

Analízis II. gyakorlat

Németh Adrián

2015. december 14.

Tartalomjegyzék

Előszó	3
Ismétlés	3
Integrálás	3
Koordinátageometria	5
Térgörbék	7
Ívhossz	7
Görbületi sugár	7
Torzió	7
Kísérő triéder	7
Érintő, kitüntetett síkok, feladatmegoldás lépései	8
Feladatok	8
Kettős integrál	14
Téglalap tartományon	14
Normálttartományon	14
Integráltranszformáció	15
Szimmetriák	15
Feladatok	15
Hármas integrál	21
Integráltranszformáció	21
Feladatok	21
Felületek	23
Paraméteres megadás	23
Felületi görbék	23
Érintősíkok	24
Felszín	24
Explicit megadás	24
Érintősíkok	24
Felszín	25
Érintősíkok és felszín, feladatmegoldás lépései	25
Feladatok	25
Skalármező, vektormező	27
Gradiens	27
Divergencia	28
Rotáció	28
Laplace-operátor	29
Összefüggések	29
Potenciálfüggvény	29
Létezése	29
Meghatározása	29
Feladatok	30
Vonalintegrál	32
Kiszámítása	32
Potenciálos erőter esetén	33
Feladatok	33
Felületi integrál (fluxus)	38
Kiszámítása	38
Feladatok	38
Stokes-tétel	41
Stokes-tétel	41
Feladatok	41
Gauss–Osztrogradszkij-tétel	45
Gauss–Osztrogradszkij-tétel	45

Feladatok	45
Wolfram Alpha	49
Vektorok	49
Térgörbék	49
Differenciálás	49
Integrálás	50
Maple	50
A VectorCalculus csomag	50
Térgörbék	50
Kettős integrál	51
Hármas integrál	51
Felületek	51
Skálármező, vektormező	51
Vonalintegrál	52
Felületi integrál	52

Előszó

A gyakorlati jegyzet a Széchenyi István Egyetem mesterszakos mérnökhallgatói számára, az Analízis II. (vektoranalízis) tárgyhoz készült. Célja, hogy kidolgozott típusfeladatokon keresztül segítse a hallgatók felkészülését az évközi és vizsgázárthelyekre.

A gyakorlati jegyzet legfrissebb példánya letölthető a www.sze.hu/~nemetha/ oldal „oktatás” menüpontja alól. Észrevételeket és az elírások, hibák bejelentését a nemetha@sze.hu címre várom. A kidolgozásra került feladatok nagy része Dr. Lotfi Abdelhakimtól származik, köszönet értük.

Ismétlés

Integrálás

Newton–Leibniz-formula

Legyen $f(x)$ integrálható $[a, b]$ -n, továbbá $F(x)$ folytonos $[a, b]$ -n és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in (a, b)$ -re. Ekkor:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Az $F(x)$ függvény az $f(x)$ primitív függvénye vagy határozatlan integrálja, jele $F(x) = \int f(x) dx$.

Alapintegrálok

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{cth} x dx = \ln|\operatorname{sh} x| + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \operatorname{arsh} x + C \\ &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{arch} |x| + C \\ &= \operatorname{sgn} x \cdot \ln \left(|x| + \sqrt{x^2-1} \right) + C \end{aligned}$$

Integrálási szabályok

$$\begin{aligned}
 \int c \cdot f(x) \, dx &= c \cdot \int f(x) \, dx \\
 \int (f(x) \pm g(x)) \, dx &= \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx \\
 \int f(ax+b) \, dx &= \frac{F(ax+b)}{a} \quad \text{ha } F(x) = \int f(x) \, dx \\
 \int f'(x)f^n(x) \, dx &= \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \\
 \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx &= \ln|f(x)| + C \\
 \int f(x)g'(x) \, dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx \quad (\text{parciális integrálás}) \\
 \int \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0} \, dx &= \int (c_{n-k} x^{n-k} + c_{n-k-1} x^{n-k-1} + \dots + c_1 x + c_0) \, dx \\
 &\quad + \int \frac{d_1}{x+r_1} \, dx + \int \frac{d_2}{x+r_2} \, dx + \dots + \int \frac{e_1 x + f_1}{x^2 + q_1 x + s_1} \, dx + \int \frac{e_2 x + f_2}{x^2 + q_2 x + s_2} \, dx + \dots
 \end{aligned}$$

alakban áll elő, ahol

$$(b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0) = b_k (x+r_1)(x+r_2) \dots (x^2 + q_1 x + s_1)(x^2 + q_2 x + s_2) \dots$$

(parciális törtekre bontás).

Trigonometrikus és hiperbolikus függvények

Hiperbolikus függvények:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Inverz hiperbolikus függvények:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{arch} x &= u & \operatorname{arsh} x &= v \\
 x &= \operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} & x &= \operatorname{sh} v = \frac{e^v - e^{-v}}{2} \\
 0 &= (e^u)^2 - 2xe^u + 1 & 0 &= (e^v)^2 - 2xe^v - 1 \\
 e^u &= x + \sqrt{x^2 - 1} & e^v &= x + \sqrt{x^2 + 1} \\
 \operatorname{arch} x &= u = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) & \operatorname{arsh} x &= v = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})
 \end{aligned}$$

Trigonometrikus és hiperbolikus függvények tulajdonságai:

$$\begin{aligned}
 \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 & \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1 \\
 \cos(-x) &= \cos x \quad \sin(-x) = -\sin x & \operatorname{ch}(-x) &= \operatorname{ch} x \quad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x \\
 \cos' x &= -\sin x \quad \sin' x = \cos x & \operatorname{ch}' x &= \operatorname{sh} x \quad \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \\
 \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y & \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\
 \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y & \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\
 \cos^2 x &= \frac{\cos 2x + 1}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} & \operatorname{ch}^2 x &= \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}
 \end{aligned}$$

Trigonometrikus és hiperbolikus integrálok:

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{\cos 2x + 1}{2} \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + C \\
 \int \cos^3 x \, dx &= \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C \\
 \int \cos^4 x \, dx &= \int (1 - \sin^2 x) \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \frac{\cos 4x - 1}{2} \, dx \\
 &= \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + C \\
 \int \cos^n x \, dx &= \int (1 - \sin^2 x) \cos^{n-2} x \, dx = \int \cos^{n-2} x \, dx + \int \sin x \cos^{n-2} x (-\sin x) \, dx \\
 &= \int \cos^{n-2} x \, dx + \frac{1}{n-1} \sin x \cos^{n-1} x - \frac{1}{n-1} \int \cos x \cdot \cos^{n-1} x \, dx \\
 \frac{n}{n-1} \int \cos^n x \, dx &= \frac{1}{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + \int \cos^{n-2} x \, dx \\
 \int \cos^n x \, dx &= \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx \quad (\text{rekurzív képlet})
 \end{aligned}$$

Azonos elven kiterjeszthető $\sin x$, illetve $\operatorname{ch} x$ és $\operatorname{sh} x$ hiperbolikus függvények hatványaira.

Koordinátagéometria

Skáláris szorzat

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$, ahol α az $\vec{a}, \vec{b}$ vektorok által bezárt szög. Derékszögű koordináta-rendszerben $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. Legfontosabb tulajdonságai:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (kommutativitás)
- $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{b}$ (disztributivitás)

Vektoriális szorzat

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha$, ahol α az $\vec{a}, \vec{b}$ vektorok által bezárt szög, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ jobbsodrású rendszert alkotnak. Derékszögű koordináta-rendszerben $\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$. Legfontosabb tulajdonságai:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (antikommutativitás)
- $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b}$ (disztributivitás)

Vegyes szorzat

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata. Előjele akkor pozitív, ha a vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak. Derékszögű koordináta-rendszerben

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \det \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix}.$$

Legfontosabb tulajdonságai:

- $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$

- $(\lambda \vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$
- $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$ (disztributivitás)

Egyenes egyenlete

Adott $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\vec{v}$ irányvektorú egyenes paraméteres egyenlete:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + v_x \cdot t, y_0 + v_y \cdot t, z_0 + v_z \cdot t).$$

Sík egyenlete

Adott $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\vec{n}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$0 = \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = n_x x + n_y y + n_z z - (n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0).$$

Kör egyenlete

Az (x_0, y_0) középpontú és r sugarú kör egyenlete:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Ellipszis egyenlete

Ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Parabola egyenlete

Parabola egyenlete:

$$y = \alpha x^2.$$

Hiperbola egyenlete

Hiperbola egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

+: vízszintes főtengelyű, -: függőleges főtengelyű.

Gömb egyenlete

Az (x_0, y_0, z_0) középpontú r sugarú gömb egyenlete:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Ellipszoid egyenlete

Ellipszoid egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Paraboloid egyenlete

Paraboloid egyenlete:

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Forgásparaboloid:

$$z = \alpha(x^2 + y^2).$$

Hiperboloid egyenlete

Hiperboloid egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1.$$

+: egypalástú, -: kétpalástú.

Kúp egyenlete

Kúp egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Körkúp:

$$z^2 = \alpha^2(x^2 + y^2).$$

Térgörbék

$\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvény, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, komponensenként deriváljuk.

Görbe ívhossza

Az $\vec{r}(t)$ térgörbe t paraméterének t_1 és t_2 értéke közötti szakaszának ívhossza

$$\int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

Görbe görbületi sugara

Az $\vec{r}(t)$ térgörbe t paraméterének t_0 értékéhez tartozó görbülete:

$$g(t_0) = \frac{|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)|}{|\dot{\vec{r}}(t_0)|^3},$$

és görbületi sugara

$$\rho(t_0) = \frac{1}{g(t_0)} = \frac{|\dot{\vec{r}}(t_0)|^3}{|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)|}.$$

A görbület értéke egyenesvonalú térgörbe minden pontjában 0.

Görbe torziója

Az $\vec{r}(t)$ térgörbe t paraméterének t_0 értékéhez tartozó torziója:

$$T(t_0) = \frac{(\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)) \cdot \ddot{\vec{r}}(t_0)}{|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)|^2}.$$

Értéke síkbeli térgörbe minden pontjában 0.

Kísérő triéder

Az $\vec{r}(t)$ térgörbe t paraméterének t_0 értékéhez tartozó kísérő triédere a $(\vec{\tau}(t_0), \vec{n}(t_0), \vec{b}(t_0))$ egységnyi hosszúságú, páronként merőleges vektorok alkotta hármas.

- $\vec{\tau}$ *tangenciális vektor* érintő irányú és a t paraméter növekedésének irányába mutat
- $\vec{n}$ *főnormális vektor* a simuló kör középpontja felé mutat

- $\vec{b}$ binormális vektor a háromél harmadik vektora. Úgy irányítjuk, hogy $(\vec{\tau}(t_0), \vec{n}(t_0), \vec{b}(t_0))$ jobbsodrású vektorrendszer legyen

Két vektor által kifeszített sík normálvektora a harmadik vektor. A vektorpárok által meghatározott síkok elnevezései:

- $\vec{\tau}$ és $\vec{n}$ által kifeszített sík a *simuló sík*
- $\vec{n}$ és $\vec{b}$ által kifeszített sík a *normálsík*
- $\vec{\tau}$ és $\vec{b}$ által kifeszített sík a *rektifikáló sík*

Kísérő triéder, görbületi sugár, torzió, simuló sík, érintő egyenes meghatározása

Az $\vec{r}(t)$ térgörbe t paraméterének t_0 értékéhez tartozó mennyiségek és objektumok meghatározásának lépései:

1. Az $\dot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t), \dddot{\vec{r}}(t)$ deriváltak meghatározása,
az $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \dot{\vec{r}}(t_0), \ddot{\vec{r}}(t_0), \dddot{\vec{r}}(t_0)$ helyettesítési értékek számítása
2. Az $|\dot{\vec{r}}|$ hossz számítása,
 $\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$ származtatása,
az érintő egyenes paraméteres egyenlete:
 $\vec{e}(t) = (x_0 + \tau_x \cdot t, y_0 + \tau_y \cdot t, z_0 + \tau_z \cdot t)$ vagy $\vec{e}(t) = (x_0 + \dot{x}(t_0) \cdot t, y_0 + \dot{y}(t_0) \cdot t, z_0 + \dot{z}(t_0) \cdot t)$,
a normálsík egyenlete: $\vec{\tau} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ vagy $\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$
3. Az $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$ vektoriális szorzat elvégzése,
 $|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|$ hossz számítása,
 $\vec{b} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}$ származtatása,
 $g = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$ és $\rho = \frac{1}{g}$ számítása,
 $T = \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$ számítása,
a simuló sík egyenlete: $\vec{b} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ vagy $(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$
4. $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau}$ származtatása,
a rektifikáló sík egyenlete: $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

Ellenőrzési lehetőség (2–4. lépés): $|\vec{n}| \stackrel{?}{=} 1$

Példák

- a.) Adott az $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \sin \frac{t}{2})$ egyenletű térgörbe. Írjuk fel a térgörbe $t = \frac{\pi}{3}$ pontjához tartozó simuló, normál- és rektifikáló síkjainak, valamint érintő egyenesének egyenletét. Határozzuk meg a kísérő triéder egységvektorait.

$$\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \sin \frac{t}{2}) \rightarrow \vec{r}(\frac{\pi}{3}) = (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1 - \cos t, \sin t, 2 \cos \frac{t}{2}) \rightarrow \dot{\vec{r}}(\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\sin t, \cos t, -\sin \frac{t}{2}) \rightarrow \ddot{\vec{r}}(\frac{\pi}{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$\dddot{\vec{r}}(t) = (\cos t, -\sin t, -\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2}) \rightarrow \dddot{\vec{r}}(\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$$

$$|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 3} = 2$$

$$\vec{\tau} = \frac{1}{4}(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$$

$$\text{Az érintő egyenlete: } \vec{e}(u) = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}u, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}u, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}u\right).$$

$$\text{A normálsík egyenlete: } 0 = (x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}, y - \frac{1}{2}, z - 2) \cdot \frac{1}{4}(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}).$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{4}(-3\sqrt{3}, 7, -2)$$

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = \sqrt{5}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{4\sqrt{5}}(-3\sqrt{3}, 7, -2)$$

$$g = \frac{\sqrt{5}}{8} \quad \rho = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$T = -\frac{9\sqrt{3}}{40}$$

$$\text{A simuló sík egyenlete: } 0 = (x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}, y - \frac{1}{2}, z - 2) \cdot \frac{1}{4\sqrt{5}}(-3\sqrt{3}, 7, -2).$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}, 1, -1).$$

$$\text{A rektifikáló sík egyenlete: } 0 = (x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}, y - \frac{1}{2}, z - 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}, 1, -1).$$

- b.) **Adott az $\vec{r}(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ egyenletű térgörbe. Írjuk fel a térgörbe $t = 1$ pontjához tartozó simuló, normál- és rektifikáló síkjainak, valamint érintő egyenesének egyenletét. Határozzuk meg a kísérő triéder egységvektorait.**

$$\vec{r}(t) = (3t, 3t^2, 2t^3) \rightarrow \vec{r}(1) = (3, 3, 2)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (3, 6t, 6t^2) \rightarrow \dot{\vec{r}}(1) = (3, 6, 6)$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (0, 6, 12t) \rightarrow \ddot{\vec{r}}(1) = (0, 6, 12)$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (0, 0, 12) \rightarrow \ddot{\vec{r}}(1) = (0, 0, 12)$$

$$|\dot{\vec{r}}| = 9$$

$$\vec{\tau} = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$$

$$\text{Az érintő egyenlete: } \vec{e}(u) = (3 + \frac{1}{3}u, 3 + \frac{2}{3}u, 2 + \frac{2}{3}u).$$

$$\text{A normálsík egyenlete: } 0 = (x - 3, y - 3, z - 2) \cdot \frac{1}{3}(1, 2, 2).$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = 18(2, -2, 1)$$

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = 54$$

$$\vec{b} = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$$

$$g = \frac{2}{27} \quad \rho = \frac{27}{2}$$

$$T = \frac{2}{27}$$

$$\text{A simuló sík egyenlete: } 0 = (x - 3, y - 3, z - 2) \cdot \frac{1}{3}(2, -2, 1).$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau} = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$$

$$\text{A rektifikáló sík egyenlete: } 0 = (x - 3, y - 3, z - 2) \cdot \frac{1}{3}(2, 1, -2).$$

- c.) Adott az $\vec{r}(t) = (\cos^2 t, \cos t \sin t, \sin t)$ egyenletű térgörbe. Írjuk fel a térgörbe $t = \frac{\pi}{6}$ pontjához tartozó simuló, normál- és rektifikáló síkjainak, valamint érintő egyenesének egyenletét. Határozzuk meg a kísérő triéder egységvektorait.

