

Analízis I. gyakorlat

Kocsis Albert Tihamér, Németh Adrián

2016. március 24.

Tartalomjegyzék

Előszó	1
Sorozatok és sorok	1
Számsorozatok	1
Feladatok	2
Számsorok	3
Feladatok	5
Függvénysorozatok és függvényesorok	10
Függvénysorozatok	10
Feladatok	10
Függvényesorok	11
Feladatok	11
Hatványsorok	13
Hatványsorok konvergenciája	13
Feladatok	14
Taylor-sorok, Taylor-polinomok	18
Feladatok	18
Taylor-polinomok általi közelítés	20
Feladatok	21

Előszó

A gyakorlati jegyzet a Széchenyi István Egyetem mesterszakos mérnökhallgatói számára, az Analízis I. tárgyhoz készült. Célja, hogy kidolgozott típusfeladatokon keresztül segítse a hallgatók felkészülését az évközi és a vizsgazárhelyekre.

A gyakorlati jegyzet legfrissebb példánya letölthető a www.sze.hu/~katihi/ oldalról, vagy a www.sze.hu/~nemetha/ oldal „oktatás” menüpontja alól. Észrevételeket és az elírások, hibák bejelentését a katihi@sze.hu vagy a nemetha@sze.hu címre várjuk. A kidolgozásra került feladatok jelentős része Dr. Lotfi Abdelhakimtól származik, köszönet értük.

Sorozatok és sorok

Számsorozatok

Definíciók:

- Az a_n valós sorozat korlátos, ha található olyan $K \in \mathbb{R}$ korlát, hogy $|a_n| < K$ minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén.
- Az a_n valós sorozat monoton növekvő ill. csökkenő, ha $a_n \leq a_{n+1}$ ill. $a_n \geq a_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén. A sorozat szigorúan monoton, ha az állítás szigorú egyenlőtlenséggel is teljesül.
- Az a_n valós számsorozat konvergens és határértéke $a \in \mathbb{R}$, ha bármely $\epsilon > 0$ valós számhoz található olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $|a_n - a| < \epsilon$. Jelölése $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Egyébként a sorozatot divergensnek nevezzük.
- Az a_n valós sorozat határértéke $+\infty$ ill. $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ számhoz található olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > K$ ill. $a_n < K$. Jelölése $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$.
- Az a_n valós sorozat Cauchy-sorozat, ha minden $\epsilon > 0$ valós számhoz található olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $|a_n - a_m| < \epsilon$ minden $n, m > N$ index esetén.

Határérték tulajdonságai:

- Sorozat határértéke nem függ az első néhány elemétől.

- Valós számsorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.
- Monoton és korlátos sorozat mindig konvergens.
- Monoton sorozatnak mindig van határértéke.
- Ha a_n és b_n sorozatok konvergensek, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.
- Ha a_n és b_n sorozatok konvergensek, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
- Ha a_n és b_n sorozatok konvergensek, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$.
- Ha a_n sorozat konvergens, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot a$.
- Ha a_n sorozat konvergens, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ és $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $x = a$ -ban, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$.
- Ha a_n pozitív sorozat nullsorozat, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ és $0 \leq b_n \leq a_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, akkor b_n is nullsorozat, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ (rendőrelv).
- Ha a_n és b_n sorozatok konvergensek, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ és $a_n \leq c_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, akkor a c_n sorozat is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ (rendőrelv).
- Ha a_n sorozat divergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, valamint $a_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, akkor b_n is divergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$.

Nevezetes határértékek:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{ha } \alpha > 0 \\ 1 & \text{ha } \alpha = 0 \\ 0 & \text{ha } \alpha < 0 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = \begin{cases} +\infty & \text{ha } \alpha > 1 \\ 1 & \text{ha } \alpha = 1 \\ 0 & \text{ha } |\alpha| < 1 \\ \text{divergens} & \text{ha } \alpha \leq -1 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1 \quad (\alpha > 0)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n^k} = \begin{cases} +\infty & \text{ha } \alpha > 1 \\ 0 & \text{ha } |\alpha| \leq 1 \\ \text{divergens} & \text{ha } \alpha < -1 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{r_n}\right)^{r_n} = e^k$ amennyiben $r_n \rightarrow +\infty$

Feladatok

- a.) **Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke az $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ sorozatnak?**

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ -re $0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ így rendőr-elv értelmében a_n konvergens és $a_n \rightarrow 0$.

- b.) **Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke az $a_n = n^2(\sqrt{n^4+1} - n^2)$ sorozatnak?**

$$a_n = \frac{n^2(\sqrt{n^4+1} - n^2)(\sqrt{n^4+1} + n^2)}{\sqrt{n^4+1} + n^2} = \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1} + n^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

- c.) **Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke az $a_n = \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{2n-2}$ sorozatnak?**

$$a_n = \left(1 + \frac{4}{n-1}\right)^{2(n-1)} = \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{4}}\right)^{8 \cdot \frac{n-1}{4}} \rightarrow e^8$$

- d.) **Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke az $a_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$ sorozatnak?**

$$a_n = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

Ahol $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \rightarrow \frac{1}{e}$, ezért létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ indexre $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} > \frac{1}{2e}$. Ekkor minden $n > N$ -re $1 > a_n > \sqrt[n]{\frac{1}{2e}} \rightarrow 1$, így a rendőr-elv értelmében a_n konvergens és $a_n \rightarrow 1$.

- e.) **Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke az $a_n = \sqrt[n]{n^2+3}$ sorozatnak?**

$$a_n = \sqrt[n]{n^2+3} < \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{minden } n > 1 \text{ indexre.}$$

Ugyanakkor $a_n > 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre így a rendőr-elv értelmében a_n konvergens és $a_n \rightarrow 1$.

- f.) **Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke az $a_n = \frac{3^{2n+2} + (-1)^n}{9^n - 2}$ sorozatnak?**

$$a_n = \frac{9 + \left(\frac{-1}{9}\right)^n}{1^n - \frac{2}{9^n}} \rightarrow \frac{9}{1} = 9$$

Számsorok

Definíciók:

- Legyen a_n egy valós számsorozat. Az $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen összeget végtelen számsornak, az $a_1, a_2, \dots$ számokat pedig a sor tagjainak nevezzük. Az $s_k = \sum_{n=0}^k a_n$ kifejezés a sor k -adik részletösszege.

