táblázat bármely sorából és oszlopából tartalmaz elemeket, pontosan kettőt, *huroknak* vagy *körnek* nevezzük. Kör vagy hurok a disztribúciós táblázaton olyan törött vonal, amely egy szabad helyről indul ki és úgy jut oda vissza, hogy a töréspontokban csak kötött elemek vannak.

Egy lehetséges bázismegoldást kijelölő táblázatban – amelyben m+n−1 kötött elem van – minden szabad elemhez egyértelműen szerkeszthető egy hurok.

Például a feladatunk esetén: a c_{12}, c_{22}, c_{21}, c_{11} csúcspontokhoz tartozó hurok látható:

$\boxed{8}$		10	9	2
↑		↓		
$\boxed{1}$	←	$\boxed{6}$	4	10
3		4	5	1

egy *szabad elem,* a többi *kötött hely.*

E csúcspontokhoz tartozó vektorrendszer a 4.3 pontban ismertetett szimplex táblázatban látható:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} e_2 \\ e_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} e_2 \\ e_1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 \end{bmatrix}.$$

Az ilyen hurok vektorai lineárisan nem független rendszert alkotnak, tehát csúcspontjai közül legalább egy nem tartozhat a bázis vektorai közé (szabad hely). A vektorcserét ezért a hurkon fogjuk elvégezni a következő módon:

1. Olyan hurkot készítünk, amelynek a szabad helyéhez tartozó $c_{ij} - (u_i + v_j)$ negatív. Ilyen hurok mindig van, ha pontosan m+n−1 kötött helyet jelöltünk ki.
2. Az elemi báziscserét a hurok töréspontjain végezzük.
3. Legyen egy hurok négy csúcspontja c_{ij}, c_{ik}, c_{gk}, c_{gj}, ahol c_{ij} szabad hely, a többi pedig x_{ik}, x_{gk}, x_{gj} bázisváltozókkal van lekötve. Ha c_{ij} oszlopvektora bázisváltozó lesz és értéke d értéket vesz fel, akkor ez a változás végiggyűrűzik a hurkon. Ezért a változók értékei:

   $$x_{ij} = d,\ x_{ik} - d,\ x_{jk} + d,\ x_{gj} - d.$$

   A körön szemléltetve az elmondottakat:

   $$\begin{array}{ccc} c_{ij}^{\,d} & \rightarrow & c_{ik}^{\,x_{ik}-d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ c_{gj}^{\,x_{gj}-d} & \leftarrow & c_{gk}^{\,x_{gk}+d} \end{array}$$

A változás ilyen módon való végiggyűrűztetése maga a transzformáció.

4. A transzformáció csak akkor felel meg a vektorcsere követelményének, ha d számértékét a szabad elemből kiindulva a páratlan számú törésponthoz tartozó bázisváltozók legkisebbikével, azaz d = min(x_{ik},, x_{gk},..,) azonosítjuk. Ez adja a már korábban értelmezett szűk keresztmetszet.

A transzformáció után kapott lehetséges bázismegoldás optimalitását újból vizsgálni kell.

Az elmondottakat szemléltessük a feladatunkon.

A táblázatban látható, hogy több negatív index is van, válasszuk a nagyobb abszolút értékűt és ez legyen a hurok szabad helye: A szabad elem szomszédjai és utána minden második csúcshoz tartozó x_{ik}-k legkisebbike d=min(10;40)=10, ezért tízzel tudjuk változtatni a hurok mentén az értékeket.

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{8}^{40} & \rightarrow & 10 & & \boxed{8}^{30} & \rightarrow & \boxed{10}^{10} \\
\uparrow & & \downarrow & \Rightarrow & \uparrow & & \downarrow \\
\boxed{1}^{0} & & \boxed{6}^{10} & & \boxed{1}^{10} & \leftarrow & 6
\end{array}$$

Így a 10 kötött hely, a 6 szabad hely lesz. Az új bázismegoldást jelöljük egy új disztribúciós táblázaton és ellenőrizzük, hogy ez a lehetséges új megoldás optimális-e? Ellenőrizzük a kötött helyek számát és újból számoljuk ki a potenciálokat és a lábindexeket!

u_i / v_j	8	10	11	2	
0	$\boxed{8}^{30}$	$\boxed{10}^{10}$	9_{-2}	$\boxed{2}^{10}$	50
−7	$\boxed{1}^{10}$	6_{3}	$\boxed{4}^{20}$	10_{15}	30
−6	3_{1}	$\boxed{4}^{20}$	5_{0}	1_{5}	20
	40	30	20	10	

Látható, hogy a c_{13} helyen van negatív lábindex, ezért még mindig nem optimális a megoldás. Keressünk kört vagy hurkot a 9-es költségelemhez, állapítsuk meg a d értékét és hajtsuk végre a vektorcserét a hurok mentén!

$$\begin{array}{ccc} \boxed{8}\ \cancel{30}\ ^{10} & \rightarrow & \boxed{9}\ ^{20} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \boxed{1}\ \cancel{10}\ ^{30} & \leftarrow & 4\ \cancel{20} \end{array}$$

Az új bázismegoldás a hozzátartozó potenciálrendszerrel és lábindexekkel:

v_j / u_i	8	10	9	2	
0	$\boxed{8}^{10}$	$\boxed{10}^{10}$	$\boxed{9}^{20}$	$\boxed{2}^{10}$	50
−7	$\boxed{1}^{30}$	6_{3}	4_{2}	10_{15}	30
−6	3_{1}	$\boxed{4}^{20}$	5_{2}	1_{5}	20
	40	30	20	10	

Az iteráció sorozata máris véget ért, mert $c_{ij} - (u_i + v_j)$ minden (i, j) párra nemnegatív.

A feladat optimális megoldása: $x_{11} = 10$; $x_{12} = 10$; $x_{13} = 20$; $x_{14} = 10$; $x_{21}=30$; $x_{32} = 20$; a többi értéke nulla.

$$K = 10 \cdot 8 + 10 \cdot 10 + 20 \cdot 9 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 1 + 20 \cdot 4 = 490.$$

Ez a megoldás megegyezik a 4.3.3.3 pontban ismertetett „Vogel-Korda" féle közelítő megoldással, tehát ezzel a módszerrel most is optimális megoldást nyertünk.

5.3.5. Alternatív optimális megoldások

Ha egy elosztási feladat optimális táblájában egy, vagy több szabad helyen $c_{ij} - (u_i + v_j) = 0$ *reláció teljesül, akkor alternatív megoldások léteznek, amelyeket további transzformációval kell meghatározni.*

Oldjuk meg a következő feladatot:

	R_1	R_2	R_3	R_4	
F_1	5	3	1	1	60
F_2	1	4	2	4	40
F_3	4	3	6	6	20
	10	30	50	30	120

Jelöljünk ki egy lehetséges megoldást a „Vogel-Korda” módszerrel:

	R_1	R_2	R_3	R_4			d_1	d_2	d_3	d_4
~~F_1~~	~~5~~	~~3~~	~~$\boxed{1}^{30}$~~	~~$\boxed{1}^{30}$~~	~~60~~	~~30~~	~~0~~	~~0~~	~~2~~	~~2~~
F_2	$\boxed{1}^{10}$	$\boxed{4}^{10}$	$\boxed{2}^{20}$	4	40	30	1	2	2	2
~~F_3~~	~~4~~	~~$\boxed{3}^{20}$~~	~~6~~	~~6~~	~~20~~		~~1~~	~~3~~	~~3~~	
	10	10	20	30	120					
d_1	3	0	1	3						
d_2		0	1	3						
d_3		0	1							
d_4		1	1							

A kötött helyek száma 6, ez megegyezik az $m + n - 1$ kritikus számmal: Tehát ez egy lehetséges bázismegoldás.

Vizsgáljuk meg, hogy optimális-e ez a megoldás. Határozzuk meg a potenciálrendszert és a lábindexeket:

v_j / u_i	0	3	1	1	
0	5_5	3_0	$\boxed{1}^{30}$	$\boxed{1}^{30}$	60
1	$\boxed{1}^{10}$	$\boxed{4}^{10}$	$\boxed{2}^{20}$	4_2	40
0	4_4	$\boxed{3}^{20}$	6_5	6_5	20
	10	30	50	30	120

Mivel a lábindex értékek $c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$ között nincs negatív szám, ezért a program optimális.

Az optimális megoldás:

$$x_{13} = 30,\ x_{14} = 30,\ x_{21} = 10,\ x_{22} = 10,\ x_{23} = 20,\ x_{32} = 20.$$

Vektor formában: $\underline{x}_{01} = [0, 0, 30, 30, 10, 10, 20, 0, 0, 20, 0, 0]$.

A hozzátartozó költség:

$$K = 1 \cdot 30 + 1 \cdot 30 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 210.$$

Viszont c_{12}-höz tartozó lábindex 0, tehát *alternatív* optimuma van.

Készítsünk a 0 lábindexű helyre hurkot, az új lehetséges megoldáshoz a potenciálrendszert és lábindexeket:

u_j / v_i	0	3	1	1	
0	5_{5}	$\boxed{3}^{10}$	$\boxed{1}^{20}$	$\boxed{1}^{30}$	60
1	$\boxed{1}^{10}$	4_{0}	$\boxed{2}^{30}$	4_{2}	40
0	4_{4}	$\boxed{3}^{20}$	6_{5}	6_{5}	20
	10	30	50	30	120

Itt egy másik optimális megoldás látható:

$$x_{12} = 10,\ x_{13} = 20,\ x_{14} = 30,\ x_{21} = 10,\ x_{23} = 30,\ x_{32} = 20.$$

Vektor szimbólummal: $\underline{x}_{02} = [0, 10, 20, 30, 10, 0, 30, 0, 0, 20, 0, 0]$.

A költség pedig:

$$K = 3 \cdot 10 + 1 \cdot 20 + 1 \cdot 30 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 20 = 210.$$

Az összes optimális megoldás:

$\underline{x}^T = \lambda\ [0, 0, 30, 30, 10, 10, 20, 0, 0, 20, 0, 0,] + (1 - \lambda).[0, 10, 20, 30, 10, 0, 30, 0, 0, 20, 0, 0]$, ahol $0 \le \lambda \le 1$.

5.3.6. A disztribúciós megoldás lépéseinek összefoglalása

1. *Felírjuk a feladat disztribúciós indulótáblázatát* (4.3.1).
2. *Megvizsgáljuk, hogy a feladóhelyek kapacitása egyenlő-e a rendeltetési helyeik igényével* ($\Sigma\, t_i = \Sigma\, r_j$).
3. *Lehetséges bázismegoldást készítünk* (4.3.2).
4. *Meghatározzuk az első potenciálrendszert* (4.3.3).
5. *Megvizsgáljuk az optimalitást* ($c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$).
6. *Ha nem teljesül az optimalitás kritériuma, akkor kiválasztjuk azt a vektort, amelyre* $c_{ij} - (u_i + v_j) \leq 0$ *a legkisebb, és a hozzátartozó „hurkon" elvégezzük a vektorcserét.*
   - Megrajzoljuk ehhez a szabad elemhez tartozó „hurkot" és azok csúcspontjait előjellel látjuk el.
   - *Végrehajtjuk a javítást úgy, hogy a negatív sarkon levő mennyiségek közül a legkisebbet programozzuk át.*
   - Új táblázatra írjuk át az új programot. Mindig ügyelni kell arra, hogy az új táblázatban m+n−1 kritikus számnak megfelelő számú kötött hely legyen.
7. *Az iterációk sorozata akkor ér véget, ha az optimalitás feltétele teljesül. Ezt a táblázatot optimális táblázatnak nevezzük.*
8. *Az optimális megoldás kiírása.*
9. *A szállítási költség a költségfüggvényből határozható meg (kötött elemek és a bázisváltozók szorzatösszege).*

5.4. A szállítási feladat általánosítása és Solver programmal való megoldása.

Eddig azt az esetet tárgyaltuk, hogy a feladók készlete megegyezett a megrendelők igényével. Ez általában nem teljesül.

Tegyük fel, hogy a 4.2. pontban található példában a második feladónak 40 tonna a készlete és azt, hogy az első feladótól a 2. megrendelőnek technikai okok miatt nem lehet szállítani. Viszont szeretnénk, ha a 3. feladótól minden árut elszállítanánk (hiszen az a sógorom!).

Ekkor biztos, hogy valamelyik feladónál marad áru, ezért nem egyenlőség formájában kell megfogalmazni a feltételi egyenleteket!

Így tehát a modell:

Feladókra:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 40 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 20 \end{aligned}$$

Azért =, mert mind-et el kell szállítani.

Rendelőkre

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 40 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 30 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 20 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 10 \end{aligned}$$

Itt minden igény teljesíthető, hiszen a készlet több mint az igény!

Valamint $x_{12} = 0$, mert az első feladó nem szállíthat a 2. megrendelőnek.

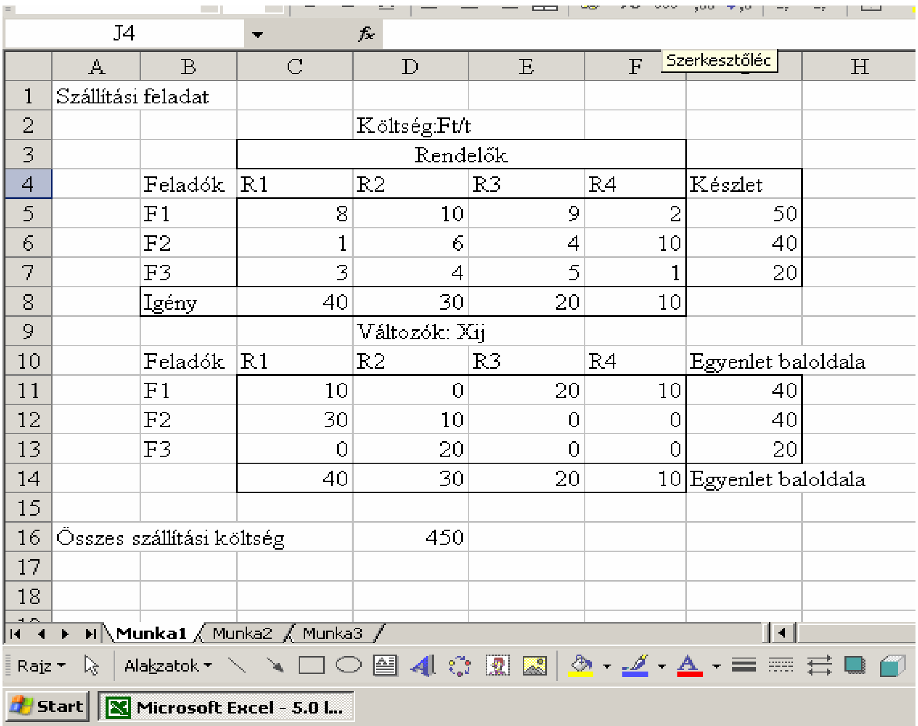
Célfüggvény:

$$8x_{11} + 10x_{12} + 9x_{13} + 2x_{14} + x_{21} + 6x_{22} + 4x_{23} + 10x_{24} + 3x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} + x_{34} \to \min.$$

Ha az igény nagyobb, mint a készlet, akkor az igényt kifejező relációk (azaz a rendelőkre felírtak) lesznek $\leq$ értelműek!

A szállítási feladat speciális lineáris programozási feladat, ezért az EXCEL táblázaton az adatokat és a változókat is érdemes tömören, mátrix formában kijelölni. A következő EXCEL képernyő mutatja ezt a célszerű elhelyezést.

Külön vegyünk fel költségmátrixot és a változók mátrixát is.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Szállítási feladat							
2				Költség:Ft/t				
3				Rendelők				
4		Feladók	R1	R2	R3	R4	Készlet	
5		F1	8	10	9	2	50	
6		F2	1	6	4	10	40	
7		F3	3	4	5	1	20	
8		Igény	40	30	20	10		
9				Változók: Xij				
10		Feladók	R1	R2	R3	R4	Egyenlet baloldala	
11		F1	10	0	20	10	40	
12		F2	30	10	0	0	40	
13		F3	0	20	0	0	20	
14			40	30	20	10	Egyenlet baloldala	
15								
16	Összes szállítási költség			450				
17								
18								

Legyen a változók mátrixa a C11:F13 tartomány, a felhasznált egyenletek baloldala pedig a mátrix melletti G11:G13 illetve alatti C14:F14 tartományban, a célfüggvény képletét pedig D16 cellába írjuk be. Ez elhelyezés azért célszerű, mert a szóban forgó egyenlőtlenségek baloldalát a $\sum$ függvénnyel írhatjuk le.

Ezután kell meghívni a Solver programot és értelemszerűen elhelyezni a modell elemeit.

Ne feledkezzünk meg az $x_{12}=0$ egyenlőségről és a beállításokról sem!

5.5. Módosított maximumfeladat

Ha egy szállítási feladatban a célfüggvény maximumát kielégítő megoldást keresünk, vagyis

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \rightarrow \text{maximum a cél,}$$

akkor maximumfeladatról beszélünk. Ekkor a disztribúciós módszernél célszerű úgy eljárni, hogy a célfüggvény −1-szeresét vesszük és annak keressük a minimumát. Ez azt jelenti, hogy a disztribúciós táblázatban a költségelemek negatívok lesznek. Az optimalizációs eljárást erre a táblázatra végezzük el.
Természetesen a Solver programnál a maximumot kell bejelölni.

6. Egészértékű programozás

6.1. Az egészértékű programozási feladat fogalma

Az eddig tárgyalt programozási modelleknél feltételeztük, hogy a változók bármely nem negatív valós értéket felvehetnek.

A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy a programozási feladatban a *változók csak egész értéket* vehetnek fel (pl. a modellben egy nagy értékű gép változója, egy-egy beruházási változat stb.). Ha a modellben szereplő minden változóra előírjuk az egészértékűséget, akkor *tiszta egészértékű* feladatról beszélünk, ha viszont csak a változók egy része egészértékű, akkor a feladatot *vegyes egészértékű* programozási feladatnak nevezzük, ha pedig azt is előírjuk, hogy a változók csak 0 vagy 1 értékeket vehetnek fel, akkor 0-1 *egészértékű* vagy *bináris* feladatnak mondjuk.

Vizsgáljuk meg közelebbről a következő feladatot:

a) $\underline{x} \geq \underline{0}$

$[x_j] = x_j; \quad (j = 1, \ldots, n.)$

b) $A \cdot \underline{x} \leq \underline{b}$

c) $\underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max.$

Ez lényegében egy lineáris programozási feladat azzal a kikötéssel, hogy a változók adott feltételeken belül is csak egész értékeket vehetnek fel. (Egy változó egészértékűségét az $[x_j] = x_j$ egyenlőséggel fogalmaztuk meg, ahol – az analízisből jól ismert – $[x]$ jel azt a legnagyobb valós számot jelenti, amelyre $[x] \leq x$. Például $[3{,}6] = 3$; illetve $[-0, 2] = -1$).

Továbbá kikötjük, hogy az A elemei és a $\underline{b}$ komponensei egész számok. (Ezt elérhetjük megfelelő konstansokkal való szorzással.)

A megoldás első fázisában figyelmen kívül hagyjuk a változókra vonatkozó egészérték kikötést. Így megkeressük a modell ún. **folytonos optimumát**. Ha folytonos modellnek nincs optimális megoldása, akkor az eljárásunk véget ért, mert akkor az egészértékű feladatnak sincs megoldása.

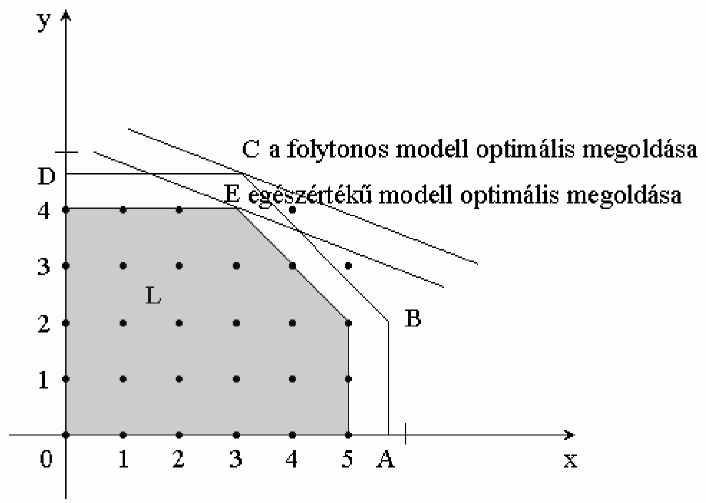
Ha van optimális megoldása a folytonos modellnek, akkor két eset lehetséges:

- Az optimális megoldás változói mind egészértékűek. Ekkor a *diszkrét optimum* megegyezik a folytonos optimummal.

- Nem minden változó értéke egész szám.

Ez utóbbi esetben a lehetséges megoldások halmazát addig szűkítjük, míg a folytonos optimumhoz „legközelebb levő” olyan programhoz nem jutunk, amelyben a változók már mind egész értékek (rácspontok).

A problémát a következő ábrán szemléltetjük



Láthatjuk, hogy a folytonos megoldás optimum helye **C,** nem rácspont. A halmazt szűkíteni kell. Ezt úgy végezhetjük el, hogy alkalmas módon új korlátozó feltételek bevezetésével az eredeti halmazból lemetszünk egy részt. A szűkítést mindaddig folytatjuk, amíg egészértékű megoldáshoz nem jutunk. Két módszert mutatunk be a szűkítés elvégzésére:

- Gomory-féle vágási módszer tiszta egészértékű feladat megoldására
- Szétválasztás és korlátozás módszere vegyes egészértékű feladat megoldására

6.2. Egészértékű feladatok megoldása Gomory-féle vágási módszerrel

Az eljárás lényege:

1. *A szimplex táblázatban előállítjuk a „folytonos” optimális megoldást (ha létezik!). Ha nem létezik, akkor nincs egészértékű optimális megoldás sem.*
2. *Ha az optimális megoldásban minden változó egész, akkor megkaptuk a feladat egészértékű optimumát is.*

3. *Ha nem minden változó egész a folytonos optimális megoldásban, akkor valamely tört értékű bázisváltozó sorából metsző feltételt készítünk és csatoljuk az optimális táblázathoz.*
4. *A kiegészített táblázatban előállítjuk az új optimális táblázatot. Majd folytatjuk a 2. vagy 3. lépéssel.*

A metszési feltétel előállítása:
Tegyük fel, hogy az x_i nem egész, azaz a b_i nem egész és az *i*-edik sorának az alábbi feltétel felel meg:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

akkor ehhez tartozó Gomory-féle vágási feltétel:

$$\{a_{i1} - [a_{i1}]\}x_1 + \{a_{i2} - [a_{i2}]\}x_2 + \ldots + \{a_{in} - [a_{in}]\}x_n \geq b_i - [b_i],$$

ahol $[\ ]$ a szám egész értékét, a $\{\ \}$ pedig a szám tört részét jelenti.

Példaként oldjuk meg a következő egészértékű lineáris programozási feladatot.

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ és egész}$$

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +x_2 & & +3x_4 & \leq 7 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & \leq 11 \\ \hline z = 4x_1 & +1x_2 & +3x_3 & +5x_4 & \to \max \end{array}$$

Írjuk fel a feladat szimplex táblázatát és állítsuk elő a folytonos modell optimális megoldását!

B_0	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	2	1	0	$\boxed{3}$	7
u_2	1	1	1	0	11
$-z$	4	1	3	5	0

B_1	x_1	x_2	x_3	u_1	
x_4	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
u_2	1	1	$\boxed{1}$	0	11
$-z$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	3	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{35}{3}$

Itt még nem olvasható le egy optimális megoldás, mert –z sorában van pozitív szám.

B_2	x_1	x_2	u_2	u_1	
x_4	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
x_3	1	$+1$	1	0	11
$-z$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{11}{3}$	-3	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{134}{3}$

Ez a táblázat már optimális megoldást tartalmaz.

A folytonos modell optimális megoldása $\underline{x}_{of} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}, z_{of} = \frac{134}{3}$.

A Gomory-féle vágási feltétel az x_4 változóra:

$$\left(\frac{2}{3}-\left[\frac{2}{3}\right]\right)x_1 + \left(\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{3}\right]\right)x_2 + \left(\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{3}\right]\right)u_1 \geq \frac{7}{3}-\left[\frac{7}{3}\right].$$

Átrendezve: $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}u_1 \geq \frac{1}{3}$.

Az új, kiegészített táblázat:

B_3	x_1	x_2	u_2	u_1	v_1	
x_4	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{7}{3}$
x_3	1	$+1$	1	0	0	11
ζ_1^*	$\boxed{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$
$-z$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{11}{3}$	-3	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{134}{3}$
z^*	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$

B_4	ζ_1^*	x_2	u_2	u_1	v_1	
x_4		0	0	0	1	2
x_3		$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{21}{2}$
x_1		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-z$		$-\frac{15}{6}$	-3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{261}{6}=-43{,}5$

Itt optimális megoldás olvasható le: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{21}{2}$, $x_4=2$ és $z_0=43{,}5$.

A B_4 táblázatban látható, hogy x_4 már egész, de az x_3 és x_1 nem és $z_0=43{,}5$.

Ha csak az x_4-re írtuk volna elő egészértékűséget, akkor ez adná az optimális megoldást. Az egészértékűség előírása a célfüggvény értékének csökkenésével járt.

Alkalmazzuk a Gomory-féle vágási feltételt az x_1 változóra!

$$\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}\right]\right\}x_2+0u_2+\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}\right]\right\}u_1+\left\{-\frac{3}{2}-\left[-\frac{3}{2}\right]\right\}\cdot v_1\geq\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}\right]\right\}.$$

azaz $\frac{1}{2}x_2+0u_2+\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}v_1\geq\frac{1}{2}$

Kiegészítve ezzel a B_4-es táblázatot, kapjuk:

B_5	x_2	u_2	u_1	v_1	v_2	
x_4	0	0	0	1	0	2
x_3	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{21}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
ζ_2^*	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
$-z$	$-\frac{15}{6}$	-3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	0	$-43{,}5$
z^*	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$

B_6	ζ_2^*	u_2	u_1	v_1	v_2	
x_4		0	0	1	0	2
x_3		1	-1	2	1	10
x_1		0	1	-2	1	0
x_2		0	1	1	-2	1
$-z$		-3	-2	-1	$-\frac{15}{6}$	-41

A táblázat nem optimális.

B_7	u_2	x_2	v_1	v_2	
x_4	0	0	1	0	2
x_3	1	1	3	-1	11
x_1	0	0	-2	1	0
u_1	0	1	1	-2	1
$-z$	-3	-2	-1	-1	-43

Tehát a tiszta egészértékű feladat optimális megoldása:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 11,\ x_4 = 2,\ z_0 = 43$$

6.3. Vegyes égész értékű lineáris programozási feladatok megoldása korlátozás és szétválasztás módszerével

6.3.1. A korlátozás és szétválasztás módszer lényege

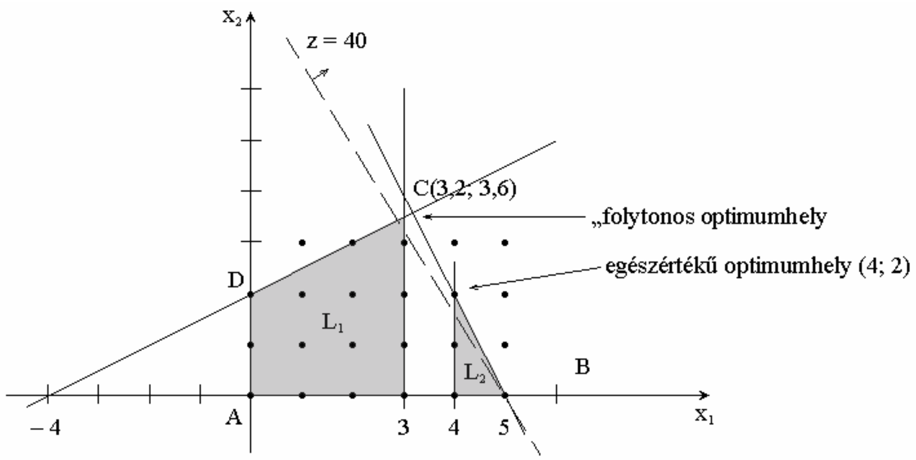
A módszer alapelve az, ha egy feladatot nehéz megoldani, akkor bontsuk részekre és oldjuk meg azokat külön-külön.

A szétválasztás arra utal, hogy a feladatot részfeladatokra bontjuk úgy, hogy a részfeladatok lehetséges megoldásainak halmaza részhalmaza az eredeti feladat lehetséges megoldási halmazának, a célfüggvénye azonban az eredeti feladat célfüggvényével azonos.

A korlátozás a maximumfeladat esetén azt jelenti, hogy a részfeladatok optimális célfüggvény-értékére valamilyen módszerrel korlátokat határozunk meg. *Ha egy részfeladat célfüggvényének felső korlátja nem nagyobb az eredeti feladat ismert lehetséges megoldásaihoz tartozó célfüggvény-értékeknél, akkor a részfeladat további vizsgálatától eltekintünk.*

Nézzük a következő példán a grafikus szemléltetésben az elmondottakat:

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ és egész}$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 20$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$z = 8x_1 + 5x_2 \to \max$$



5.3.1. ábra. Szétválasztás és korlátozás

Az eredeti feladat célfüggvény értéke:

$$z = 8 \cdot 3{,}2 + 5 \cdot 3{,}6 = 25{,}6 + 18 = 43{,}6$$

Tehát az eredeti feladat megmutatta, hogy a részfeladatok célfüggvényértékek felső korlátja 43.

Az ábrán látható, hogy az L_2 részfeladat optimális megoldása egyben egészértékű megoldás is. (4; 2), $z(L_2) = 32 + 10 = 42$.

Az L_1 halmazon (részfeladat) egészértékű optimális megoldása (3;3) lehet (a célfüggvényt az origó felé kell mozgatni) és $z(L_1) = 24 + 15 = 39$. Ez kisebb, mint az előző megoldás, ezért az eredeti feladat optimális megoldása is $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ és $z_{opt} = 42$.

A részfeladatokra bontás többféleképpen is elvégezhető. Az egyik leggyakoribb módszer, hogy a folytonos optimális megoldásnak valamely tört értékű változójába írunk alsó és felső korlátot.