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \left(\frac{\cos 2t+1}{2}, \frac{\sin 2t}{2}, \sin t\right) \rightarrow \vec{r}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}(3, \sqrt{3}, 2) \\ \dot{\vec{r}}(t) &= (-\sin 2t, \cos 2t, \cos t) \rightarrow \dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}) \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (-2\cos 2t, -2\sin 2t, -\sin t) \rightarrow \ddot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{6}\right) = (-1, -\sqrt{3}, -\frac{1}{2}) \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (4\sin 2t, -4\cos 2t, -\cos t) \rightarrow \ddot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{6}\right) = (2\sqrt{3}, -2, -\frac{\sqrt{3}}{2})\end{aligned}$$

$$|\dot{\vec{r}}| = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{7}}(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$$

$$\text{Az érintő egyenlete: } \vec{e}(u) = \left(\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{3}{7}}u, \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{\sqrt{7}}u, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{7}}u\right).$$

$$\text{A normálsík egyenlete: } 0 = \left(x - \frac{3}{4}, y - \frac{\sqrt{3}}{4}, z - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{7}}(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}).$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{4}(5, -3\sqrt{3}, 8)$$

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2\sqrt{29}}(5, -3\sqrt{3}, 8)$$

$$g = \frac{4\sqrt{29}}{7\sqrt{7}} \quad \rho = \frac{7\sqrt{7}}{4\sqrt{29}}$$

$$T = \frac{12\sqrt{3}}{29}$$

$$\text{A simuló sík egyenlete: } 0 = \left(x - \frac{3}{4}, y - \frac{\sqrt{3}}{4}, z - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{29}}(5, -3\sqrt{3}, 8).$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau} = \frac{1}{2\sqrt{203}}(-17, -13\sqrt{3}, -4)$$

$$\text{A rektifikáló sík egyenlete: } 0 = \left(x - \frac{3}{4}, y - \frac{\sqrt{3}}{4}, z - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{203}}(-17, -13\sqrt{3}, -4).$$

- d.) Adott az $\vec{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2})$ egyenletű térgörbe. Írjuk fel a térgörbe $P_0(0, 0, 2)$ pontbeli görbületét és normálsíkjának egyenletét. Határozzuk meg a kísérő triéder egységvektorait.

$$t = \pi$$

$$\vec{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2}) \rightarrow \vec{r}(\pi) = (0, 0, 2)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, \cos \frac{t}{2}) \rightarrow \dot{\vec{r}}(\pi) = (0, -1, 0)$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (-\cos t, -\sin t, -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2}) \rightarrow \ddot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{3}\right) = (1, 0, -\frac{1}{2})$$

$$|\dot{\vec{r}}| = 1$$

$$\vec{\tau} = (0, -1, 0)$$

$$\text{A normálsík egyenlete: } 0 = (x, y, z - 2) \cdot (0, -1, 0).$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2)$$

$$g = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \rho = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, -1)$$

- e.) **Adott az $\vec{r}(t) = (2t, \frac{2}{t}, t^2)$ egyenletű térgörbe. Írjuk fel a térgörbe $t_0 = 2$ pontjához tartozó normálsíkjának és érintő egyenesének egyenletét.**

$$\vec{r}(t) = (2t, \frac{2}{t}, t^2) \rightarrow \vec{r}(2) = (4, 1, 4)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (2, -\frac{2}{t^2}, 2t) \rightarrow \dot{\vec{r}}(2) = (2, -\frac{1}{2}, 4)$$

Normálni nem szükséges.

$$\text{Az érintő egyenlete: } \vec{e}(u) = (4 + 2u, 1 - \frac{1}{2}u, 4 + 4u).$$

$$\text{A normálsík egyenlete: } 0 = (x - 4, y - 1, z - 4) \cdot (2, -\frac{1}{2}, 4).$$

- f.) **Adott az $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$ egyenletű térgörbe. Írjuk fel a térgörbe $t_0 = 0$ pontjához tartozó normálsíkjának és érintő egyenesének egyenletét.**

$$\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}) \rightarrow \vec{r}(0) = (1, 1, 0)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}) \rightarrow \dot{\vec{r}}(0) = (1, -1, \sqrt{2})$$

Normálni nem szükséges.

$$\text{Az érintő egyenlete: } \vec{e}(u) = (1 + u, 1 - u, \sqrt{2}u).$$

$$\text{A normálsík egyenlete: } 0 = (x - 1, y - 1, z) \cdot (1, -1, \sqrt{2}).$$

- g.) **Adott az $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ egyenletű térgörbe. Írjuk fel a térgörbe $t_0 = 0$ pontjához tartozó normálsíkjának és érintő egyenesének egyenletét.**

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t) \rightarrow \vec{r}(0) = (1, 0, 1)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t), e^t) \rightarrow \dot{\vec{r}}(0) = (1, 1, 1)$$

Normálni nem szükséges.

$$\text{Az érintő egyenlete: } \vec{e}(u) = (1 + u, u, 1 + u).$$

$$\text{A normálsík egyenlete: } 0 = (x - 1, y, z - 1) \cdot (1, 1, 1).$$

- h.) **Adott az $\vec{r}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$ egyenletű térgörbe. Írjuk fel a térgörbe $t_0 = 0$ pontjához tartozó normálsíkjának és érintő egyenesének egyenletét.**

$$\vec{r}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3) \rightarrow \vec{r}(0) = (0, 0, 0)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1, 2t, 2t^2) \rightarrow \dot{\vec{r}}(0) = (1, 0, 0)$$

Normálni nem szükséges.

$$\text{Az érintő egyenlete: } \vec{e}(u) = (u, 0, 0).$$

$$\text{A normálsík egyenlete: } 0 = (x, y, z) \cdot (1, 0, 0).$$

- i.) **Adott az $\vec{r}(t) = (2, \cos t, \sin t)$ egyenletű térgörbe. Írjuk fel a térgörbe $t_0 = \frac{\pi}{3}$ pontjához tartozó normálsíkjának és érintő egyenesének egyenletét.**

$$\vec{r}(t) = (2, \cos t, \sin t) \rightarrow \vec{r}(0) = (2, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (0, -\sin t, \cos t) \rightarrow \dot{\vec{r}}(0) = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$$

Normálni nem szükséges.

$$\text{Az érintő egyenlete: } \vec{e}(u) = (2, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}u, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}u).$$

$$\text{A normálsík egyenlete: } 0 = (x - 2, y - \frac{1}{2}, z - \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}).$$

- j.) Számítsuk ki az $\vec{r}(t) = (2, \cos t, \sin t)$ térgörbe ívhosszát a $t \in [0, 2\pi]$ intervallumon.

$$\dot{\vec{r}}(t) = (0, -\sin t, \cos t)$$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{0^2 + \sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$$

- k.) Számítsuk ki az $\vec{r}(t) = (3t, 4t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}})$ térgörbe ívhosszát a $t \in [1, 3]$ intervallumon.

$$\dot{\vec{r}}(t) = (3, 4, \sqrt{t})$$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_1^3 \sqrt{3^2 + 4^2 + t} dt = \int_1^3 \sqrt{25 + t} dt = \left[\frac{2}{3}(t + 25)^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \frac{4}{3}(28\sqrt{7} - 13\sqrt{26})$$

- l.) Számítsuk ki az $\vec{r}(t) = (t + 3, \frac{t^2}{2}, \frac{\sqrt{2}t^3}{3})$ térgörbe ívhosszát a $t \in [1, 3]$ intervallumon.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(1, t, \sqrt{\frac{t}{2}}\right)$$

$$\begin{aligned} l &= \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_1^3 \sqrt{1^2 + t^2 + \frac{t}{2}} dt = \int_1^3 \frac{\sqrt{15}}{4} \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\sqrt{15}}t + \frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2} dt = \frac{15}{16} \int_{t=1}^{t=3} \text{ch}^2 u du \\ &= \frac{15}{16} \int_{t=1}^{t=3} \frac{\text{ch } 2u + 1}{2} du = \frac{15}{16} \left[\frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \text{sh } 2u \right]_{t=1}^{t=3} \\ &= \left[\frac{15}{32} \text{arsh} \left(\frac{3}{\sqrt{15}}t + \frac{1}{\sqrt{15}} \right) \right]_1^3 + \left[\frac{15}{16} \left(\frac{4}{\sqrt{15}}t + \frac{1}{\sqrt{15}} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\sqrt{15}}t + \frac{1}{\sqrt{15}} \right)^2} \right]_1^3 \end{aligned}$$

- m.) Számítsuk ki az $\vec{r}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$ térgörbe ívhosszát a $t \in [0, 1]$ intervallumon.

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1, 2t, 2t^2)$$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} dt = \int_0^1 \sqrt{(2t^2 + 1)^2} dt = \int_0^1 (2t^2 + 1) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + t \right]_0^1 = \frac{5}{3}$$

- n.) Számítsuk ki az $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ térgörbe ívhosszát a $t \in [0, 1]$ intervallumon.

$$\dot{\vec{r}}(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} dt = \int_0^1 \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} dt = \int_0^1 (e^t + e^{-t}) dt = [e^t - e^{-t}]_0^1 = e - \frac{1}{e}$$

- o.) Számítsuk ki az $\vec{r}(t) = (3t^2, t\sqrt{2} + 3, 3t^2)$ térgörbe ívhosszát a $t \in [0, 1]$ intervallumon.

$$\dot{\vec{r}}(t) = (6t, \sqrt{2}, 6t)$$

$$\begin{aligned} l &= \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{36t^2 + 2 + 36t^2} dt = \int_0^1 \sqrt{72t^2 + 2} dt = \int_{t=0}^{t=1} \frac{\sqrt{2}}{6} \text{ch}^2 u du = \int_{t=0}^{t=1} \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{\text{ch } 2u + 1}{2} du \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \left[u + \frac{1}{2} \text{sh } 2u \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\sqrt{2}}{12} \text{arsh } 6 + \frac{\sqrt{2}}{12} 6\sqrt{36 + 1} \end{aligned}$$

- p.) Számítsuk ki az $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ térgörbe ívhosszát a $t \in [0, \ln 2]$ intervallumon.

$$\dot{\vec{r}}(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t), e^t)$$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_0^{\ln 2} e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1} dt = \int_0^{\ln 2} \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3} [e^t]_0^{\ln 2} = \sqrt{3}$$

- q.) Számítsuk ki az $\vec{r}(t) = (t - 4, \frac{t^3}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}t^2 + 6)$ térgörbe ívhosszát a $t \in [0, 1]$ intervallumon.

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1, t^2, \sqrt{2}t)$$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + t^4 + 2t^2} dt = \int_0^1 \sqrt{(t^2 + 1)^2} dt = \int_0^1 (t^2 + 1) dt = \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

- r.) Mely pontban párhuzamos az $\vec{r}(t) = (\frac{1}{t+1}, \frac{2}{2-t}, \frac{3}{3+t})$ térgörbe érintője a $(-6, 3, -2)$ vektorral?

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(-\frac{1}{(t+1)^2}, \frac{2}{(2-t)^2}, -\frac{3}{(3+t)^2} \right)$$

$$\frac{-6}{3} = -2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{2-t}{t+1} \right)^2 \Rightarrow \frac{2-t}{t+1} = \pm 2 \Rightarrow t = 0, -4$$

$$\dot{\vec{r}}(0) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) \parallel (-6, 3, -2)$$

$$\dot{\vec{r}}(-4) = (-\frac{1}{9}, \frac{1}{18}, -3) \nparallel (-6, 3, -2)$$

A keresett pont a $t = 0$.

- s.) Mely pontban merőleges az $\vec{r}(t) = (t^2 + 2, t^3, 1 - t)$ térgörbe érintője az $(1, 1, 0)$ vektorra?

$$\dot{\vec{r}}(t) = (2t, 3t^2, -1)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) \cdot (1, 1, 0) = (2t, 3t^2, -1) \cdot (1, 1, 0) = 3t^2 + 2t = 0 \Rightarrow t = 0$$

A keresett pont a $t = 0$.

- t.) Mely pontban merőleges az $\vec{r}(t) = (\sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t, t^2 + 1)$ térgörbe érintője az $(1, 0, 0)$ vektorra?

$$\dot{\vec{r}}(t) = (t \sin t, t \cos t, 2t)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) \cdot (1, 0, 0) = (t \sin t, t \cos t, 2t) \cdot (1, 0, 0) = t \sin t = 0 \Rightarrow t = k\pi$$

A keresett pontok a $t = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ alakú pontok.

- u.) Mekkora szöget zárnak be egymással az $\vec{r}(t) = (t^2 + 1, (t + 1)^2, (t - 1)^3)$ térgörbe $t_1 = 0$ és $t_2 = 1$ ponthoz tartozó érintői?

$$\dot{\vec{r}}(t) = (2t, 2(t + 1), 3(t - 1)^2)$$

$$\dot{\vec{r}}(0) = (0, 2, 3) \rightarrow |\dot{\vec{r}}(0)| = \sqrt{13} \quad \dot{\vec{r}}(1) = (2, 4, 0) \rightarrow |\dot{\vec{r}}(1)| = \sqrt{20}$$

$$\cos \alpha = \frac{\dot{\vec{r}}(0) \cdot \dot{\vec{r}}(1)}{|\dot{\vec{r}}(0)| |\dot{\vec{r}}(1)|} = \frac{(0, 2, 3) \cdot (2, 4, 0)}{\sqrt{13} \sqrt{20}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

A keresett szög az $\alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)$.

- v.) **Mekkora szöget zárnak be egymással az $\vec{r}(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t, t^2 + 1)$ térgörbe $t_1 = 0$ és $t_2 = \frac{\pi}{2}$ ponthoz tartozó érintői?**

$$\dot{\vec{r}}(t) = (t \cos t, t \sin t, 2t) = t (\cos t, \sin t, 2)$$

$$\frac{\dot{\vec{r}}}{t}(0) = (1, 0, 2) \rightarrow \left| \frac{\dot{\vec{r}}}{t}(0) \right| = \sqrt{5} \quad \frac{\dot{\vec{r}}}{t}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 2) \rightarrow \left| \frac{\dot{\vec{r}}}{t}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = \sqrt{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\dot{\vec{r}}}{t}(0) \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{t}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left| \frac{\dot{\vec{r}}}{t}(0) \right| \left| \frac{\dot{\vec{r}}}{t}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right|} = \frac{(1, 0, 2) \cdot (0, 1, 2)}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

A keresett szög az $\alpha = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

Kettős integrál

Az $f(x, y)$ függvény x változó szerinti primitív függvénye $F(x, y)$, ha $F'_x(x, y) = f(x, y)$. Hasonlóan, az $f(x, y)$ függvény y változó szerinti primitív függvénye $G(x, y)$, ha $G'_y(x, y) = f(x, y)$. Jelölés:

$$\int f(x, y) dx = F(x, y) + C \qquad \int f(x, y) dy = G(x, y) + C.$$

A D tartomány feletti integrál jele:

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Geometriai jelentése a kétváltozós függvény alatti (előjeles) térfogat.

Kettős integrál téglalap tartományon

Legyen $T = [a, b] \times [c, d]$ téglalap tartomány.

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b [G(x, y)]_c^d dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d [F(x, y)]_a^b dy$$

Kettős integrál normáltartományon

Az N_x tartomány x szerinti normáltartomány, ha léteznek olyan a, b valósak és $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ függvények, melyekre

$$N_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Az N_y tartomány y szerinti normáltartomány, ha léteznek olyan c, d valósak és $\psi_1(y), \psi_2(y)$ függvények, melyekre

$$N_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}: c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$

Függvény integrálja x szerinti normáltartomány felett:

$$\iint_{N_x} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b [G(x, y)]_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dx.$$

Függvény integrálja y szerinti normáltartomány felett:

$$\iint_{N_y} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b [F(x, y)]_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} dy.$$

Integráltranszformáció

A helyettesítéses integrálás általánosítása kettős integrálokra. Az (x, y) koordinátákról az (u, v) koordinátákra való áttérés:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{(x, y) \in D} f(x(u, v), y(u, v)) |\det J(u, v)| \, du \, dv,$$

ahol

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} x'_u(u, v) & x'_v(u, v) \\ y'_u(u, v) & y'_v(u, v) \end{bmatrix}$$

a Jacobi-mátrix.

Áttérés polárkoordinátákra

A koordináták közötti áttérés:

$$x(r, \varphi) = r \cos \varphi \quad y(r, \varphi) = r \sin \varphi \quad r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi).$$

A Jacobi-mátrix és determinánsa:

$$J(r, \varphi) = \begin{bmatrix} x'_r(r, \varphi) & x'_\varphi(r, \varphi) \\ y'_r(r, \varphi) & y'_\varphi(r, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}$$
$$\det J(r, \varphi) = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r.$$

Röviden: $dx \, dy \rightarrow r \, dr \, d\varphi$ $x \rightarrow r \cos \varphi$ $y \rightarrow r \sin \varphi$.

A szimmetriák kihasználása

Páratlan függvény szimmetrikus intervallum feletti integrálja:

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

Páros függvény szimmetrikus intervallum feletti integrálja:

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

Periodikus függvény integrálja (több) periódus hosszúságú intervallumon:

$$f(x + T) = f(x) \Rightarrow \int_a^{a+nT} f(x) \, dx = n \int_0^T f(x) \, dx.$$

Alkalmazva $\sin x$ és $\cos x$ függvények páratlan hatványainak integráljára ($n \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin x \, dx &= 0 & \int_0^{2\pi} \cos x \, dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin^{2n+1} x \, dx &= 0 & \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} x \, dx &= 0. \end{aligned}$$

Példák

- a.) Számítsuk ki az $f(x, y) = x^3 \ln \sin y$ függvénynek a $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi$ tartomány feletti integrálját.

Az x változóban páratlan függvény integrálja az x változóban szimmetrikus tartományra 0.

$$\int_0^\pi \int_{-1}^1 (x^3 \ln \sin y) \, dx \, dy = \int_0^\pi 0 \, dy = 0$$

- b.) Számítsuk ki az $f(x, y) = x^3 y^2 + x^2 \sin y + x^2(1 + \operatorname{tg} y)$ függvénynek a $-2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$ tartomány feletti integrálját.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 (x^3 y^2 + x^2 \sin y + x^2(1 + \operatorname{tg} y)) dy dx &= \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 (x^2 \sin y + x^2 \operatorname{tg} y) dy dx + \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 x^3 y^2 dx dy \\ &+ \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 x^2 dy dx = 0 + 0 + \int_{-2}^2 [x^2 y]_{y=-1}^{y=1} dx = \int_{-2}^2 2x^2 dx = 4 \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{4}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

- c.) Számítsuk ki az $f(x, y) = x^3(5 + \sin 2y)$ függvénynek a $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi$ tartomány feletti integrálját.

Használjuk ki hogy a $\sin 2y$ függvény π szerint periodikus, és a teljes periódusra vett integrálja 0.

$$\int_0^1 \int_0^\pi x^3(5 + \sin 2y) dy dx = \int_0^1 \int_0^\pi 5x^3 dy dx = \int_0^1 5\pi x^3 dx = \left[\frac{5\pi}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{5\pi}{4}$$

- d.) Számítsuk ki az $f(x, y) = xy$ függvénynek a $x^2 + y^2 \leq 4$ tartomány feletti integrálját.

(Mindkét változóban) páratlan függvény integrálja (mindkét változóban) szimmetrikus tartományra 0.

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xy dy dx = \int_{-2}^2 0 dx = 0$$

- e.) Számítsuk ki az $f(x, y) = x^2$ függvénynek a $x^2 + y^2 \leq 4$ tartomány feletti integrálját.

Térjünk át polárkoordinátákra.