- Az a_n tagokból álló sorozatot konvergensnek nevezzük, ha az $s_k = \sum_{n=0}^k a_n$ részletösszegek által alkotott sorozat konvergens, különben a sort divergensnek mondjuk. A $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s$ határértéket a sor összegének nevezzük.
- Az a_n tagokból álló sorozatot összege $\pm\infty$, ha az $s_k = \sum_{n=0}^k a_n$ részletösszegek által alkotott sorozat határértéke $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \pm\infty$.

Sorösszeg tulajdonságai:

- Sor konvergenciája nem függ az első néhány tagjától.
- Ha az $\sum_n |a_n|$ sor konvergens, akkor a $\sum_n a_n$ sor is konvergens.
- Legyen $\sum_n a_n$ egy konvergens valós számsor és legyen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, legyen továbbá $c \in \mathbb{R}$. Ekkor a $\sum_n ca_n$ sor is konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = cA$
- Legyenek $\sum_n a_n$ és $\sum_n b_n$ konvergens valós számsorok, továbbá jelölje sorösszegüket $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$. Ekkor a $\sum_n (a_n + b_n)$ sor is konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

Konvergenciakritériumok:

- Cauchy-féle konvergenciakritérium. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sor pontosan akkor konvergens, ha minden $\epsilon > 0$ valós számhoz található olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ és $m > 0$ egész esetén

$$\left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| < \epsilon.$$

- Konvergencia szükséges feltétele. Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens, akkor az a_n sorozat konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- Összehasonlító kritériumok. Legyenek $\sum_n a_n$ és $\sum_n b_n$ nemnegatív tagú sorok és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex olyan, hogy $a_n \leq b_n$ minden $n > N$ indexre. Ekkor
 - ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor divergens, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \neq 0$ sor is divergens (minoráns-kritérium)
 - ha a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \neq 0$ sor is konvergens (majoráns-kritérium).
- Leibniz-kritérium. Legyen $a_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, legyen a_n monoton csökkenő és legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ alternáló sor konvergens.

- Gyökkritérium. Tegyük fel, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$. Ekkor ha

$$\begin{cases} \rho < 1 & \text{akkor a } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ sor konvergens} \\ \rho > 1 & \text{akkor a } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ sor divergens} \\ \rho = 1 & \text{akkor a kritérium nem alkalmazható.} \end{cases}$$

- Hányadoskritérium. Tegyük fel, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$. Ekkor ha
$$\begin{cases} \rho < 1 & \text{akkor a } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ sor konvergens} \\ \rho > 1 & \text{akkor a } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ sor divergens} \\ \rho = 1 & \text{akkor a kritérium nem alkalmazható.} \end{cases}$$
- Integrálkritérium. Legyen $a_n > 0$ és legyen $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő folytonos függvény, melyre $f(n) = a_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha az $\int_1^{\infty} f(x) dx$ improprius integrál konvergens és véges.

Nevezetes sorok:

- Mértani sor

$$\sum_{n=k}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{q^k}{1-q} & \text{ha } |q| < 1 \\ \infty & \text{ha } q \geq 1 \\ \text{divergens} & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

- Exponenciális sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} = e^q$$

- Hiperharmonikus sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergens} & \text{ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens} & \text{ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Feladatok

- a.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ végtelen sor?**

Divergens, mert a $\frac{n!}{2^n}$ sorozat nem nullsorozat, így a sor konvergenciájának szükséges feltétele nem teljesül.

- b.) **Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{\ln n}$ végtelen sor?**

Divergens, mert a $\frac{n^2+1}{\ln n}$ sorozat nem nullsorozat, így a sor konvergenciájának szükséges feltétele nem teljesül.

- c.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a majoráns kritériumot. $0 \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re, és a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, ezért a

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ sor is konvergens.

- d.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^8+6}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a majoráns kritériumot. $0 \leq \frac{n^2+1}{n^8+6} \leq \frac{2n^2}{n^8} = \frac{2}{n^6}$ minden $n \geq 1$ indexre, és a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n^6}$ sor konvergens,

ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^8+6}$ sor is konvergens.

e.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n+8}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a minoráns kritériumot. $\frac{2}{n+8} \geq \frac{2}{2n} = \frac{1}{n} \geq 0$ minden $n \geq 8$ indexre, és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n+8}$ sor is divergens.

f.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+7}{n^2+9}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a minoráns kritériumot. $\frac{3n+7}{n^2+9} \geq \frac{3n}{2n^2} = \frac{3}{2} \frac{1}{n} \geq 0$ minden $n \geq 3$ indexre, és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} \frac{1}{n}$ sor divergens, ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+7}{n^2+9}$ sor is divergens.

g.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \cos 2n$ végtelen sor?**

Divergens, mert a $\cos 2n$ sorozat nem nullsorozat, így a sor konvergenciájának szükséges feltétele nem teljesül.

h.) **Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n^2}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a majoráns kritériumot az $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos 2n}{n^2} \right|$ sorra. $0 \leq \left| \frac{\cos 2n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ minden $n \geq 1$ -re és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, így a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n^2}$ sor is konvergens.

i.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a minoráns kritériumot. $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ minden $n \geq 1$ -re, az $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor divergens, ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ sor is divergens.

j.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}-16^{n+3}}{2 \cdot 3^{2n-4}}$ végtelen sor, ha igen, mi a sor összege?**

Divergens, mert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}-16^{n+3}}{2 \cdot 3^{2n-4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \left(\frac{3}{16} \right)^n - 16^3}{2 \cdot 3^{-4}} \cdot \left(\frac{16}{9} \right)^n = +\infty$, a sor konvergenciájának szükséges feltétele nem teljesül.

k.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}-2^{n-3}}{2 \cdot 3^{2n-4}}$ végtelen sor, ha igen, mi a sor összege?**

Konvergens, mert két konvergens mértani sor összege.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}-2^{n-3}}{2 \cdot 3^{2n-4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^5}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^4}{2^4} \left(\frac{2}{9} \right)^n = \frac{3^5}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{3^4}{2^4} \frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{3^6}{2^2} - \frac{3^6}{2^4 \cdot 7}.$$

l.) **Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ végtelen sor, ha igen, mi a sor összege?**

Fejezzük ki a sor részösszegeit. Mivel $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$, ezért a sor részösszegei által alkotott sorozat

$$s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+2)} \rightarrow \frac{3}{4}.$$

m.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} (-0.1)^n$ végtelen sor, ha igen, mi a sor összege?**

A mértani sor konvergens, mert $|-0.1| < 1$. Alkalmazzuk a mértani sor összegképletét:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (0.1)^n = \frac{1}{1 - (-0.1)} = \frac{10}{11}.$$

n.) **Konvergens-e a $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$ végtelen sor, ha igen, mi a sor összege?**

