

Differenciálegyenletek vizsga – 2015. december 16.

A feladatok megoldásához 90 perc áll rendelkezésre. Az összes feladat helyes megoldásával 100 pont szerezhető, az elégséges érdemjegy megszerzéséhez legalább 50 pont elérése szükséges.

1. feladat (11 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u'(t) + (1 - 2t)u(t) &= e^{t^2} \\ u(0) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

2. feladat (15 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u''(t) + 4u'(t) + 5u(t) &= 5t^2 + 18t \\ u(0) &= 1 \\ u'(0) &= -2 \end{aligned} \right\}$$

3. feladat (15 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $u(t)$ megoldását Laplace-transzformáció segítségével!

$$\left. \begin{aligned} u''(t) - 2u'(t) - 3u(t) &= 4e^{3t} \\ u(0) &= 1 \\ u'(0) &= 6 \end{aligned} \right\}$$

4. feladat (16+11+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u_1' &= -8u_1 + 8u_2 + 3e^{-t} \\ u_2' &= -3u_1 + 2u_2 + 3e^{-t} \\ u_1(0) &= -3 \\ u_2(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

b.) Rajzoljuk fel vázlatosan az $u_2(t)$ függvény grafikonját a kezdeti érték körül a monotonitásra és konvexitásra ügyelve. Határozzuk meg a kezdőponthoz tartozó érintő egyenes és simulókör egyenletét is!

c.) Adjunk közelítést $u_1(0.1)$ és $u_2(0.1)$ értékére explicit trapézszabály (ETR) segítségével!

5. feladat (10 pont)

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi pontjait, és vizsgáljuk meg stabilitásukat!

$$\left. \begin{aligned} u_1' &= u_1^2 - u_2 - 1 \\ u_2' &= 2u_1 - 2u_2 + 2 \end{aligned} \right\}$$

6. feladat (11 pont)

Adjunk közelítő megoldást az alábbi peremérték-feladatra két belső pont alapján! Az első deriváltakat közelítsük *előrenéző*, a második deriváltakat pedig *centrális* sémával. A kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

$$\left. \begin{aligned} -2u_{xx} - u_x + 4u &= 10x - 6 \\ u(0) &= 1 \\ u(3) &= 6 \end{aligned} \right\}$$

7. feladat (6 pont)

Határozzuk meg e^A értékét a hatványsoros módszer segítségével, ha $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

A Laplace-transzformált legfontosabb tulajdonságai:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s)$$

$$\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$\mathcal{L}(f(a \cdot t)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = F(s+a)$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

$$\mathcal{L}(f(t-t_0)H(t-t_0)) = e^{-t_0 s} F(s)$$

Nevezetes függvények Laplace-transzformáltjai:

$$\mathcal{L}(\delta(t-0^+)) = 1$$

$$\mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}(\sin(bt)) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(t \sin(bt)) = \frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}t^n) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\cos(bt)) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(t \cos(bt)) = \frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$$