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \varphi \cdot r d\varphi dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} d\varphi dr = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dr = \pi \int_0^2 r^3 dr \\ &= \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 4\pi \end{aligned}$$

- f.) Számítsuk ki az $f(x, y) = xy$ függvénynek az $y \geq 0, x \leq 2, y \leq \frac{\pi}{3}$ tartomány feletti integrálját.

x szerinti normáltartománynak tekintve:

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} xy dy dx = \int_0^2 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{3}} dx = \int_0^2 \frac{x^3}{18} dx = \left[\frac{x^4}{72} \right]_0^2 = \frac{2}{9}$$

y szerinti normáltartománynak tekintve:

$$\int_0^{\frac{2}{3}} \int_{3y}^2 xy dx dy = \int_0^{\frac{2}{3}} \left[y \frac{x^2}{2} \right]_{x=3y}^{x=2} dy = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(2y - \frac{9}{2} y^3 \right) dy = \left[y^2 - \frac{9}{8} y^4 \right]_0^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{9}$$

- g.) Számítsuk ki az $f(x, y) = x - y + 1$ függvény integrálját az $y = x^2$ parabola és az $y = x + 2$ egyenes által közrefogott tartományon.

A metszéspontok x koordinátái: $x^2 = x + 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -1, 2$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} (x - y + 1) dy dx &= \int_{-1}^2 \left[(x+1)y - \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x^2}^{y=x+2} dx \\ &= \int_{-1}^2 \left((x+1)(x+2) - \frac{1}{2}(x+2)^2 - (x+1)x^2 + \frac{1}{2}x^4 \right) dx \\ &= \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^2 = -\frac{9}{20} \end{aligned}$$

- h.) Számítsuk ki az $f(x, y) = y^2$ függvény integrálját az $x = y^2$ és $x = 8 - y^2$ parabolák által határolt tartományra.

A metszéspontok y koordinátái: $y^2 = 8 - y^2 \Rightarrow y = \pm 2$.

$$\int_{-2}^2 \int_{y^2}^{8-y^2} y^2 dx dy = \int_{-2}^2 [y^2 x]_{x=y^2}^{x=8-y^2} dy = \int_{-2}^2 y^2(8-2y^2) dy = \left[\frac{8}{3}y^3 - \frac{2}{5}y^5 \right]_{-2}^2 = \frac{256}{15}$$

- i.) Számítsuk ki az $f(x, y) = x^2 y$ függvénynek a $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq -\frac{1}{2}$ tartomány feletti integrálját.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2 y dx dy = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y dy = \frac{2}{3} \int_{-\frac{1}{2}}^1 (1-y^2)^{\frac{3}{2}} y dy = \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{5}(1-y^2)^{\frac{5}{2}} \right]_{-\frac{1}{2}}^1 = \frac{2}{15} \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{5}{2}}$$

- j.) Számítsuk ki az $x^2 + y^2 \leq 13^2$ körlapból az $y \geq x^2 - 13$ parabola által kimetszett tartomány területét.

A metszéspontok y koordinátái: $13^2 - y^2 = y + 13 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 13^2 - 13} = -\frac{1}{2} \pm \frac{25}{2} = -13, 12$.

A metszéspontok: $(0, -13), (15, -5), (15, 5)$.

$$\begin{aligned} \int_{-5}^5 \int_{x^2-13}^{\sqrt{13^2-x^2}} 1 dy dx &= \int_{-5}^5 [y]_{x^2-13}^{\sqrt{13^2-x^2}} dx = \int_{-5}^5 \left(\sqrt{13^2-x^2} - (x^2-13) \right) dx = \int_{-5}^5 13\sqrt{1-\left(\frac{x}{13}\right)^2} dx \\ &+ \int_{-5}^5 (13-x^2) dx = 13^2 \int_{x=-5}^{x=5} \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du + \left[13x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-5}^5 = 13^2 \int_{x=-5}^{x=5} \cos^2 u du + \frac{140}{3} \\ &= 13^2 \int_{x=-5}^{x=5} \frac{\cos 2u + 1}{2} du + \frac{140}{3} = 13^2 \left[\frac{1}{4} \sin 2u + \frac{1}{2}u \right]_{x=-5}^{x=5} + \frac{140}{3} = 13^2 \left[\frac{1}{2} \sin u \cos u + \frac{1}{2}u \right]_{x=-5}^{x=5} + \frac{140}{3} \\ &= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{13^2-x^2} + \frac{13^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{13}\right) \right]_{x=-5}^{x=5} + \frac{140}{3} = 60 + 13^2 \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \frac{140}{3} = \frac{320}{3} + 169 \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) \end{aligned}$$

- k.) Számítsuk ki az $x^2 + y^2 \leq 25$ körlapból az $y \geq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ parabola által kimetszett tartomány területét.

A metszéspontok lehetséges y koordinátái: $25 - y^2 = 2y + 1 \Rightarrow y = -1 \pm \sqrt{1+24} = -6, 4$.

A metszéspontok: $(-3, 4), (3, 4)$.

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 \int_{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}}^{\sqrt{25-x^2}} 1 dy dx &= \int_{-3}^3 [y]_{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}}^{\sqrt{25-x^2}} dx = \int_{-3}^3 \left(\sqrt{25-x^2} - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) \right) dx = \int_{-3}^3 5\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-3}^3 (1-x^2) dx = 5^2 \int_{x=-3}^{x=3} \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du + \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-3}^3 = 5^2 \int_{x=-3}^{x=3} \cos^2 u du - 6 \\ &= 5^2 \int_{x=-3}^{x=3} \frac{\cos 2u + 1}{2} du - 6 = 5^2 \left[\frac{1}{4} \sin 2u + \frac{1}{2}u \right]_{x=-3}^{x=3} - 6 = 5^2 \left[\frac{1}{2} \sin u \cos u + \frac{1}{2}u \right]_{x=-3}^{x=3} - 6 \\ &= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2} \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) \right]_{x=-3}^{x=3} - 6 = 12 + 25 \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) - 6 = 6 + 25 \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \end{aligned}$$

- l.) Számítsuk ki az $y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 9, x^2 + y^2 \leq 16$ egyenletek által meghatározott síkidom területét.

Térjünk át polárkoordinátákra.

$$\iint_D dx dy = \int_3^4 \int_0^\pi r d\varphi dr = \int_3^4 [r\varphi]_0^\pi dr = \int_3^4 \pi r dr = \left[\frac{\pi}{2} r^2 \right]_3^4 = \frac{7}{2} \pi$$

- m.) Számítsuk ki az $y = x^2$ parabola és az $y = x + 2$ egyenes által közrefogott területet.

A metszéspontok x koordinátái: $x^2 = x + 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{9}}{2} = 2, -1$.

$$\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} 1 \, dy \, dx = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) \, dx = \left[2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

- n.) Számítsuk ki az $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ függvénynek az $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 9, x^2 + y^2 \leq 16$ tartományra vonatkozó integrálját.

Térjünk át polárkoordinátákra.

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_3^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln r^2) r \, d\varphi \, dr = \int_3^4 [2r(\ln r)\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \, dr = \int_3^4 \pi r \ln r \, dr = \left[\frac{\pi}{4} r^2 (2 \ln r - 1) \right]_3^4 \\ &= \frac{\pi}{2} \ln \left(\frac{4^{16}}{e^{\frac{7}{2}} 3^9} \right) \end{aligned}$$

- o.) Számítsuk ki az alábbi tartomány térfogatát: $z \geq 0, x^2 + y^2 < 9, x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$.

A tartomány alapja: $x^2 + y^2 \leq 9$. Térjünk át polárkoordinátákra.

$$\iint_D \sqrt{25 - x^2 - y^2} \, dy \, dx = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \sqrt{25 - r^2} r \, d\varphi \, dr = 2\pi \int_0^3 \sqrt{25 - r^2} r \, dr = \left[-\frac{2\pi}{3} (25 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \frac{122\pi}{3}$$

- p.) Számítsuk ki az alábbi tartomány térfogatát: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

A tartomány alapja: $x^2 + y^2 = z^2 = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4$. A térfogat a gömbszelet és a kúp térfogatából tevődik össze. Térjünk át polárkoordinátákra.

$$\begin{aligned} \iint_D (\sqrt{8 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (\sqrt{8 - r^2} - r) r \, d\varphi \, dr = 2\pi \int_0^2 (\sqrt{8 - r^2} - r) r \, dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3} (8 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} r^3 \right]_0^2 = \frac{32\pi}{3} (\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

- q.) Számítsuk ki az alábbi tartomány térfogatát: $x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, z \leq x + y + 3$.

A tartomány alapja: $x^2 + y^2 \leq 1$. Térjünk át polárkoordinátákra.

$$\begin{aligned} \iint_D (x + y + 3) \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3 + r \cos \varphi + r \sin \varphi) r \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r \, d\varphi \, dr = 6\pi \int_0^1 r \, dr = 6\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

- r.) Számítsuk ki az alábbi tartomány térfogatát: $2z \geq x^2 + y^2 + 1, z \leq \frac{1}{3}(x^2 + y^2) + 2$.

A tartomány alapja: $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(x^2 + y^2) + 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 9$. A térfogatot a két paraboloid térfogatának különbsége adja. Térjünk át polárkoordinátákra.

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\left(\frac{1}{3}(x^2 + y^2) + 2 \right) - \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \right) \right) \, dx \, dy &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}r^2 \right) r \, d\varphi \, dr = \pi \int_0^3 \left(3 - \frac{1}{3}r^2 \right) r \, dr \\ &= \pi \left[\frac{3}{2}r^2 - \frac{1}{12}r^4 \right]_0^3 = \frac{27}{4}\pi \end{aligned}$$

- s.) Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ és a $3z = x^2 + y^2$ felületek által közrezárt kisebbik térrész térfogatát.

A lehetséges metszéspontok z koordinátái: $3z = 4 - z^2 \Rightarrow z = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} = -4, 1$. A tartomány alapja: $x^2 + y^2 \leq 3$. A térfogatot a paraboloid és a gömbszelet térfogatának összege adja. Térjünk át polárkoordinátákra.

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} - \frac{1}{3}(x^2 + y^2) \right) dx dy &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{4 - r^2} - \frac{1}{3}r^2 \right) r d\varphi dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4 - r^2} - \frac{1}{3}r^2 \right) r dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}r^4 \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{19}{6}\pi \end{aligned}$$

- t.) Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ és a $2z = x^2 + y^2$ felületek által közrezárt kisebbik térrész térfogatát.

A lehetséges metszéspontok z koordinátái: $2z = 3 - z^2 \Rightarrow z = -1 \pm \sqrt{1 + 3} = -1 \pm 2 = -3, 1$. A tartomány alapja: $x^2 + y^2 \leq 2$. A térfogatot a paraboloid és a gömbszelet térfogatának összege adja. Térjünk át polárkoordinátákra.

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\sqrt{3 - x^2 - y^2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right) dx dy &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{3 - r^2} - \frac{1}{2}r^2 \right) r d\varphi dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3 - r^2} - \frac{1}{2}r^2 \right) r dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(3 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}r^4 \right]_0^{\sqrt{2}} = \pi \left(2\sqrt{3} - \frac{5}{3} \right) \end{aligned}$$

- u.) Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ és a $z = x^2 + y^2$ felületek által közrezárt kisebbik térrész térfogatát.

A lehetséges metszéspontok z koordinátái: $z = 4 - z^2 \Rightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$. A tartomány alapja: $x^2 + y^2 \leq \frac{\sqrt{17}-1}{2}$. A térfogatot a paraboloid és a gömbszelet térfogatának összege adja. Térjünk át polárkoordinátákra.

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} - (x^2 + y^2) \right) dx dy &= \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{4 - r^2} - r^2 \right) r d\varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}} \left(\sqrt{4 - r^2} - r^2 \right) r dr = 2\pi \left[-\frac{1}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}} = \frac{\pi}{12} (89 - 17\sqrt{17}) \end{aligned}$$

- v.) Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ és a $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ felületek által közrezárt kisebbik térrész térfogatát.

A lehetséges metszéspontok z koordinátái: $\frac{1}{3}z^2 = 4 - z^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{3}$. A tartomány alapja: $x^2 + y^2 \leq 1$. A térfogatot a kúp és a gömbszelet térfogatának összege adja. Térjünk át polárkoordinátákra.

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} - \sqrt{3(x^2 + y^2)} \right) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{4 - r^2} - \sqrt{3}r \right) r d\varphi dr = 2\pi \int_0^1 \left(\sqrt{4 - r^2} - \sqrt{3}r \right) r dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{3}r^3 \right]_0^1 = \frac{8}{3}\pi(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

- w.) Számítsuk ki az $\iint_D (4x + 3y + 1) \, dx \, dy$ integrál értékét azon a D háromszög tartományon, melynek csúcsai $P_1(1, -1)$, $P_2(2, 4)$ és $P_3(0, 4)$.

y szerinti normáltartománynak tekintve

$$\begin{aligned} \iint_D (4x + 3y + 1) \, dx \, dy &= \int_{-1}^4 \int_{\frac{4-y}{5}}^{\frac{y+6}{5}} (4x + 3y + 1) \, dx \, dy = \int_{-1}^4 [(3y + 1)x + 2x^2]_{\frac{4-y}{5}}^{\frac{y+6}{5}} \, dy \\ &= \int_{-1}^4 \left(\frac{2}{5}(3y + 1)(y + 1) + \frac{2}{25}((y + 6)^2 - (y - 4)^2) \right) \, dy = \int_{-1}^4 \frac{2}{5}(3y + 5)(y + 1) \, dy \\ &= \frac{2}{5} [(y + 1)^3 + (y + 1)^2]_{-1}^4 = 60 \end{aligned}$$

- x.) Számítsuk ki az $\iint_D xy^2 \, dx \, dy$ integrál értékét, ha D az $y = \sqrt{x}$ és az $y = x^2$ görbék által határolt tartomány.

A metszéspontok y koordinátái: $y = y^4 \Rightarrow y = 0, 1$. A görbék a $(0, 0)$ és az $(1, 1)$ pontokban metszik egymást. A tartományt y szerinti normáltartománynak tekintve:

$$\iint_D xy^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} xy^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2 \right]_{y^2}^{\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (y^3 - y^6) \, dy = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{7}y^7 \right]_0^1 = \frac{3}{56}$$

- y.) Számítsuk ki az $\iint_D (3x + 4y + 2) \, dx \, dy$ integrál értékét azon a D háromszög tartományon, melynek csúcsai $P_1(-1, 1)$, $P_2(4, 2)$ és $P_3(4, 0)$.

y szerinti normáltartománynak tekintve

$$\begin{aligned} \iint_D (3x + 4y + 2) \, dx \, dy &= \int_{-1}^4 \int_{\frac{4-x}{5}}^{\frac{x+6}{5}} (3x + 4y + 2) \, dy \, dx = \int_{-1}^4 [(3x + 2)y + 2y^2]_{\frac{4-x}{5}}^{\frac{x+6}{5}} \, dx \\ &= \int_{-1}^4 \left(\frac{2}{5}(3x + 2)(x + 1) + \frac{2}{25}((x + 6)^2 - (x - 4)^2) \right) \, dx = \int_{-1}^4 \frac{6}{5}(x + 2)(x + 1) \, dx \\ &= \left[\frac{2}{5}(x + 1)^3 + \frac{3}{5}(x + 1)^2 \right]_{-1}^4 = 65 \end{aligned}$$

- z.) Számítsuk ki az $\iint_D x^2y \, dx \, dy$ integrál értékét, ha D az $y = \sqrt{x}$ és az $y = \frac{x}{2}$ görbék által határolt tartomány.

A metszéspontok x koordinátái: $4x = x^2 \Rightarrow x = 0, 4$. A görbék a $(0, 0)$ és a $(4, 2)$ pontokban metszik egymást. A tartományt x szerinti normáltartománynak tekintve:

$$\iint_D x^2y \, dx \, dy = \int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} x^2y \, dy \, dx = \int_0^4 \left[\frac{1}{2}x^2y^2 \right]_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} \, dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4 \right) \, dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{40}x^5 \right]_0^4 = \frac{32}{5}$$

Hármas integrál

Integráltranszformáció

Áttérés hengerkoordinátákra

A koordináták közötti áttérés:

$$x(r, \varphi, z) = r \cos \varphi \quad y(r, \varphi, z) = r \sin \varphi \quad z(r, \varphi, z) = z \quad r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}.$$

A Jacobi-mátrix és determinánsa:

$$J(r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} x'_r(r, \varphi, z) & x'_\varphi(r, \varphi, z) & x'_z(r, \varphi, z) \\ y'_r(r, \varphi, z) & y'_\varphi(r, \varphi, z) & y'_z(r, \varphi, z) \\ z'_r(r, \varphi, z) & z'_\varphi(r, \varphi, z) & z'_z(r, \varphi, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\det J(r, \varphi, z) = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r.$$

Röviden: $dx dy dz \rightarrow r dr d\varphi dz$ $x \rightarrow r \cos \varphi$ $y \rightarrow r \sin \varphi$ $z \rightarrow z$.

Áttérés gömbi koordinátákra

A koordináták közötti áttérés:

$$x(r, \varphi, \vartheta) = r \cos \varphi \sin \vartheta \quad y(r, \varphi, \vartheta) = r \sin \varphi \sin \vartheta \quad z(r, \varphi, \vartheta) = r \cos \vartheta \quad r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in [0, \pi].$$

A Jacobi-mátrix és determinánsa:

$$J(r, \varphi, \vartheta) = \begin{bmatrix} x'_r(r, \varphi, \vartheta) & x'_\varphi(r, \varphi, \vartheta) & x'_\vartheta(r, \varphi, \vartheta) \\ y'_r(r, \varphi, \vartheta) & y'_\varphi(r, \varphi, \vartheta) & y'_\vartheta(r, \varphi, \vartheta) \\ z'_r(r, \varphi, \vartheta) & z'_\varphi(r, \varphi, \vartheta) & z'_\vartheta(r, \varphi, \vartheta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{bmatrix}$$
$$\det J(r, \varphi, \vartheta) = r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)(\sin^3 \vartheta + \sin \vartheta \cos^2 \vartheta) = r^2 \sin \vartheta.$$

Röviden: $dx dy dz \rightarrow r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta$ $x \rightarrow r \cos \varphi \sin \vartheta$ $y \rightarrow r \sin \varphi \sin \vartheta$ $z \rightarrow r \cos \vartheta$.