A mértani sor konvergens, mert $|\frac{1}{e}| < 1$. Alkalmazzuk a mértani sor összegképletét:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n e^{-n} = \frac{(-\frac{1}{e})^2}{1 - (-\frac{1}{e})} = \frac{e^{-2}}{e + 1}.$$

o.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} (\sin \frac{\pi}{3})^n$ végtelen sor, ha igen, mi a sor összege?**

A mértani sor konvergens, mert $|\sin \frac{\pi}{3}| < 1$. Alkalmazzuk a mértani sor összegképletét:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{2 - \sqrt{3}}.$$

p.) **Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos \frac{\pi}{3})^n$ végtelen sor, ha igen, mi a sor összege?**

A mértani sor konvergens, mert $|\cos \frac{\pi}{3}| < 1$. Alkalmazzuk a mértani sor összegképletét:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^n = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{1 - \cos \frac{\pi}{3}} = 1.$$

q.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ végtelen sor, ha igen, mi a sor összege?**

A mértani sor konvergens, mert $|\frac{2}{3}| < 1$. Alkalmazzuk a mértani sor összegképletét:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{6}{1 - \frac{2}{3}} = 18.$$

r.) **Konvergens-e a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3(-1)^n + 2^{2n}}{5^n}$ végtelen sor, ha igen, mi a sor összege?**

A sor két konvergens mértani sor összege, mert $|\frac{1}{5}|, |\frac{2^2}{5}| < 1$. Alkalmazzuk a mértani sor összegképletét:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3(-1)^n + 2^{2n}}{5^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 3 \left(-\frac{1}{5}\right)^n + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{3 \left(\frac{1}{5}\right)^2}{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{33}{10}.$$

s.) **Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n+1}{n}\right)$ végtelen sor, ha igen, mi a sor összege?**

Fejezzük ki a sor részösszegeit. Mivel $\ln \left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$, ezért a sor részösszegei által alkotott sorozat

$$s_k = \sum_{n=1}^k \ln \left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(k+1) \rightarrow \infty,$$

vagyis a sor divergens.

t.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$ végtelen sor, ha igen, mi a sor összege?**

Fejezzük ki a sor részösszegeit. Mivel $\frac{1+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{2^n}$, ezért a sor részösszegei által alkotott sorozat

$$s_k = \sum_{n=0}^k \frac{1+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^k \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\sqrt{k+1}}{2^{k+1}} \rightarrow \infty,$$

valahogy a sor konvergens és összege $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

u.) **Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$ végtelen sor, ha igen, mi a sor összege?**

Fejezzük ki a sor részösszegeit. Mivel $\frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$, ezért a sor részösszegei által alkotott sorozat

$$s_k = \sum_{n=1}^k \frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - 1 \rightarrow -1,$$

valahogy a sor konvergens és összege 1.

v.) **Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ végtelen sor, ha igen, mi a sor összege?**

Fejezzük ki a sor részösszegeit. Mivel $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+2}$, ezért a sor részösszegei által alkotott sorozat

$$s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) \rightarrow \frac{1}{4},$$

valahogy a sor konvergens és összege $\frac{1}{4}$.

w.) **Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a minoráns kritériumot. $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2n} \geq 0$ minden $n \geq 1$ -re, az $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ sor is divergens.

x.) **Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$ végtelen sor?**

Divergens, mert a $\frac{3^n}{n^3}$ sorozat nem nullsorozat, így a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül.

y.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a hányadoskritériumot. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$, így a sor konvergens.

Másképpen, a sor konvergens, mert exponenciális sor, összege $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = e^3$.

z.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^n$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a gyökkritériumot. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \sqrt[n]{n} = \frac{3}{4} < 1$, így a sor konvergens.

aa.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ végtelen sor?**

A sor alternáló sor, alkalmazzuk a Leibniz-kritériumot. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, így a sor konvergens.

ab.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$ végtelen sor?**

A sor alternáló sor, alkalmazzuk a Leibniz-kritériumot. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = 0$, így a sor konvergens.

ac.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a hányadoskritériumot. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1$, így a sor konvergens.

ad.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}$ végtelen sor?**

Divergens, mert a sor tagjai nem alkotnak nullsorozatot, így a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül.

ae.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a hányadoskritériumot. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)(n+2)}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{(n+1)^2} = 0 < 1$, így a sor konvergens.

af.) **Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+3}}{n^n}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a gyökkritériumot. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^{n+3} \frac{1}{n^n}} = 0 < 1$, így a sor konvergens.

ag.) **Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 3)^n}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a gyökkritériumot. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{\ln 3} = \frac{1}{\ln 3} < 1$, így a sor konvergens.

ah.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a hányadoskritériumot. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0 < 1$, így a sor konvergens.

ai.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a hányadoskritériumot. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{e} < 1$, így a sor konvergens.

aj.) **Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cos^2 n}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a minoráns kritériumot. $\frac{1}{n \cos^2 n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$ minden $n \geq 1$ -re, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, ezért a

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n \cos^2 n}$ sor is divergens.

ak.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n \sqrt[n]{e}}{n+1}\right)^n$ végtelen sor?**

Divergens, mert $\left(\frac{n \sqrt[n]{e}}{n+1}\right)^n = e \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} \rightarrow 1$, vagyis a sor tagjai nem alkotnak nullsorozatot, így a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül.

al.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^n}{3^n n!}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a hányadoskritériumot. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{2n^n}{3^n n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1$, így a sor konvergens.

am.) **Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ végtelen sor?**

Alkalmazzuk a hányadoskritériumot. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$, így a sor konvergens.

Függvénysorozatok és függvénysorok

Függvénysorozatok

Legyen $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénysorozat. A függvénysorozat konvergenciahalmaza az a legbővebb $H \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyen minden függvény értelmezett ($H \subset D_{f_n}$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre), és minden $x \in H$ -ra az $f_n(x)$ számsorozat konvergens. A függvénysorozat határértéke az az $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ minden $x \in H$ -ra.

A konvergenciahalmaz és a limesz megállapítása a különböző $x \in \mathbb{R}$ értékekhez tartozó $f_n(x)$ számsorozatok vizsgálatával történik.

Feladatok

a.) **Határozzuk meg az $f_n: x \in \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \sqrt[n]{3x} + (2x)^n$ függvénysorozat konvergenciahalmazát és limeszét!**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3x} = \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (2x)^n = \begin{cases} +\infty & \text{ha } x > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{ha } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ha } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

A konvergenciahalmaz a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallum. A limeszfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{ha } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

b.) **Határozzuk meg az $f_n: x \rightarrow e^{(2x-3)^n}$ függvénysorozat konvergenciahalmazát és limeszét!**

Az $f_n(x)$ sorozat minden $x \in \mathbb{R}$ -re egy mértani sorozat. A konvergencia feltétele: $-1 < e^{(2x-3)} \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$.