Bináris változójú feladatoknál az $x_j = 0$ vagy $x_j = 1$ feltételek csatolásával kapunk új részfeladatot.

6.3.2. Vegyes egészértékű feladat megoldása

Nézzük tehát a vegyes egészértékű feladat modelljét:

$$A_1 \cdot \underline{x} + A_2 \underline{y} \le \underline{b}$$
$$\underline{x}, \underline{y} \ge \underline{0}$$
$$\underline{y} \text{ vektor komponensei egész számok.}$$
$$z = \underline{c}_1^T \cdot \underline{x} + \underline{c}_2^T \cdot \underline{y} \to \max$$

(Továbbiakban y_j-val jelöljük az egészértékű változókat.)

A megoldás gondolatmenete:

1. *Előállítjuk a feladat „folytonos” optimális megoldását. (ha létezik). Ha nem létezik, akkor az egészértékű feladatnak nincs optimális megoldása.*
2. *Ha a „folytonos” optimális megoldásban az y_j változók egészek, akkor megkaptuk a kitűzött feladat optimális megoldását.*
3. *Ha van nem egész az y_{0j} változók között, akkor ezen változókra írunk elő alsó és felső korlátot:* $y_j \le \lfloor y_{0j} \rfloor$ *illetve* $y_j \ge \lfloor y_{0j} \rfloor + 1$ *és ezeket az eddigi feltételrendszerhez csatolva két új rész feladatot kapunk:*
   Ez a szétválasztás alapja:

Az egyik feladat:

$$A_1 \cdot \underline{x} + A_2 \underline{y} \le \underline{b}$$
$$y_j \le \lfloor y_{0j} \rfloor$$
$$\underline{y} \text{ egész}$$
$$z = \underline{c}_1^T \cdot \underline{x} + \underline{c}_2^T \cdot \underline{y} \to \max$$

a másik feladat:

$$A_1 \cdot \underline{x} + A_2 \underline{y} \le \underline{b}$$
$$y_j \ge \lfloor y_{0j} \rfloor + 1$$
$$\underline{y} \text{ egész}$$
$$z = \underline{c}_1^T \cdot \underline{x} + \underline{c}_2^T \cdot \underline{y} \to \max$$

4. *Megoldjuk az így kapott feladatokat, mint folytonos modellt.*
5. *Azon az ágon haladunk tovább, ahol a célfüggvény nagyobb és folytatjuk a 2. vagy 3. lépéssel.*

A módszer gyakorlására nézzük a következő feladatot:

$$x_1, x_2, x_3 \in R^+, y_1 \in N^+$$

$$\begin{array}{rrrrl}
2x_1 & +x_2 & & +3y_1 & \le 7 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & \le 11 \\
\hline
z = 4x_1 & +x_2 & +3x_3 & +5y_1 & \to \max
\end{array}$$

Tehát azt várjuk el, hogy y_1 változó egész szám legyen.
Folytonos megoldás optimális táblázata:

B_2	x_1	x_2	u_2	u_1	
y_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
x_3	1	1	1	0	11
$-z$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{11}{3}$	-3	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{134}{3}$

Az optimális folytonos megoldás:

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 11,\ y_1 = \frac{7}{3}$ ez még nem egész, ezért

$$y_1 \le \left[\frac{7}{3}\right] = 2, \qquad\qquad y_1 \ge \left[\frac{7}{3}\right] + 1.$$

A szétválasztásra írjuk fel a két feladatot:

$$\begin{array}{rrrrl}
2x_1 & +x_2 & & +3y_1 & \le 7 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & \le 11 \\
 & & & y_1 & \le 2 \\
\hline
z_1^f = 4x_1 & +x_2 & +3x_3 & +5y_1 & \to \max
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrl}
2x_1 & +x_2 & & +3y_1 & \le 7 \\
x_1 & +x_2 & +y_3 & & \le 11 \\
 & & & y_1 & \ge 3 \\
\hline
z_2^f = 4x_1 & +x_2 & +3x_3 & +5y_1 & \to \max
\end{array}$$

majd oldjuk meg:

A szétválasztás egyik ága: $y_1 \le 2$

B_0	x_1	x_2	x_3	y_1	
u_1	2	1	0	3	7
u_2	1	1	1	0	11
u_3	0	0	0	$\boxed{1}$	2
$-z_1^f$	4	1	3	5	0

B_1	x_1	x_2	x_3	u_3	
u_1	2	1	0	-3	1
u_2	1	1	$\boxed{1}$	0	11
y_1	0	0	0	1	2
$-z_1^f$	4	1	3	-5	-10

B_2	x_1	x_2	u_2	u_3	
u_1	$\boxed{2}$	1	0	-3	1
x_3	1	1	1	0	11
y_1	0	0	0	1	2
$-z_1^f$	1	-2	-3	-5	-43

B_3	u_1	x_2	u_2	u_3	
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\frac{3}{2}$	$\frac{21}{2}$
y_1	0	0	0	1	2
$-z_1^f$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{87}{2}$

A szétválasztás mási ága: $y_1 \ge 3$

B_0	x_1	x_2	x_3	y_1	v_3	
u_1	2	1	0	3	0	7
u_2	1	1	1	0	0	11
u_3^*	0	0	0	$\boxed{1}$	-1	3
$-z_2^f$	4	1	3	5	0	0

A szűk keresztmetszet nem az u_3^*-ban van, a feladatnak nincs lehetséges megoldása, tehát nincs optimális megoldása sem.

A B_3 táblázatból látható, hogy a feladatnak van optimális megoldása:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 10{,}5 \end{bmatrix}, \ \underline{y}_1 = 2 .$$

Látható, hogy ez a megoldás kielégíti a feladat feltételeit.

6.4. Hozzárendelési feladat

A lineáris programozási feladatoknak azon speciális típusát nevezzük hozzárendelési feladatoknak, amikor minden egyes erőforrást (pl. munkaerő, gép, tárolóhely stb.) egyetlen egy adott tevékenységhez rendelünk hozzá.

6.4.1. Alapfeladat és megoldása

A hozzárendelési feladat alapmodellje a következő gazdasági feladat formájában fogalmazható meg:

Egy üzemben n munkás dolgozik és a műhelyben ugyanannyi munkafeladat van. Mindegyik munkás elvileg képes bármelyik munka elvégzésére, de a különböző munkafeladatot különböző költségekkel tudják elvégezni.

Kérdés: Melyik munkás melyik munkafeladatot kapja, hogy a munkák elvégzésének összköltsége a lehető legkisebb legyen?

A probléma matematikai modellje a következő:

Vezessük be az x_{ij} változót azzal a feltevéssel, hogy $x_{ij}=1$, ha az i-edik munkás a j-edik munkát végzi és $x_{ij}=0$, ha az i-edik munkás nem a j-edik munkát végzi. Így az x_{ij} változó csak két értéket vehet fel, 0-t és az 1-et. Ha c_{ij} jelenti azt a költséget amellyel az i-edik munkás j-edik munkafeladatot végzi el, akkor keressük a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \text{ lineáris függvény minimumát a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1,2,\dots,n),$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1,2,\dots,n),$$

$$x_{ij} = 0 \text{ vagy } x_{ij} = 1$$

feltételek mellet.

Látható, hogy ez egy *speciális lineáris egészértékű programozási* feladat, amely egyben *egy speciális szállítási feladat* is, amely nemcsak szimplex módszerrel, de disztribúciós módszerrel is megoldható. Azonban a megoldás mindkét esetben hosszadalmas és nehézkes a fellépő degenerációk miatt. Jóval egyszerűbb a hozzárendelési feladat megoldása a ***szétválasztás és korlátozás*** *módszerével.*

A módszer alapját képező fogalmakat és eljárásokat egy konkrét példán mutatjuk be:

Tegyük fel, hogy öt munkás között kell felosztani öt munkát úgy, hogy mindegyik munkás egy és csakis egy munkát kapjon.

Legyen a *költségmátrix:*

$$C_0 = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 7 & 8 & 13 \\ 7 & 8 & 7 & 11 & 15 \\ 16 & 13 & 9 & 5 & 8 \\ 11 & 10 & 7 & 7 & 13 \\ 15 & 8 & 10 & 11 & 18 \end{bmatrix}.$$

Könnyebben tudnánk a szétválasztást elvégezni, ha jól látható volna a legkisebb költségű hely soronként és oszloponként. Ezt elérhetjük, ha az egyes oszlopok minden eleméből vonjuk le az illető oszlop legkisebb elemét (7, 8, 7, 5, 8). Ezt redukciónak nevezzük. Így a redukció értéke k_0=7+8+7+5+8=35.

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 9 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 8 & 0 & 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

A sorok szerint már nem kell redukálni, mert minden sorban a legkisebb érték 0.

Ha a *hozzárendelést* azon a helyen tudnánk elvégezni, ahol most 0 áll, *akkor* megkapnánk a feladat optimális megoldását, azaz k_0=35 értéket tekinthetnénk a célfüggvény alsó korlátjának.

Próbáljuk meg a hozzárendelést! Talán „ránézéssel” is megállapíthatjuk, hogy melyik hozzárendelés a legjobb: Keretezzük be a programba bevont értékeket (a generáló elem mintájára):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ [0] & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 9 & 5 & 2 & [0] & 0 \\ 4 & 2 & [0] & 2 & 5 \\ 8 & [0] & 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Tehát négy olyan helyet találtunk, ahol $c_{ij}=0$, az ötödiket kell csak úgy megkeresni, hogy a lehető legkisebb legyen a költség. Itt kényszerlépésben vagyunk, mert ez a hely csak az első sor utolsó eleme lehet. Így nem tudhatjuk, hogy ez a megoldás optimális-e.

Alkalmazzuk a *szétválasztás és korlátozás* módszerét.

Ennek a módszernek a lényege az, hogy a lehetséges megoldási halmazt, az L_0-t *két részre bontjuk és becsléssel megállapítjuk, melyik tartomány tartalmazhatja az optimális megoldást.*

Az eljárás lényege és menete:

A redukált C_1 *mátrix minden* $c_{ij}=0$ *elemére meghatározzuk a sorában és az oszlopában található legkisebb elemek összegét. Ezeket* r_{ij}*-vel jelölve,* példánkban a következők: $r_{13}=1$, $r_{22}=0$, $r_{35}=5$, $r_{52}=3$, $r_{21}=1$, $r_{34}=2$, $r_{43}=2$.

Ezek közül kiválasztjuk a legnagyobbat, ez r_{35}. Ez jelzi, hogy a költségekben itt a legnagyobb a különbség, ha x_{35} értékét 0-nak, vagy 1-nek választjuk.

Ha $x_{35}=0$-nak választjuk, akkor ez azt jelenti, hogy a 3. munkásra nem bízzuk az 5. munkát. Ilyenkor ennek a viszonylatnak a költsége helyébe egy végtelen nagy számot írhatunk, M-t (tiltó tarifa). Ekkor viszont a költségmátrix 5. oszlopát lehet ismét redukálni 5 egységgel. Ez megegyezik az $r_{35}=5$ értékkel. Így az összes költségredukció $k_1= 35+5= 40$ lenne. Ez a célfüggvény alsó korlátját 40-re emelné. Mielőtt ezt a változtatást megtennénk, vizsgáljuk meg a másik lehetőséget.

Ha $x_{35} = 1$. Ez azt jelenti, hogy a 3. munkásra bízzuk az 5. munkát. Ebben az esetben törölhetjük is a 3. sort és az 5. oszlopot, hiszen ebben a viszonylatban már kiosztottuk a feladatot.

Az így kapott mátrix $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & . \\ 0 & 0 & 0 & 6 & . \\ . & . & . & . & . \\ 4 & 2 & 0 & 2 & . \\ 8 & 0 & 3 & 6 & . \end{bmatrix} \rightarrow C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & . \\ 0 & 0 & 0 & 4 & . \\ . & . & . & . & . \\ 4 & 2 & 0 & 0 & . \\ 8 & 0 & 3 & 4 & . \end{bmatrix}.$

A C_2 mátrix 4. oszlopa redukálható 2-vel. Ez azt jelenti, hogy itt a költségnövekedés csak 2 egység. Így a célfüggvény alsó korlátja 35-ről $k_2=37$-re emelkedik. Az optimális megoldást tehát a megoldáshalmaz abban a részében (L_2) keressük tovább, amelyekben az $x_{35}=1$.

Számoljuk ki újból az r_{ij} értékeket a C_3 mátrixból:

$r_{13}=1+0$, $r_{22}=0+0$, $r_{43}=0+0$, $r_{52}= 3+0= 3$, $r_{21}=0+1$, $r_{23}=0+0$, $r_{44}=0+1$

Tehát az x_{52} értéket 0-nak vagy 1-nek választjuk.

Ha $x_{52}=0$, akkor a költség $k_3=37+3$ lesz.

Ha $x_{52}=1$, akkor elhagyva a második oszlopot illetve 5. sort:

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1 & . & 0 & 1 & . \\ 0. & . & 0 & 4 & . \\ . & . & . & . & . \\ 4 & . & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix} \text{ és}$$

$k_4=37+0=37$ lesz, mert itt 0 a költségredukció lehetősége. Tehát ezen az ágon folytatjuk a vizsgálódást.

A C_4-re újra meghatározzuk az r_{ij} értékeket:

$$r_{13}=1+0=1,\ r_{23}=0+0=0,\ r_{44}=0+1=1,\ r_{21}=0+1=1,\ r_{43}=0+0=0.$$

Itt több r érték is azonos. Válasszuk az r_{13} relációt. Ekkor $x_{13}=0$ vagy $x_{13}=1$ esetet választhatjuk:

Ha $x_{13}=0$, akkor a költség $k_5=37+1=38$ lesz.

Ha $x_{13}=1$, akkor elhagyva az első sort és a harmadik oszlopot

$$C_5 = \begin{bmatrix} . & . & . & . & . \\ 0. & . & . & 4 & . \\ . & . & . & . & . \\ 4 & . & . & 0 & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$ és akkor $k_6=37+0=37$ lesz, mert megint nem lehet redukálni a maradék mátrixot.

A k_6 kisebb, mint k_5, ezért az optimális megoldást az $x_{35}=1$, $x_{52}=1$, $x_{13}=1$ részhalmazban keressük.

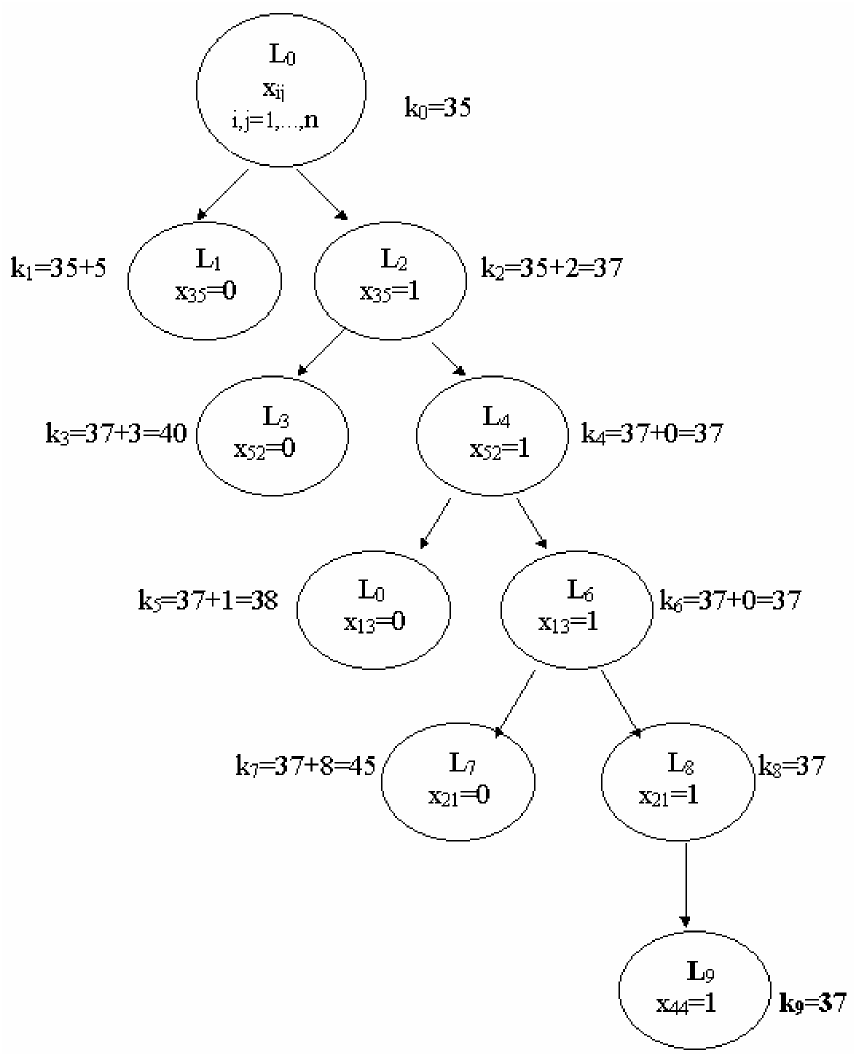
A C_5 mátrixnál egyértelműen látszik, hogy $x_{21}=1$ és $x_{44}=1$ választás nem növeli a költséget.

Tehát az optimális megoldás: $x_{35}=x_{52}=x_{13}=x_{21}=x_{44}=1$ és a többi változó értéke 0.

Meggyőződhetünk a C_0 mátrixból, hogy a költség ekkor: 8+8+7+7+7=37.

Ez azt jelenti, hogy az első munkás végzi a harmadik munkát, a második munkás az első munkát, a harmadik munkás az ötödik feladatot, a negyedik munkás a negyedik, az ötödik munkás a második munkát és ekkor a költség 37 egység.

Az elmondottakat kövessük végig a következő folyamatábrán:
A korlátozás és szétválasztás módszere:



5.4.1.1. ábra. A korlátozás–szétválasztás módszere

6.4.2. A módszer általános leírása

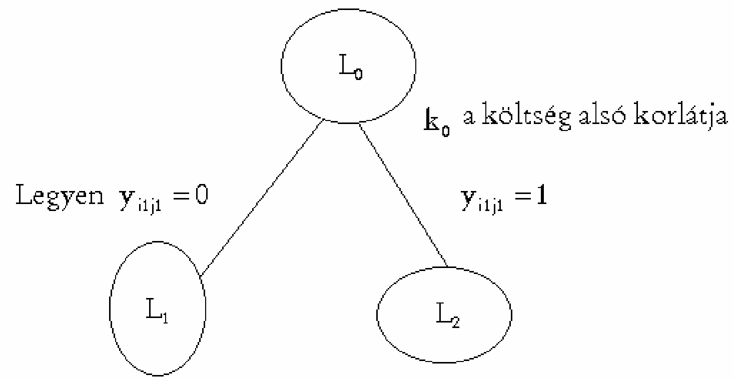
Legyen $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ a költségmátrix, és y_{ij} a modell változója. Akkor a cél a következőformában fogalmazható meg:

$$\min\left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_{ij} \mid y_{ij} \in \{0;1\}, \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1, \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1 \right\}$$

A szétválasztás és korlátozás módszerének lényege:

1. Redukáljuk a C mátrixot. Ezt jelöljük C_0-val. Meghatározzuk a k_0-t. Ez lesz a költség alsó korlátja.
2. A C_0 mátrix minden $c_{ij} = 0$ elemére nézve meghatározzuk az $r_{ij} = \min\{c_{ik} \mid k = 1,\dots,j-1, j+1,\dots,n\} + \min\{c_{kj} \mid k = 1,\dots,i-1, i+1,\dots,n\}$ értéket. Az $\{r_{ij}\}$ halmazból kiválasztjuk a legnagyobbat. Legyen ez a i_1j_1-edik indexű hely.
3. A C_1 mátrixot úgy nyerjük a C_0-ból, hogy i_1j_1 helyébe M-t írunk, (ez azt jelenti, hogy i_1-edik munkás nem végzi el a j_1-edik munkát, azaz $x_{i1j1}=0$), majd a mátrix redukcióját elvégezzük. Mivel a redukció értéke éppen $r_{i_1j_1}$ lesz, ezért az L_1-hez tartozó költség alsó korlátja $k_1 = k_0 + r_{i_1j_1}$. Ha $x_{i1j1}=1$, azaz az i_1-edik munkás elvégzi a j_1-ik munkát, vagyis az L_2 halmazban vizsgálódunk, akkor úgy járunk el, hogy a C_0 mátrixból elhagyjuk i_1 indexű sort és a j_1 indexű oszlopot.
4. Az így kapott C_2 mátrixot ismét redukáljuk. Ha $\bar{r}_{i_1j_1}$ szimbólummal jelöljük a redukálás mértékét, akkor a költség $k_2 = k_0 + \bar{r}_{i_1j_1}$ lesz.
5. Az algoritmust úgy folytatjuk, hogy azt a halmazt bontjuk tovább, ahol a k értéke kisebb. Ezt a lépéssorozatot addig folytatjuk, míg egyértelműen nem tudunk 0 költségű helyre tervezni.

A megoldás fastruktúrája:



akkor $k_1 = k_0 + r_{i_1j_1}$, $k_2 = k_0 + \bar{r}_{i_1j_1}$.

Ha $k_2 \leq k_1$, akkor az L_2 halmazt bontjuk tovább hasonlóan.

6.4.3. Speciális problémák

Munkások száma nem egyezik a munkafeladatok számával

Ha a munkások száma több mint a munkák száma, akkor lesznek olyan munkások akik nem kapnak munkát. Ha a munkások száma kevesebb, mint a munkák száma, akkor bizonyos munkafeladatok elvégzésére nem kerül sor.

Ezekben az esetekben a fent megismert megoldási módszert úgy alkalmazzuk, hogy a költségmátrixot annyi névleges oszloppal illetve sorral bővítjük, amennyivel a költségmátrix kvadratikus mátrix lesz. A névleges sorok és oszlopok költségelemei nullával egyenlők.

Tiltótarifa a hozzárendelési feladatban.

Ez akkor áll elő, ha bizonyos munkákat egy vagy több munkás valamilyen ok miatt nem végezhet el. Akkor is tiltótarifát alkalmazhatunk, ha a munkások száma kevesebb mint a munkafeladatok száma és bizonyos munkafeladatokat mindenképpen el kell végezni.

Az elmondottak illusztrálására nézzük a következő feladatot:

Hat munkafeladatot négy munkással kell elvégezni. Előírás, hogy a negyedik és a hatodik munkafeladatot mindenképpen el kell végezni, azonban az első munkás a harmadik és hatodik munkafeladatot nem tudja elvégezni, a második munkás pedig az első és negyedik munkát nem végezheti. Határozzuk meg az elosztási tervet úgy, hogy az elvégzett összmunka költsége a lehető legkisebb legyen.

$$\text{A költségmátrix: } K = \begin{bmatrix} 6 & 8 & - & 10 & 7 & - \\ - & 5 & 8 & - & 11 & 8 \\ 9 & 11 & 7 & 9 & 9 & 13 \\ 8 & 13 & 5 & 8 & 7 & 11 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: A költségmátrixot egészítsük ki négyzetes mátrixá. A két névleges munkás költsége nulla. Mivel előírtuk, hogy a negyedik és a hatodik munkafeladatot el kell végezni ezért a névleges sorokban a negyedik és a hatodik költségelem értéke a végtelen nagy értéket jelentő M kerüljön. Tiltótarifa kerüljön még az első és a második sorba is.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 6 & 8 & M & 10 & 7 & M \\ M & 5 & 8 & M & 11 & 8 \\ 9 & 11 & 7 & 9 & 9 & 13 \\ 8 & 13 & 5 & 8 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & M \end{bmatrix} \Rightarrow K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & M & 4 & 1 & M \\ M & 0 & 3 & M & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & M \end{bmatrix}.$$

A K_2 mátrix minden sorát csökkentsük az illető oszlop legkisebb elemével. Így már olyan mátrixot kapunk, amelynek minden sorában és oszlopában van legalább egy nulla. Tehát:

$$K_3 = \begin{bmatrix} [0] & 2 & M & 2 & 1 & M \\ M & 0 & 3 & M & 6 & [0] \\ 2 & 4 & 0 & [0] & 2 & 3 \\ 3 & 8 & [0] & 1 & 2 & 3 \\ 0 & [0] & 0 & M & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & M & [0] & M \end{bmatrix}.$$

A K_3 mátrixon látható egy lehetséges megoldás, amely egyben optimális megoldás is (sikerült 0 költségű helyre kijelölni a megoldást). E megoldás szerint az 1. munkás az első munkát, a 2. munkás a 6. munkát, 3. munkás a 4. munkát, 4. munkás a 3. munkát végzi. Tehát a legkisebb költséggel akkor végezhető el a kijelölt feladat, ha a 2. és az 5. munkát nem végezzük el. A négy munkafeladat összköltsége: k=6+8+9+5=28.

Hozzárendelési feladat a célfüggvény maximalizálásával

Ilyen feladat akkor fordul elő, ha a mátrix elemei nem költséget, hanem hasznot jelentenek. Ekkor a munkák olyan szétosztása a cél, hogy az összhaszon a lehető legnagyobb legyen. Az ilyen feladat is könnyen megoldható a fenti módszer valamelyikével, ugyanis a célfüggvény −1-szeresének ott van a minimuma, ahol az eredeti célfüggvénynek a maximuma.

Példaként oldjuk meg a következő feladatot! Egy lovasversenyen egy csapat négy versenyzőből áll. Egy-egy ló teljesítménye nagymértékben függ attól, hogy ki lovagolja. Az előző versenyek eredményei alapján tudjuk, hogy az egyes versenyzők várható pontszáma mennyi az egyes lovak lovaglása esetén. Ezt látjuk a következő táblázatban:

	Lovak			
Lovasok	A	B	C	D
Tibi	980	1020	960	950
Béla	1010	990	1000	1030
Pali	1000	980	950	990
Zoli	1040	970	990	1010

Melyik lovat ki lovagolja, hogy a lehető legnagyobb pontszámot érjen el a csapat? Melyik az a minimális pontszám, amelynek elérése mindenképpen várható?

Az első kérdés megválaszolása a célfüggvény maximalizálása, a második kérdésre a hozzárendelési feladat alapmodelljének megoldása ad választ.

Az első kérdés megválaszolása érdekében első lépésként szorozzuk meg a mátrix minden elemét −1-gyel. Azután az így kapott mátrix minden sorát csökkentsük az illető sor legkisebb elemével. Ekkor egy nem negatív elemű mátrixot kapunk. Harmadik lépésként a már így redukált mátrix minden oszlopát csökkentsük az illető oszlop legkisebb elemével. Ezen a mátrixon keressük az optimális megoldást a *szétválasztás és korlátozás* módszerével.

$$P_0=\begin{bmatrix} -980 & -1020 & -960 & -950 \\ -1010 & -990 & -1000 & -1030 \\ -1000 & -980 & -950 & -990 \\ -1040 & -970 & -990 & -1010 \end{bmatrix} \Rightarrow P_1=\begin{bmatrix} 40 & 0 & 60 & 70 \\ 20 & 40 & 30 & 0 \\ 0 & 20 & 50 & 10 \\ 0 & 70 & 50 & 30 \end{bmatrix}.$$

A P_0 első sorából levontunk −1020-t (a sor legkisebb elemét), a 2. sorból −1030-t, a 3. sorból −1000-t, a 4. sorból −1040-t, így kaptuk a P_1-t. Látható, hogy a 3. oszlop még redukálható 30 egységgel. Így kaptuk a P_2-t.

$$P_2=\begin{bmatrix} 40 & 0 & 30 & 70 \\ 20 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 20 & 10 \\ 0 & 70 & 20 & 30 \end{bmatrix}.$$ A redukció értéke $k_1= -4060$.

Látható, hogy itt nem lehet olyan megoldást kijelölni, ahol minden lekötött elem 0 lenne. Ezért vizsgáljuk meg 0 helyeket.

Képezzük az r értékeket:

$r_{12}=30+20=50$, $r_{23}=20+0=20$, $r_{24}=0+10=10$, $r_{31}=10+0=10$, $r_{41}=20+0=20$

Az r_{12} értéke a legnagyobb, ezért először az r_{12} helyet kell vizsgálni.

Ha $x_{12}=1$, akkor Tibi lovagolja a B lovat, ekkor törölhetjük az első sort és a második oszlopot. Az így nyert mátrixot redukáljuk:

$$P_3=\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 20 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 20 & 10 \\ 0 & \cdot & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy ez tovább nem redukálható, tehát a k változása 0, azaz $k_2= -4060$.

Ha $x_{12}=0$, *akkor* Tibi nem lovagolja a B lovat és így a $k= -4060+50=-4010$ lenne, ami nagyobb, mint k_2. Tehát az előbbi ágon haladunk tovább. A P_3 mátrixban sem jelölhető ki egy olyan megoldás, ahol minden kötött elem 0 lenne. Ezért értékeljük a P_3 mátrix 0 elemeit:

$r_{23}=0+20=20$, $r_{24}=0+10=10$, $r_{31}=10+0=10$, $r_{41}=20+0=20$.

Ha $x_{23}=1$, *akkor* a 2. sor és a 3. oszlop elhagyása után a 4. oszlop redukálható 10-zel. Tehát $k_3= k_2+10= -4050$.

Ha $x_{23}=0$, *akkor* $r_{23}=20$ miatt a „költség” 20 egységgel növekedne. Tehát az $x_{23}=1$-t érdemes választani. Ekkor $k_3= -4060+10= -4050$.

A redukált új mátrix: $P_4=\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 20 \end{bmatrix}$.

Értékeljük a P_4 mátrix 0 elemeit: $r_{31}=0+0=0$, $r_{34}=0+20=20$, $r_{41}=20+0=20$. Ebből már triviálisan következik, hogy $x_{34}=1$ és $x_{41}=1$. A $k_4= -4050$.

Tehát az optimális megoldás: Ha Tibi a B, Béla a C, Pali a D, Zoli pedig az A lovat lovagolja, akkor 4050 pontot szerezhetnek és ez a legtöbb.

Feladat: Készítse el az előző példa folyamatábráját!

Hozzárendelési feladatok megoldása Solver programmal.

Helyezze el a költségmátrixot és az ismeretlenek mátrixát a szállítási feladatoknál megtanult módon EXCEL táblán, hiszen ez egy speciális szállítási feladat.

Itt a feltételi egyenletek, ha x_{ij} jelenti, hogy az *i*-edik munkás elvégzi a *j*-edik munkát vagy nem, az x_{ij} egy bináris változó.