Példák

- a.) **Határozzuk meg az R sugarú gömb térfogatát.**

Térjünk át gömbi koordinátákba.

$$\begin{aligned} \iiint_D 1 dx dy dz &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr = 2\pi \int_0^R \int_0^\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta dr = \int_0^R r^2 [-\cos \vartheta]_0^\pi dr \\ &= 4\pi \int_0^R r^2 dr = 4\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

- b.) **Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ és a $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ felületek által közrezárt kisebbik térrész térfogatát.**

A kúp nyílásszöge $\arccos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2+1^2}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$. Térjünk át gömbi koordinátákba.

$$\begin{aligned} \iiint_D 1 dx dy dz &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr = 2\pi \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2 \sin \vartheta d\vartheta dr = 2\pi \int_0^2 r^2 [-\cos \vartheta]_0^{\frac{\pi}{6}} d\vartheta dr \\ &= (2 - \sqrt{3})\pi \int_0^2 r^2 dr = (2 - \sqrt{3})\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^2 = \frac{16 - 8\sqrt{3}}{3} \pi \end{aligned}$$

- c.) Számítsuk ki az $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ függvénynek az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ tartomány feletti integrálját.

Térjünk át gömbi koordinátákra.

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr = 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi r^4 \sin \vartheta d\vartheta dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r^4 [-\cos \vartheta]_0^\pi dr = 4\pi \int_0^1 r^4 dr = \left[\frac{4\pi}{5} r^5 \right]_0^1 = \frac{4\pi}{5} \end{aligned}$$

- d.) Számítsuk ki az $f(x, y, z) = x + 2y - z + 5$ függvénynek az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ tartomány feletti integrálját.

Az egyik koordinátában páratlan $x, 2y, -z$ tagok integrálja zérus a mindhárom koordinátában szimmetrikus téglatest tartományra integrálva, ezen tagokat így elhagyhatjuk. Térjünk át gömbi koordinátákra.

$$\begin{aligned} \iiint_D (x + 2y - z + 5) dx dy dz &= \iiint_D 5 dx dy dz = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 5r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr = 10\pi \int_0^1 \int_0^\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta dr \\ &= 10\pi \int_0^1 r^2 [-\cos \vartheta]_0^\pi dr = 20\pi \int_0^1 r^2 dr = \left[\frac{20\pi}{3} r^3 \right]_0^1 = \frac{20\pi}{3} \end{aligned}$$

- e.) Számítsuk ki az $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ függvénynek az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0$ tartomány feletti integrálját.

Térjünk át gömbi koordinátákra.

$$\begin{aligned} \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cdot r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr = \pi \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin \vartheta d\vartheta dr \\ &= \pi \int_0^1 r^3 [-\cos \vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \pi \int_0^1 r^3 dr = \left[\frac{\pi}{4} r^4 \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

- f.) Számítsuk ki az $f(x, y, z) = zx^2 \sqrt{x^2 + y^2}$ függvénynek a $z = 0, z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4$ felületek által határolt tartomány feletti integrálját.

Térjünk át hengerkoordinátákra.

$$\begin{aligned} \iiint_D zx^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} zr^3 \cos^2 \varphi \cdot r dz d\varphi dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^4 \cos^2 \varphi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{r^2} d\varphi dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^8 \cos^2 \varphi d\varphi dr = \frac{1}{4} \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^8 (\cos 2\varphi + 1) d\varphi dr = \frac{\pi}{2} \int_0^2 r^8 dr = \left[\frac{\pi}{18} r^9 \right]_0^2 = \frac{256}{9} \pi \end{aligned}$$

- g.) Számítsuk ki az $f(x, y, z) = zx^2 \sqrt{x^2 + y^2}$ függvénynek a $z = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 4$ felületek által határolt tartomány feletti integrálját.

Térjünk át hengerkoordinátákra.

$$\begin{aligned} \iiint_D zx^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r zr^3 \cos^2 \varphi \cdot r dz d\varphi dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^4 \cos^2 \varphi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^r d\varphi dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^6 \cos^2 \varphi d\varphi dr = \frac{1}{4} \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^6 (\cos 2\varphi + 1) d\varphi dr = \frac{\pi}{2} \int_0^2 r^6 dr = \left[\frac{\pi}{14} r^7 \right]_0^2 = \frac{64}{7} \pi \end{aligned}$$

- h.) Számítsuk ki az $f(x, y, z) = x^2 y z$ függvénynek az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ tartomány feletti integrálját.

Térjünk át gömbi koordinátákra.

$$\begin{aligned} \iiint_D x^2 y z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^4 \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos^2 \varphi) \cdot r^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^6 \sin^4 \vartheta \cos \vartheta \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) d\vartheta \, dr = \frac{1}{3} \int_0^1 r^6 \left[\frac{1}{5} \sin^5 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \, dr = \frac{1}{15} \left[\frac{1}{7} r^7 \right]_0^1 = \frac{1}{105} \end{aligned}$$

- i.) Számítsuk ki hármass integrállal az $x^2 + y^2 = 9, z = 0, x + z = 4$ felületek által határolt térrész térfogatát.

Térjünk át hengerkoordinátákra.

$$\begin{aligned} \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r \cos \varphi} r \, dz \, d\varphi \, dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} (4 - r \cos \varphi) r \, d\varphi \, dr = 4 \int_0^3 \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dr \\ &= 8\pi \int_0^3 r \, dr = 8\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^3 = 36\pi \end{aligned}$$

- j.) Határozzunk meg az integrálás határait az $\iiint_D f(x, y, z) \, dV$ hármass integrálban, ha a D tartomány az $O(0, 0, 0) A(1, 0, 0) B(0, 1, 0) C(0, 0, 1)$ tetraéder.

A tetraéder xy síkra vett vetülete alapján megállapítható az x, y változók integrálási határai. A z változó alsó integrálási határa 0, felső integrálási határát az A, B, C pontokra illesztett sík egyenlete adja.

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

Felületek

Felület megadásának módjai:

- explicit $z = f(x, y)$ egyenlettel
- implicit $F(x, y, z) = 0$ egyenlettel
- $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ vektorértékű kétváltozós függvény által, a felület pontjait az (u, v) paramétersík egy $D \subset \mathbb{R}^2$ tartományának képe adja meg

Paraméteres felületek

Felületi görbék, érintő egyenes egyenlete

A $v = v_0$ illetve $u = u_0$ egyenletekkel leírható felületi görbék (u_0, v_0) pontbeli érintővektorai:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u_0, v_0) &= \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \vec{j} + \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \vec{k} \right) \Big|_{(u_0, v_0)} \quad \text{illetve} \\ \vec{r}_v(u_0, v_0) &= \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \vec{i} + \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \vec{j} + \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \vec{k} \right) \Big|_{(u_0, v_0)}. \end{aligned}$$

A görbék érintő egyenesének egyenletei:

$$\begin{aligned}\vec{e}_u(t) &= \vec{r}(u_0, v_0) + t \cdot \vec{r}_u(u_0, v_0) \quad \text{illetve} \\ \vec{e}_v(t) &= \vec{r}(u_0, v_0) + t \cdot \vec{r}_v(u_0, v_0).\end{aligned}$$

Az $\vec{r}(u, v)$ felületen haladó általános $\vec{r}(t)$ térgörbe leírható alkalmas $u(t), v(t)$ függvények megadásával:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

Az $u(t), v(t)$ paraméterezésű felületi görbe érintővektora a t_0 pontban:

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{r}_u(u(t_0), v(t_0)) \cdot \dot{u}(t_0) + \vec{r}_v(u(t_0), v(t_0)) \cdot \dot{v}(t_0),$$

érintő egyenesének egyenlete ugyanezen pontban:

$$\vec{e}(s) = \vec{r}(u(t_0), v(t_0)) + s \cdot (\vec{r}_u(u(t_0), v(t_0)) \cdot \dot{u}(t_0) + \vec{r}_v(u(t_0), v(t_0)) \cdot \dot{v}(t_0)).$$

Érintősík egyenlete

Az $\vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)$ érintővektorok vektoriális szorzata megadja az (u_0, v_0) pontbeli felületi normálist:

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0),$$

melynek segítségével az érintősík egyenlete:

$$0 = (\vec{r} - \vec{r}(u_0, v_0)) \cdot \vec{n}(u_0, v_0).$$

Felzínyszámítás

Az $\vec{r}(u, v)$ paraméterezésű F felület D paramétertartomány feletti részének felszíne:

$$\iint_{F(D)} dS = \iint_D |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv.$$

Hengerpalást Az elemi felület nagysága r sugarú hengerpaláston:

$$dS = |\vec{r}_\varphi(\varphi, z) \times \vec{r}_z(\varphi, z)| d\varphi dz = |(-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0) \times (0, 0, 1)| d\varphi dz = r d\varphi dz.$$

Gömbfelület Az elemi felület nagysága r sugarú gömbfelületen:

$$\begin{aligned}dS &= |\vec{r}_\varphi(\varphi, \vartheta) \times \vec{r}_\vartheta(\varphi, \vartheta)| d\varphi d\vartheta = \\ &= |(-r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \varphi \sin \vartheta, 0) \times (r \cos \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, -r \sin \vartheta)| d\varphi d\vartheta = r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta.\end{aligned}$$

Explicit képlettel megadott felületek

A $z = f(x, y)$ explicit egyenlet által meghatározott felület ($u = x, v = y$ paramétereken keresztül) paraméteres alakja:

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}.$$

Érintősík egyenlete

Az $\vec{r}_x(x_0, y_0) = (1, 0, f'_x(x_0, y_0))$ és $\vec{r}_y(x_0, y_0) = (0, 1, f'_y(x_0, y_0))$ érintővektorok vektoriális szorzata megadja a felület (x_0, y_0) pontbeli felületi normálisát:

$$\begin{aligned}\vec{n}(x_0, y_0) &= \vec{r}_x(x_0, y_0) \times \vec{r}_y(x_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} = -f'_x(x_0, y_0)\vec{i} - f'_y(x_0, y_0)\vec{j} + \vec{k} \\ &= (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1),\end{aligned}$$

mellyel kifejezve az érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{r} - \vec{r}(u_0, v_0)) \cdot \vec{n}(u_0, v_0) = (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \cdot (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1) \\ 0 &= f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (f(x_0, y_0) - z). \end{aligned}$$

Felszínszámítás

A $\vec{r}(x, y)$ paraméterezésű F felület D tartomány feletti részének felszíne:

$$\iint_{F(D)} dS = \iint_D |\vec{r}_x(x, y) \times \vec{r}_y(x, y)| dx dy = \iint_D \sqrt{f'^2_x(x_0, y_0) + f'^2_y(x_0, y_0) + 1} dx dy.$$

Érintősík- és felszínszámítás lépései

1. Az F felület paraméterezése (amennyiben nem paraméteresen adott)
2. $\vec{r}_u(u, v)$ és $\vec{r}_v(u, v)$ meghatározása
3. $\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$ kiszámítása, az u_0, v_0 pontbeli érintősík

$$0 = \vec{n}(u_0, v_0) \cdot ((x, y, z) - \vec{r}(u_0, v_0))$$

egyenletének felírása

4. $dS = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv$ kiszámítása, majd az

$$\iint_{F(D)} dS = \iint_D |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv$$

integrál (felszín) kiszámítása

Feladatok

- a.) **Milyen felületet határoz meg a $\vec{r}(u, v) = (u, v, u + v)$ $u, v \in \mathbb{R}$ paraméteres egyenlet?**

$x + y - z = u + v - (u + v) = 0 \Rightarrow$ a paraméterezett felület az $x + y - z = 0$ egyenletű sík.

- b.) **Milyen felületet határoz meg a $\vec{r}(u, v) = (3 \cos u, 3 \sin u, v)$ $0 \leq u \leq 2\pi, v \in \mathbb{R}$ paraméteres egyenlet?**

$x^2 + y^2 = 9(\cos^2 u + \sin^2 u) = 9, z = v \Rightarrow$ a paraméterezett egyenlet az $x^2 + y^2 = 9$ felület hengerpalást.

- c.) **Milyen felületet határoz meg a $\vec{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$ $0 \leq u \leq 2\pi, v \in \mathbb{R}$ paraméteres egyenlet?**

$x^2 + y^2 = v^2(\cos^2 u + \sin^2 u) = v^2, z = v \Rightarrow$ a paraméterezett felület az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenletű kúp.

- d.) **Milyen felületet határoz meg a $\vec{r}(u, v) = (5 \sin u \cos v, 5 \sin u \sin v, 5 \cos u)$ $0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$ paraméteres egyenlet?**

$x^2 + y^2 + z^2 = 25(\cos^2 v + \sin^2 v) \sin^2 u + 25 \cos^2 u = 25 \Rightarrow$ a paraméterezett felület az $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ egyenletű gömbfelület.

- e.) **Milyen felületet határoz meg a $\vec{r}(u, v) = (u, u^2, v)$ $u, v \in \mathbb{R}$ paraméteres egyenlet?**

$x^2 = y, z = v \Rightarrow$ a paraméterezett felület az $y = x^2$ egyenletű z tengely irányában eltolt parabola.

- f.) **Határozzuk meg az $\vec{r}(u, v) = (u, \sqrt{4-u^2}, v)$ felület $(1, 1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét.**

$$\vec{r}(u, v) = (u, \sqrt{4-u^2}, v) \rightarrow \vec{r}(1, 1) = (1, \sqrt{3}, 1)$$

$$\vec{r}_u(u, v) = (1, \frac{-u}{\sqrt{4-u^2}}, 0) \rightarrow \vec{r}_u(1, 1) = (1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (0, 0, 1) \rightarrow \vec{r}_v(1, 1) = (0, 0, 1)$$

$$\vec{n}(1, 1) = \vec{r}_u(1, 1) \times \vec{r}_v(1, 1) = (1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) \times (0, 0, 1) = -(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, 0)$$

$$\text{Az érintő sík egyenlete: } 0 = -(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, 0) \cdot (x-1, y-\sqrt{3}, z-1).$$

- g.) **Határozzuk meg az $\vec{r}(u, v) = (3 \sin u, 3 \cos u, v^2)$ felület $(\pi, 1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét.**

$$\vec{r}(u, v) = (3 \sin u, 3 \cos u, v^2) \rightarrow \vec{r}(\pi, 1) = (0, -3, 1)$$

$$\vec{r}_u(u, v) = (3 \cos u, -3 \sin u, 0) \rightarrow \vec{r}_u(\pi, 1) = (-3, 0, 0)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (0, 0, 2v) \rightarrow \vec{r}_v(\pi, 1) = (0, 0, 2)$$

$$\vec{n}(\pi, 1) = \vec{r}_u(\pi, 1) \times \vec{r}_v(\pi, 1) = (-3, 0, 0) \times (0, 0, 2) = (0, 6, 0)$$

$$\text{Az érintő sík egyenlete: } 0 = (0, 6, 0) \cdot (x, y+3, z-1).$$

- h.) **Határozzuk meg az $\vec{r}(u, v) = (u, uv, v-u^2)$ felület $(2, -1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét.**

$$\vec{r}(u, v) = (u, uv, v-u^2) \rightarrow \vec{r}(2, -1) = (2, -2, -5)$$

$$\vec{r}_u(u, v) = (1, v, -2u) \rightarrow \vec{r}_u(2, -1) = (1, -1, -4)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (0, u, 1) \rightarrow \vec{r}_v(2, -1) = (0, 2, 1)$$

$$\vec{n}(2, -1) = \vec{r}_u(2, -1) \times \vec{r}_v(2, -1) = (1, -1, -4) \times (0, 2, 1) = (7, -1, 2)$$

$$\text{Az érintő sík egyenlete: } 0 = (7, -1, 2) \cdot (x-2, y+2, z+5).$$

- i.) **Számítsuk ki az $\vec{r}(u, v) = (u, 3 \cos v, 3 \sin v)$ $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \pi$ felület felszínét.**

$$\vec{r}_u(u, v) = (1, 0, 0)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (0, -3 \sin v, 3 \cos v)$$

$$dS = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv = |(0, -3 \cos v, -3 \sin v)| du dv = \sqrt{9(\cos^2 v + \sin^2 v)} du dv = 3 du dv$$

$$\iint_F dS = \int_0^1 \int_0^\pi 3 dv du = \int_0^1 3\pi du = 3\pi$$

- j.) **Számítsuk ki az $\vec{r}(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, u+v)$ síkfelület felszínét a $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 1$ tartományban.**

$$\vec{r}_u(u, v) = (-\sin u - v \cos u, \cos u - v \sin u, 1)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (-\sin u, \cos u, 1)$$

$$dS = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv = |(\vec{r}_u(u, v) - \vec{r}_v(u, v)) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv$$

$$= |v(-\sin u, \cos u, -1)| du dv = \sqrt{v^2(\cos^2 u + \sin^2 u + 1)} du dv = \sqrt{2}v du dv$$

$$\iint_F dS = \int_0^1 \int_0^\pi \sqrt{2}v du dv = \int_0^1 \sqrt{2}\pi dv = \sqrt{2}\pi \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

k.) Számítsuk ki az $\vec{r}(u, v) = (u, u \cos v, u \sin v)$ $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$ felület felszínét.

$$\vec{r}_u(u, v) = (1, \cos v, \sin v)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (0, -u \sin v, u \cos v)$$

$$dS = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv = |(u(\cos^2 v + \sin^2 v), -u \cos v, -u \sin v)| du dv$$

$$= \sqrt{u^2(\cos^2 v + \sin^2 v + 1)} du dv = \sqrt{2}u du dv$$

$$\iint_F dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}u dv du = \int_0^1 2\sqrt{2}\pi u du = 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \sqrt{2}\pi$$

l.) Számítsuk ki az $\vec{r}(u, v) = (u + v, u - v, v)$ $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi$ felület felszínét.

$$\vec{r}_u(u, v) = (1, 1, 0)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (1, -1, 1)$$

$$dS = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv = |(1, -1, -2)| du dv = \sqrt{1 + 1 + 2^2} du dv = \sqrt{6} du dv$$

$$\iint_F dS = \int_0^1 \int_0^\pi \sqrt{6} dv du = \int_0^1 \sqrt{6}\pi du = \sqrt{6}\pi$$

m.) Számítsuk ki az $\vec{r}(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$ $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$ tóruszfelület felszínét ($0 < b < a$).

$$\vec{r}_u(u, v) = (-b \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, b \cos u)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (-(a + b \cos u) \sin v, (a + b \cos u) \cos v, 0)$$

$$dS = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv = |-b(a + b \cos u)(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u(\cos^2 v + \sin^2 v))| du dv$$

$$= |b(a + b \cos u)| \sqrt{\cos^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin^2 u} du dv = b(a + b \cos u) du dv$$

$$\iint_F dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} b(a + b \cos u) dv du = \int_0^{2\pi} 2\pi b(a + b \cos u) du = \int_0^{2\pi} 2\pi b a du = 4\pi^2 ab$$