A konvergenciahalmaz a $(-\infty, \frac{3}{2}]$ intervallum. A limeszfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = \frac{3}{2} \\ 0 & \text{ha } x < \frac{3}{2} \end{cases}.$$

- c.) **Határozzuk meg az $f_n: x \rightarrow (2(x-1)^2 - 1)^n$ függvénysorozat konvergenciahalmazát és limeszét!**

Az $f_n(x)$ sorozat minden $x \in \mathbb{R}$ -re egy mértani sorozat. A konvergencia feltétele: $-1 < 2(x-1)^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2, x \neq 1$.

A konvergenciahalmaz a $[0, 2] \setminus \{1\}$. A limeszfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } x = 2 \\ 0 & \text{ha } 0 < x < 2 \text{ és } x \neq 1 \end{cases}.$$

- d.) **Határozzuk meg az $f_n: x \rightarrow \left(\frac{x-3}{4}\right)^n$ függvénysorozat konvergenciahalmazát és limeszét!**

Az $f_n(x)$ sorozat minden $x \in \mathbb{R}$ -re egy mértani sorozat. A konvergencia feltétele: $-1 < \frac{x-3}{4} \leq 1 \Rightarrow -1 < x \leq 7$.

A konvergenciahalmaz a $(-1, 7]$ intervallum. A limeszfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 7 \\ 0 & \text{ha } -1 < x < 7 \end{cases}.$$

- e.) **Határozzuk meg az $f_n: x \in \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \frac{1}{1+nx}$ függvénysorozat konvergenciahalmazát és limeszét!**

Az $f_n(x)$ sorozat minden $x \in \mathbb{R}^+$ -ra nullsorozat.

A konvergenciahalmaz a $[0, \infty)$ intervallum. A limeszfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 0 \\ 0 & \text{ha } 0 < x \end{cases}.$$

- f.) **Határozzuk meg az $f_n: x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \operatorname{tg}^n x$ függvénysorozat konvergenciahalmazát és limeszét!**

Az $f_n(x)$ sorozat minden $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ -re egy mértani sorozat. A konvergencia feltétele: $-1 < \operatorname{tg} x \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{4}$.

A konvergenciahalmaz a $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ intervallum. A limeszfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{ha } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

- g.) **Határozzuk meg az $f_n: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \left(\frac{3}{x}\right)^n$ függvénysorozat konvergenciahalmazát és limeszét!**

Az $f_n(x)$ sorozat minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ -ra egy mértani sorozat. A konvergencia feltétele: $-1 < \frac{3}{x} \leq 1 \Rightarrow 3 \leq x$ vagy $x < -3$.

A konvergenciahalmaz a $(-\infty, -3) \cup [3, \infty)$ halmaz. A limeszfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 3 \\ 0 & \text{ha } 3 < |x| \end{cases}.$$

Függvénysorok

A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor konvergenciahalmaza a $\sum_{n=0}^k f_n$ részletösszegek alkotta függvénysorozat konvergenciahalmaza, és a sor összegfüggvénye a részletösszegek alkotta sorozat limesze.

A konvergenciahalmaz és az összegfüggvény meghatározásakor a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ számsorozatra alkalmazhatjuk a sorok konvergenciakritériumait.

Feladatok

- a.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt[n]{3x} + (2x)^n \right)$ függvénysor ($x \geq 0$) konvergenciahalmazát és összegét!**

Ha $x > 0$, akkor a $\sqrt[n]{3x} + (2x)^n$ sorozat nem nullsorozat, így a sor konvergenciájának szükséges feltétele nem teljesül. Ha $x = 0$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty}$ sort kapjuk, ami konvergens.

A konvergenciahalmaz a $\{0\}$ halmaz. Az összegfüggvény az $f(0) = 0$ függvény.

- b.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} e^{(2x-3)n}$ függvénysor konvergenciahalmazát és összegét!**

A $\sum_{n=0}^{\infty} e^{(2x-3)n}$ sor minden $x \in \mathbb{R}$ -re egy mértani sor. A sor konvergenciájának feltétele: $-1 < e^{2x-3} < 1 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$.

A konvergenciahalmaz a $(-\infty, \frac{3}{2})$ intervallum. Az összegfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{2x-3}}.$$

- c.) **Határozzuk meg az $\sum_{n=0}^{\infty} (2(x-1)^2 - 1)^n$ függvénysor konvergenciahalmazát és összegét!**

A $\sum_{n=0}^{\infty} (2(x-1)^2 - 1)^n$ sor minden $x \in \mathbb{R}$ -re egy mértani sor. A konvergencia feltétele: $-1 < 2(x-1)^2 - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2, x \neq 1$.

A konvergenciahalmaz a $(0, 2) \setminus \{1\}$. Az összegfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{1 - (2(x-1)^2 - 1)} = \frac{1}{4x - 2x^2}.$$

- d.) **Határozzuk meg az $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{4}\right)^n$ függvénysor konvergenciahalmazát és összegét!**

A $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{4}\right)^n$ sor minden $x \in \mathbb{R}$ -re egy mértani sor. A konvergencia feltétele: $-1 < \frac{x-3}{4} < 1 \Rightarrow -1 < x < 7$.

A konvergenciahalmaz a $(-1, 7)$ intervallum. Az összegfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \left(\frac{x-3}{4}\right)} = \frac{4}{7-x}.$$

- e.) **Határozzuk meg az $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+nx}$ függvénysor ($x \in \mathbb{R}_0^+$) konvergenciahalmazát és összegét!**

Az $x = 0$ pontban a sor divergens, mert a tagjai által alkotott sorozat nem nullsorozat, így a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül. $x \in \mathbb{R}^+$ esetén alkalmazzuk a minoráns kritériumot. $\frac{1}{1+nx} \geq \frac{1}{2xn} \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}^+$ -re és $n \geq \frac{1}{x}$ -re, és az $\frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens minden $x \in \mathbb{R}^+$ -re, így a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+nx}$ függvénysor is divergens minden $x \in \mathbb{R}^+$ -re.

A sor tehát divergens, a konvergenciahalmaz az $\emptyset$.