„Az *i*-edik munkás valamelyik munkát elvégzi”
magyar mondatnak matematikai megfelelője:

$$x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in}=1,\ \text{ahol}\ i=1,\,2,\ldots,n.$$

„A *j*-edik munkát valamelyik munkás elvégzi” magyar mondat megfelelője:

$$x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{nj}=1,\ \text{ahol}\ j=1,\,2,\ldots,n.$$

A célfüggvény pedig:

$$k=8x_{11}+10x_{12}+7x_{13}+8x_{14}+\ldots..+11x_{54}+18x_{55}\to\min$$

lesz. Ezt érdemes a SZORZATÖSSZEG függvénnyel előállítani.

Hívja meg a Solver programot és jelölje be a célfüggvény cellájának helyét, a változók mátrixának tartományát, feltételi egyenlőségeket adja hozzá a feltételekhez. Itt jelölje be, hogy a változók mátrixának tartománya bináris lehet. Ne felejtse el a beállításokat: Lineáris modell, nemnegatív feltételezés.

6.5. Körutazási vagy utazóügynök probléma

Adott n *város. A feladat az, hogy egy ügynök valamelyik városból kiindulva hogyan tudja felkeresi valamennyi várost úgy, hogy minden várost csak egyszer érintve a legrövidebb út megtétele után a kiindulási városba érjen vissza.* (n>3).

Ismeretesek a városok közötti távolságok, amelyeket ún. *távolságmátrixba* szokás foglalni. Ennek a C_0 mátrixnak a c_{ij} eleme jelenti a i-edik és a j-edik város „távolságát”. *Ennek értelmében* $c_{ii}=0$ *lenne, de értelemszerűen ez az út nem szerepelhet, ezért a szokásos* M *tiltó tarifát írjuk az átlóba.*

Itt is érvényes a hozzárendelési feladatok feltétele: az y_{ij} változó csak 0 vagy 1 értéket vehet fel.

A feladat megoldása mégsem egyezik a hozzárendelési feladat megoldásának algoritmusával, mert figyelembe kell venni azt, ha az i-edik városba érkeztünk, akkor innen is kell tovább indulni. Ez azt jelenti, hogy az 1 értékű változókat olyan sorrendbe kell állítani, hogy indexeik egy *indexláncot* alkossanak.

Melyik sorrend biztosítja a legrövidebb utat?

Tehát adott a $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ távolságmátrix. Jelölje továbbá y_{ij} azt, hogy az i-edik városból elmegyünk a *j*-edik városba.

Ha $y_{ij} = 0$*, akkor az azt jelenti, hogy* V_i*-ből nem megyünk* V_j*-be.*

Ha $y_{ij} = 1$*, akkor az azt jelenti, hogy* V_i*-ből megyünk* V_j*-be.*

Természetesen, hogy $y_{ii} = 0$ lesz mert *i*-ből nem mehetünk *i*-be.

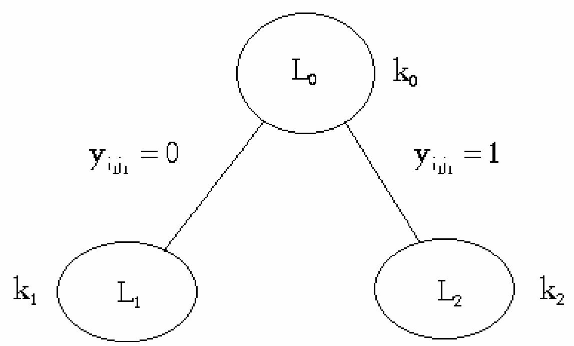
A feladat matematikai modellje:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_{ij} \mid y_{ij} \in B, \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1 = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right\},$$

ahol $B = \{0,1\}$ *bináris halmaz.*

Hozzárendelési feladat nem biztosítja a megoldást, mert ott nem voltunk tekintettel a sorrendre. Itt biztosítani kell azt, ha j-edik városba bementünk, akkor innen megyünk tovább, azaz biztosítani kell az ún. indexsort:

Pl. V_1V_2, V_2V_3, V_3V_4, …, $V_{n-1}V_n$, V_nV_1, azaz $y_{ik} = y_{km} = y_{mj} = \ldots = 1$
Az eljárás lényege hasonló a hozzárendelési feladatéhoz:



Megoldás lépései:

1. Redukáljuk a **C** mátrixot. Ezt jelöljük C_0-val.. Meghatározzuk a k_0-t. Ez lesz az út alsó korlátja.
2. A C_0 minden $c_{ij}=0$ elemére nézve meghatározzuk az $r_{ij}=\min\{c_{ik}\mid k=1,\dots,j-1,j+1,\dots,n\}+\min\{c_{kj}\mid k=1,\dots,i-1,i+1,\dots,n\}$ értékeket. Az $\{r_{ij}\}$ halmazból kiválasztjuk a legnagyobbat. Legyen ez az i_1j_1-adik indexű hely.
3. C_1 mátrixot úgy nyerjük a C_0-ból, hogy $c_{i_1j_1}$ helyébe M-t írunk. Ez azt jelenti, hogy nem megyünk i_1-ből a j_1 helyre. Majd végezzük el c_1 redukcióját. Mivel a redukció értéke éppen $c_{i_1j_1}$ lesz, ezért az L_1-hez tartozó becslés $k_1=k_0+r_{i_1j_1}$. (Ezt automatikusan is meghatározható)
4. L_2-vel kapcsolatban úgy járunk el, hogy a C_0 mátrixból elhagyjuk i_1 indexű sort és a j_1 indexű oszlopot. Ezzel biztosítjuk, hogy L_2-ben i_1j_1 viszonylat lesz a körútban. Ekkor viszont nem szerepelhet i_1j_1 viszonylat, ezért a i_1j_1 elem értékét M-re állítjuk.
5. Az így kapott C_2 mátrixot ismét redukáljuk. Ha $\bar{r}_{i_1j_1}$ szimbólummal jelöljük a redukálás mértékét, akkor a körút hossza $k_2=k_0+\bar{r}_{i_1j_1}$ lesz.
6. Az algoritmust úgy folytatjuk, hogy azt a halmazt bontjuk tovább, ahol a k értéke kisebb.

Ezt a lépéssorozatot addig folyatjuk, míg egyértelműen nem tudunk 0-ra tervezni.

Példa:
Határozza meg a legrövidebb körutat. Vonjuk ki soronként a legkisebb elemet a többi elemből, majd az oszlopokra is alkalmazzuk ezt az eljárást!

$$C=\begin{bmatrix} M & 10 & 5 & 9 & 6\\ 15 & M & 4 & 5 & 1\\ 4 & 6 & M & 5 & 3\\ 10 & 5 & 1 & M & 7\\ 9 & 4 & 8 & 2 & M \end{bmatrix}\begin{matrix}5\\1\\3\\1\\2\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix} M & 5 & 0 & 4 & 1\\ 14 & M & 3 & 4 & 0\\ 1 & 3 & M & 2 & 0\\ 9 & 4 & 0 & M & 6\\ 7 & 2 & 6 & 0 & M \end{bmatrix}.$$

$$\begin{matrix}12 & \quad 1 & \quad 2\end{matrix}$$

Így előállítjuk a redukált C_0 mátrixot:

$$C_0 = \begin{bmatrix} M & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 13 & M & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & M & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & M & 6 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & M \end{bmatrix}$$

. A $k_0 = 13 + 3 = 15$ érték alsó becslés a körutakhoz.

Minden $c_{ij} = 0$-hoz számoljuk ki az r_{ij}-t:

$r_{13} = 1$, $r_{25} = 3$, $r_{31} = 6$, $r_{35} = 0$, $r_{43} = 2$, $r_{52} = 1$, $r_{54} = 2$.

Az $r_{31} = 6$ a legnagyobb, ezért L_1-hez tartozik y_{31}, ezért M-et írtunk a c_{31} helyére. Ekkor a C_1 mátrix:

$$C_1 = \begin{bmatrix} M & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 13 & M & 3 & 4 & 0 \\ M & 1 & M & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & M & 6 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & M \end{bmatrix}$$

és az út alsó korlátja: $k_1 = k_0 + 6 = 21$

Az L_2-höz tartozó lehetőség, azaz ha $y_{31} = 1$, akkor elhagyva a 3. sort és 1. oszlopot és M-re állítva a c_{13} értékét, kapjuk:

$$C_2 = \begin{bmatrix} . & 3 & M & 4 & 1 \\ . & M & 3 & 4 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & 2 & 0 & M & 6 \\ . & 0 & 6 & 0 & M \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} . & 2 & M & 3 & 0 \\ . & M & 3 & 4 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & 2 & 0 & M & 6 \\ . & 0 & 6 & 0 & M \end{bmatrix}.$$

Ez redukálható 1-gyel az első sorban, ezért $k_2 = k_0 + 1 = 16$.

Mivel $k_2 < k_1$ ezért ezen az ágon folytatjuk az eljárást:

Az r_{ij}-k értékei a $c_{ij}=0$ helyeken:

$r_{15} = 2$, $r_{25} = 3 + 0 = 3$, $r_{43} = 2 + 3 = 5$, $r_{52} = 2 + 0 = 2$, $r_{54} = 0 + 3 = 3$.

Az $r_{43} = 5$ a legnagyobb, ezért L_3 ágon folytatva az eljárást, azaz ha $y_{43} = 0$, akkor $k_3 = k_2 + r_{42} = 16 + 5 = 21$ lesz.

Ha L_4 ágon megyünk, azaz ha $y_{43} = 1$, akkor elhagyva a 4. sort és 2. oszlopot és c_{34}-t M-re állítva kapjuk:

$$C_4 = \begin{bmatrix} . & 2 & . & 3 & 0 \\ . & M & . & 4 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & 0 & . & 0 & M \end{bmatrix}$$

és nem lehet redukálni, ezért $k_4 = k_2 + 0 = 16 + 0 = 16$.

Mivel $k_4 < k_3$, ezért L_4 halmazt bontjuk tovább:

Meghatározzuk az r_{ij} értékeket: $r_{15} = 2$, $r_{25} = 4$, $r_{52} = 2$, $r_{54} = 3$.

Az $r_{25} = 4$ érték a legnagyobb, ezért ha $y_{25} = 0$ lesz, akkor $k_5 = k_4 + r_{25} = 16 + 4 = 20$.

Ha $y_{25} = 1$, akkor elhagyva a 2. sort és 5 oszlopot és az c_{52}-t M-re állítva kapjuk:

$$C_6 = \begin{bmatrix} . & 2 & . & 3 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & M & . & 0 & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} . & 0 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & .. \\ . & M & . & 0 & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}.$$

A C_6 redukálható 2-vel, ezért $k_6 = k_4 + 2 = 16 + 2 = 18$.

Mivel $k_6 < k_5$, ezért ezen az ágon folytatva az eljárást: Itt leolvasható egy triviális megoldás $y_{12} = 1$ és $y_{54} = 1$, valamint $k = k_6 = 18$.

Ezzel az eljárás befejeződött. Ha végignézzük a megoldásláncot, kapjuk az

$$y_{31} = y_{43} = y_{25} = y_{12} = y_{54} = 1$$

megoldást. Az indexlánc szerint az út:

$$y_{12} = y_{25} = y_{54} = y_{43} = y_{31} = 1,$$

azaz az utazó útja: $V_1V_2 \to V_2V_5 \to V_5V_4 \to V_4V_3 \to V_3V_1 \to$ lesz.

Közben megtett út: $k = 10 + 1 + 2 + 1 + 4 = 18$.

6.6. Néhány egészértékű modell a gyakorlatban

6.6.1. Hátizsák probléma

A hátizsák probléma egy egyfeltételes 0-1 egészértékű lineáris programozási. feladat. Az elnevezést onnan kapta, hogy egy túrázó problémáján szemléltette először a szakirodalom a feladatot. A túrázó n számú használati tárgy közül úgy akarja összerakni a felszerelését, hogy a megengedett teherbírás (térfogat) mellet a legnagyobb használati értéket vihessen magával.

Ha a_j a j-edik tárgy súlya (térfogata), c_j pedig a használati értéke, b a túrázó „teherbírása” (a hátizsák térfogata), akkor az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$$
$$x_j = 0 \text{ vagy } 1 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

algebrai feladat megoldása adja meg túrázó problémájára a választ.

Az $x_j = 1$ esetében a túrázó magával viszi a j-edik tárgyat, $x_j = 0$ esetében pedig nem.

6.6.2. Hajórakodási probléma

A két feltételes terhelési feladatokat ***hajórakodási problémának*** *is nevezik, mert a hajórakomány összeállításánál figyelemmel kell lenni a súlyra is és a térfogatra is.*

Tegyük fel, hogy adott súlyú és térfogatú hajót kell megrakni bizonyos nem osztható árucikkekkel. Meghatározandó az a legnagyobb értékű rakomány, amelyet a hajó elszállíthat.

Legyen:
n – a különböző árucikk száma,
a_j – a j-edik árucikk súlya,
b_j – a j-edik árucikk térfogata,
r_j – a j-edik elszállítandó árucikk darabszáma,
c_j – a j-edik árucikk értéke,
V – a hajó rakodási térfogata,
G – a hajó rakodási súlya.

Ha x_j jelöli a j-edik árucikkből szállítandó darabszámot, akkor feladatunk az

$$x_j \geq 0,\ [x_j] = x_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq G$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n \leq V$$
$$x_j \leq r_j$$

$$f(\underline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max$$

tiszta egészértékű feladat megoldását kívánja meg.

6.6.3. Beruházási probléma

Tegyük fel, hogy egy cég üzeme m db erőforrás felhasználásával n db terméket kíván előállítani. A $\underline{b}$ vektor komponensei jelentik a jelenleg rendelkezésre álló erőforrások mennyiségét (kapacitását), A pedig a technológiai együtthatók mátrixát.

A vállalat vezetősége bővíteni szeretné az erőforrásokat és erre p Ft áll rendelkezésre. Az erőforrások bővítésére *k* db különböző beruházási változat jöhet szóba. Jelentse ezen változat megvalósításához szükséges költségeit egy $\underline{r}$ vektor komponensei (k komponensű vektor).

Ha $\underline{y}$ vektor jelenti a beruházások megvalósítását (komponensei 1–0 érték, beruházás megvalósul vagy nem) akkor nyilván teljesülni kell a

$$\underline{r}^T \cdot \underline{y} \leq p$$

összefüggésnek.

Nyilván ez a beruházás növeli az egyes erőforrások kapacitását is. Jelöljük a növekedés mértékét a $\underline{g}(\underline{y})$ vektorral (a $\underline{g}$ vektor $\underline{y}$-tól függő). Ekkor az új rendelkezésre álló erőforrás $\underline{b} + \underline{g}(\underline{y})$ lesz. Ha $\underline{x} \geq \underline{0}$ vektor az üzem tevékenységi vektora és $\underline{c}^T$ a tevékenység árbevétele, akkor a feladat matematikai modellje:

$$\underline{x} \geq \underline{0},\ \underline{y}\ \text{(0 vagy 1 komponensű vektor)}$$
$$[y_i] = y_i,\ y_i \leq 1,\ y_i \geq 0$$
$$A \cdot \underline{x} \leq \underline{b} + \underline{g}(\underline{y})$$
$$\underline{r}^T \cdot \underline{y} \leq p$$
$$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \max$$

Ez egy vegyes egészértékű feladat.

6.6.4. Fixköltség probléma

Eddigi modellekben a termelés felmerült költségei között nem szerepeltettük a termelés során felmerült ún. fix költségeket. Ebben az esetben feltételeztük, hogy a célfüggvényben szereplő hozamok arányosak a termelt mennyiséggel.

A továbbiakban tegyük fel, hogy a termék előállítási költsége két részre bontható:

- egy a termelési szinttől függő,
- egy a termelési szinttől független részre.

Az első részt változó költségnek, a másodikat pedig állandó, vagy fix költségnek szokás nevezni. A j-edik termék költsége tehát: $k(x_j) + d_j$, ahol $k(x_j)$ változó költség, d_j pedig a fix költség.

Olyan modellt állítsunk most össze, ahol a költségfüggvény

$$p(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_j = 0 \\ k(x_j) + d, & \text{ha } x_j > 0 \end{cases}.$$

Ez a megfogalmazás tartalmazza azt a kikötést, hogy a fix költség csak akkor lép fel a j-edik terméket illetően, ha ténylegesen folyik termelés, azaz akkor érvényesül a modellben, ha $x_j > 0$-nál. Természetesen, ha a vizsgálódásainkat minden termékre kiterjesztjük, akkor áttérve a vektor jelölésre az összes költséget az $\underline{1}^T \cdot \underline{k}(\underline{x}) + \underline{d}^T \cdot \underline{y}$ függvény fejezi ki.

A modell csak akkor működőképes, ha a feltételi egyenlőtlenségek között is szerepel az $\underline{y}$ változó. Ez pedig úgy valósítható meg, hogy előírjuk minden termékre a következő feltételt: $xj \le r_j y_j$ (minden j-re), ahol r_j kifejezheti azt, hogy az j-edik termékből maximálisan mennyit termelhetünk.

Így a modellünk a következő formában írható fel:

$\underline{x} \ge \underline{0}$, $\underline{y} \ge \underline{0}$ és y_j 0 vagy 1 érték minden j-re.

$A \cdot \underline{x} \le \underline{b}$

$x_j - r_j y_j \le 0$ (minden j-re)

$\underline{1}^T \underline{k}(x_j) + \underline{d}^T \cdot \underline{y} \to \min$

Ha a célfüggvény a haszon maximalizálását fejezi ki, akkor először célszerű a termék fedezetét és belőle a termelés fedezeti összegét kiszámítani és abból levonni a felmerülő általános költséget.

Ekkor a célfüggvény:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j - \sum_{j=1}^{n} d_j \cdot y_j \to \max ,$$

ahol c_j jelenti a j-edik termék fedezetét.
A probléma skaláris formában:

Legyen**:**

- n a termékek száma,
- m az erőforrások száma,
- b_i az erőforrások kapacitása (i = 1, 2, …, m),
- a_{ij} az j-edik termék egy egységének előállításához szükséges erőforrás az i-edik erőforrásból (j=1, 2, …, n),
- c_j a j-edik termék fedezete,
- k_j a termék termelésének fix költsége,
- r_j a termékből gyártandó mennyiség felső korlátja,
- x_j a j-edik termékből gyártandó – egyenlőre ismeretlen – mennyisége,
- y_j bináris változó,

akkor a maximális nyereséget a következő modell megoldásával határozhatjuk meg:

$$x_j \geq 0,\ y_j \geq 0,\ [y_j] = y_j;\ j = 1,2,\ \ldots,\ n;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$x_j - r_j y_j \leq 0$$

$$y_j \leq 1$$

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - (k_1y_1 + k_2y_2 + \ldots + k_ny_n) \to \max$$

Megjegyzés: a megfogalmazás szerint az y_j értéke 0 vagy 1 lehet és ekkor x_j-t termeljük vagy nem. Ez biztosítja, hogy a k_j fix költség csak y_j =1 esetben lép fel. A modellhez természetesen több feltétel is megfogalmazható.

7. Többcélú lineáris programozás

Eddig mindig feltételeztük, hogy a lineáris programozást alkalmazó vállalat, intézmény vezetése egyetlen célfüggvénybe meg tudja fogalmazni a tevékenység célját, mint például a teljes haszon maximalizálása vagy a teljes költség minimalizálása. Pedig a vállalatok vezetése gyakran több más cél figyelembevételével hozza meg döntését.

Ilyenek lehetnek a *profit fenntartása, a piaci részesedés növelése vagy megtartása, stabil árak elérése, a dolgozók hangulatának javítása, a vállalat tekintélyének növelése stb.*

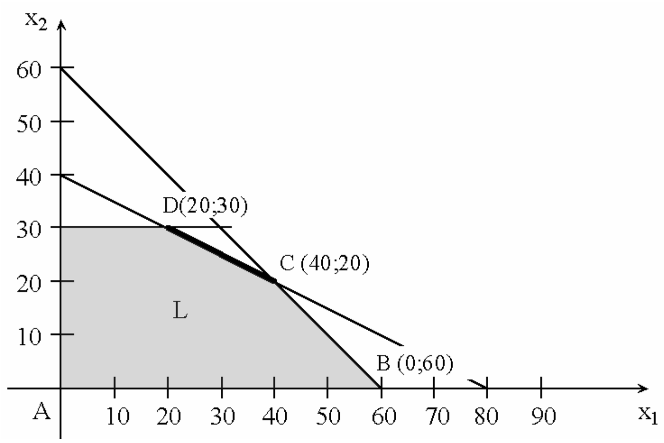
A *többcélú lineáris programozás* elmélete lehetővé teszi, hogy egyidejűleg több cél elérésére törekedve adjunk optimális megoldást. *Az eljárás lényege az, hogy minden egyes verbálisan megfogalmazott célt először számszerűsítünk, azaz mindegyik célhoz felállítunk egy célfüggvényt, majd egy olyan, megoldást keresünk, amely valamilyen szinten minden célfüggvénynek megfelel.*

Általában az a jellemző, hogy a különböző célfüggvényhez nem ugyanaz az optimális termelés szerkezet tartozik.

A problémát szemléltessük egy kétváltozós termelési feladattal:

$$
\begin{array}{rcl}
x_1, \quad x_2 & \geq & 0 \\
x_1 + 2x_2 & \leq & 80 \\
x_1 + x_2 & \leq & 60 \\
x_2 & \leq & 30 \\
\hline
z_1 = 2x_1 + 4x_2 & \to & \max \\
z_2 = x_1 \qquad & \to & \max
\end{array}
$$

Ábrázoljuk a feladatot grafikonon!



Ha a feladatot csak a z_1 célfüggvény figyelembevételével optimalizáljuk, akkor eredményül a D és a C pontokat összekötő szakaszt kapjuk (alternatív optimum), ha z_2 szerint optimalizáljuk, akkor eredményül a B pontot kapjuk.

Ezt számítással is ellenőrizhetjük:

B_0	x_1	x_2	b
u_1	1	2	80
u_2	1	1	60
u_3	0	1	30
$-z_1$	2	4	0
$-z_2$	1	0	0

Először z_1 szerint optimalizálunk, ezért z_1 szerint választunk generáló elemet úgy, hogy a változásokat a z_2-re is elvégzem.

B_1	x_1	u_3	
u_1	1	−2	20
u_2	1	−1	30
x_2	0	1	30
$-z_1$	2	−4	−120
$-z_2$	1	0	0

A lehetséges megoldás nem optimális, ezért folytatjuk a bázistranszformációt.

B_2	u_1	u_3	
x_1	1	−2	20
u_2	−1	1	10
x_2	0	1	30
$-z_1$	−2	0	−160
$-z_2$	−1	2	−20

A z_1 szerint optimális megoldást kaptunk, mégpedig alternatív optimumot:

$$\underline{x}_{01}^{(1)} = [20\ 30],$$

$$z_1(\underline{x}_{01}^{(1)}) = 160,\ \ z_2(\underline{x}_{01}^{(1)}) = 20\,.$$

Látható, hogy z_2 szerint ez nem optimális, ezért folytassuk az eljárást z_2 szerint.

B_3	u_1	u_2	
x_1	-1	2	40
u_3	-1	1	10
x_2	1	-1	20
$-z_1$	-2	0	-160
$-z_2$	1	-2	-40

A z_1 szerint továbbra is optimális a megoldás. A z_1 értéke nem változott, a z_2 értéke növekedett, de még nem optimális.

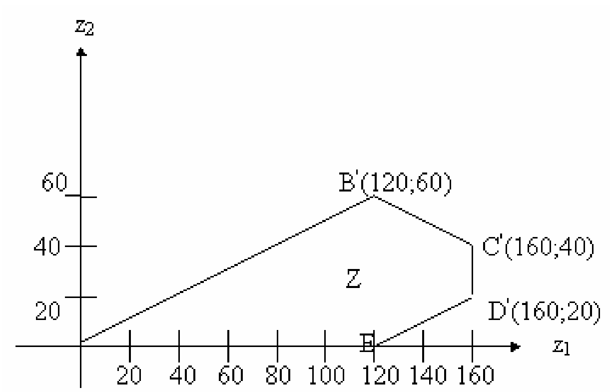
B_4	x_2	u_2	
x_1	1	1	60
u_3	1	0	30
u_1	1	-1	20
$-z_1$	2	-2	-120
$-z_2$	-1	-1	-60

Most már z_2 szerint optimális a megoldás,

$$x_0^{(2)} = [60;0], z_1(\underline{x}_0^{(2)}) = 120, z_2(\underline{x}_0^{(2)}) = 60 .$$

Látható, hogy z_2 értéke növekedett, de z_1 értéke csökkent.

Ábrázoljuk a *célfüggvénytérben* az eredményt:



Megfigyelhetjük, hogy az $\underline{x}$ értékeket az L halmaz határán a B és D között választjuk meg, akkor a Z halmaz határán a B' és D' pontok közötti értékek mozognak.

A B'C' szakaszt előállító $\underline{x}$ termelési vektorok olyan megoldások, amelyeket megvalósítva és áttérve egy másik megoldásra az egyik cél szerinti növekedés a másik cél szerinti csökkenéssel jár együtt. Viszont a D'C' szakasz pontjaihoz tartozó $\underline{x}$ értékek olyanok, hogy ha egyik $\underline{x}$ vektorról áttérünk egy másikra, akkor az egyik célfüggvény értéke nem változik, a másik pedig jobb lesz.

Definíció: Efficiens pontoknak vagy Pareto-optimális pontoknak nevezzük azokat a megoldásokat, amely rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy nem találunk hozzájuk egy másik – a feltételeket kielégítő – pontot, amelyeket a célfüggvénybe helyettesítve minden cél szerint ugyanakkorát és legalább az egyik cél szerint jobbat kapunk.

Definíció: Az $\underline{x}^* \in L$ pontot *L* efficiens pontjának nevezzük, ha nincs olyan $\underline{x} \in L$, amelyre $c \cdot \underline{x}^* \leq c\underline{x}$, és a két oldal legalább egy megfelelő komponensénél a szigorú egyenlőség teljesül.

Tétel: Az $\underline{x}^* \in L$ akkor és csak akkor efficiens pontja a többcélú feladatnak, ha optimális megoldása a következő többparaméteres feladatnak:

$$\underline{x} \geq \underline{c}$$
$$A \cdot \underline{x} \leq \underline{b}$$
$$z = \lambda_1 z_1(\underline{x}) + \lambda_2 z_2(\underline{x}) + \cdots + \lambda_k z_k(\underline{x}) \to \max,$$

ahol $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ *és* $\lambda_i \geq 0$ *minden* i-*re és* $z_i(\underline{x}) = \underline{c}_i \underline{x}_i$, i = 1, 2, …, k.

A grafikus módszerrel megoldott példára alkalmazva:

$$\begin{array}{llcr}
x_1, & x_2 & \geq & 0 \\
x_1 & +2x_2 & \leq & 80 \\
x_1 & +x_2 & \leq & 60 \\
 & x_2 & \leq & 30 \\
\hline
z = & \lambda(2x_1 + 4x_2) & +(1-\lambda) & \cdot x_1 \to \max,
\end{array}$$

azaz

$$2x_1\lambda - \lambda x_1 + 4x_2\lambda + x_1 = (2 - \lambda + 1)x_1 + 4\lambda x_2 = (\lambda + 1)x_1 + 4\lambda x_2 \to \max, \text{ ahol } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Ennek a paraméteres lineáris programozási feladatnak a λ karakterisztikus intervallumai adják az efficiens megoldásokat. Több célfüggvény esetén elég nehézzé válik ez a numerikus számolás, mert több paraméter is szerepelne.

Visszatérve a példánkra a C pont efficiens vagy Pareto-optimális pont.

Az elmondottakból látható, hogy ha a célfüggvények között fontossági sorrendet tudunk felállítani (preferencia szerint írjuk fel és indexeljük a célfüggvényeket) és az első célfüggvény szerint több optimális megoldás is van, akkor ezen optimális megoldási halmazon keressük a második célfüggvény szerinti optimális megoldást. Az eljárást addig folytatjuk, amíg az utolsó célfüggvény szerint is elő nem áll az optimális megoldás.

Ha ez nem lehetséges, akkor kereshetjük a feladat Pareto-optimális megoldását. Ez általában elég komoly matematikai eszközöket igényel, ezért olyan módszereket mutatunk be, amelyek segítségével visszavezethető a megoldási eljárás a szimplex módszerre.

Ezeket *„kompromisszumus”* megoldásoknak nevezzük.

A kompromisszumos megoldást az alábbi eljárásokkal állíthatjuk elő.

A linearitást feltételezve és a szokásos jelöléseket alkalmazva a következőképpen fogalmazható meg a többcélú programozási feladat:

$$\underline{x} \leq \underline{0}$$
$$A\,\underline{x} \leq \underline{b}$$

$$z_1 = f_1(\underline{x}) = \underline{c_1}^T \underline{x} \rightarrow \max.$$
$$z_2 = f_2(\underline{x}) = \underline{c_2}^T \underline{x} \rightarrow \max.$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$z_k = f_k(\underline{x}) = \underline{c_k}^T \underline{x} \rightarrow \max.$$

Rövidebben a célfüggvényeket így is írhatjuk: $\underline{z} = C\,\underline{x} \rightarrow \max$, ahol C mátrix a célfüggvények együtthatóit tartalmazza.

A kérdés az, hogyan értelmezzük a *„kompromisszumus”* optimális megoldást?

Lehetséges válaszok:

1. A lehetséges megoldási halmazon megkeressük az egyes célfüggvények szerinti egyedi optimális megoldásokat. Jelöljük ezeket $\underline{x}_{01}, \underline{x}_{02}, \ldots, \underline{x}_{0k}$ szimbólumokkal. Az egyedi optimális megoldások célfüggvény értékekből felépíthető egy *ideális* megoldás:

$$Z_0 = [Z_{01}, Z_{02}, Z_{03}, \ldots, Z_{0k}]$$

és ez az ideális megoldás a lehetséges megoldások terére is leképezhető**.** Egy ilyen leképezés lehet az optimális megoldások konvex lineáris kombinációja:

$$\lambda_1 \cdot Z_{01} + \lambda_2 \cdot Z_{02} + \ldots + \lambda_k \cdot Z_{0k} = Z_{0,}$$

Vagy $\lambda_1 \cdot \underline{x}_{01} + \lambda_2 \cdot \underline{x}_{02} + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_{0k} = \underline{x}_0$,

ahol $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_k = 1$ és $\lambda_k \geq 0$.