Skalármező, vektormező

Gradiens

A $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező gradiense derékszögű koordinátákban:

$$\text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}.$$

A gradiens hengerkoordinátákban:

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z.$$

A gradiens gömbi koordinátákban:

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

Geometriai jelentése: iránya megadja a legnagyobb meredekség irányát, hossza megadja a legnagyobb meredekség nagyságát. Lokális szélsőérték helyeken értéke 0. Legfontosabb tulajdonságai:

- $\text{grad}(c \cdot \phi) = c \cdot \text{grad } \phi$
- $\text{grad}(\phi_1 + \phi_2) = \text{grad } \phi_1 + \text{grad } \phi_2$
- $\text{grad}(\phi_1 \cdot \phi_2) = \phi_1 \cdot \text{grad } \phi_2 + \phi_2 \cdot \text{grad } \phi_1$

Íránymenti derivált

A $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező $\vec{v}$ irányvektor menti deriváltja:

$$D_{\vec{v}}\phi(\vec{r}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(\vec{r}_0 + \vec{v}t) - \phi(\vec{r}_0)}{t} = \vec{v} \cdot \text{grad } \phi(\vec{r}_0).$$

Divergencia

A $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező divergenciája derékszögű koordinátákban:

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

A divergencia hengerkoordinátákban:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

A divergencia gömbi koordinátákban:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(v_\vartheta \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Legfontosabb tulajdonságai:

- $\text{div}(c \cdot \vec{v}) = c \cdot \text{div } \vec{v}$
- $\text{div}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \text{div } \vec{v}_1 + \text{div } \vec{v}_2$
- $\text{div}(\phi \cdot \vec{v}) = \phi \cdot \text{div } \vec{v} + \text{grad } \phi \cdot \vec{v}$
- $\text{div}(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = \text{rot } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \cdot \text{rot } \vec{v}_2$

Rotáció

A $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező rotációja derékszögű koordinátákban:

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

A rotáció hengerkoordinátákban:

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z.$$

A rotáció gömbi koordinátákban:

$$\text{rot } \vec{v} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial(v_\varphi \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rv_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{e}_\varphi.$$

Legfontosabb tulajdonságai:

- $\text{rot}(c \cdot \vec{v}) = c \cdot \text{rot } \vec{v}$
- $\text{rot}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \text{rot } \vec{v}_1 + \text{rot } \vec{v}_2$
- $\text{rot}(\phi \cdot \vec{v}) = \phi \cdot \text{rot } \vec{v} + \text{grad } \phi \times \vec{v}$
- $\text{rot}(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = \vec{v}_1 \cdot \text{div } \vec{v}_2 - \vec{v}_2 \cdot \text{div } \vec{v}_1 - (\vec{v}_1 \cdot \text{grad}) \vec{v}_2 + (\vec{v}_2 \cdot \text{grad}) \vec{v}_1$

Laplace-operátor

A Laplace-operátor a nabla-operátor négyzete $\Delta = \vec{\nabla}^2$. A Laplace-operátor derékszögű koordinátákban:

$$\Delta\phi = \vec{\nabla}^2\phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

A Laplace-operátor hengerkoordinátákban:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

A Laplace-operátor gömbi koordinátákban:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial\phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2\phi}{\partial \varphi^2}.$$

Legfontosabb tulajdonságai:

- $\Delta(c \cdot \phi) = c \cdot \Delta\phi$
- $\Delta(\phi_1 + \phi_2) = \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2$
- $\Delta(\phi_1 \cdot \phi_2) = \phi_1 \Delta\phi_2 + \phi_2 \Delta\phi_1 + 2 \operatorname{grad} \phi_1 \cdot \operatorname{grad} \phi_2$

További összefüggések

Azonosságok:

- $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = \vec{0}$
- $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})(\vec{r}) = 0$
- $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})(\vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(\vec{r}) - \vec{\nabla}^2 \vec{v}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) - \Delta \vec{v}$, ahol a Δ Laplace-operátort komponensenként értelmezzük vektormezőkre

A vektormező *örvénymentes*, ha rotációja azonosan zérus, *forrásmentes*, ha divergenciája azonosan zérus.

Skalárpotenciál

Potenciál létezése

A ϕ skalármező a $\vec{v}(\vec{r})$ vektormező *potenciálfüggvénye* a $D \subset \mathbb{R}^3$ tartomány felett ha minden $x \in D$ pontban $\vec{v}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \phi(\vec{r})$.

Legyen a $\vec{v}(\vec{r})$ vektormező folytonosan differenciálható a $D \subset \mathbb{R}^3$ tartomány minden pontjában. Ekkor a $\vec{v}(\vec{r})$ vektormezőnek pontosan akkor van potenciálfüggvénye a D tartományon, ha ott örvénymentes, azaz $\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}) = \vec{0}$ a D tartomány minden pontjában.

Potenciál meghatározása

Legyen $\vec{v}(\vec{r})$ örvénymentes vektormező, azaz $\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}) = \vec{0}$. Ekkor létezik $\phi(x, y, z)$ potenciálfüggvény. A potenciálfüggvény meghatározásának lépései:

1. Számítsuk ki a v_x függvény x szerinti integrálját:

$$\phi(x, y, z) = \int v_x(x, y, z) dx = f(x, y, z) + C(y, z)$$

2. Képezzük az f'_y deriváltat, majd számítsuk ki a $v_y - f'_y$ függvény y szerinti integrálját:

$$C(y, z) = \int (v_y(x, y, z) - f'_y(x, y, z)) dy = g(y, z) + C(z)$$

3. Képezzük az f'_z és g'_z deriváltat, majd számítsuk ki a $v_z - f'_z - g'_z$ függvény z szerinti integrálját:

$$C(z) = \int (v_z(x, y, z) - f'_z(x, y, z) - g'_z(y, z)) \, dz = h(z) + C$$

4. A potenciálfüggvény:

$$\phi(x, y, z) = f(x, y, z) + g(y, z) + h(z) + C$$

Amennyiben $\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = \vec{0}$ a $g(y, z)$ és $h(z)$ primitív függvényekben valóban nem jelenik meg a jelöletlen változóktól való függés, mert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(v_y(x, y, z) - f'_y(x, y, z))}{\partial x} &= \frac{\partial v_y}{\partial x}(x, y, z) - f''_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial v_y}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial(v_z(x, y, z) - f'_z(x, y, z) - g'_z(y, z))}{\partial x} &= \frac{\partial v_z}{\partial x}(x, y, z) - f''_{xz}(x, y, z) - 0 = \frac{\partial v_z}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial v_x}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial(v_z(x, y, z) - f'_z(x, y, z) - g'_z(y, z))}{\partial y} &= \frac{\partial v_z}{\partial y}(x, y, z) - f''_{yz}(x, y, z) - g''_{yz}(x, y, z) = \frac{\partial v_z}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial v_y}{\partial z}(x, y, z). \end{aligned}$$

Feladatok

- a.) **Van-e potenciálja a $\vec{v}(\vec{r}) = (2xy, 2yz^2, x^2 + 2y^2z - 1)$ vektortérnek? Ha igen, határozzuk meg a potenciálfüggvényt.**

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (4yz - 4yz, 0 - 2x, 0 - 2x) = (0, -2x, -2x) \neq (0, 0, 0)$$

A vektormező nem örvénymentes, ezért nincs potenciálfüggvénye.

- b.) **Van-e potenciálja a $\vec{v}(\vec{r}) = (6x^2y - 4yz^3, 2x^3 - 4xz^3, -12xyz^2)$ vektortérnek? Ha igen, határozzuk meg a potenciálfüggvényt.**

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (-12xz^2 + 12xz^2, -12yz^2 + 12yz^2, (6x^2 - 4z^3) - (6x^2 - 4z^3)) = (0, 0, 0)$$

A vektormező örvénymentes, tehát van potenciálfüggvénye.

$$\phi = \int v_x \, dx = \int (6x^2y - 4yz^3) \, dx = 2x^3y - 4xyz^3 + C(y, z)$$

$$\phi'_y = 2x^3 - 4xz^3 + C'_y(y, z) = 2x^3 - 4xz^3 \Rightarrow C'_y(y, z) = 0$$

$$C(y, z) = \int C'_y(y, z) \, dy = C(z)$$

$$\phi'_z = -12xyz^2 + C'_z(z) = -12xyz^2 \Rightarrow C'_z(z) = 0$$

$$C(z) = \int C'_z(z) \, dz = C$$

A potenciálfüggvény a $\phi(x, y, z) = 2x^3y - 4xyz^3 + C$ függvény.

- c.) **Van-e potenciálja a $\vec{v}(\vec{r}) = (2xy - z, x^2 + z, y - x)$ vektortérnek? Ha igen, határozzuk meg a potenciálfüggvényt.**

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (1 - 1, -1 + 1, 2x - 2x) = (0, 0, 0)$$

A vektormező örvénymentes, tehát van potenciálfüggvénye.

$$\phi = \int v_x dx = \int (2xy - z) dx = x^2y - zx + C(y, z)$$

$$\phi'_y = x^2 + C'_y(y, z) = x^2 + z \Rightarrow C'_y(y, z) = z$$

$$C(y, z) = \int C'_y(y, z) dy = \int z dy = yz + C(z)$$

$$\phi'_z = y - xC'_z(z) = y - x \Rightarrow C'_z(z) = 0$$

$$C(z) = \int C'_z(z) dz = C$$

A potenciálfüggvény a $\phi(x, y, z) = x^2y - zx + yz + C$ függvény.

- d.) **Adott a $\vec{v}(\vec{r}) = (2xe^y + e^xz^2, x^2e^y - 2ye^z, 2ze^x - y^2e^z)$ vektor-vektor függvény. Számítsuk ki a $\vec{v}$ vektormező divergenciáját és rotációját. Van-e potenciálfüggvénye a $\vec{v}$ vektortérnek? Ha igen, határozzuk meg a potenciálfüggvényt.**

$$\text{div } \vec{v}(\vec{r}) = (e^xz^2 + 2e^y) + (x^2e^y - 2e^z) + (2e^x - y^2e^z) = (z^2 + 2)e^x + (x^2 + 2)e^y - (y^2 + 2)e^z$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (-2ye^z + 2ye^z, 2ze^x - 2ze^x, 2xe^y - 2xe^y) = (0, 0, 0)$$

A vektormező örvénymentes, tehát van potenciálfüggvénye.

$$\phi = \int v_x dx = \int (2xe^y + e^xz^2) dx = x^2e^y + e^xz^2 + C(y, z)$$

$$\phi'_y = x^2e^y + C'_y(y, z) = x^2e^y - 2ye^z \Rightarrow C'_y(y, z) = -2ye^z$$

$$C(y, z) = \int C'_y(y, z) dy = \int (-2ye^z) dy = -y^2e^z + C(z)$$

$$\phi'_z = 2ze^x - y^2e^z + C'_z(z) = 2ze^x - y^2e^z \Rightarrow C'_z(z) = 0$$

$$C(z) = \int C'_z(z) dz = C$$

A potenciálfüggvény a $\phi(x, y, z) = z^2e^x + x^2e^y - y^2e^z + C$ függvény.

- e.) **Van-e potenciálja a $\vec{v}(\vec{r}) = (2xy - z^2 - yz, x^2 + z^2 - xz, 2yz - 2xz - xy)$ vektortérnek? Ha igen, határozzuk meg a potenciálfüggvényt.**

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (2z - x - 2z + x, -2z - y + 2z + y, 2x - z - 2x + z) = (0, 0, 0)$$

A vektormező örvénymentes, tehát van potenciálfüggvénye.

$$\phi = \int v_x dx = \int (2xy - z^2 - yz) dx = x^2y - z^2x - xyz + C(y, z)$$

$$\phi'_y = x^2 - xz + C'_y(y, z) = x^2 - xz + z^2 \Rightarrow C'_y(y, z) = z^2$$

$$C(y, z) = \int C'_y(y, z) dy = \int z^2 dy = z^2y + C(z)$$

$$\phi'_z = -2zx - xy + 2zy + C'_z(z) = 2yz - 2xz - xy \Rightarrow C'_z(z) = 0$$

$$C(z) = \int C'_z(z) dz = C$$

A potenciálfüggvény a $\phi(x, y, z) = x^2y - z^2x + z^2y - xyz + C$ függvény.

- f.) **Örvénymentes-e a $\vec{v}(\vec{r}) = (ye^{xy}, ye^{xy}, 1 - \sin z)$ vektortér?**

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (0 - 0, 0 - 0, y^2e^{xy} - (xy + 1)e^{xy}) = (0, 0, (y^2 - xy - 1)e^{xy})$$

A vektormező nem örvénymentes.

- g.) **Forrásmentes-e a $\vec{v}(\vec{r}) = (x + y^2 - z^2, -x^2 + y + z^2, x^2 - y^2 + z)$ vektortér?**

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = 1 + 1 + 1 = 3$$

A vektormező nem forrásmentes.

- h.) **Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (6xy^2, 2 + xy, z - 3x^2y)$ vektortér divergenciáját és rotációját.**

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = 6y^2 + x + 1$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}) = (-3x^2 - 0, 0 + 6xy, y - 12xy) = (-3x^2, 6xy, y - 12xy)$$

- i.) **Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (3z^2y, yz, 4yz - 2xy)$ vektortér divergenciáját és rotációját. Forrásmentes-e a vektormező?**

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = z + 4y$$

A vektormező nem forrásmentes.

$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}) = (4z - 2x - y, 6zy + 2y, 0 - 3z^2) = (-2x - y + 4z, 2y + 6yz, -3z^2)$$

- j.) **Mutassuk meg, hogy az egységnyi ponttöltés $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ tere örvénymentes és forrásmentes.**

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial F_x}{\partial x}(\vec{r}) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(\vec{r}) + \frac{\partial F_z}{\partial z}(\vec{r}) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{|\vec{r}|^5} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2}{|\vec{r}|^5} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2}{|\vec{r}|^5} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)(\vec{r}) = - \left(\frac{3yz - 3yz}{|\vec{r}|^5}, \frac{3zx - 3zx}{|\vec{r}|^5}, \frac{3xy - 3xy}{|\vec{r}|^5} \right) = (0, 0, 0)$$

A ponttöltés mezője tehát örvénymentes és forrásmentes a teljes értelmezési tartományban $(\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0))$.

- k.) **Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (3x + 2y, -5x - z^2, x^2 - y^2)$ vektormező divergenciáját és rotációját.**

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = 3 + 0 + 0 = 3$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}) = (-2y + 2z, 0 - 2x, -5 - 2) = (2z - 2y, -2x, -7)$$

- l.) **Legyen ϕ skalármező $\phi(\vec{r}) = x^2y - yz^3$. Mennyi $\vec{\nabla}\phi$ és $\Delta\phi$ értéke?**

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \operatorname{grad} \phi(\vec{r}) = (2xy, x^2 - z^3, -3yz^2)$$

$$\Delta\phi(\vec{r}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi(\vec{r}) = 2y + 0 - 6yz = 2y(1 - 3z)$$

Vonalintegrál

Vonalintegrál kiszámítása

A $\vec{v}(\vec{r})$ vektormező vonalintegrálja az $\vec{r}(t)$ paraméterezésű Γ görbe t_1 és t_2 közötti szakasza mentén:

$$\int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt.$$

Kiszámításának lépései:

1. A Γ görbe paraméterezése (amennyiben nem paraméteresen adott)
2. $\dot{\vec{r}}(t)$ meghatározása
3. $\vec{v}(\vec{r}(t))$ meghatározása
4. $\vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$ skalárszorzat felírása, majd az

$$\int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

integrál (vonaltintegrál) elvégzése

Potenciális erőter vonaltintegrálja

Potenciális erőter esetén $\vec{v}(\vec{r}) = \text{grad } \phi(\vec{r})$ alakban áll elő, ezért a vektormező vonaltintegrálja az $\vec{r}(t)$ paraméterezésű Γ görbe t_1 és t_2 közötti szakasza mentén:

$$\int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \text{grad } \phi(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi(\vec{r}(t))}{dt} dt = \phi(\vec{r}(t_2)) - \phi(\vec{r}(t_1)).$$

Kiszámításának lépései:

1. $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ fennállásának ellenőrzése. Zárt Γ görbe esetén a vonaltintegrál zérus
2. A $\phi(\vec{r})$ potenciálfüggvény meghatározása
3. A Γ görbe $\vec{r}_A$ kezdő- és $\vec{r}_B$ végpontjának megállapítása, majd a vonaltintegrál meghatározása az

$$\int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}_B) - \phi(\vec{r}_A)$$

képlet szerint

Feladatok

- a.) Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (3x + 2y, -5x - z^2, x^2 - y^2)$ vektormező vonaltintegrálját az $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \frac{2t}{\pi})$ paraméterezésű Γ görbe $t_1 = 0$ és $t_2 = 2\pi$ közötti szakasza mentén.

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, \frac{2}{\pi})$$

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = (3 \cos t + 2 \sin t, -5 \cos t - \frac{4t^2}{\pi^2}, \cos^2 t - \sin^2 t)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_0^{2\pi} (-3 \cos t \sin t - 2 \sin^2 t - 5 \cos^2 t - \frac{4t^2}{\pi^2} \cos t - \frac{2}{\pi} \cos^2 t + \frac{2}{\pi} \sin^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\frac{4t^2}{\pi^2} \cos t - \frac{3}{2} \sin 2t - \frac{7}{2} - (\frac{2}{\pi} + \frac{3}{2}) \cos 2t) dt = \int_0^{2\pi} (-\frac{4t^2}{\pi^2} \cos t - \frac{7}{2}) dt \\ &= -7\pi - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{2\pi} t^2 \cos t dt = -7\pi - \frac{4}{\pi^2} \left([t^2 \sin t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t \sin t dt \right) \\ &= -7\pi + \frac{4}{\pi^2} \left([-2t \cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2 \cos t dt \right) = -7\pi - \frac{16}{\pi} \end{aligned}$$

- b.) Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (xy^2z, x^2yz, \frac{1}{2}x^2y^2)$ vektor-vektor függvény $x^2 + y^2 = 9, z = 0$ kör mentén vett vonaltintegrálját.