- f.) **Határozzuk meg az $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}^n x$ függvénysor ($x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) konvergenciahalmazát és összegét!**

A $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}^n x$ sor minden $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -re egy mértani sor. A konvergencia feltétele: $-1 < \operatorname{tg} x \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$.

A konvergenciahalmaz a $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ intervallum. Az összegfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}.$$

g.) **Határozzuk meg az $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{x})^n$ függvénysor ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) konvergenciahalmazát és összegét!**

A $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{x})^n$ sor minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ -ra egy mértani sor. A konvergencia feltétele: $-1 < \frac{3}{x} < 1 \Rightarrow 3 < x$ vagy $x < -3$.

A konvergenciahalmaz a $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ halmaz. Az összegfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{x}{x - 3}.$$

Hatványsorok

Legyen a_n valós sorozat, legyen továbbá $a \in \mathbb{R}$. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

függvénysor neve a középső hatványsor, az a_n számok a hatványsor együtthatói.

Nevezetes hatványsorok:

- Exponenciális függvény 0 középső hatványsora:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

- A szinusz függvény 0 középső hatványsora:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

- A koszinusz függvény 0 középső hatványsora:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

- Mértani sor:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Mindhárom hatványsor konvergens a valós számok halmazán.

Hatványsorok konvergenciája

Minden hatványsorhoz található egy $r \in [0, \infty)$ valós, a hatványsor konvergenciasugara. A hatványsor konvergens az $\{x : |x - a| < r\}$ halmazon és divergens az $\{x : |x - a| > r\}$ halmazon. Az $x = a - r$ és $x = a + r$ pontokban külön meg kell vizsgálni a konvergenciát. Tegyük fel, hogy az $\sqrt[n]{|a_n|}$ sorozatnak van határértéke. Ekkor a konvergenciasugár az

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

képlettel (Cauchy–Hadamard-formula) számítható, ami a gyökkritérium következménye. A képletet a 0-tól különböző együtthatókra kell alkalmazni, ha az a_n együtthatók között végtelen sok 0 található. Hasonlóan ha az $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ sorozatnak van határértéke, akkor a konvergenciasugár az

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

alternatív képlettel számítható, ami a hányadoskritérium következménye. Mindkét képletet az „ $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ ” módon értelmezzük.

Feladatok

- a.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 0$ középi hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Az $x = a - r = -1$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Leibniz-sor konvergens. Az $x = a + r = 1$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hiperharmonikus sor divergens. A konvergenciahalmaz a $[-1, 1)$ intervallum.

- b.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^{2n}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 0$ középi hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{|a_{2n}|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^{-\frac{3}{2}} = 1.$$

Az $x = a - r = -1$ pontban és az $x = a + r = 1$ pontban a $\sum_{n=0}^{\infty} n^3$ sor divergens, mert tagjai nem tartanak 0-hoz. A konvergenciahalmaz a $(-1, 1)$ intervallum.

- c.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 0$ középi hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Az $x = a - r = -1$ pontban a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$ sor, valamint az $x = a + r = 1$ pontban a $\sum_{n=0}^{\infty} n$ sor divergens, mert tagjaik nem tartanak 0-hoz. A konvergenciahalmaz a $(-1, 1)$ intervallum.

- d.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 0$ középső hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_{2n}|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

A konvergenciahalmaz a $(-\infty, \infty)$ intervallum.

Másképpen, a függvénysorokra vonatkozó hatványkritériumot alkalmazva: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{x^{2n}}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{n+1} = 0 < 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re, így a konvergenciahalmaz a valós számok halmaza, a konvergenciasugár pedig végtelen.

Másképpen,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = e^y|_{y=x^2} = e^{(x^2)}$$

amely konvergens minden $x \in \mathbb{R}$ -re, így a konvergenciahalmaz a valós számok halmaza, a konvergenciasugár pedig végtelen.

- e.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 0$ középső hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_{2n}|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2n)!} = \infty.$$

A konvergenciahalmaz a $(-\infty, \infty)$ intervallum.

Másképpen, a hatványkritériumot alkalmazva: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{2(n+1)}}{(2n+2)!}}{\frac{x^{2n}}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re, így a konvergenciahalmaz a valós számok halmaza, a konvergenciasugár pedig végtelen.

- f.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 0$ középső hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \sqrt[n]{n} = 5.$$

Az $x = a - r = -5$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Leibniz-sor konvergens. Az $x = a + r = 5$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hiperharmonikus sor divergens. A konvergenciahalmaz a $[-5, 5)$ intervallum.

- g.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 1$ középső hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^2 = 1.$$

Az $x = a - r = 0$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ Leibniz-sor konvergens. Az $x = a + r = 2$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hiperharmonikus sor konvergens. A konvergenciahalmaz a $[0, 2]$ intervallum.

- h.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 0$ középső hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Az $x = a - r = -\frac{1}{3}$ pontban a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ sor, valamint az $x = a + r = \frac{1}{3}$ pontban a $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor divergens, mert tagjaik nem tartanak 0-hoz. A konvergenciahalmaz a $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ intervallum.

- i.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^n}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 0$ középső hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3.$$

Az $x = a - r = -3$ pontban a $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor, valamint az $x = a + r = 3$ pontban a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ sor divergens, mert tagjaik nem tartanak 0-hoz. A konvergenciahalmaz a $(-3, 3)$ intervallum.

- j.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 0$ középső hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3n]{|a_{3n}|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3n]{(3n)!} = \infty.$$

A konvergenciahalmaz a $(-\infty, \infty)$ intervallum.

Másképpen, a hatványkritériumot alkalmazva: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{3(n+1)}}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{x^{3n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = 0 < 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re, így a konvergenciahalmaz a valós számok halmaza, a konvergenciasugár pedig végtelen.

- k.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 3$ középső hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

A konvergenciahalmaz a $(-\infty, \infty)$ intervallum.

Másképpen, a hatványkritériumot alkalmazva: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(x-3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x-3}{n+1} = 0 < 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re, így a konvergenciahalmaz a valós számok halmaza, a konvergenciasugár pedig végtelen.

Másképpen,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!} = e^y|_{y=x-3} = e^{x-3}$$

amely konvergens minden $x \in \mathbb{R}$ -re, így a konvergenciahalmaz a valós számok halmaza, a konvergenciasugár pedig végtelen.

- l.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-6)^n}{n3^n}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 6$ középső hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \sqrt[n]{n} = 3.$$

Az $x = a - r = 3$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hiperharmonikus sor divergens. Az $x = a + r = 9$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ Leibniz-sor konvergens. A konvergenciahalmaz a $(3, 9]$ intervallum.