Például az előbbi feladatban:

Válasszuk λ_1 =0,7 és λ_2 =0,3 értéket, akkor egy kompromisszumos optimális megoldás:

$$\underline{x}_0 = 0{,}7\begin{bmatrix}20\\30\end{bmatrix} + 0{,}3\begin{bmatrix}60\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14\\21\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}18\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}32\\21\end{bmatrix},$$

és ekkor z_1=2·32+4·21= 64+84=148 és z_2=32.

2. *Úgy is megoldhatjuk a feladatot, hogy a célfüggvényeket helyettesítjük egy célfüggvénnyel.*

a) Súlyozási módszer

Gyakran alkalmazható módszer az, hogy az egyes célfüggvényekhez fontosságuk szerint súlyokat rendelünk. E $\lambda_i \geq 0$ súlyok ismeretében az L lehetséges megoldási halmazon a

$$g(\underline{x}) = \lambda_1 f(\underline{x}) + \lambda_2 f(\underline{x}) + \ldots + \lambda_k f(\underline{x})$$

függvény maximumát keressük. Ekkor korlátos L halmaz esetén biztosan kapunk efficiens pontot.

Ha a célfüggvények dimenziója különböző, akkor a következőképpen járhatunk el.

$$g(\underline{x}) = \lambda_1 \frac{f_1(\underline{x}) - m_1}{M_1 - m_1} + \lambda_2 \frac{f_2(\underline{x}) - m_2}{M_2 - m_2} + \ldots + \lambda_k \frac{f_k(\underline{x}) - m_k}{M_k - m_k},$$

ahol m_i illetve M_i az f(x) célfüggvény minimuma illetve maximuma a lehetséges megoldások halmazán.

Az előző feladat esetében ez így alakul:

Az új célfüggvény:

$$z=0{,}7z_1+0{,}3z_2=$$
$$0{,}7(2x_1+4x_2)+0{,}3x_1=1{,}4x_1+2{,}8x_2+0{,}3x_1=1{,}7x_1+2{,}8x_2\rightarrow \max.$$

Tehát a modell:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + & x_2 & \leq 80 \\ x_1 + & x_2 & \leq 60 \\ & x_2 & \leq 30 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{z = 1{,}7x_1 + 2{,}8x_2 \rightarrow \max.} \end{array}$$

b) Korlátok *módszere.*
Megoldás lehet az is, hogy a legfontosabb célfüggvényt vesszük csak figyelembe, a többiekre pedig egy megfelelő alsó korlátot adunk meg és ezeket bevisszük a korlátozó feltételek közé. Így az eredeti feladat helyett az

$$\begin{gathered} \underline{x} \geq \underline{0} \\ A\,\underline{x} \leq \underline{b} \\ \underline{c}_2^T \underline{x} \geq b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \underline{c}_k^T \underline{x} \geq b_k \\ \hline f_1(\underline{x}) = \underline{c}_1^T \underline{x} \rightarrow \max \end{gathered}$$

lineáris programozási feladatot oldjuk meg.
Esetünkben: Ha ismeretünk van arról, hogy a szóban forgó célfüggvényérték mekkora szokott lenni (a vállatoknál ez általában becsülhető), akkor a z_2 célfüggvény alsó korlátjának például 40 értéket adva és a modellbe beírva kapjuk:

$$\begin{array}{rcrl} x_1 & + & 2x_2 & \leq 80 \\ x_1 & + & x_2 & \leq 60 \\ & & x_2 & \leq 30 \\ x_1 & & & \geq 40 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.} \end{array}$$

Megjegyzés: ez a módszer nem vezet feltétlenül efficiens ponthoz.

c) *A legkisebb célfüggvény értékének* maximalizálása*:*
A b) pontban bemutatott alsó korlátot nem mindig lehet értelmes módon megadni, mert nincs információnk róla, illetve egyidejűleg szeretnénk minden alsó korlátot növelni és ezzel az eredeti célnak megfelelően növelni értéküket. Ebben az esetben alkalmasnak tűnhet a *legkisebb alsó korlát értékének maximalizálása.*
Vezessünk be egy mesterséges változót, y-t (amelynek értékét előre nem tudjuk) úgy, hogy $f_1(\underline{x}) \geq y$, $f_2(\underline{x}) \geq y$, …, $f_n(\underline{x}) \geq y$ is teljesüljön.
Egyetlen célfüggvénynek válasszuk a $z = y$ függvény maximalizálását.
Esetünkben:

$$\begin{aligned} f_1(\underline{x}) &= 2x_1 + 4x_2 \geq y, \\ f_2(\underline{x}) &= x_1 \qquad\quad\;\; \geq y. \end{aligned}$$

Ezt átrendezve:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - y &\geq 0, \\ x_1 \qquad\quad - y &\geq 0. \end{aligned}$$

Vagy ami ezzel egyenértékű:

$$\begin{aligned} -2x_1 - 4x_2 + y &\leq 0, \\ -x_1 \qquad\quad + y &\leq 0. \end{aligned}$$

A lineáris programozási modell tehát a következő:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & & \leq 80 \\ x_1 + x_2 & & \leq 60 \\ x_2 & & \leq 30 \\ -2x_1 - 4x_2 & + y & \leq 0 \\ -x_1 \qquad & + y & \leq 0 \\ \hline z = & y & \to \max. \end{array}$$

A szimplex induló táblázat tehát:

B_0	x_1	x_2	y	$\underline{b}$
u_1	1	2	0	80
u_2	1	1	0	60
u_3	0	1	0	30
u_4	−2	−4	1	0
u_5	−1	0	1	0
$-z$	0	0	1	0

B_1	x_1	x_2	u_5	$\underline{b}$
u_1	1	2	0	80
u_2	1	1	0	60
u_3	0	1	0	30
u_4	−1	−4	−1	0
y	−1	0	1	0
$-z$	1	0	−1	0

B_2	u_2	x_2	u_5	b
u_1	−1		0	20
x_1	1	1	0	60
u_3	0	1	0	30
u_4	1		−1	60
y	1		1	60
−z	−1	−1	−1	−60

Optimális megoldás olvasható le a táblázatból:

$x_1 = 60$, $x_2 = 0$, $y = 60$.

Ekkor az eredeti célfüggvények értéke: $f_1(\underline{x})=120$, $f_2(\underline{x})=60$.

8. Nemlineáris programozás

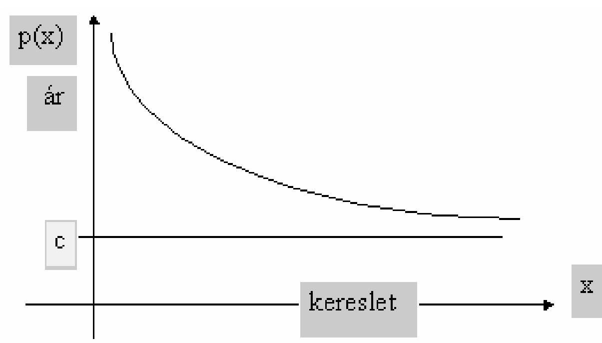
8.1. Fogalom és példák

A lineáris programozás alapvető feltevése, hogy a probléma megfogalmazásában szereplő összes függvény ($f(\underline{x})$ célfüggvény és $g_i(\underline{x})$ kényszerfeltétel) lineáris.

Ez a feltevés sok gyakorlati feladat esetében nem teljesül. Sok közgazdász azt találta, hogy a *nemlinearitás* sok tervezési feladatnál szinte szabály.

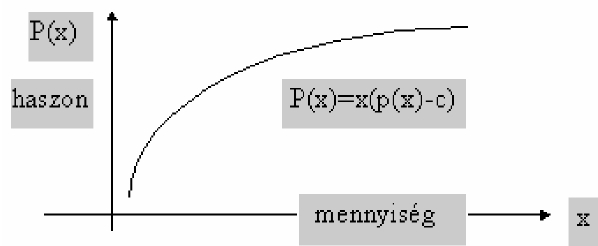
Csak egy példát említünk.

Ismert az ár–keresleti görbe: p(x)



A p(x) az az ár, amellyel a termék x egységét el lehet adni.

Ha termék egységének termeléséhez szükséges költség c, akkor a cég hasznát a $P(x) = x \cdot p(x) - c \cdot x$ nem lineáris célfüggvény adja meg:



Ha a cég n termékének mindegyikének hasonló a haszonfüggvénye, akkor az eredő célfüggvény:

$$f(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n} P_j(x_j), \text{ (ahol } j=1, 2, \ldots, n\text{)},$$

azaz nemlineáris függvények összege.

A *nemlineáris programozási* feladatok sokféle formában jönnek elő.

Ezeknél nincs egyetlen olyan közös algoritmus, amely egzakt megoldást adna a különböző típusú feladatokra, hanem egy-egy – gyakorlatban előforduló – speciális típusú feladatra dolgoztak ki algoritmust.

A tárgyalandó nemlineáris programozási feladatok mindegyikénél feltételezzük, hogy a kényszerfeltételek lineáris függvények, így azt is mondhatjuk, hogy olyan feladatokkal foglalkozunk, amelyeknél csak a célfüggvény nemlineáris.

Ebben a feladattípusban az a közös, hogy célfüggvényük nem lineáris. Ezen feladatokat aszerint osztályozhatjuk, hogy a célfüggvényük milyen függvény. Ha a célfüggvény másodfokú, akkor kvadratikus programozásról, ha a célfüggvény lineáris törtfüggvény, akkor hiperbolikus programozásról stb. beszélünk.

8.1.1. Példa egy kvadratikus célfüggvényre

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a két termék ára a forgalmazott mennyiségtől függ és a következő függvényekkel fejezhető ki:

$$p_1(x_1) = 10 - x_1,$$
$$p_2(x_2) = 12 - x_2,$$

ahol x_1 és x_2 a két termék értékesített mennyisége, akkor az árbevételt

$$f(x_1, x_2) = (10 - x_1)x_1 + (12 - x_2)x_2 = 10x_1 - x_1^2 + 12x_2 - x_2^2$$

függvény adja, amely nem lineáris (kvadratikus). Ezért az ilyen célfüggvényű feladatot kvadratikus programozásnak nevezik.

Ha a termelést az

$$x_1 + x_2 \le 4,$$
$$x_1 - x_2 \le 2$$

lineáris egyenlőtlenségrendszer korlátozza, akkor a probléma matematikai modellje a következőképpen írható fel:

$$\begin{array}{lllll} & x_1, & x_2 & \ge 0 & \\ & x_1 & +x_2 & \le 4 & \\ & x_1 & -x_2 & \le 2 & \\ \hline f(x_1, x_2) = 10x_1 & +12x_2 & -x_1^2 & -x_2^2 & \to \max. \end{array}$$

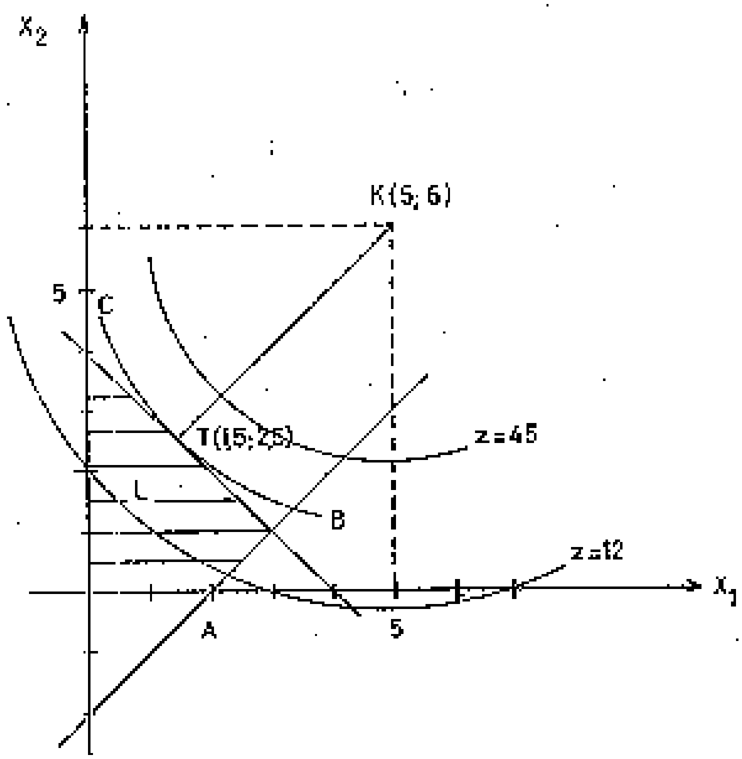
Grafikonon szemléltethetjük a probléma megoldását.

Ábrázoljuk azt a célfüggvényt, melynek értéke 40, azaz

$$10x_1 + 12x_2 - x_1^2 - x_2^2 = 40.$$

Átalakítva kapjuk: $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 = 21$.

Így már felismerhető, hogy ez egy olyan körnek az egyenlete, amelynek a középpontja (5;6) koordinátájú pont, a sugara pedig $\sqrt{21}$. Ha több koncentrikus kört is ábrázolunk, akkor látható, hogy a lehetséges megoldási halmazból melyek azok a pontok, amelyek ugyanazon célfüggvényértéket adják. A 7.1.1. ábrán jól látható, hogy mely pontok adják a nagyobb célfüggvényértéket.



7.1.1 ábra

A lehetséges megoldások közül az a pont adja az optimális megoldást, amely legközelebb van a K középponthoz. Ez a pont a K-ból a CB szakaszra bocsátott merőleges talppontja, a T(1,5 ; 2,5) pont. Ehhez a ponthoz z = 36,5 célfüggvényérték tartozik. Látható, hogy *az optimális megoldás nem csúcspont*. Ez általában is így van a nemlineáris programozásnál!

8.1.2. Egy másik gyakorlati probléma

Egy vállalat három terméket tervez gyártani három erőforrás felhasználásával. A termelést korlátozó feltételrendszer a következő lineáris egyenlőtlenségrendszerrel oldható meg, ahol x_j jelenti a j-edik termékből előállított mennyiséget.

$$\begin{array}{llll} x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0, \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 12, \\ x_1 & & +x_3 & =10, \\ & x_2 & +x_3 & \leq 6. \end{array}$$

A három termék fajlagos hozama rendre 3, 2, 1 Ft. A termelés során a termeléssel összefüggésben 3 Ft-ot be kell fizetni egy közös alapba, ezért a hasznot kifejező függvény:

$$h(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3.$$

A termékek fajlagos költsége rendre 1, 1, 2 Ft. Ezen ráfordítások mellett a termelésnek van még 4 Ft állandó költsége, ezért a költséget leíró függvény:

$$k(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 2x_3 + 4.$$

A vezetőség azt szeretné, ha olyan termelésszerkezet alakulna ki, hogy a termelés egységnyi költségére jutó hozam lenne a legnagyobb.

Az operációkutatók ezt a kívánságot a következő célfüggvénnyel fejezik ki:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3}{x_1 + x_2 + 2x_3 + 4} \to \max.$$

Látható, hogy ez a célfüggvény nem lineáris, hanem tört függvény, mégpedig lineáris törtfüggvény. (Egyváltozós függvények esetén hiperbolának nevezték az ilyen függvények grafikonját).

Ezért az ilyen programozási feladat *tört vagy hiperbolikus programozás.*

8.2. Nemlineáris programozási feladatok általános megoldási módszerei

A lineáris programozási feladatok megoldására kidolgozott szimplex módszert Wofe „sétáló” módszernek nevezte, mert a szimplex módszer lényege az volt, hogy megkerestük a lehetséges megoldási halmaz egy csúcspontját és a bázistranszformációval áttértünk egy szomszédos csúcspontra és az alkalmazott eljárás elvitt az optimális megoldást adó csúcspontra. Mint az (7.1.1) ábrán látható volt, hogy a nemlineáris programozási feladatok optimális megoldása nem is biztos, hogy csúcsponton lesz, ezért a csúcspontról csúcspontra való lépegetés nem vezethet eredményre. A számítási eljárásokat itt „szökdécselő” illetve „mászó” módszereknek nevezhetnénk.

Ezek lényege az, hogy kiindulunk egy lehetséges megoldásból (nem feltétlen csúcspont!) és megkeressük, hogy mely irányba kell elmozdulni ahhoz, hogy a legnagyobb mértékben növekedjen a célfüggvény. Ennek egyik leghatékonyabb módszere az ún. *gradiens módszer,* amely a lépés irányát a célfüggvény gradiense jelöli ki.

A nemlineáris programozási feladatok megoldásának egy másik módszere a „*szakaszonként lineáris”* megközelítést alkalmazó módszer. Ennek lényege az, hogy a nemlineáris célfüggvény egymáshoz kapcsolódó egyenes szakaszokkal közelíthető és bizonyos feltételek megléte esetén visszavezethető lineáris programozási feladatok megoldására.

Természetesen ezen módszerek legtöbbször csak közelítő megoldást adnak.

A Kuhn-Tucher tételek lehetővé teszik nagyon sok programozási feladat (minden lineáris feltételű és minden konvex (konkáv) nemlineáris célfüggvényt tartalmazó feladat) megoldását a Lagrange-függvény segítségével.

A matematikai programozási feladatok felfoghatók úgy, mint *feltételes szélsőérték* feladatok. Ez azt jelenti, hogy keressünk az $f(\underline{x})$ célfüggvény minimumát vagy maximumát az $\underline{x}$ változóra felírt

$$
\begin{aligned}
g_1(\underline{x}) &= b_1\,, \\
g_2(\underline{x}) &= b_2 \\
&\vdots \quad , \\
g_m(\underline{x}) &= b_m
\end{aligned}
$$

úgynevezett mellékfeltételekkel (korlátozó feltételekkel), ahol $m < n$. A feltételes szélsőérték feladatok megoldására ismert klasszikus eljárás a Lagrange-féle multiplikátorok módszere. Ennek lényege, hogy felírjuk a

$$F(\underline{x},\underline{\lambda}) = f(\underline{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(\underline{x}) - b_i] \text{ Lagrange-függvényt.}$$

Megmutatható, hogy az $F(\underline{x},\underline{\lambda})$ többváltozós függvénynek ott van szélsőértéke, ahol az eredeti feladatnak. (A matematika tanulmányaikból ismert, hogy a szélsőérték létezésének szükséges feltétele az, hogy parciális deriváltak nullával legyenek egyenlők.)

A nemlineáris programozás szintén feltételes szélsőérték feladat azzal a megkötéssel, hogy a változók nem negatív értékeket vehetnek fel. Ezért van jelentősége ezen feladatok megoldása szempontjából a Karush-Kuhn-Tucher tételeknek.

Tétel: Ha $f(\underline{x})$ konkáv és $g_1(\underline{x}), g_2(\underline{x}), \ldots, g_m(x)$ konvex differenciálható függvények, akkor az $\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ csak akkor lehet optimális megoldása egy nemlineáris programozási feladatnak, ha létezik $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *m* db nemnegatív szám úgy, hogy az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

1 $x_j^* \geq 0$, minden j-re, ahol j = 1, 2, …, n,

2. $u_i^* \geq 0$, minden i-re, ahol 1 = 1, 2, …, m,

3. $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0$,

4. $x_j^* \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = 0$,

5. $g_i(\underline{x}^*) - b_i \leq 0$,

6. $u_i(g_i(\underline{x}^*) - b_i) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$ esetén.

A feltételekben szereplő u_i–k az ún. Lagrange-szorzók a lineáris programozásnál tárgyalt duális változónak felelnek meg. (Ezen módszerek matematikai tárgyalása nagyon messze vezetne, ezért az érdeklődőknek ajánljuk a javasolt irodalmak áttanulmányozását).

Meg kell jegyezni, hogy a Lagrange-multiplikátorok módszere nem túlságosan hatékony módszer, mert gyakran szinte lehetetlen az ismertetett egyenletrendszereket megoldani. Ezért is dolgoztak ki olyan eljárásokat, amelyek bizonyos típusú feladatok megoldására alkalmasabbak és valamilyen módon kapcsolódik a szimplex eljáráshoz.

8.3. Tört- vagy hiperbolikus program

Definíció: Hiperbolikus programozásról beszélünk akkor, ha lineáris feltételrendszer nemnegatív megoldásait tartalmazó halmaz felett olyan racionális törtfüggvény maximumát keressük, amelyben mind a számláló, mind a nevező első fokú függvény.

Általános megfogalmazása:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \underline{x} \geq \underline{0} \\ \text{b)} & A\,\underline{x} \leq \underline{b} \\ \hline \text{c)} & z = \dfrac{\underline{c}^T \underline{x} + c_0}{\underline{d}^T \underline{x} + d_0} \rightarrow \max . \end{array}$$

Ezen típusú feladatok megoldására két módszert is bemutatunk.

8.3.1. Martos-féle módszer

Elsőnek Martos Béla magyar matematikus (1960) *dolgozott ki szimplex algoritmusra visszavezető módszert a hiperbolikus programozási feladatok megoldására. Ennek lényege az, hogy a megoldást visszavezeti a lineáris programozásnál megismert szimplex módszerre.*

A következő transzformációs táblázatból indult ki:

B_0	$\underline{x}^T$	
$\underline{u}$	A	$\underline{b}$
	$\underline{c}^T$ $\underline{d}^T$	$-c_0$ $-d_0$

ahol $\underline{c}^T$ a számlálóban, $\underline{d}^T$ a nevezőben lévő függvény együtthatóinak sorvektorait jelenti, c_0 és d_0 pedig a szóban forgó függvények konstansai.

Természetesen, ha a feltételek között egyenletek vannak (módosított normálfeladat), akkor most is képezni kell a másodlagos célfüggvényt (z^*-t) és először e szerint kell végrehajtani a báziscserét. Vagyis itt is elő kell állítani egy lehetséges bázismegoldást, majd vizsgálni kell, hogy ez a bázismegoldás optimális-e.

Martos kimutatta, hogy az optimalitás kritériuma:

a) $\underline{b}' \geq \underline{0}$

b) $\underline{t}^T = d_0' \underline{c}^T - c_0' \cdot \underline{d}^T \leq \underline{0}^T$ vagy $t_j = d_0' \cdot c_j - c_0' \cdot d_j$,

ahol a vessző azt jelzi, hogy az aktuális táblázatban kifejezett értékekről van szó. A $\underline{t}$ előállítása nem része a szimplex transzformációnak, azt minden táblázatban számítani kell!

A kidolgozott módszert az 7.1.2. példán mutatjuk be:

Módosított normálfeladattal állunk szemben, ezért az induló szimplex táblázat:

B_0	x_1	x_2	x_3	b
u_1	1	1	1	12
u_2^*	1	0	1	10
u_3	0	1	1	6
c^T	3	2	1	3
$\underline{d}^T$	1	1	2	-4
z^*	1	0	1	10

A táblázatból nem olvasható le lehetséges megoldás.

B_1	u_2^*	x_2	x_3	b
u_1		1	0	2
x_1		0	1	10
u_3		1	1	6
$\underline{c}^T$		2	-2	-27
$\underline{d}^T$		1	1	-14
$\underline{z}^x$		0	0	0
$\underline{t}^T$		1	-55	

Itt már leolvasható egy lehetséges megoldás.
A $\underline{t}^T$ kiszámítása:

$$14 \cdot 2 – 27 \cdot 1 = 1,$$
$$14(–2) – 27 \cdot 1 = –55,$$

$\underline{t}^T = [1; –55] \leq \underline{0}^T$ nem áll fenn, tehát nem optimális a megoldás.

B_2	u_2^*	u_1	x_3	b
x_2		1	0	2
x_1		0	1	10
u_3		-1	1	4
$\underline{c}^T$		-2	-2	-31
$\underline{d}^T$		-1	1	-16
$\underline{t}^T$		-1	-63	

A $\underline{t}^T$ kiszámítása:

$$16 \cdot (-2) - 31(-1) = -1,$$
$$16 \cdot (-2) - 31(1) = -63,$$

$\underline{t}^T = [-1, -63] \leq \underline{0}^T$ teljesül, tehát optimális a táblázat.

Az optimális megoldás:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad z_0 = \frac{31}{16}.$$

Megjegyzés: Ha a célfüggvény a minimumhoz tart, akkor −1-gyel szorozzuk a célfüggvényt és a maximumát kereshetjük.

8.3.2. Lineáris programozási feladattá transzformálás

A hiperbolikus feladatot megoldhatjuk másképpen is, némileg eltérő módon vezetve vissza a szimplex módszerre. Ez azért igen hasznos, mert a szimplex algoritmust egyáltalán nem kell megváltoztatni, csak az induló feladatot fogalmazzuk át.

Ennek ismerete akkor hasznos, ha csak lineáris programozási programcsomag áll rendelkezésre.

Vezessük be $\underline{y} = \dfrac{\underline{x}}{\underline{d}^T\underline{x} + d_0}$ és $t = \dfrac{1}{\underline{d}^T\underline{x} + d_0}$ jelöléseket.

Ekkor: $\underline{y} = \underline{x} \cdot t$ illetve $\underline{x} = \dfrac{\underline{y}}{t}$

Így az eredeti modell felírható a következő alakra:

$$A\,\underline{y} \le \underline{b} \cdot t \text{ és } \underline{d}^T \cdot \underline{x} \cdot t + d_0 t = 1,$$

illetve a célfüggvény: $z = \underline{c}^T \cdot \underline{y} + c_0 \cdot t$.

Rendezett formában felírva a modellt, kapjuk:

$$\begin{array}{c} \underline{y} \ge 0,\ t \ge 0 \\ A\,\underline{y} - \underline{b} \cdot t \le 0 \\ \underline{d}\,\underline{y} + d_0 t = 1 \\ \hline z = \underline{c}^T\underline{y} + c_0\, t \to \max. \end{array}$$

Látható, egy módosított normál lineáris programozási feladatot kaptunk.

Tétel: Ha a feladatnak $[\underline{y}_0;\ t_0]$ az optimális megoldása, akkor az eredeti feladat optimális megoldása $\underline{x}_0 = \dfrac{1}{t_0} \cdot \underline{y}_0$.

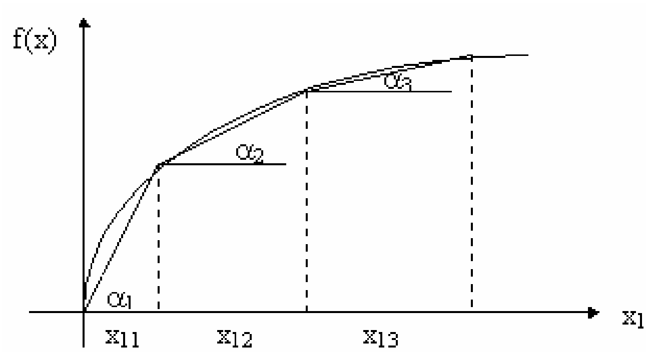
Feladat: Oldja meg kedves olvasó gyakorlásként az előbbi feladatot a most bemutatott módszerrel!

8.4. Szuboptimális programozás

(Szeparábilis konkáv vagy konvex célfüggvénnyel rendelkező programozási feladat közelítő megoldása.)

Tétel: Olyan programozási feladatok megoldása, amelyekben a feltételek lineárisak, de a célfüggvény konkáv (maximum cél esetén alulról konkáv, minimum cél esetén pedig alulról konvex) vagy konvex függvénnyel adható meg, akkor a megoldás visszavezethető egy közönséges lineáris programozási feladatra.

Úgy járunk el, hogy a kérdéses konkáv görbét a 7.4.1. ábrán látható módon egyenes szakaszokkal közelítjük meg. Az eredeti x_1 változót ilyenkor annyi új változóval helyettesítjük, ahány egyenes szakaszt alkalmaztunk a megközelítésnél. Mindegyik változóhoz a megfelelő szakasz iránytangensét rendeljük együtthatónak a célfüggvényben. Így az x_{11}, x_{12} stb. változók együtthatóit $tg\alpha_1$, $tg\alpha_2$ stb. lesznek.



7.4.1. ábra

Mivel a célfüggvényről feltettük, hogy konkáv, ezért a közelítő szakaszok meredekségeire fenn áll:

$$tg\,\alpha_1 > tg\,\alpha_2 > tg\,\alpha_3 \ldots \text{stb.}$$

Ez biztosítja, hogy a programozásnál az x_{12} csak akkor lép be a programba, ha az x_{11} már ott maximális értékkel szerepel. A célfüggvény iránt még az is követelmény, hogy *szeparábilis* legyen, azaz egyváltozós függvények összegére felbontható legyen.

Szeparálható például a $f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2 + 2x_1^2 + \lg x_1x_2$ függvény, mivel felírható $f(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_1^2 + \lg x_1) + (-x_2 + \lg x_2)$ alakban is.

Ezért ezt a programozási módszert *szeparábilis programozásnak* is nevezik.

Példaként oldjuk meg a 7.1.1. pontban ismertetett feladatot:

$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 - x_2 \leq 2$$
$$\overline{}$$
$$z = 10x_1 + 12x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max.$$

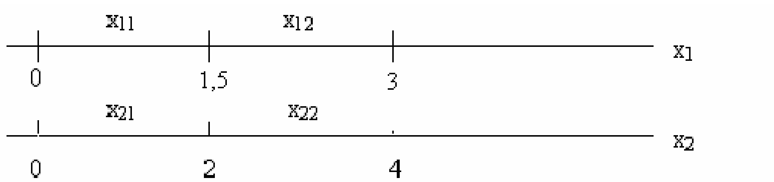
A feladat célfüggvénye másodfokú és szeparálható a két változó szerint:

$$f(x_1) = 10x_1 - x_1^2,\ f(x_2) = 12x_2 - x_2^2,$$

tehát probléma csak a célfüggvény egyenesekkel való közelítése marad. A feltételi egyenlőtlenségből könnyen megállapítható az a két intervallum, amelyben az interpolációt el kell végezni.

Ezek $0 \leq x_1 \leq 3$ és $0 \leq x_2 \leq 4$.

Osszuk fel az első intervallumot is és a másodikat is két részre az alábbi módon:



Az eredeti feladatot közelítő modell felírásához szükséges, hogy meghatározzuk a függvények értékeit és a közelítő húrok meredekségeit.