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = (0, 0, \frac{1}{2} \cos^2 t \sin^2 t)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0$$

Másképpen.

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (x^2 y - x^2 y, xy^2 - x^2 y, 2xyz - 2xyz) = (0, 0, 0)$$

A vektormező örvénymentes, ezért van potenciálfüggvénye. Potenciálos vektormező zárt görbe menti integrálja zérus, vagyis

$$\oint_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

- c.) Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (6xy^2, 2 + xy, z - 3x^2y)$ vektormező vonalintegrálját az $\vec{r}(t) = (t, 2t^2, 1 + t^2)$ paraméterezésű Γ görbe $t_1 = 0$ és $t_2 = 2$ közötti szakasza mentén.

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1, 4t, 2t)$$

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = (24t^5, 2 + 2t^3, 1 + t^2 - 6t^4)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_0^2 (24t^5 + 8t^4 + 8t + 2t + 2t^3 - 12t^5) dt = \int_0^2 (12t^5 + 8t^4 + 2t^3 + 10t) dt \\ &= \left[2t^6 + \frac{8}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^4 + 5t^2 \right]_0^2 = \frac{1036}{5} \end{aligned}$$

- d.) Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (y - z, 2x + y - 3z, x + y + z)$ vektormező $A(3, 0, 0)$ $B(0, 3, 0)$ $C(0, 0, 3)$ háromszög kerülete mentén vett vonalintegrálját.

$$\oint_{ABC\Delta} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_{AB}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_{AB}(t) dt + \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_{BC}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_{BC}(t) dt + \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_{CA}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_{CA}(t) dt \quad \text{ahol}$$

$$\vec{r}_{AB}(t) = \vec{A} + (\vec{B} - \vec{A})t \quad \vec{r}_{BC}(t) = \vec{B} + (\vec{C} - \vec{B})t \quad \vec{r}_{CA}(t) = \vec{C} + (\vec{A} - \vec{C})t$$

$$\vec{r}_{AB}(t) = \vec{A} + (\vec{B} - \vec{A})t = (3 - 3t, 3t, 0)$$

$$\dot{\vec{r}}_{AB}(t) = (-3, 3, 0)$$

$$\vec{v}(\vec{r}_{AB}(t)) = (3t, 6 - 3t, 3)$$

$$\int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_{AB}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_{AB}(t) dt = \int_0^1 (18 - 18t) dt = [18t - 9t^2]_0^1 = 9$$

$$\vec{r}_{BC}(t) = \vec{B} + (\vec{C} - \vec{B})t = (0, 3 - 3t, 3t)$$

$$\dot{\vec{r}}_{BC}(t) = (0, -3, 3)$$

$$\vec{v}(\vec{r}_{BC}(t)) = (3 - 6t, 3 - 12t, 3)$$

$$\int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_{BC}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_{BC}(t) dt = \int_0^1 36t dt = [18t^2]_0^1 = 18$$

$$\vec{r}_{CA}(t) = \vec{C} + (\vec{A} - \vec{C})t = (3t, 0, 3 - 3t)$$

$$\dot{\vec{r}}_{CA}(t) = (3, 0, -3)$$

$$\vec{v}(\vec{r}_{CA}(t)) = (3t - 3, 15t - 9, 3)$$

$$\int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_{CA}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_{CA}(t) dt = \int_0^1 (9t - 18) dt = \left[\frac{9}{2}t^2 - 18t \right]_0^1 = -\frac{27}{2}$$

$$\oint_{ABC\Delta} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 9 + 18 - \frac{27}{2} = \frac{27}{2}$$

- e.) Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (2xy + z^2, 2yz + x^2, 2zx + y^2)$ vektormező vonalintegrálját az $A(1, 2, 0)$ és $B(4, 1, 1)$ pontok között.

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (2x - 2x, 2z - 2z, 2y - 2y) = (0, 0, 0)$$

A vektormező örvénymentes, ezért van potenciálfüggvénye. Számítsuk ki a potenciálfüggvényt.

$$\phi = \int v_x dx = \int (2xy + z^2) dx = x^2y + z^2x + C(y, z)$$

$$\phi'_y = x^2 + C'_y(y, z) = 2yz + x^2 \Rightarrow C'_y(y, z) = 2yz$$

$$C(y, z) = \int C'_y(y, z) dy = \int 2yz dy = y^2z + C(z)$$

$$\phi'_z = 2zx + y^2 + C'_z(z) = 2zx + y^2 \Rightarrow C'_z(z) = 0$$

$$C(z) = \int C'_z(z) dz = C$$

A potenciálfüggvény a $\phi(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x + C$ függvény.

$$\int_A^B \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{B}) - \phi(\vec{A}) = 21 - 2 = 19$$

- f.) Határozzuk meg az a, b állandókat úgy, hogy a $\vec{v}(\vec{r}) = (2xe^y + e^xz^2, x^2e^y - 2ye^z, aze^x + by^2e^z)$ vektortérnek legyen potenciálja, majd számítsuk ki vonalintegrálját a $P_1(0, 0, 0)$ és $P_2(1, 1, 1)$ pontok között haladó Γ görbe mentén.

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (2bye^z + 2ye^z, 2ze^x - aze^x, 2xe^y - 2xe^y) = ((b+1)2ye^z, (2-a)ze^x, 0)$$

A vektormezőnek örvénymentes, ezért $a = 2, b = -1$. Számítsuk ki a potenciálfüggvényt.

$$\phi = \int v_x dx = \int (2xe^y + e^xz^2) dx = x^2e^y + z^2e^x + C(y, z)$$

$$\phi'_y = x^2e^y + C'_y(y, z) = x^2e^y - 2ye^z \Rightarrow C'_y(y, z) = -2ye^z$$

$$C(y, z) = \int C'_y(y, z) dy = \int -2ye^z dy = -y^2e^z + C(z)$$

$$\phi'_z = 2zx - y^2e^z + C'_z(z) = 2ze^x - y^2e^z \Rightarrow C'_z(z) = 0$$

$$C(z) = \int C'_z(z) dz = C$$

A potenciálfüggvény a $\phi(x, y, z) = x^2e^y - y^2e^z + z^2e^x + C$ függvény.

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{P}_2) - \phi(\vec{P}_1) = e - 0 = e$$

- g.) Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (3x^2y^2z, 2x^3yz, x^3y^2)$ vektormező vonalintegrálját az $A(1, 2, 3)$ pontot az origóval összekötő szakasz mentén.

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (2x^3y - 2x^3y, 3x^2y^2 - 3x^2y^2, 6x^2yz - 6x^2yz) = (0, 0, 0)$$

A vektormező örvénymentes, ezért van potenciálfüggvénye. Számítsuk ki a potenciálfüggvényt.

$$\phi = \int v_x dx = \int (3x^2y^2z) dx = x^3y^2z + C(y, z)$$

$$\phi'_y = 2x^3yz + C'_y(y, z) = 2x^3yz \Rightarrow C'_y(y, z) = 0$$

$$C(y, z) = \int C'_y(y, z) dy = C(z)$$

$$\phi'_z = x^3y^2 + C'_z(z) = x^3y^2 \Rightarrow C'_z(z) = 0$$

$$C(z) = \int C'_z(z) dz = C$$

A potenciálfüggvény a $\phi(x, y, z) = x^3y^2z + C$ függvény.

$$\int_A^O \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{O}) - \phi(\vec{A}) = 0 - 12 = -12$$

- h.) Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (yz, xz, xy)$ vektor-vektor függvény $A(1, 1, 1)$ $B(1, 2, 1)$ $C(1, 2, 0)$ háromszög kerülete mentén vett vonalintegrálját.

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (x - x, y - y, z - z) = (0, 0, 0)$$

A vektormező örvénymentes, ezért van potenciálfüggvénye. Potenciálos vektormező zárt görbe menti integrálja zérus, vagyis

$$\oint_{ABC\Delta} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0.$$

- i.) Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (y^2 \cos x, 2y \sin x + e^{2z}, 2ye^{2z})$ vektormező vonalmenti integrálját tetszőleges görbe mentén az $A(1, 0, 0)$ és $B(0, 1, 1)$ pontok között.

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (2e^{2z} - 2e^{2z}, 0 - 0, 2y \cos x - 2y \cos x) = (0, 0, 0)$$

A vektormező örvénymentes, ezért van potenciálfüggvénye. Számítsuk ki a potenciálfüggvényt.

$$\phi = \int v_x dx = \int y^2 \cos x dx = y^2 \sin x + C(y, z)$$

$$\phi'_y = 2y \sin x + C'_y(y, z) = 2y \sin x + e^{2z} \Rightarrow C'_y(y, z) = e^{2z}$$

$$C(y, z) = \int C'_y(y, z) dy = \int e^{2z} dy = ye^{2z} + C(z)$$

$$\phi'_z = 2ye^{2z} + C'_z(z) = 2ye^{2z} \Rightarrow C'_z(z) = 0$$

$$C(z) = \int C'_z(z) dz = C$$

A potenciálfüggvény a $\phi(x, y, z) = y^2 \sin x + ye^{2z} + C$ függvény.

$$\int_A^B \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{B}) - \phi(\vec{A}) = e^2 - 0 = e^2$$

- j.) Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (y, xy, z)$ vektormező vonalmenti integrálját az $\vec{r}(t) = (2, \cos t, \sin t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$ paraméterezésű Γ görbe mentén.

$$\dot{\vec{r}}(t) = (0, -\sin t, \cos t)$$

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = (\cos t, 2 \cos t, \sin t)$$

$$\int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t) dt = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \sin 2t\right) dt = 0$$

- k.) Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (2xy - z, x^2 + z, y - x)$ vektormező vonalmenti integrálját az $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ kör mentén.

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (1 - 1, -1 + 1, 2x - 2x) = (0, 0, 0)$$

A vektormező örvénymentes, ezért van potenciálfüggvénye. Potenciálos vektormező zárt görbe menti integrálja zérus, vagyis

$$\oint_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0.$$

- l.) Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (6x^2y - 4yz^3, 2x^3 - 4xz^3, -12xyz^2)$ vektormező vonalmenti integrálját az $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ kör mentén.

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (-12xz^2 + 12xz^2, -12yz^2 + 12yz^2, 6x^2 - 4z^3 - 6x^2 + 4z^3) = (0, 0, 0)$$

A vektormező örvénymentes, ezért van potenciálfüggvénye. Potenciálos vektormező zárt görbe menti integrálja zérus, vagyis

$$\oint_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0.$$

- m.) Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (x - yz, x^2 + z^2, xy - z)$ vektormező vonalintegrálját az $A(-3, 1, -5)$ pontot az origóval összekötő szakasz mentén.

$$\vec{r}(t) = (3t - 3, 1 - t, 5t - 5)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (3, -1, 5)$$

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = ((5t - 2)(t - 1), 34(t - 1)^2, -(2 + 3t)(t - 1))$$

$$\int_A^O \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_0^1 (-16(t - 1) - 34(t - 1)^2) dt = \left[-8(t - 1)^2 - \frac{34}{3}(t - 1)^3 \right]_0^1 = -\frac{10}{3}$$

- n.) Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (x - 3y + 2z, 2x - 3y, 5x + 5y)$ vektormező vonalintegrálját az $A(1, 1, 1)$ pontot a $B(2, 2, 2)$ ponttal összekötő szakasz mentén.

$$\vec{r}(t) = \vec{A} + (\vec{B} - \vec{A})t = (1 + t, 1 + t, 1 + t)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1, 1, 1)$$

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = (0, -(1 + t), 10(1 + t))$$

$$\int_A^O \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_0^1 9(t + 1) dt = \left[\frac{9}{2}(t + 1)^2 \right]_0^1 = \frac{27}{2}$$

Felületi integrál

Felületi integrál kiszámítása

A $\vec{v}(\vec{r})$ vektormező felületi integrálja úgy értelmezhető, mint a $\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{\hat{n}}$ skalárszorzat felületi integrálja, ahol $\vec{\hat{n}}$ a felületi normális irányú egységvektor, a vektormező felületi integrálja csak akkor értelmezhető, ha kívánt irányítását, azaz hogy $\vec{\hat{n}}$ a felület egyik vagy másik oldala irányában álljon, megadjuk.

A $\vec{v}(\vec{r})$ vektormező $\vec{r}(u, v)$ paraméterezésű F felület $(u, v) \subset D$ paramétertartomány által jellemzett darabkájára vonatkozó felületi integrálja (fluxusa):

$$\iint_{F(D)} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \iint_{F(D)} (\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{\hat{n}}) dS = \iint_D \vec{v}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\pm \vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)) du dv.$$

Kiszámításának lépései:

1. Az F felület paraméterezése (amennyiben nem paraméteresen adott)
2. $\vec{r}_u(u, v)$ és $\vec{r}_v(u, v)$ meghatározása
3. $d\vec{A}(u, v) = \pm \vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) du dv$ meghatározása, a megfelelő előjel megállapítása a kívánt irányításnak megfelelően
4. A $\vec{v}(\vec{r}(u, v))$ függvény megállapítása
5. A megfelelő előjelű

$$\iint_{F(D)} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \iint_D \vec{v}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\pm \vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)) du dv$$

felületi integrál (fluxus) kiszámítása

Feladatok

- a.) Számítsuk ki az $\vec{v}(\vec{r}) = (x, y, z)$ vektormező $\vec{r}(u, v) = (1 + 3u + 4v, 1 + u + 3v, 1 + u + 3v)$ $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ paraméterezésű F felület mentén vett integrálját.

$$\vec{r}_u(u, v) = (3, 1, 1)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (4, 3, 3)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) du dv = (0, -5, 5) du dv$$

$$\vec{v}(\vec{r}(u, v)) = (1 + 3u + 4v, 1 + u + 3v, 1 + u + 3v)$$

$$\iint_F \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 (1 + 3u + 4v, 1 + u + 3v, 1 + u + 3v) \cdot (0, -5, 5) dv du = \int_0^1 \int_0^1 0 dv du = 0$$

- b.) Számítsuk ki az $\vec{v}(\vec{r}) = (xy^2, xz, 2xy)$ vektormező felületi integrálját a $\vec{r}(u, v) = (u + 2v, -v, u^2 + 3v)$ felület $0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 1$ darabjára nézve, felfelé mutató felületi normális mellett.

$$\vec{r}_u(u, v) = (1, 0, 2u)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (2, -1, 3)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_v(u, v) \times \vec{r}_u(u, v) du dv = (-2u, 3 - 4u, 1) du dv$$

$$\vec{v}(\vec{r}(u, v)) = (uv^2 + 2v^3, u^3 + 2u^2v + 3uv + 6v^2, -uv - 2v^2)$$

$$\begin{aligned} \iint_F \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \int_0^3 \int_0^1 (uv^2 + 2v^3, u^3 + 2u^2v + 3uv + 6v^2, -uv - 2v^2) \cdot (-2u, 3 - 4u, 1) dv du \\ &= \int_0^3 \int_0^1 ((3u^3 - 4u^4) + (-8u^3 - 6u^2 + 7u)v + (-2u^2 - 24u + 14)v^2 - 4uv^3) dv du \\ &= \int_0^3 \left[(3u^3 - 4u^4)v + (-8u^3 - 6u^2 + 7u)\frac{v^2}{2} + (-2u^2 - 24u + 14)\frac{v^3}{3} - uv^4 \right]_0^1 du \\ &= \int_0^3 (-4u^4 - u^3 - \frac{11}{3}u^2 - \frac{11}{2}u + \frac{14}{3}) du = \left[-\frac{4}{5}u^5 - \frac{1}{4}u^4 - \frac{11}{9}u^3 - \frac{11}{4}u^2 + \frac{14}{3}u \right]_0^3 = \frac{1292}{5} \end{aligned}$$

- c.) Számítsuk ki az $\vec{v}(\vec{r}) = (x, y, z)$ vektormező felületi integrálját a $\vec{r}(u, v) = (1 + 3u + 4v, 1 + u + 3v, 3 + 4u + 6v)$ felület $0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 1$ darabjára nézve, felfelé mutató felületi normális mellett.

$$\vec{r}_u(u, v) = (3, 1, 4)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (4, 3, 6)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_v(u, v) \times \vec{r}_u(u, v) du dv = (-6, -2, 5) du dv$$

$$\vec{v}(\vec{r}(u, v)) = (1 + 3u + 4v, 1 + u + 3v, 3 + 4u + 6v)$$

$$\iint_F \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \int_0^3 \int_0^1 (1 + 3u + 4v, 1 + u + 3v, 3 + 4u + 6v) \cdot (-6, -2, 5) dv du = \int_0^3 \int_0^1 7 dv du = 21$$

- d.) Számítsuk ki az $\vec{v}(\vec{r}) = (y, x, z)$ vektormező felületi integrálját a $\vec{r}(u, v) = (u + v, u - v, u)$ felület $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ darabjára nézve, felfelé mutató felületi normális mellett.

$$\vec{r}_u(u, v) = (1, 1, 1)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (1, -1, 0)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_v(u, v) \times \vec{r}_u(u, v) du dv = (-1, -1, 2) du dv$$

$$\vec{v}(\vec{r}(u, v)) = (u - v, u + v, u)$$

$$\iint_F \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 (u - v, u + v, u) \cdot (-1, -1, 2) dv du = \int_0^1 \int_0^1 0 dv du = 0$$

- e.) Számítsuk ki az $\iint_F \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$ felületi integrált, ha a vektortér $\vec{v}(\vec{r}) = (0, 0, z^3)$ és $F = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Gömbi polárkoordinátákkal ($u = \vartheta, v = \varphi$) paraméterezve:

$$\vec{r}(\vartheta, \varphi) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$$

$$\vec{r}_\vartheta(\vartheta, \varphi) = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)$$

$$\vec{r}_\varphi(\vartheta, \varphi) = (-\sin \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \varphi, 0)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \times \vec{r}_\varphi(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi = (\sin^2 \vartheta \cos \varphi, \sin^2 \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta d\varphi$$

$$\vec{v}(\vec{r}(\vartheta, \varphi)) = (0, 0, \cos^3 \vartheta)$$

$$\iint_F \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos^4 \vartheta d\varphi d\vartheta = 2\pi \int_0^\pi \sin \vartheta \cos^4 \vartheta d\vartheta = 2\pi \left[-\frac{1}{5} \cos^5 \vartheta \right]_0^\pi = \frac{4}{5}\pi$$