- m.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 0$ középső hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^{\frac{n}{2n+1}} = 1.$$

Az $x = a - r = -1$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hiperharmonikus sor, valamint az $x = a + r = 1$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hiperharmonikus sor divergens. A konvergenciahalmaz a $(-1, 1)$ intervallum.

- n.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^{2n}}{(2n)!}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 1$ középső hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{|a_{2n}|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[2n]{(2n)!})^2 = \infty.$$

A konvergenciahalmaz a $(-\infty, \infty)$ intervallum.

Másképpen, a hatványkritériumot alkalmazva: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x-1)^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re, így a konvergenciahalmaz a valós számok halmaza, a konvergenciasugár pedig végtelen.

Másképpen,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^{2n}}{(2n)!} = \cos y|_{y=x-1} = \cos(x-1)$$

amely konvergens minden $x \in \mathbb{R}$ -re, így a konvergenciahalmaz a valós számok halmaza, a konvergenciasugár pedig végtelen.

- o.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 0$ középső hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{|a_{2n}|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2^n} = \sqrt{2}.$$

Az $x = a - r = -\sqrt{2}$ pontban és az $x = a + r = \sqrt{2}$ pontban a $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ sor divergens. A konvergenciahalmaz a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ intervallum.

- p.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 0$ közepű hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Az $x = a - r = -1$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ hiperharmonikus sor divergens. Az $x = a + r = 1$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ Leibniz-sor konvergens. A konvergenciahalmaz a $(-1, 1]$ intervallum.

q.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{4}\right)^n$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 3$ közepű hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 = 4.$$

Az $x = a - r = -1$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ sor, valamint az $x = a + r = 7$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ sorok divergenssek, mert tagjaik nem tartanak 0-hoz. A konvergenciahalmaz a $(-1, 7)$ intervallum.

Másképpen, a mértani sor konvergens akkor, ha $\left|\frac{x-3}{4}\right| < 1 \Rightarrow x \in (-1, 7)$, így a konvergenciahalmaz a $(-1, 7)$ intervallum, a konvergenciasugár pedig 4. A sor összege

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-y} \Big|_{y=\frac{x-3}{4}} = \frac{4}{7-x}.$$

r.) **Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(2n+1)(2n+3)}$ hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!**

Az $a = 0$ közepű hatványsor konvergenciasugara

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2n+1)(2n+3)} = 1.$$

Az $x = a - r = -1$ pontban a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ sor, valamint az $x = a + r = 1$ pontban a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$ sorok konvergensek, mert $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} < \frac{1}{n^2}$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hiperharmonikus sor konvergens. A konvergenciahalmaz a $[-1, 1]$ intervallum.

Taylor-sorok, Taylor-polinomok

Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sima függvény a $c \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében. Ekkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

hatványsort az f függvény a körüli Taylor-sorának nevezzük. A 0 körüli Taylor-sor neve MacLaurin-sor. Függvényt a gyakorlatban (pontosabban a gyakorlaton :-)) előforduló példákban a konvergenciahalmazon előállítja a Taylor-sora.

Ha a Taylor-sornak csak az első pár elemét tartjuk meg, akkor az f függvény

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

n -edrendű a körüli Taylor-polinomját kapjuk.

Feladatok

- a.) Számítsuk ki az $f(x) = 2 \sin x \cos x$ függvény 0 körüli negyedrendű Taylor-polinomját!

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 2x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= 2 \cos 2x & f'(0) &= 2 \\ f''(x) &= -4 \sin 2x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -8 \cos 2x & f'''(0) &= -8 \\ f^{(4)}(x) &= 16 \sin 2x & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$T_4(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3$$

- b.) Számítsuk ki az $f(x) = 2 \sin 2x \cos 2x$ függvény 0 körüli harmadrendű Taylor-polinomját!

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 4x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= 4 \cos 4x & f'(0) &= 4 \\ f''(x) &= -16 \sin 4x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -64 \cos 4x & f'''(0) &= -64 \end{aligned}$$

$$T_4(x) = 4x - \frac{32}{3}x^3$$

- c.) Számítsuk ki az $f(x) = e^{\cos x}$ függvény 0 körüli negyedrendű Taylor-polinomját!

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\cos x} & f(0) &= e \\ f'(x) &= -\sin x \cdot e^{\cos x} & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= (-\cos x + \sin^2 x) \cdot e^{\cos x} & f''(0) &= -e \\ f'''(x) &= (\sin x + 3 \sin x \cos x - \sin^3 x) \cdot e^{\cos x} & f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(x) &= (\sin^4 x + \cos x + 3 \cos^2 x - 4 \sin^2 x - 6 \sin^2 x \cos x) \cdot e^{\cos x} & f^{(4)}(0) &= 4e \end{aligned}$$

$$T_4(x) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4$$

- d.) Számítsuk ki az $f(x) = e^{\sin x}$ függvény 0 körüli negyedrendű Taylor-polinomját!

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\sin x} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \cos x \cdot e^{\sin x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= (-\sin x + \cos^2 x) \cdot e^{\sin x} & f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= (-\cos x - 3 \sin x \cos x + \cos^3 x) \cdot e^{\sin x} & f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(x) &= (\cos^4 x + \sin x + 3 \sin^2 x - 4 \cos^2 x - 6 \sin x \cos^2 x) \cdot e^{\sin x} & f^{(4)}(0) &= -3 \end{aligned}$$

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$$

- e.) Számítsuk ki az $f(x) = \ln(1 + x^2)$ függvény 0 körüli negyedrendű Taylor-polinomját!

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} = 2x \cdot \frac{1}{1-y} \Big|_{y=-x^2} = 2x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^{2n+1} \\ \ln(1+x^2) = f(x) &= \int f'(x) dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n} \\ T_4(x) &= x^2 - \frac{1}{2}x^4 \end{aligned}$$

f.) Számítsuk ki az $f(x) = e^{(x^2)}$ függvény 0 körüli negyedrendű Taylor-polinomját!

$$f(x) = e^{(x^2)} = e^y|_{y=x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$$

$$T_4(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4$$

g.) Számítsuk ki az $f(x) = \sin 2x$ függvény 0 körüli negyedrendű Taylor-polinomját!

$$f(x) = \sin 2x = \sin y|_{y=2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-4)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$T_4(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3$$

h.) Számítsuk ki az $f(x) = \sin x^2$ függvény 0 körüli negyedrendű Taylor-polinomját!

$$f(x) = \sin x^2 = \sin y|_{y=x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$$

$$T_4(x) = x^2$$

i.) Számítsuk ki az $f(x) = x \ln(1+x)$ függvény 0 körüli negyedrendű Taylor-polinomját!