<table>
<tr><td>x_1</td><td>0</td><td>1,5</td><td>3</td><td>x_2</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$10x_1-x_1^2$</td><td>0</td><td>12,75</td><td>21</td><td>$12x_2-x_2^2$</td><td>0</td><td>20</td><td>32</td></tr>
<tr><td>m_1</td><td colspan="3">$\frac{12{,}75-0}{1{,}5}=8{,}5$
$\frac{21-12{,}75}{1{,}5}=5{,}5$</td><td>$m_2$</td><td colspan="3">$\frac{20}{2}=10$ $\frac{32-20}{2}=6$</td></tr>
</table>

A szakaszváltozókra a következő feltételek állnak fenn:

$$0 \le x_{11} \le 1{,}5, \quad 0 \le x_{12} \le 1{,}5, \quad 0 \le x_{21} \le 2,\ 0 \le x_{22} \le 2.$$

Tehát a közelítő modell így néz ki:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{21} & + & x_{22} & \le & 4 \\
x_{11} & + & x_{12} & - & x_{21} & - & x_{22} & \le & 2 \\
x_{11} & & & & & & & \le & 1{,}5 \\
 & & x_{12} & & & & & \le & 1{,}5 \\
 & & & & x_{21} & & & \le & 2 \\
 & & & & & & x_{22} & \le & 2 \\
\hline
z = 8{,}5x_{11} & + & 5{,}5x_{12} & + & 10x_{21} & + & 6x_{22} & \to & \max.
\end{array}$$

Ezen lineáris feladat optimális megoldása:

$$x_{11} = 1{,}5,\ x_{12} = 0,\ x_{21} = 2,\ x_{22} = 0{,}5,$$
$$z_{opt}=35{,}75.$$

Az eredeti feladat megoldása az előbbi lineáris modell értékeivel:

$$x_1 = x_{11} + x_{12} = 1{,}5,$$
$$x_2 = x_{21} + x_{22} = 2{,}5,$$
$$z_{opt} = 36{,}5.$$

Most egy *kvadratikus programozási feladatot oldottunk meg közelítő módszerrel.* A közelítő megoldás eltérése a pontos értéktől (amely 7.1.1. grafikonról olvasható le) $36{,}5 - 35{,}75 = 0{,}75$.

Az elkövetett hiba relatív nagysága:

$$\frac{0{,}75}{36{,}5} \cdot 100\,\% = 2{,}1\,\%.$$

Az intervallumok számának növelésével finomítható a megoldás.

9. Játékelmélet

9.1. Bevezetés

Az élet – különösen gyermekkorban – tele van játékkal, vetélkedéssel. A társasjátékok jó vetélkedést és szórakozást ígérnek. A szerencsejátékok, pl. a LOTTÓ, a Kenó, a kockajátékok fontos jellemzője, hogy a játékosoknak nincs befolyása a játékok kimenetelére, azt mondjuk, hogy a „véletlentől függenek”. Az igazi társasjátékoknak alapvető jellegzetessége az, hogy a végső kimenetele elsősorban az ellenfelek által alkalmazott stratégiák kombinációjától függ. A játékelmélet tárgyát képező játékok kimenetelét szabályokkal behatárolt keretek között befolyásolni tudják a játékosok. Ide sorolható a legtöbb szórakoztató játék: sakk, kártyajátékok, üzleti élet egyes mozzanatai stb. Ezeket a játékokat **stratégai játékoknak** nevezzük.

Definíció: A játékelmélet olyan matematikai elmélet, amely vetélkedési helyzetek általános jellegzetességeivel foglalkozik.

A játékosok száma szerint megkülönböztetünk *kétszemélyes, vagy* n–*személyes játékot,* ahol a játékosok lehetnek személyek, csapatok, cégek stb.

Feltesszük, hogy a játékosok racionálisan gondolkodnak és csak a saját érdekeik szempontjai szerint döntenek a játék során. A játék során a játékosok valamilyen **stratégiát** választanak anélkül, hogy ismernék az ellenfél stratégiáját.

Definíció: A **stratégia** egy előre kimondott szabály, amely teljesen meghatározza, hogy hogyan akar valaki válaszolni a játék minden egyes szakaszában minden egyes körülményre.

A szóba jövő stratégiák összességét nevezzük *stratégiahalmaznak.*

Definíció: Ha a játékosok egymástól függetlenül, csak a saját érdeküket figyelembevételével választanak stratégiát, akkor **nemkooperatív,** egyébként **kooperatív** játékról beszélünk.

Játék kimeneteleit egy ***értékelő függvénnyel*** hasonlíthatjuk össze, ezt általában egy **kifizető mátrixban** adjuk meg.

Szimbólumokkal megfogalmazva: egy G játékot megadhatunk az S_1, S_2, …, S_n stratégiahalmazokkal és az

$$f_1(s_1, \ldots, s_n), \ldots, f_n(s_1, \ldots, s_n)$$

kifizető függvényekkel, ahol $s_i \in S_i$ (i= 1, 2, …, n).

Tömören írva: $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$.

Ha az S_1, …, S_n *halmazok végesek, akkor* ***véges játékról****, egyébként* ***végtelen játékról*** *beszélünk.*

9.2. Kétszemélyes zérusösszegű játékok

Ezekben a játékokban csak két ellenfél vagy játékos szerepel. Ezen játék lefolyása a következő: az egyik játékos választ egy $s_1 \in S_1$ stratégiát és így az $f_1(s_1,s_2)$ kifizető függvény által meghatározott összeghez jut, amelynek nagysága nemcsak a saját, hanem a másik játékos stratégiaválasztása is befolyásolja. A másik játékos nyereménye $f_2(s_1,s_2) = -f_1(s_1,s_2)$ lesz. Zérusösszegű játékoknak azért nevezzük, mert az egyik játékos azt nyeri meg, amit a másik elveszít, tehát nettó nyereségük összege nulla.

Ezen játékelméleti modellek alapvető fogalmainak és jellegzetességeinek illusztrálására nézzük az „*egyforma vagy különböző*” játékot.

A játék szabálya: *egy* J1 *játékos és egy* J2 *játékos felmutatja egyszerre egy vagy két ujját. Ha az ujjak száma megegyezik, akkor* J1 *játékos nyer, ha nem, akkor veszít.*

A játék kifizetési táblázata az J1 játékos számára:

		J2	
		1	2
J1	1	1	−1
	2	−1	1

A táblázat így olvasandó:

- Ha az J1 játékos felmutatta egy ujját és a J2 játékos is egyet mutatott fel, akkor az J1 játékos 1 forintot nyert, ha a J2 játékos 2 ujját mutatta fel, akkor az J1 játékos veszít, azaz −1 forintot nyer.
- Ha az J1 játékos 2 ujját mutatta fel és a J2 egy ujját, akkor az J1 játékos veszít, azaz −1 forintot nyert, ha a J2 játékos 2 ujját mutatta fel, akkor az J1 játékos nyert 1 forintot.

Kétszemélyes játék jellemző fogalmai:

1. J1 játékos stratégiája.
2. J2 játékos stratégiája.
3. kifizetési táblázat (mátrix).

Kifizetési táblát általában csak az J1 játékosra adják meg.

Játékelmélet elsődleges célja, hogy **racionális kritériumokat** dolgozzon ki jó stratégia megválasztására.

Alapfeltételek:

- Mindkét játékos racionálisan gondolkodik.
- Mindkét játékos csak a saját jóléte szempontjából választja meg stratégiáját.

Megjegyzés: A játékelmélet különbözik a döntéselmélettől, mert ott a döntéshozó passzív ellenféllel vagy természettel áll szemben, aki illetve amely véletlenszerűen választja meg a stratégiát.

Mátrixjátékoknak *nevezzük a kétszemélyes zérusösszegű véges játékokat.*

Nézzünk egy olyan játékot, amelyben az J1 játékosnak 4 stratégiája van a J2 játékosnak pedig három. A játékosok ismerik a kifizetőmátrixot:

		J2			
		1	2	3	
	1	3	− 2	1	− 2
J1	2	3	3	2	2
	3	− 4	2	5	− 4
	4	4	6	0	0
		4	6	5	

Ha J2 játékos 2. oszlopot választja és J1 a 3. sort, akkor 2 Ft-ot fizet J2 *az* J1-nak, azaz J1 játékos 2 forintot nyert.

A J1 játékos választ egy stratégiát (egy sort), J2 játékos egy oszlopot anélkül, hogy ismerné ellenfele magatartását. Az J1 játékos növelni szeretné nyereségét, a J2 játékos pedig csökkenteni a veszteségét.

A játékosok intelligensen és óvatosan viselkednek a játék során. Ezért a J2 *játékos* minden oszlopból a legnagyobb értékű számra figyel, számára ez a legnagyobb veszteség, azaz 4-re, 6-ra, 5-re és most úgy dönt, hogy az 1. stratégiát (oszlopot) választja, mert e választás esetén **biztosan** nem veszít többet 4-nél, akárhogy választ az ellenfele.

Az J1 *játékos* mindegyik sorból (stratégiából) a legkisebb értéket választja (ez a játékos legkisebb nyeresége, azaz −2, 2, −4, 0-t. Ebből látja, hogy a 2. sort kell választania, mert e választás esetén biztosan nyer legalább 2 Ft-ot. A j2 játékos ekkor az 1-es stratégiát választja, ezért ennél a döntéspárnál a játék értéke 3 lesz.

Általánosan megfogalmazva: Ha J1 játékos az i-edik, a J2 játékos a j-edik stratégiát választja és a_{ij} a játék értéke (i = 1, 2, 3, 4 és j = 1, 2, 3) akkor

- J2 választása: $\min_j (\max_i a_{ij})$.
- J1 választása: $\max_i (\min_j a_{ij})$.

A J2 játékos „minimáló játékos", az J1 játékos pedig „maximáló játékos".

A mátrixjáték egyensúlyi pontja vagy nyeregpontja:
Nézzük a következő játékot:

		J2			
		1	2	3	
J1	1	6	– 4	– 5	– 5
	2	4	3	8	3
		6	3	8	

$$\min_j \left[\max_i a_{ij}\right] = \min[6,3,8] = 3 = v$$

$$\max_i \left[\min_j a_{ij}\right] = \max-[5;3] = 3 = v$$

Ekkor van a játéknak „egyensúlyi pontja" vagy „nyeregpontja"

A v a „játék értéke". Lehet a játéknak több egyensúlyi pontja, de a játék értéke csak egy lehet.

Példa:

	J2			
J1	3	4	– 1	– 1
	3	1	4	1
	3	4	4	

nincs nyeregpont

	J2			
J1	2	– 3	– 4	– 4
	3	8	2	2
	5	3	2	2
	5	8	2	

a_{23} és a_{33} nyeregpont.

9.3. Kevert stratégiájú mátrixjátékok

Definíció: Tiszta stratégiának nevezzük a játékos stratégiáját, ha a játékban egy oszlopot vagy egy sort választ a játékos és végig ezzel a stratégiával játszik.

Optimális tiszta stratégia, ha van a játéknak nyeregpontja. Ha egyensúlypont nem létezik, akkor a játékosok a stratégiájuk váltogatásával próbálják növelni a nyereségüket.

Definíció: Kevert stratégiáról vagy **súlyozott stratégiáról beszélünk**, ha a játék során változtatják a játékosok a stratégiát.

Ha a játék kifizető táblázata m sorból és n oszlopból álló A mátrix és x_1, x_2, …, $x_m \geq 0$-vel jelöljük a J1 játékos stratégia választásának valószínűségét, melyekre fenn áll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1, \text{ valamint}$$

a J2 játékos y_1, y_2, …, $y_n \geq 0$ valószínűséggel választja meg az egyes stratégiákat, melyekre fenn áll:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1,$$

akkor a játék várható értéke (vagyis az J1 játékos nyereségének várható értéke) a következő módon határozható meg:

$$\underline{x}^T A \underline{y} \,.$$

Legyen példa a következő játék:

	J2			
J1	4	− 2	5	x_1
	− 1	3	1	x_2
	y_1	y_2	y_3	

Tegyük fel, hogy J2 bizonyos y_1, y_2, y_3 gyakorisággal választott stratégiát az J1 játékos pedig szisztematikusan az 1. sort, akkor az J1 játékos nyereségének várható értéke $4y_1 - 2y_2 + 5y_3$ forint lesz, ha J1 játékos a 2. sort választja, akkor $-y_1 + 3y_2 + y_3$ forint.

Tegyük fel, hogy J1 játékos x_1, x_2 gyakorisággal választ stratégiát, akkor az *átlagnyeresége:*

$$Ny = (4y_1 - 2y_2 + 5y_3)x_1 + [-y_1 - 3y_2 + y_3]x_2$$

Az J1 játékos racionális viselkedése abból áll, hogy úgy választja meg x_1, x_2-t, hogy biztos legyen *v* értékű nyeresége. Ha J1 játékos x_1, x_2 gyakorisággal választ stratégiát és J2 szisztematikusan az első oszlopot választja, akkor vesztesége $4x_1 - x_2$, ha 2. oszlopot, akkor $2x_1 + 3x_2$ a vesztesége és a 3. oszlop esetén $5x_1 + x_2$ a vesztesége.

Így a kevert stratégia esetén $V = (4x_1 - x_2)y_1 + (-2x_1 + 3x_2)y_2 + (5x_1 + x_2)y_3$ lesz a J2 játékos veszteségének várható értéke.

Ebből látszik, hogy Ny = V.

$$F = (x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_1y_3 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_2y_3 = \underline{x}^T A \underline{y}$$

Neumann János bebizonyította: *Létezik olyan* x_1^*, x_2^* *stratégia J1 játékos számára, hogy* $F(x_1^*, x_2^*) \geq v$ *.Ezt a következőképpen is megfogalmazhatjuk:*

Tétel: Minden mátrixjátéknak van optimális megoldása, azaz létezik olyan $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ egyensúlyi stratégiapár, amelyre

$$\underline{x}^T A \underline{y}_0 \leq \underline{x}_0^T A \underline{y}_0 \leq \underline{x}_0^T A \underline{y}$$

bármely lehetséges $\underline{x}$, $\underline{y}$ *stratégia mellett. Az* $\underline{x}_0^T A \underline{y}_0$ *számot a játék értékének nevezzük és* v*-vel jelöljük.*

Ez azt jelenti, hogy az $\underline{x}_0$ stratégia biztosítja az J1 játékos számára legalább a *v* nyereséget függetlenül attól, hogy J2 milyen stratégiát választ, illetve $\underline{y}_0$ biztosítja J2 számára, hogy a vesztesége nem lesz nagyobb *v*-nél, függetlenül J1 stratégiájától.

A tétel bizonyításához az **A** m×n-es kifizetőmátrixú játékához vezessük be az alábbi primál-duál feladatpárt:

Primál	**Duál**
$A\underline{y} \leq \underline{1}$	$\underline{x}^T A \geq 1$
$\underline{y} \geq \underline{0}$	$\underline{x} \geq \underline{0}$
$z = \underline{1}^T \underline{y} \to \max$	$w = \underline{x}^T \underline{1} \to \min$

Az általánosság megsértése nélkül feltesszük, hogy J1 mátrix minden eleme pozitív. Ha nem így lenne, minden a_{ij}-hez hozzáadjuk ugyanazt az elegendően nagy c számot. ekkor az optimális stratégia nem változik, csupán a játék értéke c-vel nő. Mivel a primál feladat normálfeladat ezért mindig van megengedett megoldása, és a pozitív együtthatók biztosítják a megoldáshalmaz korlátosságát. Emiatt *z* felveszi az optimumát, s a dualitási tétel alapján *w* is. Az optimális célérték pozitív. Az eddigi megállapításokból és az alábbi tételből a fenti tétel következik.

Tétel: Ha $\underline{y}_0$ primál és $\underline{x}_0$ a duál feladat optimális megoldása, z_0 pedig az optimális célérték, akkor

$$\underline{y}^* = \frac{1}{z_0}\underline{y}_0 \quad \textit{és} \quad \underline{x}^* = \frac{1}{z_0}\underline{x}_0$$

a mátrixjáték egy egyensúlyi stratégia párja, és $v = \frac{1}{z_0}$ *a játék értéke.*

Bizonyítás: Az LP dualitási tételéből tudjuk, hogy a primál-duál feladatpár két feladatának optimális célfüggvényértéke egyenlő, azaz $\underline{1}^T \underline{y}_0 = \underline{x}_0^T \underline{1}$. Mivel $\underline{x}^* \underline{1} = \frac{1}{z_0}\underline{x}_0 \underline{1} = \frac{1}{z_0} z_0 = 1$ és hasonlóképpen $\underline{1}^T \underline{y}^* = 1$ valamint $\underline{x}^* \geq 0$ és $\underline{y}^* \geq 0$, ezért $\underline{x}^*$ és $\underline{y}^*$ tekinthető valószínűségi vektornak. Másrészt a feltételekből következik, hogy

$$A\left(\frac{1}{z_0}\underline{y}_0\right) \leq \frac{1}{z_0}\underline{1} \text{ és } \left(\frac{1}{z_0}\underline{x}_0^T\right)A \geq \frac{1}{z_0}\underline{1}^T.$$

Szorozzuk meg minkét egyenlőtlenséget értelemszerűen az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ valószínűségi vektorral:

$$\underline{x}^T A \underline{y}^* \leq \frac{1}{z_0}\underline{x}^T \underline{1} = \frac{1}{z_0} \text{ és } \underline{x}^* A \underline{y} \geq \frac{1}{z_0}\underline{1}^T \underline{y} = \frac{1}{z_0}.$$

Ezekből adódik, hogy

$$\underline{x}^T A \underline{y}^* \leq \frac{1}{z_0} \leq \underline{x}^* A \underline{y},$$

ami éppen azt jelenti, hogy $(\underline{x}^*, \underline{y}^*)$ egyensúlyi stratégiapár és $v = \frac{1}{z_0}$ a játék értéke.

9.4. Mátrixjátékok megoldása

A fenti tétel módszert ad a mátrixjáték megoldására is:

1. *A kifizetőmátrix minden eleméhez hozzáadjuk az alkalmas c számot, hogy biztosítsuk az* $A > 0$ *egyenlőtlenséget.*
2. *Felírjuk a* $\begin{array}{c|c|c} & \underline{y}^T & \\ \hline \underline{x} & A & \underline{1} \\ -z & \underline{1}^T & 0 \end{array}$ *szimplex táblát és kiszámítjuk az optimális* $\underline{y}_0$ *és* $\underline{x}_0$ *megoldásokat.*

3. Meghatározzuk az $\underline{x}^* = \frac{1}{z_0}\underline{x}_0$ *és* $\underline{y}^* = \frac{1}{z_0}\underline{y}_0$ *optimális stratégiapárt és a* $v = \frac{1}{z_0}$ *értéket. Az eredeti feladatban a játék értéke* $v - c$ *lesz.*

Nézzük a korábban vizsgált feladatot és oldjuk meg a fent említett tételek felhasználásával.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Növeljük c = 3-mal a mátrix minden elemét:

$$A' = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

A lineáris programozási feladat:

$$\begin{array}{lllll} 7y_1 & +y_2 & +8y_3 & \le 1 \\ 2y_1 & +6y_2 & +4y_3 & \le 1 \\ y_1, & y_2, & y_3 & \ge 0 \\ \hline z = y_1 & +y_2 & +y_3 & \to \max. \end{array}$$

Megoldva szimplex algoritmussal:

B_0	y_1	y_2	y_3	b
x_1	$\boxed{7}$	1	8	1
x_2	2	6	4	1
$-z$	1	1	1	0

B_1	x_1	y_2	y_3	b
y_1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{7}$
x_2	$-\frac{2}{7}$	$\boxed{\frac{40}{7}}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{5}{7}$
$-z$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$

B_2	x_1	x_2	y_3	
y_1	$\frac{42}{280}$	$-\frac{1}{40}$	$\frac{308}{280}$	$\frac{35}{280}$
y_2	$-\frac{2}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{12}{40}$	$\frac{5}{40}$
$-z$	$-\frac{28}{280}$	$-\frac{6}{40}$	$-\frac{112}{280}$	$-\frac{70}{280}$

Ebből leolvasható a primál és a duál megoldás:

$$\underline{x}_0 = \left[\frac{28}{280};\frac{6}{40}\right]^T, \ \underline{y}_0 = \left[\frac{35}{280};\frac{5}{40};0\right]^T, \ z_0 = \frac{70}{280}.$$

Az optimális stratégiapár:

$$\underline{x}^* = \frac{280}{70}\left[\frac{28}{280};\frac{6}{40}\right]^T = \left[\frac{28}{70};\frac{42}{70}\right]^T = [0,4;0,6]^T,$$

$$\underline{y}^* = \frac{280}{70}\left[\frac{35}{280};\frac{5}{40};0\right]^T = \left[\frac{35}{70};\frac{35}{70};0\right]^T = \left[\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right]^T.$$

A játék értéke: $v = \frac{280}{70} - 3 = 4 - 3 = 1$.

Tehát, ha az J1 játékos 40% valószínűséggel választja az első stratégiát, 60% valószínűséggel választja a 2. stratégiát, akkor a játék értéke legalább 1 lesz.

Ha a J2 játékos nem a $\left[\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right]$ stratégiát választja, akkor az J1 játékos biztosan 1-nél nagyobb értéket ér el és a J2 játékost 1-nél nagyobb veszteség éri.

9.5. Kétszemélyes nem konstans összegű játékok

Eddig csak olyan játékokkal foglalkoztunk, amelyekben a játékosok viselkedésének nincs hatása az együttes eredményükre. A valódi gazdasági problémák általában nem konstans összegű játékok. Például a gazdasági összejátszás növelheti a „játékban” részt vevők összes nyereségét.

A szakirodalom megkülönböztet *kooperatív* és *nem kooperatív* nem konstans összegű játékot.

A kooperatív játékokban a játékosok együttműködnek minden olyan tevékenységben, amely az egyik játékos eredményét növelheti (feltéve, hogy a másikét nem csökkenti). A kooperatív játékok elemzésében a legtöbb új fejlemény az együttes nyeremény szétosztásának elveiben van. (A közös szerzemény szétosztásának problémája okozza a konfliktusokat, leszámolásokat, az együttműködés megszakadását). Ebből fakad, hogy a játékelméletért kapott közgazdasági Nobel-díjasok Nash, Harsányi János (1994) is foglalkozott a „tisztességes elosztás” elvével és kritériumaival.

A *nem kooperatív, nem konstans összegű* játékban a játékosok nem működnek együtt. Gyakran kifizetődőbb, ha a játékos előre közli a tervét (ellentétben a zérusösszegű játék esetében). A tervek nyilvánosságra hozatala hasznos lehet akár fenyegetésként, akár információ átadásként.

Az olyan játékos számára, aki bejelenti, hogy bombát fog robbantani, vagy hogy nyilvánosságra hoz bizonyos kompromittáló adatokat stb., az hasznos lehet.

Érdekes módon a butaság és a keménység híre hasznos lehet az olyan játékos számára, aki fenyeget, mert segít meggyőzni a többieket arról, hogy a fenyegetést komolyan gondolja. Valóságos gazdasági példák sokaságát sorolhatnánk fel a jelen magyar gazdaságban is. Ilyen például a rendszeres sztrájk fenyegetések bejelentése, útlezárás stb.

Egyes vállalatok gyakran a tervezett áremelésüket közhírré teszik abban a reményben, hogy ezt az intézkedésüket az ágazat többi vállalatai követi, – mindannyiuk kölcsönös hasznára – a piaci versenyszellemmel szemben. Példának mondható a cukor áremelés szándékának előzetes bejelentése. Ezt úgyis mondhatnánk: információ a *kvázi-összejátszás* céljára.

A gazdaságban gyakran adódik olyan helyzet, hogy az önérdek mindkét játékost olyan döntésekre készteti, amely mindkét fél számára hátrányosak. Például sok boltos nyitva tartja boltját (pékséget) vasárnap is, – annak ellenére, hogy jobban szeretne pihenni, – mert attól fél, hogyha nem tart nyitva vasárnap, akkor elveszti vevőit, akik a vasárnap is nyitva tartó versenytárshoz pártolnak át. (Pedig általában az összhaszon ezzel nem növekszik!)

Ezt a nem zérusösszegű kooperatív játékot a „rabok dilemmája" nevezetű játékon szemléltetjük:

Két rabot (gyilkost) egyidejűleg gyanúsítják. Külön-külön kihallgatják mindkettőt. Mindegyik tudja, hogy mindketten kiszabadulnak, ha egyik rab sem vall. Mindkettőnek megmondják, hogy ha az egyikük bevallja cselekményüket, akkor a vallomást nem tevő súlyos büntetést kap, a bevalló pedig kedvezményeket.

Ebben a helyzetben mindkét játékos úgy dönthet, hogy vallomástétellel védekezik vagy kooperációt hoz létre és nem vall. Itt az önérdeknél fontosabb a közérdek.

Hasonló példának mondható az adózás problémája.

Az állampolgár szemszögéből az adók megfizetése csökkenti a hasznát és hátrányba kerül a piacon azzal szemben, aki nem fizeti meg az adót. Az állampolgárok és a gazdasági egységek többsége abban érdekelt, hogy jól működő állam legyen, amely biztosítja a társadalom és a gazdaság működési feltételeit. Érdekes módon az önérdek így érvényesül, holott nincs biztosíték, hogy a többiek is így fognak viselkedni, mint azt a közös érdek kívánja.

10. Készletezési modellezés

10.1. Bevezetés

Az üzleti életben fontos feladat az áruk a beszerzéstől az értékesítésig való tárolása. A kis- és nagykereskedők valamint a gyártóüzemek általában rendelkeznek bizonyos raktárkészlettel. Milyen „készletezési politikát" folytasson egy ilyen üzem, azaz mikor, mennyit kell termelni (rendelni) egy bizonyos áruból, hogy az ezzel kapcsolatos összes költség a lehető legkisebb legyen.

A probléma megvilágítására nézzünk két példát:

10.1.1. Példa

Egy autórádió-magnót gyártó cég maga állítja elő a készülékbe beépített hangszórót is. A autórádiókat folyamatosan szerelik össze, havonta 7000 darabot. A hangszórókat szakaszosan gyártják, mert rövid idő alatt sokat tudnak előállítani. Dönteni kell a cég vezetőjének arról, hogy mikor és mennyit gyártson a hangszórókból, hogy az autórádió-gyártás folyamatos legyen és a hangszórók gyártásakor fellépő költségek összege a lehető legkisebb legyen.

A döntéshez az operációkutatók a következőket vehetik figyelembe:

- A hangszórók gyártásának beindításakor fellép 50.000 Ft ún. „beindítási költség" a nyilvántartás, az üzemképes állapot megszervezése stb. miatt. Ez a költség azt indukálja, hogy nagy mennyiséget gyártsanak egyszerre, mert így egy hangszóróra kis költség esik.
- A hangszórókat a felhasználásig készletezni kell. Ha sokat gyártanak egyszerre, akkor hosszú ideig készletezni kell. Előzetes becslés szerint egy hangszóró tárolása havonta 30 Ft-ba kerül. Ez a költség magába foglalja a lekötött tőke, a tárolási hely, a biztosítás, az adó stb. költségét. Ez a költség azt sugallja, hogy kis tételben gyártsanak.
- Egy hangszóró előállítási költsége (anyagköltség, munkabér, energiaköltség stb.) 500 Ft.
- A cég elvben nem engedi meg a hiányt, azonban időnként enged ebből és így a hangszóróhiányt is megengedi. Ebből adódó költség hangszórónként és havonta 50 Ft körüli érték. Ez abból adódik,

hogy később szerelik be a rádiókba a hangszórókat, így újból elő kell venni azokat és tárolni is kell stb.

10.1.2. Példa

Egy kerékpár-nagykereskedőnek az a problémája, hogy a legnépszerűbb típus olykor hiánycikk, ezért felülvizsgálja az eddigi készletezési politikáját erre a típusra. A kereskedő ezt a típust havonta szerzi be egy gyártótól és ezután szállítja az üzletekbe. A kereskedő megvizsgálja a költségeit és megállapítja, hogy a következőket kell figyelembe venni:

1. *A hiányból eredő költsége*
   Az üzletek elfogadnak némi késedelmet a szállításban, de úgy érzi a kereskedő, hogy a hiány miatt veszteség éri, kerékpáronként 2600 Ft. Ez a költség a bizalom elvesztéséből, a többletlevelezésből és a jövedelem kiesésből adódik

2. *A fenntartási költség*
   A hónap végén a készletben lévő kerékpárok után 200 Ft költség terheli a kereskedőt. Ez tartalmazza a lekötött tőke, a raktározási terület, a biztosítás, az adó stb. költségét.

3. *A rendelési költség*
   Ez két részből áll: a rendeléssel kapcsolatos költségből és a kerékpár aktuális árából: 4600 Ft, 28.000 Ft.

10.2. A készletezési modell összetevői

A készletezési politika nyilvánvalóan befolyásolja a cég pénzügyi eredményét. A példában felsorolt költségeket vegyük csak figyelembe. Jelöljük az egyes költségelemeket a szakirodalomban használatos betűkkel:

1. Beindítási költség: k, a gyártás beindításakor illetve rendeléskor lép fel.
2. Termelési költség: c, a termelt (megrendelt) cikk fajlagos ára.
3. Tárolási vagy raktározási költség: h, a tárolt cikk időegységre jutó fajlagos költsége.
4. Hiány miatti károsodás költsége: p, időegységre jutó fajlagos költség.
5. Összköltség: K.
6. Egyszerre gyártott (megrendelt) mennyiség: Q.
7. Időegység alatt a raktárból elfogyott mennyiség: r.

8. A periódus elején meglévő készlet, ha a hiány megengedett: s.
9. Feltöltési idő: t.
10. Diszkonttényező.

Az eredményt befolyásoló költségeket értelemszerűen hol beépítjük a készletezési modellbe, hol kihagyjuk.

Optimális készletezési politikáról akkor beszélünk, ha a figyelembe vett költségek összege a lehető legkisebb.

A készletezési modelleket általában aszerint osztályozza a szakirodalom, hogy a kereslet ismert-e egy időszak alatt *(determinisztikus kereslet)* vagy pedig a kereslet értéke valószínűségi változó ismert valószínűségi eloszlással *(sztochasztikus kereslet)*. Az első példában szereplő hangszórógyártás determinisztikus kereslet, mert ismert, hogy havonta 7000 darab szükséges. A második példában – mint a kereskedelemben általában – ismeretlen az igény mennyisége.