- f.) Számítsuk ki az $\vec{v}(\vec{r}) = (-xy, xy, z)$ vektormező felületi integrálját a $z = x^2 - y^2$ felület $-2 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 3$ darabjára nézve, felfelé mutató felületi normális mellett.

$$\vec{r}_x(x, y) = (1, 0, 2x)$$

$$\vec{r}_y(x, y) = (0, 1, -2y)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_x(x, y) \times \vec{r}_y(x, y) dx dy = (-2x, 2y, 1) dx dy$$

$$\vec{v}(\vec{r}(x, y)) = (-xy, xy, x^2 - y^2)$$

$$\begin{aligned} \iint_F \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \int_{-2}^2 \int_{-3}^3 (-xy, xy, x^2 - y^2) \cdot (-2x, 2y, 1) dy dx = \int_{-2}^2 \int_{-3}^3 (2x^2 y + 2xy^2 + x^2 - y^2) dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-3}^3 (x^2 - y^2) dy dx = \int_{-2}^2 \left[x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{-3}^3 dx = \int_{-2}^2 (6x^2 - 18) dx = [2x^3 - 18x]_{-2}^2 = -40 \end{aligned}$$

- g.) Számítsuk ki az $\vec{v}(\vec{r}) = (y, x, z)$ vektormező felületi integrálját a $\vec{r}(u, v) = (u + v, u - v, u)$ felület $0 \leq u \leq 4, -3 \leq v \leq 0$ darabjára nézve, felfelé mutató felületi normális mellett.

$$\vec{r}_u(u, v) = (1, 1, 1)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (1, -1, 0)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_v(u, v) \times \vec{r}_u(u, v) du dv = (-1, -1, 2) du dv$$

$$\vec{v}(\vec{r}(u, v)) = (u - v, u + v, u)$$

$$\iint_F \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \int_0^4 \int_{-3}^0 (u - v, u + v, u) \cdot (-1, -1, 2) dv du = \int_0^4 \int_{-3}^0 0 dv du = 0$$

- h.) Számítsuk ki az $\iint_F \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$ felületi integrált, ha a vektortér $\vec{v}(\vec{r}) = (xy, 0, 2x + z)$ és az F felület paraméterezése $\vec{r}(u, v) = (u + 2v, -v, u^2 + 3v)$ $0 \leq u \leq 3, -2 \leq v \leq 0$.

$$\vec{r}_u(u, v) = (1, 0, 2u)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (2, -1, 3)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_v(u, v) \times \vec{r}_u(u, v) du dv = (2u, -3 + 4u, -1) du dv$$

$$\vec{v}(\vec{r}(u, v)) = (-vu - 2v^2, 0, u^2 + 2u + 7v)$$

$$\begin{aligned}
\iint_F \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \int_0^3 \int_{-2}^0 (-vu - 2v^2, 0, u^2 + 2u + 7v) \cdot (2u, -3 + 4u, -1) dv du \\
&= \int_0^3 \int_{-2}^0 ((-4u)v^2 - (2u^2 + 7)v - (u^2 + 2u)) dv du \\
&= \int_0^3 \left[-\frac{1}{3}(4u)v^3 - \frac{1}{2}(2u^2 + 7)v^2 - (u^2 + 2u)v \right]_{-2}^0 du = \int_0^3 (2u^2 - \frac{44}{3}u + 14) du \\
&= \left[\frac{2}{3}u^3 - \frac{22}{3}u^2 + 14u \right]_0^3 = -6
\end{aligned}$$

- i.) Számítsuk ki az $\iint_F \text{rot } \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$ felületi integrált, ha a vektortér $\vec{v}(\vec{r}) = (2xy, 3xz, 4yz)$ és az F felület paraméterezése $r(u, v) = (3 - u + v, 5 - 5u + 5v, 5 + 4u - 7v)$ $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$.

$$\vec{r}_u(u, v) = (-1, -5, 4)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = (1, 5, -7)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_v(u, v) \times \vec{r}_u(u, v) du dv = (15, -3, 0) du dv$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (4z - 3x, 0, 3z - 2x)$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}(u, v)) = (11 + 19u - 31v, 0, 9 + 14u - 23v)$$

$$\begin{aligned}
\iint_F \text{rot } \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \int_0^1 \int_0^1 (11 + 19u - 31v, 0, 9 + 14u - 23v) \cdot (15, -3, 0) dv du \\
&= \int_0^1 \int_0^1 15(11 + 19u - 31v) dv du = \int_0^1 15 \left[(11 + 19u)v - \frac{31}{2}v^2 \right]_0^1 du \\
&= \int_0^1 15 \left(-\frac{9}{2} + 19u \right) du = 15 \left[-\frac{9}{2}u + \frac{19}{2}u^2 \right]_0^1 = 75
\end{aligned}$$

Stokes-tétel

Stokes-tétel

Legyen F egyszeresen összefüggő („nem lyukas”) sima felület, $\vec{v}(\vec{r})$ egy folytonosan deriválható vektormező amely értelmezve van a felületen, legyen Γ görbe a felület határgörbéje. Legyen továbbá F és Γ olyan irányítású, hogy a felület külső oldaláról nézve a görbe az óramutató járásával ellentétes irányban haladjon körbe. Ekkor

$$\oint_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_F \text{rot } \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}.$$

Feladatok

- a.) Számítsuk ki a $\oint_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_F \text{rot } \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$ Stokes-tételben szereplő integrálokat, ha a vektortér $\vec{v}(\vec{r}) = (x - y + z, y + 2z, x^2 - y^2)$, a felület pedig az $5x + 3y + z = 15$ egyenletű síknak a pozitív térfelcadba eső része.

Vonalmenti integrál az $A(3, 0, 0) B(0, 5, 0) C(0, 0, 15)$ háromszög kerülete mentén:

$$\oint_{ABC\Delta} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_{AB}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_{AB}(t) dt + \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_{BC}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_{BC}(t) dt + \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_{CA}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_{CA}(t) dt \quad \text{ahol}$$

$$\vec{r}_{AB}(t) = \vec{A} + (\vec{B} - \vec{A})t \quad \vec{r}_{BC}(t) = \vec{B} + (\vec{C} - \vec{B})t \quad \vec{r}_{CA}(t) = \vec{C} + (\vec{A} - \vec{C})t$$

$$\vec{r}_{AB}(t) = \vec{A} + (\vec{B} - \vec{A})t = (3 - 3t, 5t, 0)$$

$$\dot{\vec{r}}_{AB}(t) = (-3, 5, 0)$$

$$\vec{v}(\vec{r}_{AB}(t)) = (3 - 8t, 5t, (3 - 8t)(3 + 2t))$$

$$\int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_{AB}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_{AB}(t) dt = \int_0^1 (-9 + 49t) dt = \left[-9t + \frac{49}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{31}{2}$$

$$\vec{r}_{BC}(t) = \vec{B} + (\vec{C} - \vec{B})t = (0, 5 - 5t, 15t)$$

$$\dot{\vec{r}}_{BC}(t) = (0, -5, 15)$$

$$\vec{v}(\vec{r}_{BC}(t)) = (-5 + 20t, 5 + 25t, -(5 - 5t)^2)$$

$$\int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_{BC}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_{BC}(t) dt = \int_0^1 (-400 + 625t - 375t^2) dt = \left[-400t + \frac{625}{2}t^2 - 125t^3 \right]_0^1 = -\frac{425}{2}$$

$$\vec{r}_{CA}(t) = \vec{C} + (\vec{A} - \vec{C})t = (3t, 0, 15 - 15t)$$

$$\dot{\vec{r}}_{CA}(t) = (3, 0, -15)$$

$$\vec{v}(\vec{r}_{CA}(t)) = (15 - 12t, 30 - 30t, 9t^2)$$

$$\int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_{CA}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_{CA}(t) dt = \int_0^1 (45 - 36t - 135t^2) dt = \left[45t - 18t^2 - 45t^3 \right]_0^1 = -18$$

$$\oint_{ABC\Delta} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{31}{2} - \frac{425}{2} - 18 = -215$$

Felületi integrál $u = x, v = y$ paraméterezéssel:

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, 15 - 5x - 3y)$$

$$\vec{r}_x(x, y) = (1, 0, -5)$$

$$\vec{r}_y(x, y) = (0, 1, -3)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_x(x, y) \times \vec{r}_y(x, y) dx dy = (5, 3, 1) dx dy$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (-2y - 2, 1 - 2x, 1)$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}(x, y)) = (-2y - 2, 1 - 2x, 1)$$

$$\begin{aligned} \iint_F \text{rot } \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \int_0^3 \int_0^{\frac{5}{3}(3-x)} (-2y - 2, 1 - 2x, 1) \cdot (5, 3, 1) dy dx = \int_0^3 \int_0^{\frac{5}{3}(3-x)} (-6x - 10y - 6) dy dx \\ &= \int_0^3 \left[-6(x+1)y - 5y^2 \right]_0^{\frac{5}{3}(3-x)} dx = \int_0^3 \frac{5}{3}(x-3)(24 - \frac{7}{3}(x-3)) dx \\ &= \left[-\frac{35}{27}(x-3)^3 + 20(x-3)^2 \right]_0^3 = -215 \end{aligned}$$

- b.) Számítsuk ki a $\oint_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_F \text{rot } \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$ Stokes-tételben szereplő integrálokat, ha a vektortér $\vec{v}(\vec{r}) = (0, x^2, 0)$, a felület pedig a $z = 0$ sík $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ része.

Vonalmenti integrál a négyzet kerülete mentén:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 (\vec{v}(t, 0, 0) - \vec{v}(t, 1, 0)) \cdot (1, 0, 0) dt + \int_0^1 (\vec{v}(1, t, 0) - \vec{v}(0, t, 0)) \cdot (0, 1, 0) dt \\ &= 0 + \int_0^1 1 dt = 1 \end{aligned}$$

Felületi integrál a négyzeten $u = x, v = y$ paraméterezéssel:

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, 0)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_x(x, y) \times \vec{r}_y(x, y) dx dy = (0, 0, 1) dx dy$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}(x, y)) = (0, 0, 2x)$$

$$\iint_F \text{rot } \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 (0, 0, 2x) \cdot (0, 0, 1) dy dx = \int_0^1 \int_0^1 2x dy dx = \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1$$

- c.) **Számítsuk ki a Stokes-tételben szereplő integrálokat, ha a vektortér $\vec{v}(\vec{r}) = (xy, xz, yz)$, a felület pedig az $x + y + z = 1$ síkból a koordinátasíkok által kivágott háromszög.**

Vonalmenti integrál a háromszög kerülete mentén:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{v}(1-t, t, 0) \cdot (-1, 1, 0) dt + \int_0^1 \vec{v}(0, 1-t, t) \cdot (0, -1, 1) dt + \int_0^1 \vec{v}(t, 0, 1-t) \cdot (1, 0, -1) dt \\ &= \int_0^1 -t(1-t) dt + \int_0^1 t(1-t) dt + \int_0^1 0 dt = 0 \end{aligned}$$

Felületi integrál a háromszöglapon $u = x, v = y$ paraméterezéssel:

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, 1-x-y)$$

$$\vec{r}_x(x, y) = (1, 0, -1)$$

$$\vec{r}_y(x, y) = (0, 1, -1)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_x(x, y) \times \vec{r}_y(x, y) dx dy = (1, 1, 1) dx dy$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (z-x, 0, z-x)$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}(x, y)) = (1-2x-y, 0, 1-2x-y)$$

$$\begin{aligned} \iint_F \text{rot } \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-2x-y, 0, 1-2x-y) \cdot (1, 1, 1) dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2(1-2x-y) dy dx \\ &= \int_0^1 [-(1-2x-y)^2]_0^{1-x} dx = \int_0^1 ((1-2x)^2 - x^2) dx = \left[-\frac{1}{6}(1-2x)^3 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

- d.) **Számítsuk ki a Stokes-tételben szereplő integrálokat, ha a vektortér $\vec{v}(\vec{r}) = (x+z, x-y, z-x)$, a felület pedig $F = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0\}$.**

Vonalmenti integrál a kör kerülete mentén:

$$\vec{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 0)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t, 0)$$

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = (3 \cos t, 3 \cos t - 3 \sin t, -3 \cos t)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}} dt = \int_0^{2\pi} 9(\cos^2 t - 2 \sin t \cos t) dt = \int_0^{2\pi} 9\left(\frac{1}{2}(\cos 2t + 1) - \sin 2t\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{9}{2} dt = 9\pi \end{aligned}$$

Felületi integrál a gömbfelületen $u = \vartheta, v = \varphi$ paraméterezéssel:

$$\vec{r}(\vartheta, \varphi) = (3 \sin \vartheta \cos \varphi, 3 \sin \vartheta \sin \varphi, 3 \cos \vartheta)$$

$$\vec{r}_\vartheta(\vartheta, \varphi) = (3 \cos \vartheta \cos \varphi, 3 \cos \vartheta \sin \varphi, -3 \sin \vartheta)$$

$$\vec{r}_\varphi(\vartheta, \varphi) = (-3 \sin \vartheta \sin \varphi, 3 \sin \vartheta \cos \varphi, 0)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \times \vec{r}_\varphi(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi = 9 \sin \vartheta (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) d\vartheta d\varphi$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}(\vartheta, \varphi)) = (0, 2, 1)$$

$$\begin{aligned} \iint_F \text{rot } \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (0, 2, 1) \cdot 9 \sin \vartheta (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) d\varphi d\vartheta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (18 \sin^2 \vartheta \sin \varphi + 9 \sin \vartheta \cos \vartheta) d\varphi d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{9}{2} \sin 2\vartheta d\varphi d\vartheta \\ &= 9\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\vartheta d\vartheta = 9\pi \left[-\frac{1}{2} \cos 2\vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 9\pi \end{aligned}$$

e.) Számítsuk ki a Stokes-tételben szereplő integrálokat, ha a vektortér $\vec{v}(\vec{r}) = (z^2, -3xy, x^3y^3)$, a felület pedig $F = \{(x, y, z) : z = 5 - x^2 - y^2, 1 \leq z \leq 5\}$.

Vonalmenti integrál a kör kerülete mentén:

$$\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 1)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 0)$$

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = (1, -12 \cos t \sin t, 64 \cos^3 t \sin^3 t)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}} dt = \int_0^{2\pi} (-2 \sin t - 24 \cos^2 t \sin t) dt = [2 \cos t + 8 \cos^3 t]_0^{2\pi} = 0$$

Felületi integrál hengerkoordinátákkal ($u = r, v = \varphi$) paraméterezve:

$$\vec{r}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 5 - r^2)$$

$$\vec{r}_r(r, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, -2r)$$

$$\vec{r}_\varphi(r, \varphi) = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_r(r, \varphi) \times \vec{r}_\varphi(r, \varphi) dr d\varphi = (2r^2 \cos \varphi, 2r^2 \sin \varphi, r) dr d\varphi$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = (3x^3y^2, 2z - 3x^2y^3, -3y)$$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}(r, \varphi)) = (3r^5 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi, 10 - 2r^2 - 3r^5 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi, -3r \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} \iint_F \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (3r^5 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi, 10 - 2r^2 - 3r^5 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi, -3r \sin \varphi) \cdot (2r^2 \cos \varphi, 2r^2 \sin \varphi, r) d\varphi dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} ((10 - 2r^2)2r^2 \sin \varphi - 3r^2 \sin \varphi + 6r^7(\cos^4 \varphi \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi)) d\varphi dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 6r^7(\cos^4 \varphi \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi) d\varphi dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} 6r^7(\cos \varphi \sin \varphi)^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} r^7(\sin^2 2\varphi \cos 2\varphi) d\varphi dr = \int_0^2 \frac{1}{4} r^7 [\sin^3 2\varphi]_0^{2\pi} dr = \int_0^2 0 dr = 0 \end{aligned}$$

Gauss–Osztrogradszkij-tétel

Gauss–Osztrogradszkij-tétel

Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ egy zárt tartomány, és legyen $\vec{v}(\vec{r})$ a tartomány minden pontjában folytonosan differenciálható vektormező. A D tartomány ∂D határfelülete legyen kifelé irányított. Ekkor:

$$\iint_{\partial D} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \iiint_D \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) dV.$$

Mivel a tartomány zárt, így nem tartalmazhat „lyukakat”, így a tétel pl. nem alkalmazható a ponttöltés forrásmentes (ám az origóban nem definiált) terének origót körülölelő gömbfelületre vett integráljaira.

Feladatok

- a.) Számítsuk ki az $\vec{v}(\vec{r}) = (2x + y^2, y + \sin z, z - x^3)$ vektormezőnek az origó középpontú, 2 sugarú gömbre vonatkozó felületi integrálját kifelé mutató felületi normális mellett.

Alkalmazzuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$\begin{aligned} \iint_{\partial D} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) dV = \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 4r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr = 8\pi \int_0^2 [-\cos \vartheta]_0^\pi r^2 dr = 16\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{128}{3} \pi \end{aligned}$$

- b.) Számítsuk ki az $\vec{v}(\vec{r}) = (x - y + z, y + 2z, x^2 - y^2)$ vektormező felületi integrálját az $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$, $z = 1$ egyenletek által határolt zárt felületre, kifelé mutató felületi normális mellett.

Alkalmazzuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = 1 + 1 + 0 = 2$$

$$\iint_{\partial D} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \iiint_D \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) dV = \int_0^1 \int_1^4 \int_0^{2\pi} 2r d\varphi dz dr = 12\pi \int_0^1 r dr = 12\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^1 = 6\pi$$

- c.) Számítsuk ki az $\iint_{\partial D} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \iiint_D \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) dV$ Gauss–Osztrogradszkij-tételben szereplő integrálokat, ha a vektormező $\vec{v}(\vec{r}) = (-x^2 + y + z, x - y^2 + z, x + y - z^2)$ és a zárt felület az $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 2$ síkok által határolt kocka felszíne, kifelé irányítva.