$$\begin{aligned} (\ln(1+x))' &= \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-y} \Big|_{y=-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\ \ln(1+x) &= \int \frac{1}{1+x} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \\ x \ln(1+x) &= \int \frac{1}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+2} \end{aligned}$$

$$T_4(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4$$

j.) Számítsuk ki az $f(x) = xe^{-x}$ függvény 0 körüli negyedrendű Taylor-polinomját!

$$f(x) = x \cdot e^y|_{y=-x} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}$$

$$T_4(x) = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4$$

Taylor-polinomok általi közelítés

Legyen $a \in \mathbb{R}$ rögzített, $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(n+1)$ -szer differenciálható az $[a, x]$ intervallumon. Minden ilyen $x \in \mathbb{R}$ -hez található olyan $\xi \in [a, x]$, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} = T_{n,a}^f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

(Taylor-formula Lagrange-maradéktaggal). Az $f(x) \approx T_{n,a}^f(x)$ közelítés hibájára az alábbi becslés adható:

$$|f(x) - T_{n,a}^f(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [a,x]} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$

Feladatok

- a.) Számítsuk ki az $e^{0.1}$ közelítő értékét a függvény 4-edrendű MacLaurin-polinomja segítségével, és becsüljük meg a hibát!

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

$$T_4(0.1) = 1.105170833 \dots$$

$$e^{0.1} = 1.105170918 \dots$$

$$|e^x - T_4(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [0,x]} |e^\xi|}{5!} |x|^5 = \begin{cases} \frac{e^x}{5!} |x|^5 & \text{ha } x \geq 0 \\ \frac{1}{5!} |x|^5 & \text{különben} \end{cases}$$

$$|e^{0.1} - T_4(0.1)| \leq \frac{e^{0.1}}{5!} 0.1^5 < 9.3 \cdot 10^{-8}$$

- b.) Számítsuk ki a $\cos 0.1$ közelítő értékét a függvény 4-edrendű MacLaurin-polinomja segítségével, és becsüljük meg a hibát!

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

$$T_4(0.1) = 0.9950041666 \dots$$

$$\cos 0.1 = 0.9950041652 \dots$$

$$|\cos x - T_4(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [0,x]} |-\sin(\xi)|}{5!} |x|^5 = \begin{cases} \frac{\sin|x|}{5!} |x|^5 & \text{ha } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{1}{5!} |x|^5 & \text{különben} \end{cases}$$

$$|\cos 0.1 - T_4(0.1)| \leq \frac{\sin 0.1}{5!} 0.1^5 < 8.4 \cdot 10^{-9}$$

A Taylor-sorban nem jelenik meg x^5 -es tag, ezért jobb becslés is adható a hibára:

$$|\cos x - T_5(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [0,x]} |-\cos(\xi)|}{6!} |x|^6 = \frac{1}{6!} |x|^6$$

$$|\cos 0.1 - T_5(0.1)| \leq \frac{1}{6!} 0.1^6 < 1.4 \cdot 10^{-9}$$

- c.) Számítsuk ki a $\sin 5^\circ$ közelítő értékét a függvény 4-edrendű MacLaurin-polinomja segítségével, és becsüljük meg a hibát!

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$T_4(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

$$T_4\left(\frac{\pi}{36}\right) = 0.08715570058 \dots$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{36}\right) = 0.08715574274 \dots$$

$$|\sin x - T_4(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [0, x]} |\cos(\xi)|}{5!} |x|^5 = \frac{1}{5!} |x|^5$$

$$\left| \sin\left(\frac{\pi}{36}\right) - T_4\left(\frac{\pi}{36}\right) \right| \leq \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{36}\right)^5 < 4.217 \cdot 10^{-8}$$

- d.) Számítsuk ki a $\operatorname{tg} 5^\circ$ közelítő értékét a függvény másodrendű MacLaurin-polinomja segítségével, és becsüljük meg a hibát!

$$\operatorname{tg}(0) = 0$$

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\operatorname{tg}'(0) = 1$$

$$\operatorname{tg}''(x) = \frac{2 \sin(x)}{\cos^3(x)}$$

$$\operatorname{tg}''(0) = 0$$

$$\operatorname{tg}'''(x) = \frac{2 \cos^2(x) + 6 \sin^2(x)}{\cos^4(x)}$$

$$T_2(x) = x$$

$$T_2\left(\frac{\pi}{36}\right) = 0.08726 \dots$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{36}\right) = 0.08748 \dots$$

$$|\operatorname{tg}(x) - T_2(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [0, x]} \left| \frac{6 - 4 \cos^2(\xi)}{\cos^4(\xi)} \right|}{3!} |x|^3 = \frac{3 - 2 \cos^2(x)}{3 \cos^4(x)} |x|^3 \quad (\text{ha } x < \frac{\pi}{2})$$

$$\left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{36}\right) - T_2\left(\frac{\pi}{36}\right) \right| \leq \frac{3 - 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{36}\right)}{3 \cos^4\left(\frac{\pi}{36}\right)} \left(\frac{\pi}{36}\right)^3 < 4 \cdot 10^{-4}$$

- e.) Számítsuk ki az $\ln 0.9$ közelítő értékét a függvény 4-edrendű Taylor-polinomja segítségével, és becsüljük meg a hibát!

$$\begin{aligned}
(\ln(1-x))' &= -\frac{1}{(1-x)} & \ln(1-x)|_{x=0} &= 0 \\
(\ln(1-x))'' &= -1! \frac{1}{(1-x)^2} & (\ln(1-x))'|_{x=0} &= -1 \\
(\ln(1-x))''' &= -2! \frac{1}{(1-x)^3} & (\ln(1-x))''|_{x=0} &= -1! \\
(\ln(1-x))'''' &= -3! \frac{1}{(1-x)^4} & (\ln(1-x))'''|_{x=0} &= -2! \\
(\ln(1-x))''''' &= -4! \frac{1}{(1-x)^5} & (\ln(1-x))''''|_{x=0} &= -3!
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_4(x) &= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \\
T_4(0.1) &= -0.1053583 \dots \\
\ln(0.9) &= -0.1053605 \dots \\
|\ln(1-x) - T_4(x)| &\leq \frac{\max_{\xi \in [0,x]} \left| -4! \frac{1}{(1-\xi)^5} \right|}{5!} |x|^5 = \begin{cases} \frac{1}{5} \left(\frac{x}{1-x} \right)^5 & \text{ha } x \geq 0 \\ \frac{1}{5} |x|^5 & \text{különben} \end{cases} \\
|\ln(0.9) - T_4(0.1)| &\leq \frac{1}{5} 9^{-5} < 3.4 \cdot 10^{-6}
\end{aligned}$$

f.) Számítsuk ki az $\ln 1.01$ közelítő értékét a függvény 3-adrendű Taylor-polinomja segítségével, és becsüljük meg a hibát!