Egy másik osztályozás történhet aszerint, hogy folytonosan vizsgáljuk felül a készletezést vagy periodikusan.

Összefoglalva az elmondottakat a következőképpen osztályozhatjuk a készletezési modelleket:

- **Determisztikus modellek:** ha a kereslet ismert és adott nagyságú.
  a) Folytonos leltározású készletezési modell: a figyelembevett cikk r sebességgel egyenletesen fogynak.
  b) Periodikus leltározási modell: ha a kereslet periodikus (szezonális).
- **Sztochasztikus modellek:** a kereslet pontos értéke nem ismert, csak az tudható, hogy milyen valószínűséggel vesz fel értékeket.

10.3. Determinisztikus kísérletezési modell

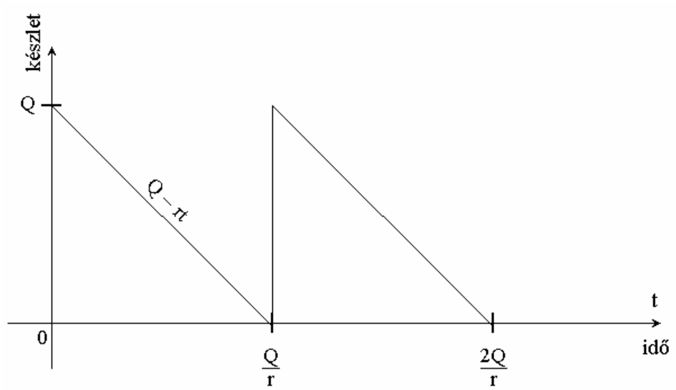
10.3.1. Folytonos leltározású egyenletes keresletű modell, hiány nincs megengedve

Feltevés:

- A kereslet egységnyi idő alatt. Pl. havonként r darab.
- A megrendelt Q darab egyszerre érkezik. Figyelembe vett költségek: k beindítási költség, c rendelési (termelési) fajlagos költség, h a fajlagos raktározási költség.
- A hiány nincs megengedve: p = 0.

- Periódusidő a két beindítás (megrendelés) közötti idő: $\frac{Q}{r}$.

Ezen feltevések figyelembevételével a modellt a következő lépésekkel írhatjuk fel:



9.3.1.1 ábra. Készlet alakulása az idő függvényében (hiány nincs megengedve)

Időegységre eső összes költség meghatározása

Egy periódusra eső **termelési** költség: $k + c \cdot Q$, ha $Q > 0$.

Egy periódusra eső **tárolási** költség meghatározása:

Egy periódus alatt az átlagos készlet: $\frac{Q+0}{2} = \frac{Q}{2}$, mert kezdetben 0 a készlet, a periódus végén pedig Q, ezért egy időegységre eső tárolási költség: $h \cdot \frac{Q}{2}$.

Így egy periódus idő alatt a tárolási költség: $h \cdot \frac{Q}{2} \cdot \frac{Q}{r} = h \cdot \frac{Q^2}{2r}$.

Tehát az összes költség a periódus alatt: $k + c \cdot Q + h \cdot \frac{Q^2}{2r}$.

Időegység alatti költség pedig: $K = \frac{k + c \cdot Q + \frac{h \cdot Q^2}{2r}}{\frac{Q}{r}} = \frac{rk}{Q} + r \cdot c + h \cdot \frac{Q}{2}$.

Látható, hogy az összes K költség a Q rendelési mennyiség függvénye. Keressük, hogy melyik Q mennyiségnél lesz a K(Q) minimális.

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele: $\frac{dK}{dQ} = 0$.

Esetünkben: $\frac{dK}{dQ} = -\frac{rk}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$, azaz $\quad -2rk + Q^2 \cdot h = 0$.

Ebből az optimális rendelési mennyiség: $Q = \sqrt{\frac{2rk}{h}}$.

Ezt a rendelést t időnként kell feladni, vagy a termelést beindítani.

$$t = \frac{Q}{r} = \sqrt{\frac{2k}{rh}}.$$

A 9.1.1. példára alkalmazva a kapott eredményt:

Optimális rendelési mennyiség: $Q_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7000 \cdot 50000}{30}} \approx 4830$ db.

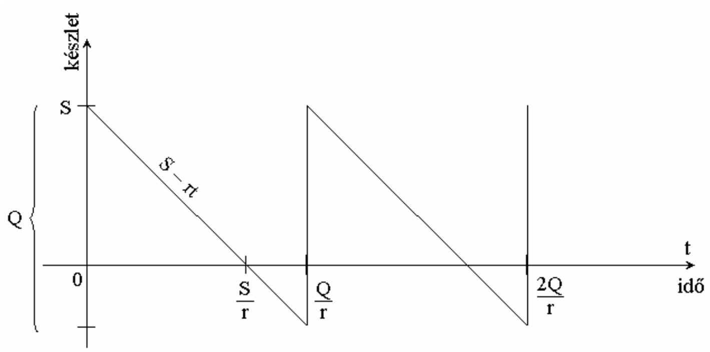
Periódus idő: $\frac{Q}{r} = 0{,}69$ hónap ≈ 21 nap.

Összes költség: $K = \frac{7000 \cdot 50000}{4830} + 5000 \cdot 7000 + 50 \cdot \frac{4830}{2} = 3693214$ Ft.

10.3.2. Folytonos készletezési modell, a hiány megengedett

Hasznos lehet, ha megengedjük a hiányt, mert a periódus idejének növelése csökkentheti a beindítási költségek egy darabra eső részét.

Ha a periódus elején a készlet S és r darabot használnak fel egy időegység alatt, akkor $\frac{S}{r}$ idő múlva lesz a készlet 0.



9.3.1.1 ábra. Készlet alakulása az idő függvényében (hiány megengedett)

Ekkor az átlagos tárolás mennyisége: $\frac{S+0}{2}=\frac{S}{2}$.

Ezért az egységnyi idő (nap, hónap stb.) alatt a tárolási költség: $h\cdot\frac{S}{2}$.

Egy periódus alatt a tárolási költség $h\cdot\frac{S}{2}\cdot\frac{S}{r}=h\cdot\frac{S^2}{2r}$.

A hiány $\frac{Q}{r}-\frac{S}{r}=\frac{Q-S}{r}$ ideig lép fel.

Egy időegység alatt a hiány átlagosan: $\frac{Q-S}{2}$, ezért a hiány költsége időegység alatt: $p\cdot\frac{Q-S}{2}$.

A hiányból adódó költség a periódus alatt: $\frac{p\cdot(Q-S)}{2}\cdot\frac{Q-S}{r}$.

Periódusra eső összes költség tehát: $k+c\cdot Q+\frac{h\cdot S^2}{2r}+\frac{p\cdot(Q-S)^2}{2r}$.

Idő egységre eső **összes költség:** $K=\dfrac{k+c\cdot Q+\frac{h\cdot S^2}{2r}+\frac{p\cdot(Q-S)^2}{2r}}{\frac{Q}{r}}$.

A kijelölt osztást elvégezve: $K=\frac{rk}{Q}+cr+\frac{h\cdot S^2}{2Q}+\frac{p\cdot(Q-S)^2}{2Q}$.

Ez egy kétváltozós függvény, Q rendelési mennyiség és S maximális készlet függvénye: K(Q, S). Keressük azon Q és S értékeket, ahol a K(Q, S) függvénynek minimuma van. Egy kétváltozós függvény szélsőértékének szükséges feltétele, hogy a parciális deriváltak $\left(\frac{\partial K}{\partial Q}\right)$ és $\left(\frac{\partial K}{\partial S}\right)$ zérussal legyenek egyenlők.

Parciális deriváltak: $\frac{\partial K}{\partial S}=0+0+\frac{hS}{Q}+\frac{p(Q-S)}{Q}\cdot(-1)=0$,

$$\frac{\partial K}{\partial Q}=-\frac{rk}{Q^2}+0-\frac{hS^2}{2Q^2}+\frac{2p(Q-S)2Q-2p(Q-S)^2}{4Q^2}=0,$$

azaz a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$hS - pQ + pS = 0$,

$-4rk - 2hS^2 + 4pQ^2 - 4pQS - 2pQ^2 + 4pQS - 2pS^2 = 0$.

Kifejezve az első egyenletből az $S = \frac{p}{h+p} \cdot Q$ és behelyettesítve a második egyenletbe: $-4rk - 2h\frac{p^2}{(h+p)^2}Q^2 + 4pQ^2 - 2pQ^2 - \frac{2p^3Q^2}{(h+p)^2} = 0$.

Rendezve: $$Q^2\left(2p - \frac{2p^2h}{(h+p)^2} - \frac{2p^3}{(h+p)^2}\right) = 4rk.$$

A közös nevezőre hozás után: $$Q^2\frac{2ph^2 + 2p^2h}{(h+p)^2} = 4rk.$$

Elvégezve a kiemelést és az egyszerűsítést: $$Q^2\frac{2ph}{h+p} = 4rk.$$

Ebből kifejezve a Q-t, kapjuk az optimális rendelési mennyiségre:

$$Q_{opt} = \sqrt{\frac{2rk}{h} \cdot \frac{h+p}{p}}.$$

Ezt helyettesítve az $S = \frac{p}{h+p} \cdot Q$ összefüggésbe, az optimális készlet mennyisége: $S_{opt} = \sqrt{\frac{2rk}{h} \cdot \frac{p}{h+p}}$.

Ekkor a maximális hiány: $Q_{opt} - S_{opt}$.

Periódus idő pedig: $t = \frac{Q_{opt}}{r} = \sqrt{\frac{2k}{r \cdot h} \cdot \frac{p+h}{p}}$.

Alkalmazzuk a kapott eredményt 9.1.1. példára:

Havonta r = 7000 db fogy egyenletesen, beindítási költség k = 50.000 Ft, tárolási költség h = 30 Ft, termelési költség c = 500 Ft, hiány-költség: p = 50 Ft

$$Q_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7000 \cdot 50000}{30} \cdot \frac{30+50}{50}} = 6110 \text{ db.}$$

Periódus idő: $t = \frac{Q_{opt}}{r} = \frac{6110}{7000} = 0{,}87387 \text{ hónap} \approx 26$ nap.

A maximális készletnagyság:

$$S_{opt} = \sqrt{\frac{2rk}{h} \cdot \frac{p}{h+p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7000 \cdot 50000}{30} \cdot \frac{50}{80}} \approx 3819 \text{ db}$$

A maximális hiány: $Q_{opt} - S_{opt} = 6110 - 3819 = 2291$ db.

Összes költség egy periódus alatt:

$$K = 50000 + 500 \cdot 6110 + \frac{30 \cdot 3819^2}{2 \cdot 7000} + \frac{50 \cdot 2291^2}{2 \cdot 7000} =$$
$$= 50000 + 3055000 + 31253 + 18745 = 3\,154\,998 \text{ Ft.}$$

10.4. Sztochasztikus készletezési modellek

A kerékpárok eladásáról szóló példánkban és általában a kereskedelemben a kereslet nagysága valószínűségi változó, azaz egy időegységre eső eladott darabszám a véletlentől függ. Feltételezzük, hogy ismert vagy meghatározható a valószínűségi változó eloszlása. Az ilyen készletezési modellek is több típusba sorolhatók. Jelen vizsgálódásunk célja az, hogy bemutassuk azt a matematikai lépéssorozatot, amellyel az ilyen típusú feladatok tárgyalhatók.

10.4.1. Egy periódusos modell beindítási költség nélkül

Jelöljük a szóban forgó árucikk keresletét valószínűségi változóval. Továbbá jelöljük $P(\xi = x)$-vel annak a valószínűségét, hogy ξ felveszi az x értékét.

Egyetlen periódusban, egyszerre Q mennyiségű árút rendelnek egységenként c Ft-ért.

Ha a ξ kereslet kisebb, mint a beszerzett Q mennyiség, akkor $Q - \xi > 0$ mennyiséget tárolni kell és a fajlagos tárolási költség h Ft. Ha a ξ kereslet nagyobb, mint a rendelt mennyiség, akkor $\xi - Q > 0$ hiány keletkezik és ekkor a hiányból származó fajlagos költség legyen *p*.

Ekkor a felmerült költség ξ és Q függvénye:

$$K(\xi; Q) = c \cdot Q + h \max(Q - \xi) + p \max(\xi - Q).$$

Látható, hogy két kockázat között kell azt a készletezési szintet meghatározni, amelyekre nézve a költségnek a várható értéke minimális.

Tulajdonképpen azt a Q mennyiséget keressük, amelyre nézve a költség várható értéke minimális:

$$K(Q)=E(K(\xi,Q))=\sum_{x=0}^{\infty}\left[cQ+h\max(Q-\xi)+p\cdot\max(\xi-Q)\right]\cdot P(\xi=x).$$

Sokszor a $P(\xi=x)$ valószínűség pontos alakját nehéz meghatározni, ezért a diszkrét valószínűségi változót folytonossal helyettesítjük. Ha a keresletnek igen sok lehetséges értéke lehet, akkor ez a közelítés elég jó közelítést ad a készlet optimális értékeire.

Legyen a folytonos eloszlás sűrűség függvénye f(x). Ekkor a költségfüggvény várható értéke

$$K(Q)=cQ+h\int_0^Q(Q-x)f(x)dx+p\int_Q^{\infty}(x-Q)f(x)dx.$$

Bontsuk fel az integrálokat, akkor

$$K(Q)=c\cdot Q+hQ\int_0^Q f(x)dx-h\int_0^Q xf(x)dx+p\int_Q^{\infty}xf(x)dx-pQ\int_Q^{\infty}f(x)dx.$$

Keressük a szélsőértékét, ezért deriváljuk Q szerint. Olyan integrálokat kell deriválni, ahol az integrálási határok a deriválási változó függvénye.

Ennek a deriválási szabálya:

$$\frac{d}{dy}\int_{v(y)}^{u(y)}f(x,y)dx=\int_{v(y)}^{u(y)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx+f(u,y)\cdot\frac{du}{dy}-f(v,y)\frac{dv}{dy}.$$

Figyeljünk arra is, hogy a második és az 5. tag szorzatfüggvény!

$$\frac{dK(Q)}{dQ}=c\cdot+h\int_0^Q f(x)dx+hQf(Q)-hQf(Q)-pQf(Q)-\left[p\int_Q^{\infty}f(x)dx-pQf(R)\right].$$

Rendezve: $\dfrac{dK(Q)}{dQ}=c\cdot+h\int_0^Q f(x)dx-p\int_Q^{\infty}f(x)dx.$

Kihasználva az ismert $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, illetve $\int_{x}^{\infty} f(x)dx = 1-F(x)$ összefüggéseket, ahol F(x) az eloszlásfüggvény, kapjuk:

$$\frac{dK(Q)}{dQ} = c + hF(Q) - p(1-F(Q)).$$

Szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy $\frac{dK(Q)}{dQ}=0$ legyen.

Ezért $$c + hF(Q) - p + pF(Q) = 0,$$

azaz $$F(Q) = \frac{p-c}{h+p}.$$

Az elégséges feltétel: $\frac{d^2K(Q)}{dQ^2} = h \cdot f(x) + pf(x) \geq 0$ teljesül, hiszen f(x) mindig pozitív. Tehát a költség várható értéke olyan *Q* rendelés mellett a legkisebb, amely helyen a ξ keresleti eloszlásfüggvényének értéke $\frac{p-c}{p+h}$.

Ez az egyperiódusos modell olyan árucikkek készletezésének felel meg, amelyek igen gyorsan fogynak, másnap már szinte nincs értékük. Például napilapok vagy olyan élelmiszerek, amelyek gyorsan elromlanak.

10.4.2. Példa

Őszibarack beszerzési ára 80 Ft/kg. A tapasztalat azt mutatta, hogy adott időszak alatt a kereslet egyenletes eloszlású 1000 és 2000 kg között. Mennyi őszibarackot vásároljon a kereskedő naponta, ha a tárolási költség naponta 5 Ft/kg és a megmaradt árú maradványértéke 60 Ft/kg. Ha pedig hiánya lenne, akkor 140 Ft/kg lesz a vesztesége.

Megoldás: az előző képlet szerint:

$$F(Q) = \frac{p-c}{p+h} = \frac{140-80}{140+(5-60)} = \frac{60}{140-55} = \frac{60}{85}.$$

Az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye mint tudjuk:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha} \quad a < x \leq b \\ 1 & \text{ha} \quad x > b \end{cases}$$

Ezért
$$\frac{Q-1000}{2000-1000}=\frac{60}{85}.$$

Ebből: $85Q - 85000 = 60000$, azaz $Q = 1705$ kg

Tehát az összes költség várható értéke akkor lesz a legkisebb, ha naponta 1705 kg körül rendel a kereskedő az őszibarackból.

Az eddig tárgyalt készletezési modellek az egyszerűbb eseteket reprezentálják. A valóságos gyakorlati modellek általában bonyolultabbak, de a felsorolt esetek jól szemléltetik a problémák megoldási technikáját.

11. Ágazati kapcsolatok elemzése

11.1. Ágazati kapcsolatok modellje és megoldása

A nemzetgazdaság (a termelő vállalatok) egyes ágazatai az általuk előállított termékek egy részét saját maguk használják fel, más részét más ágazatoknak adják át, amelyek ezen termékeket felhasználják, a termékek egy harmadik részét pedig fogyasztásra adják. A nemzetgazdasági ágazatok, illetve a termelő vállalatok tehát termékeik által kapcsolatban vannak más ágazatokkal, más vállalatokkal.

Szemléltetésként tekintsük meg egy ágazati kapcsolati példát:

Tegyük fel, hogy a gazdaság három fő ágazatból áll és ezek *bruttó termelése*: 30, 20, 5 millió forint. Ezen értékek egy részét a *saját* ágazat használja fel, más részét a többi ágazatnak adja át és a maradék lesz a *nettó kibocsátás*. A következő táblázat szemlélteti a *teljes termelést*, vagy *bruttó kibocsátást*, az *ágazatközi termékáramlást* és a *nettó kibocsátást*.

Ágazatközi termékáramlás

Termelési ágazatok	Teljes termelés	Termelési ágazatok			Összes felhasználás	Nettó kibocsátás
		I.	II.	III.		
I.	30	10	8	4	22	8
II.	20	8	2	7	17	3
III.	5	1	0	2	3	2
Összes	55	19	10	13	42	13

Általánosságban: Tegyük fel, hogy a gazdaság n olyan ágazatra bontható, amelyek egymással nem helyettesíthető homogén termékeket állítanak elő.

Jelöljék az $\underline{x}^T = [x_1, x_2, \dots x_n]$ vektor komponenseit egy adott időszakban az egyes ágazatok átal termelt mennyiségek *forint értékét*, tehát x_j a j-edik ágazat termelése. Ezt a vektort a *bruttó kibocsátások* vektorának nevezzük. Jelölje x_{ij} annak a termékmennyiségnek az értékét, amelyet az i-edik ágazat a j-edik ágazatnak ad át termelésre, x_j pedig a j-edik ágazat termelését jelentse.

Így az egyes ágazatok kapcsolatát az

$$M = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & . & x_{1n} \\ x_{21} & . & . & . & x_{2n} \\ . & . & x_{ij} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & .. & .. & x_{nn} \end{bmatrix}$$ mátrix mutatja.

Ha az M mátrixot soronként összegezzük, akkor egy olyan oszlopvektort kapunk, amelynek elemei az ún. *termelő fogyasztást* mutatják. Ezt a vektort $M \cdot \underline{1}$ (ahol $\underline{1} = [1, 1, \ldots, 1]^T$) szorzat állítja elő.

A gyakorlatban pedig igaz, hogy $\underline{x} > M \cdot \underline{1}$.

Képezzük az $\underline{x} - M \cdot \underline{1}$ vektort és jelöljük $\underline{y}$-nal. Az $\underline{y} = \underline{x} - M \cdot \underline{1}$ vektort *nettó kibocsátás* vektorának nevezzük. *Fontos ismerni az* 1 *Ft termelésre jutó ráfordítást*. Ezt úgy kapjuk meg, hogy az M mátrix j-edik oszlopának minden elemét osztjuk x_j-vel, ahol j=1, 2, …, n. Az így kapott mátrixot *technológiai mátrixnak* nevezzük és jelöljük A szimbólummal.

Tehát

$$A = \left[\frac{x_{ij}}{x_j}\right].$$

Vezessük be $X = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ diagonális mátrixot, akkor $A = MX^{-1}$. Az A mátrix segítségével a bruttó- és nettó kibocsátások vektora közötti kapcsolatot a következőképpen írhatjuk fel: $\underline{x} = A\underline{x} + \underline{y}$, amelyből $\underline{y} = \underline{x} - A\underline{x} = (E - A)\underline{x}$, innen $\underline{x} = (E - A)^{-1}\underline{y}$.

Ezen egyenletek az ágazati kapcsolatok mérlegének alapvető összefüggései.

Az utóbbi összefüggés megmutatja, hogy a nettó kibocsátások ismeretében hogyan lehet meghatározni a bruttó kibocsátásokat.

11.2. Példa

Legyen $\underline{x} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 200 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 40 & 40 & 0 \\ 20 & 30 & 0 \\ 0 & 100 & 50 \end{bmatrix}$

Kérdés: Hány százalékkal kell növelni az egyes ágazatok bruttó kibocsátását, ha a nettó kibocsátást az egyes ágazatokban 10, 80, 70%-kal kívánjuk növelni?

Megoldás: Határozzuk meg először az adott termeléshez tartozó *nettó kibocsátások* vektorát az $\underline{y} = \underline{x} - M\cdot\underline{1}$ összefüggéssel.

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 200 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 40 & 40 & 0 \\ 20 & 30 & 0 \\ 0 & 100 & 50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Most már meg tudjuk határozni a megnövelt nettó kibocsátások vektorát:

$$\begin{aligned} 20 + 2 &= 22, \\ 30 + 24 &= 54, \\ 50 + 35 &= 85. \end{aligned}$$

Tehát legyen $\underline{y}' = \begin{bmatrix} 22 \\ 54 \\ 85 \end{bmatrix}$ az új nettó kibocsátás.

Az $\underline{y}$' nettó kibocsátáshoz tartozó bruttó kibocsátás az

$$\underline{x}' = (E - A)^{-1}\, \underline{y}'$$

egyenlettel számítható.

Az A technológiai mátrix pedig $A = M\cdot X^{-1}$ módon számítható. Tehát

$$A = \begin{bmatrix} 40 & 40 & 0 \\ 20 & 30 & 0 \\ 0 & 100 & 50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{80} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{200} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Az A *mátrixból* leolvasható, hogy az I. ágazat 1 Ft mennyiség *bruttó termeléséhez* a saját termeléséből 0,4, a második ágazatéból 0,2, a harmadikból ágazatéból 0 Ft-ot használ fel. A második, illetve harmadik ágazat 1 Ft termeléséhez felhasznált mennyiségeket az A mátrix második, illetve harmadik oszlopainak elemei mutatják.

Következő lépésként határozzuk meg az E − A mátrixot, majd az inverzét.

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 20 & 0 \\ 8 & 24 & 0 \\ \frac{40}{3} & 40 & \frac{44}{3} \end{bmatrix}.$$

Az *inverz mátrix* első oszlopa azt fejezi ki, hogy 1 Ft *nettó kibocsátásához mennyit kell felhasználni* az első, a második és a harmadik ágazatból stb.

A felemelt nettó kibocsátásokhoz tartozó bruttó kibocsátások vektora most már kiszámítható.

$$x^{'} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 25 & 20 & 0 \\ 8 & 24 & 0 \\ \frac{40}{3} & 40 & \frac{44}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 22 \\ 54 \\ 85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 148{,}18 \\ 133{,}82 \\ 336{,}36 \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy

az I. ágazatban a bruttó kibocsátást 48,18 millió Ft-tal,
a II. ágazatban a bruttó kibocsátást 53,83 millió Ft-tal,
a III. ágazatban a bruttó kibocsátást 136,36 millió Ft-tal kell növelni.

Ez azt jelenti, hogy

az I. ágazat termelését 48,18%-kal,
a II. ágazat termelését 67,27%-kal,
a III. ágazat termelését 68,18%-kal kell növelni.

11.3. Ágazati kapcsolatok modelljének megoldása EXCEL táblázatkezelővel

Az ágazati kapcsolatok mérlegéből ismertek a következő adatok:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \\ 600 \\ 400 \end{bmatrix}, \ M = \begin{bmatrix} 80 & 60 & 0 & 120 & 80 \\ 40 & 60 & 0 & 0 & 120 \\ 100 & 120 & 200 & 0 & 80 \\ 100 & 30 & 200 & 240 & 0 \\ 40 & 0 & 50 & 120 & 120 \end{bmatrix}$$

Megválaszolandó kérdések:

a) Mekkora az egyes ágazatok nettó kibocsátása?
  b) Mekkora a termelő fogyasztása az egyes ágazatoknak?
  c) Határozza meg a technológiai mátrixot!

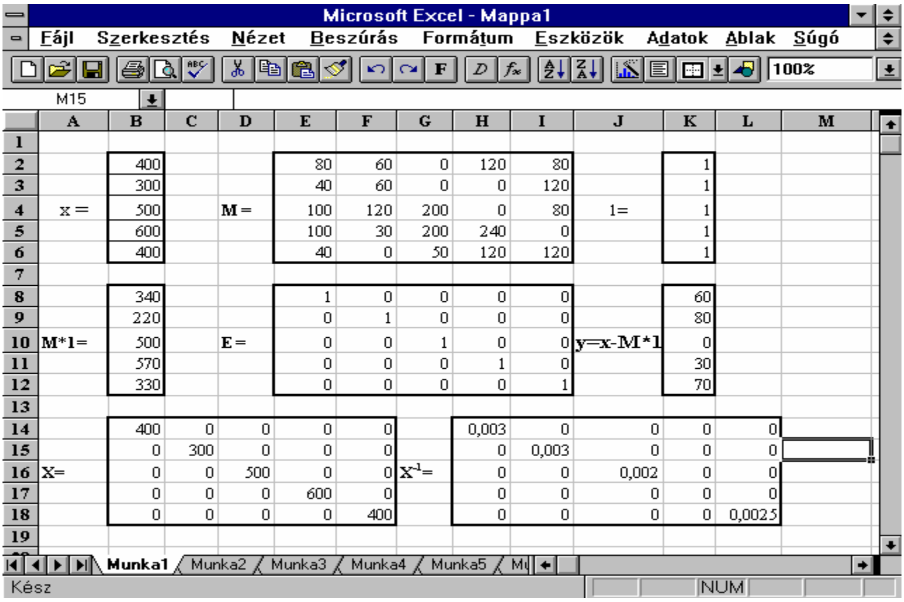
Mi a jelentése a mátrix egyes elemeinek?

d) Határozzuk meg az $(E - A)^{-1}$ mátrixot!
Mi a jelentése a mátrix egyes elemeinek?

e) Mekkora bruttó kibocsátás mellet lehet a nettó kibocsátás vektora $\underline{y} = [200, 80, 250, 200, 120]^T$?

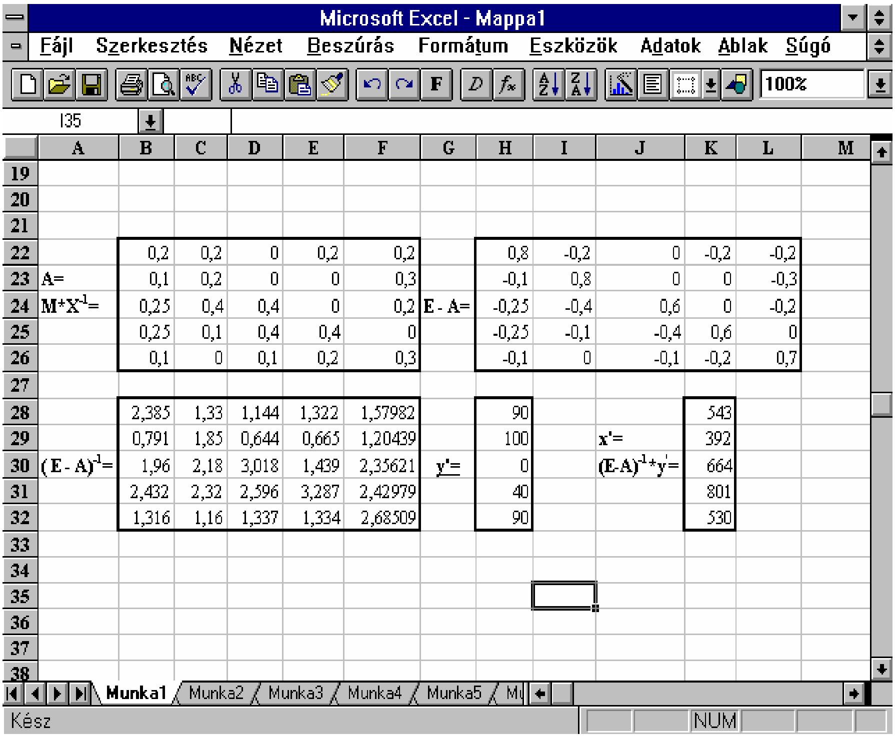
A kérdések megválaszolására használjuk fel az EXCEL táblázatkezelőt!