Felületi integrál:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial D} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \int_0^2 \int_0^2 (v_z|_{z=2} - v_z|_{z=0}) dx dy + \int_0^2 \int_0^2 (v_y|_{y=2} - v_y|_{y=0}) dz dx \\ &+ \int_0^2 \int_0^2 (v_x|_{x=2} - v_x|_{x=0}) dy dz = \int_0^2 \int_0^2 -4 dx dy + \int_0^2 \int_0^2 -4 dz dx + \int_0^2 \int_0^2 -4 dy dz = -48 \end{aligned}$$

Térfogati integrál:

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = -2x - 2y - 2z$$

$$\begin{aligned} \iiint_D \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) dV &= \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 -2(x + y + z) dz dy dx = \int_0^2 \int_0^2 [-2xz - 2yz - z^2]_0^2 dy dx \\ &= \int_0^2 \int_0^2 (-4x - 4y - 4) dy dx = \int_0^2 [-4xy - 4y - 2y^2]_0^2 dx \\ &= \int_0^2 (-8x - 16) dx = [-16x - 4x^2]_0^2 = -48 \end{aligned}$$

- d.) Számítsuk ki a $\vec{v}(\vec{r}) = (x^2 + e^{yz}, y - z \arctg x, x^2 y^3)$ vektormező felületi integrálját az $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ és $z = 3$ egyenletek által határolt tartomány felülete mentén, kifelé mutató felületi normális mellett.

Alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt. A hármas integrálást végezzük el hengerkoordinátákban.

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = 2x + 1 + 0 = 2x + 1$$

$$\begin{aligned} \iint_{\partial D} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 (2r \cos \varphi + 1)r dz d\varphi dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (6r^2 \cos \varphi + 3r) d\varphi dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 3r d\varphi dr = 6\pi \int_0^2 r dr = 6\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^2 = 12\pi \end{aligned}$$

- e.) Számítsuk ki a Gauss-Osztrogradszkij-tételben szereplő integrálokat, ha a vektormező $\vec{v} = (4y, -x, 3z)$ és a D tartományt a $z = 0$ és $z = 4 - x^2 - y^2$ felületek határolják.

Felületi integrál hengerkoordinátákkal ($u = r, v = \varphi$) paraméterezve:

A felületek metszetének r koordinátája: $0 = 4 - r^2 \Rightarrow r = 2$.

A paraboloid-felületen:

$$\vec{r}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 4 - r^2)$$

$$\vec{r}_r(r, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, -2r)$$

$$\vec{r}_\varphi(r, \varphi) = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_r(r, \varphi) \times \vec{r}_\varphi(r, \varphi) dr d\varphi = (2r^2 \cos \varphi, 2r^2 \sin \varphi, r) dr d\varphi$$

$$\vec{v}(\vec{r}(r, \varphi)) = (4r \sin \varphi, -r \cos \varphi, 12 - 3r^2)$$

A síkfelületen:

$$\vec{r}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)$$

$$\vec{r}_r(r, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

$$\vec{r}_\varphi(r, \varphi) = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_\varphi(r, \varphi) \times \vec{r}_r(r, \varphi) dr d\varphi = (0, 0, -r) dr d\varphi$$

$$\vec{v}(\vec{r}(r, \varphi)) = (4r \sin \varphi, -r \cos \varphi, 0)$$

$$\iint_{\partial D} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4r \sin \varphi, -r \cos \varphi, 12 - 3r^2) \cdot (2r^2 \cos \varphi, 2r^2 \sin \varphi, r) d\varphi dr$$

$$\begin{aligned} &+ \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4r \sin \varphi, -r \cos \varphi, 0) \cdot (0, 0, -r) d\varphi dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (6r^3 \cos \varphi \sin \varphi + 12r - 3r^3) d\varphi dr + 0 \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (3r^3 \sin 2\varphi + 12r - 3r^3) d\varphi dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (12r - 3r^3) d\varphi dr = 2\pi \int_0^2 (12r - 3r^3) dr \\ &= 2\pi \left[6r^2 - \frac{3}{4} r^4 \right]_0^2 = 24\pi \end{aligned}$$

Térfogati integrál hengerkoordinátákban:

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = 0 + 0 + 3 = 3$$

$$\begin{aligned} \iiint_D \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) dV &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} 3r dz d\varphi dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} 3r(4 - r^2) d\varphi dr = 6\pi \int_0^2 r(4 - r^2) dr \\ &= 6\pi \left[-\frac{1}{4} (4 - r^2)^2 \right]_0^2 = 24\pi \end{aligned}$$

- f.) Számítsuk ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételben szereplő integrálokat, ha a vektormező $\vec{v} = (xy, zx, yz)$ és a D tartományt a $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ és $x + y + z = 1$ síkok határolják.

Felületi integrál:

A felső határlapot ($u = x, v = y$) szerint paraméterezve:

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$$

$$\vec{r}_x(x, y) = (1, 0, -1)$$

$$\vec{r}_y(x, y) = (0, 1, -1)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_x(x, y) \times \vec{r}_y(x, y) dx dy = (1, 1, 1) dx dy$$

$$\vec{v}(\vec{r}(x, y)) = (xy, x - x^2 - xy, y - y^2 - xy)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\partial D} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (xy, 0, 0) \cdot (0, 0, -1) dy dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} (0, xz, 0) \cdot (0, -1, 0) dz dx \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^{1-y} (0, 0, yz) \cdot (-1, 0, 0) dz dy + \int_0^1 \int_0^{1-x} (xy, x - x^2 - xy, y - y^2 - xy) \cdot (1, 1, 1) dy dx \\ &= 0 + \int_0^1 \int_0^{1-x} (-xz) dz dx + 0 + \int_0^1 \int_0^{1-x} (-xy + x - x^2 + y - y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} ((x+y) - (x+y)^2) dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{3}(x+y)^3 \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Térfogati integrál:

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = y + 0 + y = 2y$$

$$\begin{aligned} \iiint_D \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-z} 2y dy dz dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} [y^2]_0^{1-x-z} dz dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-z)^2 dz dx \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{3}(1-x-z)^3 \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x)^3 dx = \left[-\frac{1}{12}(1-x)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

- g.) Számítsuk ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételben szereplő integrálokat, ha a vektormező $\vec{v} = (xy, -\frac{1}{2}y^2, z)$ és a D tartományt a $z = 1$ és $z = 4 - 3x^2 - 3y^2$ felületek határolják.

Felületi integrál hengerkoordinátákkal ($u = r, v = \varphi$) paraméterezve:

A felületek metszetének r koordinátája: $1 = 4 - 3r^2 \Rightarrow r = 1$.

A paraboloid-felületen:

$$\vec{r}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 4 - 3r^2)$$

$$\vec{r}_r(r, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, -6r)$$

$$\vec{r}_\varphi(r, \varphi) = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_r(r, \varphi) \times \vec{r}_\varphi(r, \varphi) dr d\varphi = (6r^2 \cos \varphi, 6r^2 \sin \varphi, r) dr d\varphi$$

$$\vec{v}(\vec{r}(r, \varphi)) = (r^2 \sin \varphi \cos \varphi, -\frac{1}{2}r^2 \sin^2 \varphi, 4 - 3r^2)$$

A síkfelületen:

$$\vec{r}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 1)$$

$$\vec{r}_r(r, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

$$\vec{r}_\varphi(r, \varphi) = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0)$$

$$d\vec{A} = \vec{r}_\varphi(r, \varphi) \times \vec{r}_r(r, \varphi) dr d\varphi = (0, 0, -r) dr d\varphi$$

$$\vec{v}(\vec{r}(r, \varphi)) = (r^2 \sin \varphi \cos \varphi, -\frac{1}{2}r^2 \sin^2 \varphi, 1)$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial D} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 \sin \varphi \cos \varphi, -\frac{1}{2}r^2 \sin^2 \varphi, 4 - 3r^2) \cdot (6r^2 \cos \varphi, 6r^2 \sin \varphi, r) d\varphi dr \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 \sin \varphi \cos \varphi, -\frac{1}{2}r^2 \sin^2 \varphi, 1) \cdot (0, 0, -r) d\varphi dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (6r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3r^4 \sin^3 \varphi + 4r - 3r^3) d\varphi dr + \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-r) d\varphi dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (9r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3r^4 \sin \varphi + 3r - 3r^3) d\varphi dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (9r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi + 3r - 3r^3) d\varphi dr \\
&= \int_0^1 \left[-3r^4 \cos^3 \varphi + (3r - 3r^3)\varphi \right]_0^{2\pi} dr = 2\pi \int_0^1 (3r - 3r^3) dr = 2\pi \left[\frac{3}{2}r^2 - \frac{3}{4}r^4 \right]_0^1 = \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

Térfogati integrál hengerkoordinátákban:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) &= y - y + 1 = 1 \\
\iiint_D \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) dV &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_1^{4-3r^2} r dz d\varphi dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(3 - 3r^2) d\varphi dr = 2\pi \int_0^1 r(3 - 3r^2) dr \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{12}(3 - 3r^2)^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

- h.) **Számítsuk ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételben szereplő integrálokat, ha a vektormező $\vec{v} = (2x, 0, 1 - z)$ és a tartomány $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 3\}$.**

Felületi integrál hengerkoordinátákkal paraméterezve:

A hengerpaláston:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(z, \varphi) &= (3 \cos \varphi, 3 \sin \varphi, z) \\
\vec{r}_z(z, \varphi) &= (0, 0, 1) \\
\vec{r}_\varphi(z, \varphi) &= (-3 \sin \varphi, 3 \cos \varphi, 0) \\
d\vec{A} &= \vec{r}_\varphi(z, \varphi) \times \vec{r}_z(z, \varphi) dz d\varphi = (3 \cos \varphi, 3 \sin \varphi, 0) dz d\varphi \\
\vec{v}(\vec{r}(z, \varphi)) &= (6 \cos \varphi, 0, 1 - z)
\end{aligned}$$

A síkfelületen:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(r, \varphi) &= (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0) \\
\vec{r}_r(r, \varphi) &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \\
\vec{r}_\varphi(r, \varphi) &= (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0) \\
d\vec{A} &= \pm \vec{r}_\varphi(r, \varphi) \times \vec{r}_r(r, \varphi) dr d\varphi = (0, 0, \mp r) dr d\varphi \\
\vec{v}(\vec{r}(r, \varphi)) &= (2r \cos \varphi, 0, -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}) \\
\iint_{\partial D} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (6 \cos \varphi, 0, 1 - z) \cdot (3 \cos \varphi, 3 \sin \varphi, 0) d\varphi dz \\
&\quad + \int_0^3 \int_0^{2\pi} ((2r \cos \varphi, 0, -2) - (2r \cos \varphi, 0, 1)) \cdot (0, 0, r) d\varphi dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} 18 \cos^2 \varphi d\varphi dz - \int_0^3 \int_0^{2\pi} 3r d\varphi dr \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} 9(\cos 2\varphi + 1) d\varphi dz - 6\pi \int_0^3 r dr = 18\pi \int_0^3 1 dz - 6\pi \left[\frac{1}{2}r^2 \right]_0^3 = 54\pi - 27\pi = 27\pi
\end{aligned}$$

Térfogati integrál hengerkoordinátákban:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) &= 2 + 0 - 1 = 1 \\
\iiint_D \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) dV &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^3 r dz d\varphi dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} 3r d\varphi dr = 6\pi \int_0^3 r dr = 6\pi \left[\frac{1}{2}r^2 \right]_0^3 = 27\pi
\end{aligned}$$

Wolfram Alpha

Elérhető a www.wolframalpha.com címen.

Vektorok

Vektor megadása:

$$\{x, y, z\}$$

Vektor hossza:

$$\text{norm}(\{x, y, z\})$$

Vektor normálása:

$$\text{normalize}(\{x, y, z\})$$

Vektor számszorosa:

$$c * \{x, y, z\}$$

Skaláris szorzat:

$$\{p, q, r\} \cdot \{x, y, z\}$$

Vektoriális szorzat:

$$\{p, q, r\} \times \{x, y, z\}$$

Térgörbék

Térgörbe kirajzolása:

$$\text{space curve } \{x(t), y(t), z(t)\} \text{ for } t=t_0 \text{ to } t_1$$

Térgörbe ívhossza:

$$\text{arc length of } \{x(t), y(t), z(t)\} \text{ for } t=t_0 \text{ to } t_1$$

Térgörbe görbülete:

$$\text{curvature of } \{x(t), y(t), z(t)\} \text{ at } t=t_0$$

Térgörbe görbületi sugara:

$$\text{radius of curvature of } \{x(t), y(t), z(t)\} \text{ at } t=t_0$$

Differenciálás

Derivált:

$$\begin{aligned} & d f(t) / dt \text{ at } t=t_0 \\ & d \{x(t), y(t), z(t)\} / dt \text{ at } t=t_0 \end{aligned}$$

Magasabbrendű deriváltak:

$$\begin{aligned} & d^2 f(t) / dt^2 \text{ at } t=t_0 \\ & d^2 \{x(t), y(t), z(t)\} / dt^2 \text{ at } t=t_0 \end{aligned}$$

Skalármező gradiense:

$$\text{grad}(f(x, y, z))$$

Skalármező laplace-a:

$$\text{laplace}(f(x, y, z))$$

Vektormező divergenciája:

$$\operatorname{div}(\{f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)\})$$

Vektormező rotációja:

$$\operatorname{rot}(\{f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)\})$$

Integrálás

Primitív függvény:

$$\int f(x) \, dx$$

Integrál:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) \, dx$$

Többdimenziós integrál:

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{g_0(x)}^{g_1(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

Maple

A VectorCalculus csomag

Memória törlése, a VectorCalculus csomag betöltése és az alapértelmezett koordinátarendszer beállítása:

```
restart
with(VectorCalculus)
SetCoordinates('cartesian'[x, y, z])
```

Térgörbék

Térgörbe megadása:

$$G := \text{PositionVector}([x(t), y(t), z(t)])$$

Kísérő triéder vektorai:

$$TNB := \text{eval}(TNBFrame(G, t), t=t_0)$$

Érintő egyenlete:

$$\text{TangentLine}(G, t=t_0)$$

Kitüntetett síkok (normálsík, rektifikáló sík, simuló sík) egyenlete:

```
simplify(eval(DotProduct(Vector(TNB[1]), Vector([x, y, z]) - (eval(G, t=t0)))=0))
simplify(eval(DotProduct(Vector(TNB[2]), Vector([x, y, z]) - (eval(G, t=t0)))=0))
simplify(eval(DotProduct(Vector(TNB[3]), Vector([x, y, z]) - (eval(G, t=t0)))=0))
```

Görbület, görbületi sugár:

$$\begin{aligned} &\text{eval}(\text{Curvature}(G, t), t=t_0) \\ &\text{eval}(\text{RadiusOfCurvature}(G, t), t=t_0) \end{aligned}$$

Torzió:

$$\text{eval}(\text{Torsion}(G, t), t=t_0)$$

Ívhossz-integrál és ívhossz:

$$\begin{aligned} &\text{simplify}(\text{ArcLength}(G, t=t_0 \dots t_1, 'inert')) \\ &\text{ArcLength}(G, t=t_0 \dots t_1) \end{aligned}$$

Kettős integrál

Tartomány megadása (x szerinti normáltartomány, y szerinti normáltartomány, háromszög, kör, körcikk):

```
T := Region(x0..x1,g0(x)..g1(x))
T := Rectangle(g0(y)..g1(y),y0..y1)
T := Triangle(<Ax,Ay>,<Bx,By>,<Cx,Cy>)
T := Circle(<Ox,Oy>,radius,[r,phi])
T := Sector(Circle(<Ox,Oy>,radius,[r,phi]),phi0,phi1)
```

Az $f(x,y)$ algebrai kifejezés kettős integrálja a T tartományon, illetve az integrál értéke:

```
simplify(int(f(x,y),[x,y]=T,'inert'))
int(f(x,y),[x,y]=T)
```

Hármas integrál

Tartomány megadása (általános tartomány, tetraéder, gömb):

```
T := Region(x0..x1,g0(x)..g1(x),h0(x,y)..h1(x,y))
T := Tetrahedron(<Ax,Ay,Az>,<Bx,By,Bz>,<Cx,Cy,Cz>,<Dx,Dy,Dz>)
T := Sphere(<Ox,Oy,Oz>,radius,[r,theta,phi])
```

Az $f(x,y,z)$ algebrai kifejezés hármass integrálja a T tartományon, illetve az integrál értéke:

```
simplify(int(f(x,y,z),[x,y,z]=T,'inert'))
int(f(x,y,z),[x,y,z]=T)
```

Felületek

Felület megadása (paraméteres, téglatest-felület, gömbfelület):

```
S := PositionVector([x(u,v),y(u,v),z(u,v)])
F := Surface(S,u=u0..u1,v=v0..v1)
F := Box(S,x=x0..x1,y=y0..y1,z=z0..z1)
F := Sphere(<Ox,Oy,Oz>,radius)
```

Felület-integrál és felszín:

```
simplify(SurfaceInt(1,[x,y,z]=F,'inert'))
SurfaceInt(1,[x,y,z]=F)
```

Érintősík paraméteres és implicit egyenlete:

```
TangentPlane(S,u=u0,v=v0)
simplify(DotProduct(eval(CrossProduct(diff(S,u),diff(S,v)),[u=u0,v=v0]),
  PositionVector([x,y,z])-(eval(S,[u=u0,v=v0])))=0)
```

Skálármező, vektormező

Vektormező megadása:

```
v := VectorField(<vx(x,y,z),vy(x,y,z),vz(x,y,z)>)
```

Skálármező gradiense:

```
Gradient(phi(x,y,z))
```

Skálármező laplace-a:

```
Laplacian(phi(x,y,z))
```

Vektormező divergenciája:

`Divergence(v)`

Vektormező rotációja:

`Curl(v)`

Potenciálfüggvény meghatározása:

`ScalarPotential(v)`

Vonalintegrál

Görbe megadása (paraméteres görbe, szakasz, törtvonal, kör, körív):

`Gamma := Path(G, t=t0 .. t1)`

`Gamma := Line(<Ax,Ay,Az>,<Bx,By,Bz>)`

`Gamma := LineSegments(<Ax,Ay,Az>,<Bx,By,Bz>,<Cx,Cy,Cz>)`

`Gamma := Circle(<Ox,Oy>,radius)`

`Gamma := Circle3D(<Ox,Oy,Oz>,radius,<nx,ny,nz>)`

`Gamma := Arc(Circle(<Ox,Oy>,radius),phi0,phi1)`

Vonalintegrál és értéke:

`simplify(LineInt(v,Gamma,'inert'))`

`LineInt(v,Gamma)`

Felületi integrál

Felületi integrál (fluxus) és értéke:

`simplify(Flux(w,F,'inert'))`

`Flux(w,F,'inert')`