$$\begin{aligned}
(\ln(1+x))' &= \frac{1}{(1+x)} & \ln(1+x)|_{x=0} &= 0 \\
(\ln(1+x))'' &= -1! \frac{1}{(1+x)^2} & (\ln(1+x))'|_{x=0} &= 1 \\
(\ln(1+x))''' &= 2! \frac{1}{(1+x)^3} & (\ln(1+x))''|_{x=0} &= -1! \\
(\ln(1+x))'''' &= -3! \frac{1}{(1+x)^4} & (\ln(1+x))'''|_{x=0} &= 2!
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \\
T_3(0.01) &= 0.0099503333 \dots \\
\ln(1.01) &= 0.00995033085 \dots \\
|\ln(1+x) - T_3(x)| &\leq \frac{\max_{\xi \in [0,x]} \left| -3! \frac{1}{(1+\xi)^4} \right|}{4!} |x|^4 = \begin{cases} \frac{1}{4} x^4 & \text{ha } x \geq 0 \\ \frac{1}{4} \left(\frac{x}{1+x} \right)^4 & \text{különben} \end{cases} \\
|\ln(1.01) - T_3(0.01)| &\leq \frac{1}{4} 0.01^4 = 2.5 \cdot 10^{-9}
\end{aligned}$$

g.) Számítsuk ki a $\sqrt{1.01}$ közelítő értékét a függvény 3-adrendű Taylor-polinomja segítségével, és becsüljük meg a hibát!

$$\begin{aligned}
(\sqrt{1+x})' &= \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} & \sqrt{1+x}|_{x=0} &= 1 \\
(\sqrt{1+x})'' &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} & (\sqrt{1+x})'|_{x=0} &= \frac{1}{2} \\
(\sqrt{1+x})''' &= \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} & (\sqrt{1+x})''|_{x=0} &= -\frac{1}{4} \\
(\sqrt{1+x})'''' &= -\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}} & (\sqrt{1+x})'''|_{x=0} &= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

$$T_3(0.01) = 1.0049875625$$

$$\sqrt{1.01} = 1.00498756211\dots$$

$$|\sqrt{1+x} - T_3(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [0,x]} \left| -\frac{15}{16}(1+\xi)^{-\frac{7}{2}} \right|}{4!} |x|^4 = \begin{cases} \frac{5}{128}x^4 & \text{ha } x \geq 0 \\ \frac{5}{128}x^4(1+x)^{-\frac{7}{2}} & \text{különben} \end{cases}$$

$$\left| \sqrt{1.01} - T_3(0.01) \right| \leq \frac{5}{128} 0.01^4 < 3.91 \cdot 10^{-10}$$

h.) Számítsuk ki a $\sqrt{0.9}$ közelítő értékét a függvény 4-edrendű Taylor-polinomja segítségével, és becsüljük meg a hibát!

$$\begin{aligned}
(\sqrt{1-x})' &= -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} & \sqrt{1-x}|_{x=0} &= 1 \\
(\sqrt{1-x})'' &= -\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}} & (\sqrt{1-x})'|_{x=0} &= -\frac{1}{2} \\
(\sqrt{1-x})''' &= -\frac{3}{8}(1-x)^{-\frac{5}{2}} & (\sqrt{1-x})''|_{x=0} &= -\frac{1}{4} \\
(\sqrt{1-x})'''' &= -\frac{15}{16}(1-x)^{-\frac{7}{2}} & (\sqrt{1-x})'''|_{x=0} &= -\frac{3}{8} \\
(\sqrt{1-x})''''' &= -\frac{105}{32}(1-x)^{-\frac{9}{2}} & (\sqrt{1-x})''''|_{x=0} &= -\frac{15}{16}
\end{aligned}$$

$$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$

$$T_4(0.1) = 0.94868359\dots$$

$$\sqrt{0.9} = 0.94868329\dots$$

$$|\sqrt{1-x} - T_4(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [0,x]} \left| -\frac{105}{32}(1-\xi)^{-\frac{9}{2}} \right|}{5!} |x|^5 = \begin{cases} \frac{7}{256}x^5(1-x)^{-\frac{9}{2}} & \text{ha } x \geq 0 \\ \frac{7}{256}|x|^5 & \text{különben} \end{cases}$$

$$\left| \sqrt{0.9} - T_4(0.1) \right| \leq \frac{7}{256} \cdot 0.1^5 \cdot 0.9^{-\frac{9}{2}} < 4.4 \cdot 10^{-7}$$

i.) Számítsuk ki a $\frac{1}{\sqrt{0.9}}$ közelítő értékét a függvény 4-edrendű Taylor-polinomja segítségével, és becsüljük meg a hibát!

$$\begin{aligned}
\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)' &= \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} & (1-x)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x=0} &= 1 \\
\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)'' &= \frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}} & \left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)' \Big|_{x=0} &= \frac{1}{2} \\
\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)''' &= \frac{15}{8}(1-x)^{-\frac{7}{2}} & \left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)'' \Big|_{x=0} &= \frac{3}{4} \\
\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)'''' &= \frac{105}{16}(1-x)^{-\frac{9}{2}} & \left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)''' \Big|_{x=0} &= \frac{15}{8} \\
\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)''''' &= \frac{945}{32}(1-x)^{-\frac{11}{2}} & \left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)'''' \Big|_{x=0} &= \frac{105}{16}
\end{aligned}$$

$$T_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4$$

$$T_4(0.1) = 1.0540898 \dots$$

$$\sqrt{0.9} = 1.0540925 \dots$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\sqrt{1-x}} - T_4(x) \right| &\leq \frac{\max_{\xi \in [0,x]} \left| \frac{945}{32} (1-\xi)^{-\frac{11}{2}} \right|}{5!} |x|^5 = \begin{cases} \frac{63}{256} x^5 (1-x)^{-\frac{11}{2}} & \text{ha } x \geq 0 \\ \frac{63}{256} |x|^5 & \text{különben} \end{cases} \\
\left| \frac{1}{\sqrt{0.9}} - T_4(0.1) \right| &\leq \frac{63}{256} \cdot 0.1^5 \cdot 0.9^{-\frac{11}{2}} < 4.4 \cdot 10^{-6}
\end{aligned}$$