Helyezzük el a táblázaton a megadott $\underline{x}$ vektort és az M mátrixot. A számolásnál szükség lesz az $\underline{1}$ összegező vektorra és az E egységmátrixra valamint az X diagonális mátrixra:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		400			80	60	0	120	80		1		
3		300			40	60	0	0	120		1		
4	x =	500		M =	100	120	200	0	80	1=	1		
5		600			100	30	200	240	0		1		
6		400			40	0	50	120	120		1		
7													
8		340			1	0	0	0	0		60		
9		220			0	1	0	0	0		80		
10	M*1=	500		E =	0	0	1	0	0	y=x-M*1	0		
11		570			0	0	0	1	0		30		
12		330			0	0	0	0	1		70		
13													
14		400	0	0	0	0		0,003	0	0	0	0	
15		0	300	0	0	0		0	0,003	0	0	0	
16	X=	0	0	500	0	0	X^{-1}=	0	0	0,002	0	0	
17		0	0	0	600	0		0	0	0	0	0	
18		0	0	0	0	400		0	0	0	0	0,0025	
19													

Az elhelyezés után hívjuk meg a függvényvarázslóval a szükséges mátrixműveleteket és végezzük el sorban a kijelölt műveleteket. Helyezzük el az eredményeket a táblázat látható részén:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
19													
20													
21													
22		0,2	0,2	0	0,2	0,2		0,8	-0,2	0	-0,2	-0,2	
23	A=	0,1	0,2	0	0	0,3		-0,1	0,8	0	0	-0,3	
24	$M*X^{-1}$=	0,25	0,4	0,4	0	0,2	E - A=	-0,25	-0,4	0,6	0	-0,2	
25		0,25	0,1	0,4	0,4	0		-0,25	-0,1	-0,4	0,6	0	
26		0,1	0	0,1	0,2	0,3		-0,1	0	-0,1	-0,2	0,7	
27													
28		2,385	1,33	1,144	1,322	1,57982		90			543		
29		0,791	1,85	0,644	0,665	1,20439		100		x'=	392		
30	$(E - A)^{-1}$=	1,96	2,18	3,018	1,439	2,35621	y'=	0		$(E-A)^{-1}*y'$=	664		
31		2,432	2,32	2,596	3,287	2,42979		40			801		
32		1,316	1,16	1,337	1,334	2,68509		90			530		
33													
34													
35													
36													
37													
38													

Válaszok:

a) $\underline{y} = \underline{x} - M \cdot \underline{1} = [60, 80, 0, 30, 70]^T$
b) $M \cdot \underline{1} = [340, 220, 500, 570, 330]^T$
c) **Technológiai** mátrix: A mátrix.
d) $(E-A)^{-1}$ **mátrix** elemeinek jelentése: A mátrix első oszlopa azt fejezi ki, hogy az első ágazat 1 Ft nettó kibocsátását milyen programmal valósítható meg az egyes ágazatban.
e) Az új **bruttó** kibocsátás vektora a K28:K32 oszlopban látható.

12. Előrejelzés

Előrejelzésre a gazdasági élet számos területén szükség van, mivel a mai gyorsan változó, bonyolult környezetben csak akkor tudunk helyes döntéseket hozni, ha ismerjük a jövő alapvető fejlődési folyamatait. A prognosztika magában foglalja annak megértését, hogy mi történt a múltban, mi történik a jelenben és miért?

Csak a vizsgált jelenség okainak megértése, összetevőinek megismerése és elemzése után nyílik lehetőség arra, hogy jól előre jelezzük mi fog történni a jövőben és az előrejelzés ismeretében dolgozzuk ki a megfelelő gazdasági döntéseket.

Előrejelzést tehetünk kvalitatív (minőségi) és kvantitatív (mennyiségi) módon. Az első esetben az előrejelzés általában egy vagy több szakértő személyes véleménye, vagy ítélete. Ezt szakértői véleményalkotásnak szokás nevezni. Például a költségvetés elkészítéséhez feltételen szükséges az infláció mértékét meghatározni. Az eredmény általában a közgazdászok hosszú vitái után megegyezéssel születik meg.

A kvantitatív módszerek közül az idősor-analízis és regresszió-analízis módszerek használatosak.

A statisztikai idősor valamely valószínűségi változó számértékeinek a sorozata egy adott időintervallumban. Például egy meghatározott cikk napi piaci ára egy év folyamán idősort alkot. Az idősor-analízis tehát olyan módszereket használ, amely ezeknek az adatoknak az alapján a szóban forgó valószínűségi változó jövőbeli értékére adnak előrejelzést. Például egy kerékpárt forgalmazó cég havi eladási előrejelzést szeretne készíteni, hogy időben beszerezze a szükséges árut. Persze korábban feljegyezte a havi forgalmi adatokat, azaz rendelkezésre állnak a havi eladások valószínűségi változójának értékei!

A regresszió-számításban az előre jelezni kívánt változást (a függő változót) más változók függvényeként fejezzük ki. Például egy új könyv teljes forgalmi példányszáma összefüggésbe hozható a korábbi időszak postán megrendelt számával.

Természetesen e három módszer kombinálható egymással. Általában a véleményalkotást megfelelő idősor-analízissel együtt használják.

12.1. Előrejelzés szakértők közreműködésével

A véleményalkotás természeténél fogva szubjektív és intuíción, tapasztalaton alapszik. Ez mindennapos és gyors módszer, mert a szakértők egy csoportja könnyen összehívható és kielégítő vita után kialakíthatják közös véleményüket a szóban forgó dolog jövőbeli alakításáról.

Bonyolult, sokféle hatásnak kitett folyamat esetében az előrejelzés megbízhatósága azonban rohamosan csökken. Pl. az egész gazdaságot érintő kérdésekben a szakértők véleménye gyakran homlokegyenest ellenkező.

E csoport módszer egy továbbfejlesztett változatal, az ún. delphoi módszer kérdőívet küld a szakértőknek, és a kitöltött kérdőíveket kiértékeli. Ezután összeállítanak egy másik kérdőívet, amelyet az első kérdőív eredményeivel együtt ugyanazon szakértőknek megküldenek.

A delphoi módszer kulcsa az első kérdőív szolgáltatta információk általi visszacsatolás. Így minden szakértő olyan információkhoz juthat, amelyek korábban nem voltak a birtokában. Az eljárás előnye az is, hogy a szakérték személyes felelőssége a véleményükkel kapcsolatban megnő.

Nyilvánvaló, hogy e módszer sikere erősen függ a kérdőívek összeállításának milyenségétől. Ha szükséges, akkor esetleg többszörös és megismételhető a kérdőívküldés.

12.2. Idősorok

Egy valószínűségi változó azon értékei, amelyeket egy bizonyos időszak alatt felvesz, idősort alkotnak. Például egy bizonyos árucikk múlt évi napi zárási árai idősort alkotnak. A 2000. januárjától 2004. júliusáig számított negyedévi munkanélküliségi arány értékei szintén idősort alkotnak. Az ország nyugati felét kerékpárokkal ellátó nagykereskedő utolsó három év negyedévi eladásai ugyancsak idősort alkotnak. Egy idősor viselkedését szemléltethetjük grafikonon vagy táblázattal.

Minthogy az idősorban a múlt leírása jelenik meg, ezeket az adatokat a jövő előrejelzésre csak valamiféle logikai eljárással hasznosíthatjuk. Ha a múlt egyszerűen megismétlődik a jövőben – vagyis a múlt adatai megmutatják, mit várhatunk a jövőben – akkor felállíthatunk egy matematikai modellt, amely jól jellemzi a folyamatot. Valóban, ha ez a modell ismert, bizonyos paraméterek esetleges kivételével megadhatjuk az előrejelzést. Ha ezt a modellt nem ismerjük, a múlt adatai akkor is sugallhatnak valamit.

Tegyük fel, hogy egy valószínűségi változó – például egy napi ár – a következő összefüggéssel jellemezhető:

$$X_t = h_t + e_t.$$

ahol X_t a valószínűségi változó a t pillanatban, h_t az idősor viselkedésétől függő kifejezés, e_t pedig a véletlen hiba. A h_t függvény sokféle lehet: Nézzünk néhány példát.

Választhatjuk h_t-t az utolsó három megfigyelés mozgatóátlagának, azaz

$$h_t = \frac{X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3}}{3}.$$

Vagy választhatjuk h_t-t az utolsó két megfigyelés súlyozott mozgó átlagának:

$$h_t = \alpha X_{t-1} + (1-\alpha)X_{t-2},$$

ahol α a súlyozó tényező.

Vagy választhatjuk h_t-t egy lineáris függvénynek:

$$h_1 = \alpha + \beta\, t.$$

Több példát is lehetne sorolni. A lényeg az, hogy a modell paramétereit egy $X_1, X_2, ..., X_t$ múltbeli adatsor segítségével állíthatjuk elő. Az $X_i - h_i$, különbségeknek valószínűségi értelemben ugyanúgy kell viselkedniük, mint az e_1 véletlen hibának. Ha nem úgy viselkednek, akkor a modell nyilvánvalóan nem megfelelő. Az X_{t+1} értéket az $X_1, X_2, ..., X_t$ ismeretében a h_{t+1} segítségével jelezzük előre.

A legtöbb valóságos esetben a modell egzakt formája nem ismeretes, sőt még akkor is, ha ismerjük a modell egzakt formáját, a modell paraméterei lehetnek ismeretlenek. Például, ha tudjuk is, hogy a modell a súlyozott közép, de általában nem tudjuk az α súlyozó tényezőt. Az előrejelzési eljárásban, ha megválasztunk egy modellt, az $X_1, X_2, ..., X_t$ múltbeli adatokat használjuk arra, hogy valamiféle optimális becslést adjunk a paraméterekre. Ha a modell formáját sem ismerjük, akkor is vannak bizonyos eljárások az előrejelzésre, ilyen például a Box-Jenkis-féle módszer.

12.3. Előrejelzési módszerek

Meg kell különböztetnünk a folyamatra illesztett modellt és a használt előrejelzési eljárást. Ésszerűnek látszik a modell alapján megválasztani az előrejelzési eljárást. Általában olyan előrejelzési módszert választanak, amely gyakran igen egyszerű része egy számítógépes eljárásnak, és kevés köze van a tényleges modellhez. Például, a munkanélküliségi arány előrejelzésére használhatunk egy olyan eljárást, amely az utolsó négy negyedév átlagán alapul, tekintet nélkül arra, hogy a

$$X_t = \frac{X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3} + X_{t-4}}{4}$$

modellre vonatkozó idősor megfelelő-e vagy sem.

Az előrejelzési feladatot idősorra a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Adva van valószínűségi változóknak egy $X_1, X_2, \ldots X_t$ sorozata (vagyis egy sztochasztikus folyamat) $E(X_1), E(X_2), \ldots$ várható értékkel. A valószínűségi változók eloszlása lehet azonos, de változhat is. A valószínűségi változók megfigyelt értékeit jelölje $x_1, x_2, \ldots, x_t$. Ezeknek ismeretében határozzuk meg $E(X_t)$ várható értéket, azaz a jövendő időszakra adott előrejelzett értéket.

Például egy kerékpárt forgalmazó kereskedő előrejelzést készít a negyedéves eladásokra, hogy tervezni tudjon. Az előző negyedévek adatait ismeri, vagyis ismeri a negyedéves vásárlások valószínűségi változóinak tényleges értékeit, és előrejelzést akar készíteni a következő negyedévre vagy negyedévekre. Ha felismeri, hogy a következő negyedévek eladásai is valószínűségi változók, akkor a kereskedő „jó" előrejelzést adhat a következő időszakra.

Az alábbi előrejelzési eljárások gyakoriak a gazdaságban.

1. ***Az utolsó értékre alapozott előrejelzési eljárás.***
   A kerékpár-kereskedő az utolsó negyedév eladásaiból becsüli meg $E(X_t)$-t a jövő negyedévekre, azaz ekkor $\tilde{E}(X_t) = x_t$. Ez a becslés meglehetősen durva, azaz nagy a szórása, mert egyelemű mintán alapul. Csak akkor érdemes ezt alkalmazni, ha a feltételes eloszlás szórása igen kicsi és/vagy a folyamat oly gyorsan változik, hogy a *t* pillanat előtti adatok félrevezetőek a jelen helyzetet illetően.

2. ***Átlagoló előrejelzési eljárás.***
   A kerékpár-kereskedő felhasználja a múltra vonatkozó összes adatát a jövőbeli eladások előrejelzésére, vagyis úgy dönthet, hogy

$$E(X_t)=\sum_{i=t}^{t}\frac{x_i}{t}.$$

Ez a becslés kitűnő, ha a folyamat egészen stabil. Azonban nagyon régi adatokat az esetleges eltolódások miatt nem érdemes figyelembe venni.

3. ***Mozgó átlagokra alapozott előrejelzési eljárás.***
A kerékpár-kereskedő csak az utolsó n periódusra vonatkozó átlagot használja a becslésre, azaz

$$E(X_t)=\frac{\sum_{i=0}^{k}x_{t-i}}{k}.$$

Ez a becslés az utolsó k adat lényegét sűríti, és könnyedén tartható naprakész állapotban: az első megfigyelést elhagyjuk, és az utolsót hozzávesszük. Ez az eljárás magában foglalja az előző eljárások előnyeit, mert csak viszonylag új, de többszörös megfigyelési adatokat használ fel. Hátránya az, hogy azonos súllyal veszi figyelembe az x_t értéket, pedig az ember azt várná, hogy az újabb adatok nagyobb súllyal essenek a latba.

4. ***Előrejelzési eljárás exponenciális simítással.***
Ha a kerékpár-kereskedő exponenciális simítást alkalmaz, akkor

$$\tilde{E}(X_t)=\alpha x_t+(1-\alpha)\tilde{E}(X_{t-1}),$$

ahol $0<\alpha<1$ a simító tényező. Ekkor az előrejelzés az utolsó megfigyelés és az előző előrejelzés súlyozott összege. Az exponenciális simítás rekurziós eljárást jelent, és a következő formában is megadható:

$$\tilde{E}(X_t)=\alpha x_t+\alpha(1-\alpha)x_{t-1}+\alpha(1-\alpha)^2x_{t-2}+....=\alpha\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i x_{t-i}\ .$$

Ebből a formából nyilvánvaló, hogy az exponenciális simítás a legnagyobb súlyt az x_t-re helyezi, a korábbi megfigyelésekre pedig csökkenő súlyokat. Az első forma viszont azt mutatja, hogy az előrejelzést egyszerű kiszámítani, mert a t pillanat előtti adatokat nem kell megőrizni, csak x_t és az előző $\tilde{E}(X_{t-1})$ előrejelzés szükséges. Ez a simítás még egy másik formában is felírható:

$$\tilde{E}(X_t) = \tilde{E}(X_{t-1}) + \alpha\left[x_t - \tilde{E}(X_{t-1})\right].$$

Ez adja az eljárás szemléletes indoklását. Végül, az exponenciális simítás hatékonyságának egy mértékét is meg tudjuk adni, ha a folyamat teljesen stabil, azaz ha $X_1, X_2 \ldots X_t$ azonos eloszlású, független valószínűségi változók, amelyek szórása σ. Ekkor

$$\operatorname{var}\left[\tilde{E}(X_t)\right] \approx \frac{\alpha\sigma^2}{2-\alpha} = \frac{\sigma^2}{(2-\alpha)/\alpha}.$$

Tehát, a szórásnégyzet statisztikailag ekvivalens egy $(2-\alpha)/\alpha$ megfigyelésre vonatkozó mozgóátlaggal. Ha $\alpha = 0{,}1$, akkor $(2-\alpha)/\alpha = 1\dot{9}$: az exponenciális simítási módszer „ekvivalens” egy 19 megfigyeléses mozgóátlagra alapozott eljárással, Meg kell azonban jegyeznünk, hogy az exponenciális simítás érzékenyen reagálhat arra, hogy az említett feltételek nem teljesülnek.

Az exponenciális simítás hátránya, hogy a folytonos változást késedelemmel követi: ha az átlag folyamatosan nő, az előrejelzés viszont néhány periódussal lemarad. Az eljárást azonban könnyen lehet a tendenciához illeszteni (akár szezonálisan is). Másik hátránya, hogy nehéz a megfelelő simítótényezőt megválasztani. Az exponenciális simítást úgy is tekinthetjük, mint egy statisztikai szűrőt, amely egy sztochasztikus folyamat adataiból az átlagok időben változó, kisimított becsléseit szolgáltatja. Ha α-t kicsire választjuk, a válasz lassan változik, sima becslésekkel. Ha α nagy, akkor a válasz gyorsan változik, azaz „gyors felejtést” jelent (nagy varianciával). Továbbá, a simítótényező „jó” értéke függ a szóban forgó sztochasztikus folyamattól is. A szakirodalom szerint az α ne haladja meg 0,3-at, és úgy tűnik, a legjobb választás általában 0,1-0,2 körül van. Természetesen megnövekedhet, esetleg csak időlegesen, pl. ha szokatlan változás várható.

5. ***Előrejelzési eljárás trendszámítással***

Lényege, hogy az idősor összes értékeinek felhasználásával megkísérlünk függvényszerű kapcsolatot kimutatni az idő és a megfigyelt értékek alakulása között. Mivel az idő és a megfigyelt érték között általában sztochasztikus kapcsolat van, ezért a trendfüggvény általános formája a következőképpen írható fel.

$$y_t = f(t) + e_t,$$

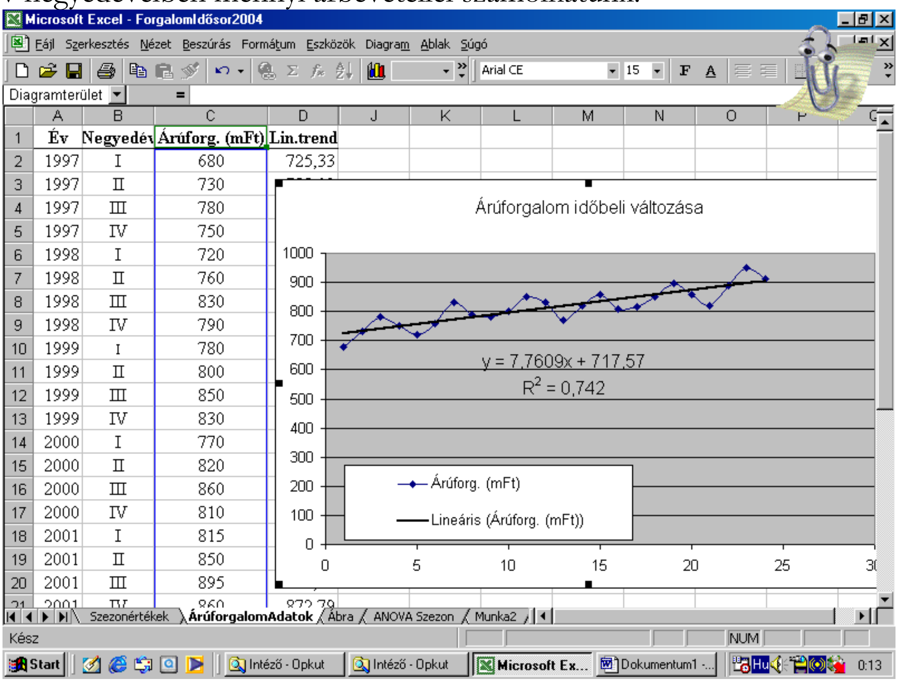
ahol t a trendváltozó, e_t véletlen hatást kifejező változó.

Gyakorlatban a trendfüggvény sokféle lehet: lineáris, polinomiális, hatvány, exponenciális, logaritmikus, stb. Arról, hogy milyen függvény írja le a kapcsolatot legegyszerűbben úgy győződhetünk meg, hogy grafikusan ábrázoljuk az idősor adatait.

A trend függvény ismeretében kézenfekvő az előrejelzés, hiszen a trendváltozó (idő) helyére azon időpontnak megfelelő értéket kell behelyettesíteni, amelyre a prognózis készül. Az előbbi szimbólumokat használva: $y_{t+i} = f(t+i)$. Előrejelzés számítási módszereit Excel táblázatkezelő segítségével mutatjuk be.

12.4. Idősor elemzés és előrejelzés Excel táblázatkezelővel

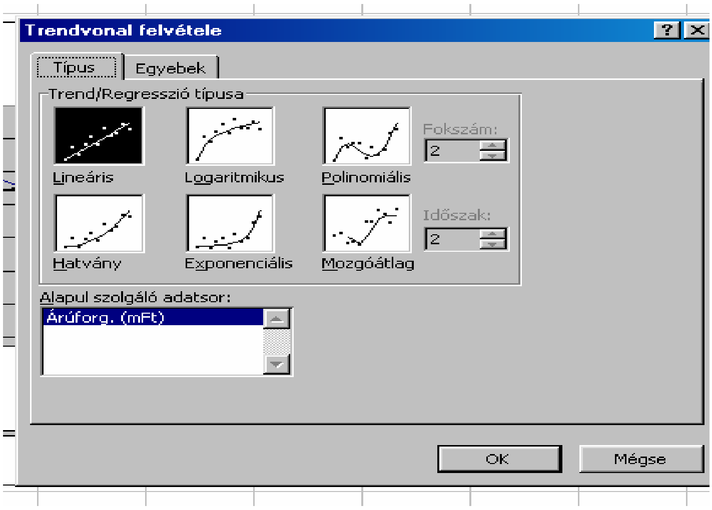
Egy cég áruforgalmi adatainak rész idősora látható a 12.4.1. képernyőn. A felvett adatok ismeretében szeretnénk becslést adni arra, hogy a következő év negyedéveiben mennyi árbevétellel számolhatunk.



12.4.1. Képernyő

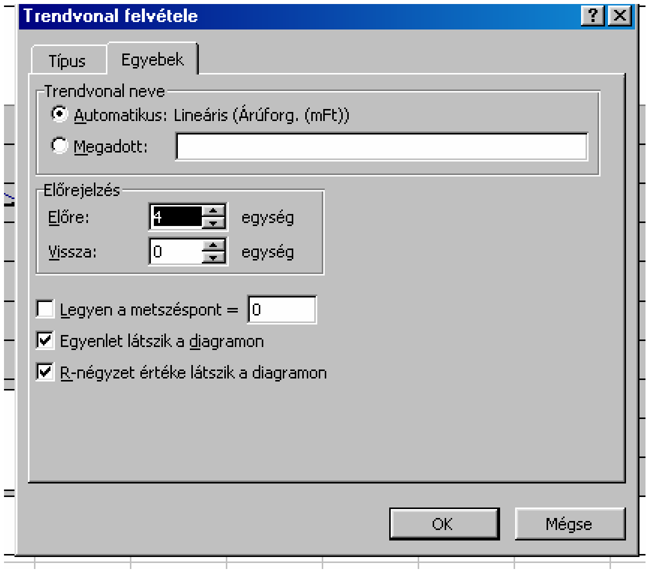
A jó előrejelzés érdekében vizsgáljuk meg az idősort!

- Ábrázoljuk az idősort xy diagrammon! Ezt a diagramvarázslóval megtehetjük. A 12.4.1 képernyőn látható, hogy az idősor trend- és szezonális hatást is tartalmaz.
- Ha a trendvonalat is látni szeretnénk, akkor az aktív Excel képernyőn a grafikon egyik pontjára kattintsunk az egér jobb billentyűjével és válasszuk a *Trendvonal felvétele* menüpontot. Ennek hatására megnyílik a 12.4.2 lenyíló menü.



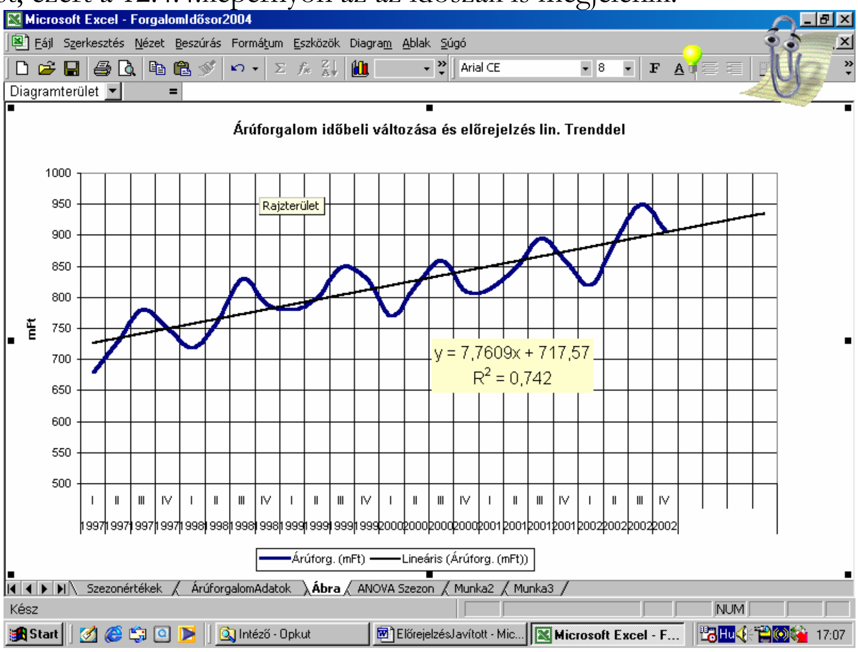
12.4.2. Képernyő

A lenyíló menüben 6 trendtípus közül választhatunk. Ha a lineárist választjuk, akkor a **12.4.1. képernyő** képen látható egyenest megrajzolja a program. Ha a trend egyenletét is látni szeretnénk, akkor nyissuk meg az *Egyebek* menüpontot is és értelemszerűen tegyünk jelet a négyzetekbe.



12.4.3. Képernyő

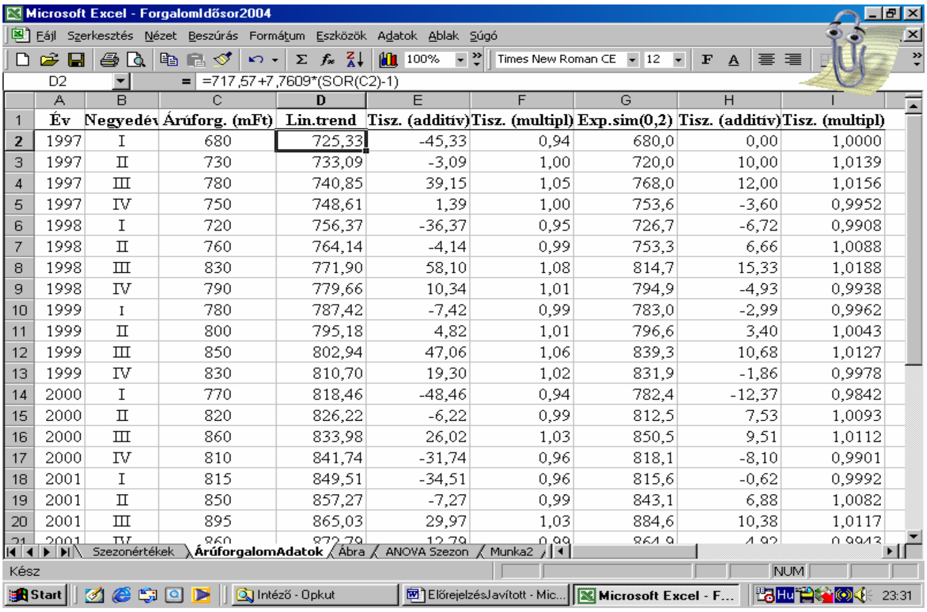
Mivel a menülapon azt is beállítottuk, hogy 4 időszakra készítsen előrejelzést, ezért a 12.4.4.képernyőn az az időszak is megjelenik:



12.4.4. Képernyő

Látható, hogy az illeszkedés elfogadható (magyarázó erő 74,2%). Itt leolvasható a következő 4 negyedévre a forgalom becsült értéke, de nem vettük figyelembe, hogy erős szezonális hatás érvényesül. Ha jobb előrejelzést akarunk adni, akkor a szezonális eltéréseket, illetve szezonindexeket is ki kell számolni és ezzel korrigálni kell a trendet. A szezonalitás vizsgálata bármilyen alapirányzat-becslés esetében elvégezhető.

- *Szezonalitás-vizsgálat lineáris trend figyelembevételével.* Egyszerre mutatjuk meg az additív és a multiplikatív modell számítási eljárását. Egészítsük ki a 14.2.1. képernyőn látható alapadatokat a lineáris trend számított értékeivel és a trendtől megtisztított értékekkel. Ez látszik a 12.4.5. Képernyőn. A D oszlop aktív cellájában látható a trend képlete, a többi cellájában a becsült trend értékek. A trendtől megtisztított értékeket additív modellt feltételezve az E oszlopba helyeztük el az `=C2-D2` képlettel számolva, a multiplikatív modell számítási képlete `=C2/D2`, és az F oszlopban láthatók a tisztított értékek.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Év	Negyedév	Árúforg. (mFt)	Lin.trend	Tisz. (additív)	Tisz. (multipl)	Exp.sim(0,2)	Tisz. (additív)	Tisz. (multipl)
2	1997	I	680	725,33	-45,33	0,94	680,0	0,00	1,0000
3	1997	II	730	733,09	-3,09	1,00	720,0	10,00	1,0139
4	1997	III	780	740,85	39,15	1,05	768,0	12,00	1,0156
5	1997	IV	750	748,61	1,39	1,00	753,6	-3,60	0,9952
6	1998	I	720	756,37	-36,37	0,95	726,7	-6,72	0,9908
7	1998	II	760	764,14	-4,14	0,99	753,3	6,66	1,0088
8	1998	III	830	771,90	58,10	1,08	814,7	15,33	1,0188
9	1998	IV	790	779,66	10,34	1,01	794,9	-4,93	0,9938
10	1999	I	780	787,42	-7,42	0,99	783,0	-2,99	0,9962
11	1999	II	800	795,18	4,82	1,01	796,6	3,40	1,0043
12	1999	III	850	802,94	47,06	1,06	839,3	10,68	1,0127
13	1999	IV	830	810,70	19,30	1,02	831,9	-1,86	0,9978
14	2000	I	770	818,46	-48,46	0,94	782,4	-12,37	0,9842
15	2000	II	820	826,22	-6,22	0,99	812,5	7,53	1,0093
16	2000	III	860	833,98	26,02	1,03	850,5	9,51	1,0112
17	2000	IV	810	841,74	-31,74	0,96	818,1	-8,10	0,9901
18	2001	I	815	849,51	-34,51	0,96	815,6	-0,62	0,9992
19	2001	II	850	857,27	-7,27	0,99	843,1	6,88	1,0082
20	2001	III	895	865,03	29,97	1,03	884,6	10,38	1,0117

12.4.5. Képernyő

A tisztított értékek idősorából a *Kimutatás-varázslóval* elkészíthetjük a negyedévek szerinti eltérés átlagokat. Használjuk az *Adatok* menü *Kimutatás..* menüpontját, így nyerhetjük a 12.4.6. képernyőt:

3		Negyedév				
4	Adatok	I	II	III	IV	Végösszeg
5	Átlag : Tiszt (additív)	-38,77323333	-2,367466667	42,37163333	-1,2226	0,002083333
6	Átlag : Tiszt (multipl)	0,951900043	0,997054792	1,052125652	0,998897259	0,999994437

12.4.6. Képernyő

Innen leolvashatók a szezonalitásra vonatkozó legfontosabb információk:

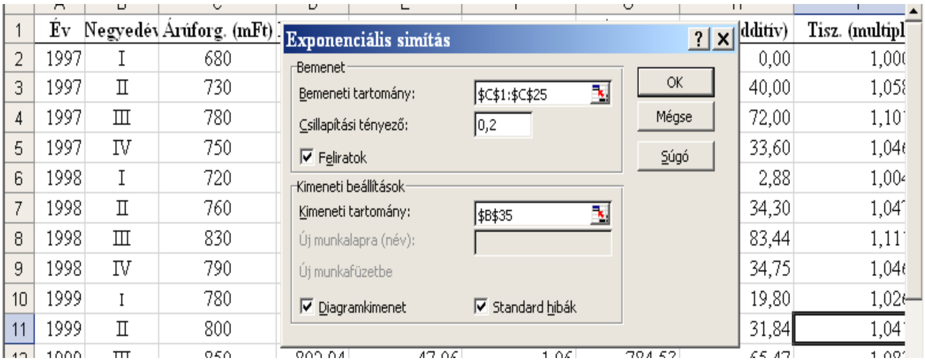
- a szezonalitás miatt az áruforgalom értéke az eső negyedévben elmarad az alapirányzat szerint előre jelzettől átlagosan 38,77 mFt, illetve 4,2 százalékkal.
- A második és negyedik negyedévben a szezonhatás nem jelentős,
- A harmadik negyedévben a szezonhatás miatt átlagosan 42,37 mFt-tal nagyobb a forgalom, mint a trendből következne, illetve 5,02 százalékkal multiplikatív hatást feltételezve.

Így az előre jelzett forgalom:			Trend értékek	Szezonhatás	Korrigált
Előrejelzés	I	**Additív**	911,59	–38,77323333	872,82
	II		919,35	–2,367466667	916,99
	III		927,11	42,37163333	969,49
	IV		934,88	–1,2226	933,65
	I	**Multiplikatív**		0,951900043	867,74
	II			0,997054792	916,65
	III			1,052125652	975,44
	IV			0,998897259	933,84

Látható, mindkét számítási mód azonos eredményre vezetett.

Hasonlóan számíthatók az előrejelzés értékei más függvény esetében is, ha szezonalitás kimutatható.

Az exponenciális simítás is elvégezhető Excel segítségével. Az *Eszközök* főmenü megnyitása után az *Adatelemzés* menüben találjuk az *Exponenciális simítás* programot. A program kiválasztása után a következő menü jelenik meg:



A Súgó gomb lenyomása után tájékozódhatunk az egyes lehetőségek értelméről.

12.5. Előrejelzés regressziószámítással

A gazdasági életben gyakran találkozunk olyan jelenséggel, a melynek értéke valamilyen módon jelzi előre időben később bekövetkező esemény értékét. Például vegyünk egy könyvkiadót, amelynek kereskedelmi menedzsere a könyvek első kiadásának példányszámát szeretné meghatározni. Az eddig kiadott könyveket boltokban és postai megrendeléseken keresztül is forgalmazták. A nagy értékű könyvekre még a nyomtatás előtt levélben felhívták a potenciális vásárlók figyelmet, és arra buzdították a címzetteket, hogy előre rendeljék meg. A menedzser felfigyelt arra, hogy összefüggés van a postán előre megrendelt könyvek száma és a bolti forgalomban később eladott példányszám között. Azt reméli, hogy az észrevett összefüggést jól tudja hasznosítani az ezután megjelenő példányszámok megállapításához. Ha *x* jelöli a postai rendelések, *y* pedig a bolti eladások számát, akkor

$$y_i = f(x_i) + e_i \text{ -vel}$$

írható le a kapcsolat, ahol *f* a kapcsolatot leíró függvény szimbólum, *e* pedig a hiba.

A statisztikában megismert módon határozatjuk meg a tapasztalati adatok ismeretében a kapcsolatot leíró függvény paramétereit és az illesztés szorosságát.

Az így illesztett függvény igen jól használható előrejelzésre, mert az *x* változó időben előre ismert értékeivel megbecsülhető az időben később bekövetkező *y* változó értéke. A döntéshozót persze érdekli, hogy mennyire bizonytalan ez az előrejelzés. A bizonytalanságot bizonyos feltételek mellett könnyű mérni. Egyik ilyen feltétel lehet, hogy az *y* változó szórása állandó.

A szórás becslése a következő összefüggéssel történik:

$$s_{y/x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \hat{y})^2}{n-2}}$$

Az y_i változó várható értékére intervallum becslést adhatunk adott megbízhatósági szint mellett. Ha például a szóban forgó menedzser azt tapasztalja, hogy $\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x$ függvény írja le a kapcsolatot, akkor az $x = x_0$ értéknél (postai megrendelés darabszáma) a bolti eladás darabszáma a következő intervallumba esik 95% valószínűséggel:

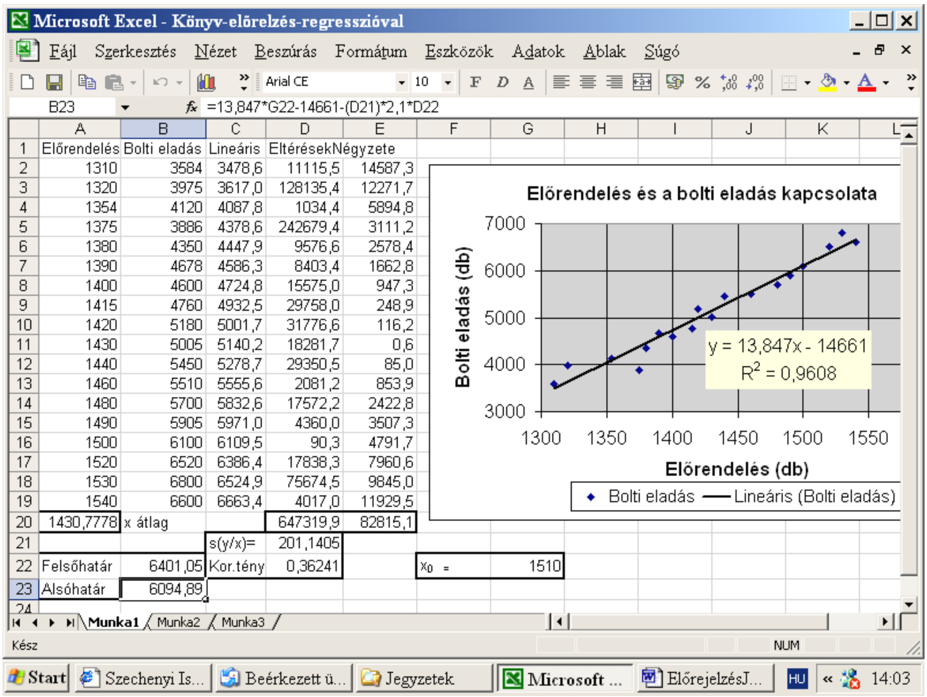
$$\beta_0 + \beta_1 x_0 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} \cdot s_{y/x} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}.$$

A könyvkiadó példa megoldása Excel segítségével:

A példa tapasztalati adatai a 12.5.1 Képernyőn láthatók: Az **A** oszlopban az előrendelés darabszáma, a **B** oszlopban a bolti eladások darabszámai.

Lépések:

1. Ábrázoljuk xy diagramon az Előrendelés x és a Bolti eladás y megfigyelt összetartozó értékeit a *Diagram varázsló* segítségével. Látható, hogy lineáris kapcsolat tételezhető fel.
2. Ezért illesszünk hozzá $\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x$ egyenletű egyenest! A ponthalmaz egyik pontjára kattintsunk az egér jobboldali billentyűjével. Válasszuk a Trendvonal felvétele programot és válasszuk ki a megfelelő függvény típust.
3. Az *Egyebek* kinyitása után tegyünk jelet az *Egyenlet látszik a diagramon* és az *R-négyzet értéke látszik a diagramon*. jelölő négyszögbe.
4. Számoljuk ki a függvény x_i helyen felvett értékeit:
   A C2 cellába írjuk be`:=13,847*a2-14661`, majd másoljuk át a képletet a C oszlop megfelelő celláiba.



	A	B	C	D	E
1	Előrendelés	Bolti eladás	Lineáris	Eltérések	Négyzete
2	1310	3584	3478,6	11115,5	14587,3
3	1320	3975	3617,0	128135,4	12271,7
4	1354	4120	4087,8	1034,4	5894,8
5	1375	3886	4378,6	242679,4	3111,2
6	1380	4350	4447,9	9576,6	2578,4
7	1390	4678	4586,3	8403,4	1662,8
8	1400	4600	4724,8	15575,0	947,3
9	1415	4760	4932,5	29758,0	248,9
10	1420	5180	5001,7	31776,6	116,2
11	1430	5005	5140,2	18281,7	0,6
12	1440	5450	5278,7	29350,5	85,0
13	1460	5510	5555,6	2081,2	853,9
14	1480	5700	5832,6	17572,2	2422,8
15	1490	5905	5971,0	4360,0	3507,3
16	1500	6100	6109,5	90,3	4791,7
17	1520	6520	6386,4	17838,3	7960,6
18	1530	6800	6524,9	75674,5	9845,0
19	1540	6600	6663,4	4017,0	11929,5
20	1430,7778	x átlag		647319,9	82815,1
21			s(y/x)=	201,1405	
22	Felsőhatár	6401,05	Kor.tény	0,36241	
23	Alsóhatár	6094,89			

12.5.1. Képernyő

5. Az $s_{y/x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \hat{y})^2}{n-2}}$ szórás kiszámítása: A D2 cellába írjuk be az `=(a2-c2)`^{2} képletet, majd másoljuk át a D oszlop többi celláiba. A D20 cellába összegezzük a fölötte található adatokat. A D21 cellába írjuk be az `=Gyök(d20/18)` képletet. Ezzel előállítottuk az $s_{y/x}$ szórást.

6. A becsléshez még szükség van $\sum (x_i - \overline{x})^2$-re is. Az A2 cellába írjuk be az `=(a2-$a$20)`^{2} (az A20 cellában látható az x átlag), majd másoljuk át az E oszlop többi cellájába is. Így az E20 cellában összegezhetjük az adatokat.

7. A $\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}}$ korrekciós tényező kiszámítása: Az E21 cellába írjuk be: `=gyök(1/18+(18-a20)`^{2}`/e20`.

8. A könyvek boltban eladható becsült felső határát számoljuk ki a B22 cellába, írjuk bele az `=13,847*g22+14661+2,1*d21*d22` képletet. Az alsó határt a B23 cellába számoljuk ki.
9. Következtetés: Ha a szóban forgó könyvekből 1510 darabot (ez látható G22 cellában) előrendelésben lekötöttek, akkor 95% biztonsággal állíthatjuk, hogy a bolti eladások várható száma 6095 és 6401 között lesz.

13. Kérdések az operációkutatás tanulmányozásához

Gazdasági modellezés

1. Fogalmazza meg az ökonometria, az operációkutatás és a kibernetika (mint gazdasági döntés-előkészítés) lényegét!
2. Mi az operációkutatás fogalma, tárgya és a módszerei?
3. Mit nevezünk modellnek?
4. Sorolja fel a döntési modellek jellegzetes elemeit!
5. Sorolja fel a gazdasági modellezés lépéseit!

Lineáris programozás

6. Milyen modellt nevezünk lineáris programozási feladatnak? Írja fel a matematikai modelljét a szokásos vektor-mátrix szimbólumokkal!
7. Milyen lineáris programozási feladatot nevezünk normálfeladatnak?
8. Milyen lineáris programozási feladatot nevezünk módosított normálfeladatnak? Írja fel a matematikai modelljét a szokásos vektor-mátrix szimbólumokkal!
9. Milyen lineáris programozási feladatot nevezünk általános feladatnak? Írja fel a matematikai modelljét a szokásos vektor-mátrix szimbólumokkal!
10. Mit nevezünk egy lineáris programozási feladat lehetséges megoldásának?
11. Mit nevezünk egy lineáris programozási feladat optimális megoldásának?
12. Mi a szimplex algoritmus lényege?
13. Mivel biztosítjuk a szimplex eljárás során azt, hogy a változók nemnegatív értékeit keressük?
14. Honnan tudjuk a szimplex táblázatból, hogy optimális megoldást kaptunk-e?
15. Mikor mondjuk, hogy a célfüggvény nem korlátos? Hogyan tudjuk ezt a szimplex táblázatból leolvasni?
16. Mit nevezünk alternatív optimumnak? Hogyan olvasható le ez a szimplex táblázatból? Hogyan állítható elő az összes alternatív megoldás?
17. Mikor mondjuk, hogy a lineáris programozási feladat degenerált?
18. Hogyan járunk el a módosított normálfeladatok megoldásakor? Mi a feltétele egy lehetséges megoldás előállításának?
19. Hogyan járunk el az általános feladatok megoldásakor?

20. Honnan látszik a szimplex táblázatban, hogy lehetséges megoldást kaptunk?
21. Milyen eljárásokat ismer a minimumfeladatok megoldására?
22. Mi a dualitás elve? Mátrix-vektor szimbólumokkal írja le a problémát!
23. Mondjon gazdasági példát a dualitás értelmezésére!
24. Mit nevezünk az erőforrások árnyékárának? Milyen közgazdasági jelentése van? Hol és hogyan tudja felhasználni az operációkutató?
25. Milyen információt adnak az erőforrások árnyékárai a gazdasági elemző számára?
26. Milyen matematikai tételeken és elven alapul a szimplex algoritmus?
27. Mit nevezünk a programozási feladatoknál érzékenységvizsgálatnak? Magyarázza meg a gazdasági jelentőségét! Melyik eseteit tárgyaltuk?

Szállítási feladatok

28. Milyen modellt nevezünk elosztási feladatnak?
29. Értelmezze a klasszikus szállítási feladatot!
30. Írja fel egy a szokásos „peremadatokkal” adott klasszikus szállítási feladat lineáris programozási modelljét! Mit fejez ki a változója, az egyenletei és a célfüggvénye?
31. Miért nem célszerű a szállítási feladatokat szimplex módszerrel megoldani?
32. Mi a *disztribúciós módszer* lényege?
33. Milyen módszereket ismer egy *lehetséges megoldás* kijelölésére a disztribúciós táblázaton? Részletezze az eljárások lényegét! Hasonlítsa össze a hatékonyságukat!
34. Hogyan tudja eldönteni, hogy egy lehetséges megoldás *optimális* megoldás-e?
35. Ha nem optimális a megoldás, milyen eljárással javítható a program? Részletezze! Mi a „kör”, vagy „hurok”? Mi a feltétele ezek felrajzolásának?
36. Hogyan vezethető vissza az alapfeladatra az a szállítási feladat, amelynél a készletek nem egyeznek az igényekkel?
37. Mi az a „tiltótarifa”? Milyen esetekben és hogyan alkalmazzuk?
38. Hogyan tudjuk biztosítani egy olyan szállítási feladatnál, ahol a készlet nem egyezik az igénnyel azt, hogy egy bizonyos megrendelő mindenképpen megkapja az igényelt mennyiségű árut?
39. Értelmezze az alábbi fogalmakat:
    - kötött elem,
    - iteráció,
    - fiktív feladó,
    - kritikus szám.

Többcélú programozás

40. Mit nevezünk célprogramozásnak? Milyen gazdasági szükséglet indukálta a kidolgozást?
41. Milyen módszereket ismert meg a többcélú programozás kezelésére? Mutassa be ezeket egy konkrét modellen!
42. Értelmezze az alábbi fogalmakat a többcélúság témakörében:
    - kompromisszumos megoldás,
    - korlátok módszere,
    - ideális megoldás,
    - legkisebb célfüggvény maximalizálása.

Egészértékű programozás

43. Mit nevezünk egészértékű programozási feladatnak? Írja fel a matematikai modelljét! Milyen gazdasági feladatok indokolják a modell alkalmazását?
44. Szemléltesse grafikonon a folytonos- és az egészértékű lineáris programozási feladatok lehetséges megoldási halmazait!
45. Milyen algebrai eljárásokat dolgoztak ki az egészértékű lineáris programozási feladatok megoldására?
46. Ismertesse a Gomory-féle vágási módszer lényegét!
47. Ismertesse a vegyes egészértékű feladatok megoldására kidolgozott szétválasztás és korlátozás módszerét!
48. Értelmezze a „*hátizsák problémát*”! Írja le a matematikai modelljét!
49. Értelmezze a „*hajórakodási problémát*”! Írja le a matematikai modelljét!
50. Értelmezze a „*fix költség problémát*”! Írja le a matematikai modelljét!
51. Értelmezze a „*beruházási problémát*”! Írja le a matematikai modelljét!
52. Milyen feladatot nevezünk „*hozzárendelési*” feladatnak? Mondjon gazdasági példát e modellre! Mi a változó jelentése? Milyen eddig megismert modell speciális esete?
53. Milyen módszerekkel lehet a hozzárendelési feladatokat megoldani?
54. Értelmezze az alábbi fogalmakat:
    - költségmátrix,
    - redukált mátrix,
    - költségfüggvény alsó korlátja.
55. Mi a hozzárendelési feladatok megoldására szolgáló *korlátozás* és *szétválasztás* módszerének lényege?
56. Sorolja fel *korlátozás és szétválasztás* módszerének lépéseit!
57. Mondjon gazdasági példát *maximum* célfüggvényű hozzárendelési feladatra! Hogyan lehet az alapfeladatra visszavezetni?

58. Hogyan lehet kezelni a hozzárendelési feladatot, ha a költségmátrix nem kvadratikus vagy egyéb korlátozó feltétel is előfordul?
59. Mit nevezünk *körutazási* vagy *utazó ügynök* problémának? Írja fel a matematikai modelljét?
60. Milyen algoritmusokat ismer a körutazási probléma megoldására?
61. Mi a körutazási probléma megoldására szolgáló *korlátozás és szétválasztás* módszerének lényege?

Nemlineáris programozás

62. Milyen programozási feladatot nevezünk nemlineáris programozásnak?
63. Mondjon gazdasági példát nemlineáris programozásra!
64. Milyen általános módszereket ismert meg a nemlineáris programozási feladatok közelítő megoldására?
65. Mire szolgál a Karush–Kuhn–Tucker tétel? Írja fel a tételt!
66. Ismertesse a „*szuboptimális programozás*”lényegét!
67. Milyen programozási feladatot nevezünk kvadratikus programozási feladatnak?
68. Milyen programozási feladatot nevezünk *hiperbolikus programozásnak*? Írja fel a matematikai modelljét! Milyen gazdasági feladatok írhatók le ezzel a modellel?
69. Milyen eljárással vezethető vissza a hiperbolikus programozási feladat egy lineáris programozási feladatra? Mutassa meg ezt egy konkrét feladaton!
70. Mi a Martos-módszer lényege?

Érzékenységvizsgálat

71. Mit nevezünk programozási feladatoknál érzékenységvizsgálatnak? Magyarázza meg a gazdasági jelentőségét. Melyik eseteit tárgyaltuk?
72. Hogyan vizsgálható a b_i paraméter változásának hatása az érzékenység vizsgálatnál?
73. Hogyan vizsgálható a c_j paraméter változásának hatása az érzékenység vizsgálat során?
74. Milyen programozási feladatot nevezünk paraméteres lineáris programozási feladatnak? Írja fel a matematikai modelljét mátrix-vektor szimbólumokkal!
75. Milyen gazdasági problémák vizsgálatára alkalmasak a paraméteres lineáris programozási feladatok?
76. Ismertesse a paraméteres programozási feladatok megoldására kidolgozott eljárás lényegét!
77. Milyen szerepe lehet az operációkutatónak egy gazdasági vállalkozásnál?
78. Hogyan használható az EXCEL program érzékenységvizsgálatra?

79. Mit fejez ki a „redukált költség”? Hol és hogyan tudja felhasználni az operációkutató?

Játékelmélet

80. Értelmezze az alábbi fogalmakat a játékelmélet témakörében:
    - Stratégiai játékok.
    - Szerencsejátékok.
    - Stratégia.
    - Kifizetési mátrix.
81. Mit nevezünk kétszemélyes zérusösszegű játéknak?
82. Mit nevezünk a játék nyeregpontjának?
83. Miben áll a játékos „intelligens és óvatos” viselkedése!
84. Értelmezze az alábbi fogalmakat a játékelmélet témakörében!
    - Tiszta stratégia.
    - Kevert stratégia.
    - A játék értéke.
85. Mi a kevert stratégia lényege?
86. Írja fel és értelmezze a mátrixjátékokra vonatkozó alaptételt (Neumann tétel)
87. Hogyan lehet meghatározni az A kifizető mátrixszal adott játék optimális „stratégiapárját”?
88. Mondjon példát a gazdasági életben nem konstans összegű kooperatív játékra.
89. Értelmezze az alábbi fogalmakat a játékelmélet témakörében!
    - Kooperatív játékok.
    - Nem kooperatív játékok.

Ágazati kapcsolatok mérlege

90. Fogalmazza meg az ágazatok kapcsolatát kifejező modellt!
91. Értelmezze az alábbi fogalmakat:
    - Bruttó kibocsátás vektora.
    - Termelő felhasználás mátrixa.
    - Nettó kibocsátás vektora.
    - Összes felhasználás vektora.
92. Mit fejez ki a technológiai mátrix? Hogyan állítható elő?
93. Írja fel az ágazati kapcsolatok egyenletét! Mit fejez ki?
94. Mi a jelentése az $(E - A)^{-1}$ mátrix elemeinek?
95. Mire használható az ágazati kapcsolatok modellje?

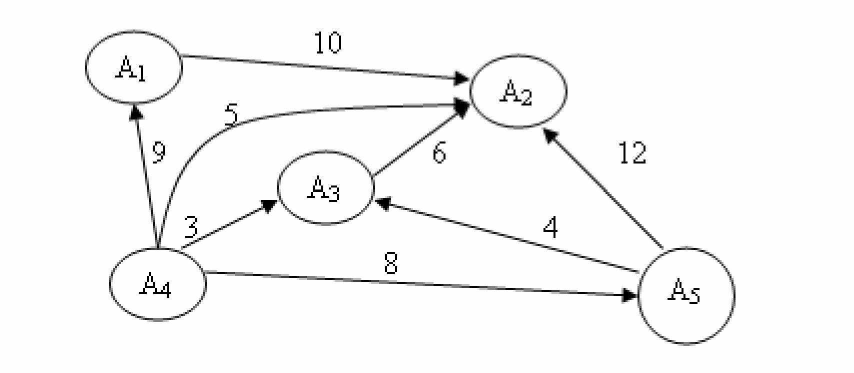
96. Miért és hogyan használható az ágazati kapcsolatok meghatározására az EXCEL táblázatkezelő?
97. Határozza meg adott $\underline{x}$ és M esetén az A technológia mátrixot EXCEL táblázatkezelő segítségével! Számítsa ki egy adott $\underline{y}$ nettó kibocsátást megvalósító $\underline{x}'$ termelést!
98. A termékmérlegből ismert az alábbi táblázat**:**

Termelő ágazat	Felhasználó ágazat Millió Ft			
	Teljes termelés	Növény termelés	Állat-tenyésztés	Egyéb
Növénytermesztés	50	10	20	5
Állattenyésztés	100	20	40	12
Egyéb	24	8	7	6

a) Írja fel az ágazatok bruttó kibocsátás vektorát!
b) Írja fel, hogy mennyi használnak fel az egyes ágazatok!
c) Írja fel a nettó kibocsátás vektorát!
d) Határozza meg a technológiai mátrixot!
e) Mekkora legyen az egyes ágazatok bruttó kibocsátása, ha azt akarjuk, hogy a nettó kibocsátás $(30, 40, 10)^T$ legyen?
f) A számítást tervezze meg Excel táblázatkezelőn, és végezze el a számítást is!

Gráfok, mátrixok és vektorok gazdasági alkalmazása

99. Egy termékbeépülési feladat gráfját látja.
a) Írja fel a gráfhoz tartozó közvetlen ráfordítások mátrixát! Mit jelentenek az elemei?
b) Melyik a végtermék, melyek a félkész termékek?
c) Számítsa ki a **teljes ráfordítások** mátrixát! Mit jelentenek az elemei?

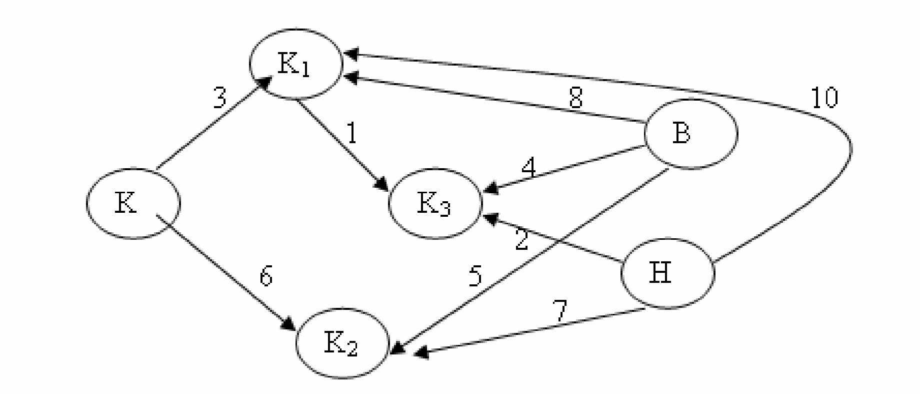


100. Ismerjük a közvetlen ráfordítások mátrixát

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Rajzolja fel a megfelelő gráfot;
b) Határozza meg, hogy melyik az alaptermék, és melyik a végterméke?
c) Ha az alaptermékből 50 darabot, a közbülső termékekből 10-10 darabot akarunk tartalékolni, és a végtermékből 2 darabot akarunk előállítani, akkor mennyit kell termelni az egyes termékekből?
d) Végezze el a számítást Excel táblázatkezelővel!

101. Mezőgazdaságban a különböző szemestakarmányokat (kukoricát, takarmánybúzát, árpát stb.) esetleg más terményeket is megőrlik (pl. lucernaliszt, szója). Ezeknek különböző arányú keverésével, valamint szerves anyagok) pl. halliszt, húsliszt) hozzáadásával kapják a tápporokat. Különböző életkorú állatok különböző tápport kapnak. Néha még a kész tápporokat is keverik, sőt ehhez még különböző szemestakarmány-őrleményt is adnak. Egy ilyen keverék készítését szemlélteti a következő gráf. A gráf azt mutatja, hogy milyen őrleményből hány kg-ot keverünk össze. (K 1 kg kukoricadarát, B 1 kg búzadarát, H 1 kg húslisztet jelent.)



a) Határozzuk meg, hogy a K3-as keverék hány kg búzadarát, kukoricadarát, húslisztet tartalmaz.
b) Ha

1 kg búzadara ára	7,50 Ft
1 kg kudkoricadara ára	6,80 Ft
1 kg húsliszt ára	18,00 Ft

c) akkor mennyi 1 kg K3-as keveréknek az anyagköltsége?
d) Mennyibe kerül a K1-es és K2-es táppor-keverék kg-ja, ha csak az anyagköltségeket számítjuk?
e) Ha 1 kg K3-as keverék 260 g súlygyarapodást eredményez az állatoknál és 1 kg súlygyarapodás 77 Ft bevételt jelent, akkor 1 tonna keverék esetén hány Ft nyereségre számíthatunk?
f) A számítást tervezze meg Excel táblázatkezelőn, és végezze el a konkrét számítást is!

Előrejelzés

102. Miért szükséges ismerni az előrejelzés módszereit a gazdasági életbe? Sorolja fel legfontosabb előrejelzési módszereket! Mi a lényege?
103. Sorolja fel és értelmezze az idősorokra épülő előrejelzési módszereket!
104. Ismertesse a trendszámításon alapuló előrejelzés lépéseit! Hogyan valósítja meg Excel táblázatkezelővel?
105. Mikor és hogyan használható a regresszió-számítás előrejelzésre?
106. Tapasztalati adatok ismeretében hogyan használhatja fel előrejelzésre az Excel táblázatkezelőt?
107. Mi az exponenciális simítás lényege? Hogyan használhatja fel előrejelzésre?

Irodalomjegyzék

BAUMOL W.J.: *Közgazdasátan és operációanalízis.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó Bp. 1968.

CSÁKI CSABA–MÉSZÁROS SÁNDOR: *Operációkutatási módszerek alkalmazása mezőgazgaságban.* Mezőgazdasági Kiadó, Bp. 1981.

CSERNYÁK LÁSZLÓ: *Operációkutatás II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

CHIKÁN ATTILA: *Készletezési modellek.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó Bp. 1983.

DANTZIG, G.B.: *Linear Programming and Extensions.* Princenton University Press, 1973.

DANYI PÁL – VARRÓ ZOLTÁN: *Operációkutatás üzleti döntések megalapozásához.* JPTE, Pécs, 1997.

FERENCZI Z. – JÁMBOR A. – NAGY Z. – RAFFAI M.: *Döntéselőkészítés, Esettanulmányok, példatár.* Novadat, Győr, 1999.

FERENCZI Z.: *A munkaerő, az eszközráfordítás és a jövedelem kapcsolatának vizsgálata paraméteres programozással.* Doktori értekezés, Gödöllő, 1978.

GÁSPÁR - TEMESI: *Lineáris programozási feladatok.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

GÁSPÁR - TEMESI: *Matematikai programozási feladatok.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

HILLIER - LIEBERMAN: *Bevezetés az operációkutatásba.* LSI Oktatóközpont, Budapest, 1994.

IMREH BALÁZS: *Kombinatorikus optimalizálás.* Novadat, Győr, 2000

KISS BÉLA – KREBSZ ANNA: *Játékelmélet.* SZIF–UNIVERSITAS Kft., Győr, 1999.

KREKÓ BÉLA: *Lineáris programozás.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1966.

KREKÓ BÉLA: *Optimumszámítás.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972.

MARTOS BÉLA: *Nonlinear Programming.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.

MÉRŐ LÁSZLÓ: *Mindenki másképp egyforma – A játékelmélet és a racionalitás pszichológiája.* Tercium Kiadó, Budapest, 1996

Operációkutatási módszerek. KSH Nemzetközi Számítástechnikai Oktató és Tájékoztató Központ, Budapest, 1977.

RAPPAI GÁBOR: *Üzleti statisztika Excellel*, KSH, Budapest, 2001

SYDSAETER K. – HAMMAND P.: *Matematika közgazdászoknak.* AULA, Bp.1998.

VARGA JÓZSEF: *Matematikai programozás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.