

Differenciálegyenletek vizsga – 2013. december 17.

A feladatok megoldásához 90 perc áll rendelkezésre. Az összes feladat helyes megoldásával 100 pont szerezhető, az elégséges érdemjegy megszerzéséhez legalább 50 pont elérése szükséges.

1. feladat (12+3 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános (összes) $u(t)$ megoldását!

$$(t^2 - 2)u \cdot u' = (u^2 + 1)t$$

b.) Van-e olyan megoldása a feladatnak, ami kielégíti az $u(0) = 1$ feltételt is?

2. feladat (12+3 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $u(t)$ megoldását!

$$u' + 2tu = te^{-t^2}, \quad u(0) = \frac{3}{2}$$

b.) Adjunk közelítést $u(0.1)$ értékére a tanult közelítő módszerek valamelyikével.

3. feladat (15 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $u(t)$ megoldását Laplace-transzformáció segítségével!

$$u'' + u = 2e^{-t}, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 1$$

Legfontosabb tulajdonságai a Laplace-transzformálnak és nevezetes függvények Laplace-transzformáltjai ($\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$):

$$\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$\mathcal{L}(f(t - t_0)H(t - t_0)) = e^{-t_0 s} F(s)$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s + a}$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}t^n) = \frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

$$\mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(\sin(bt)) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = F(s + a)$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\cos(bt)) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

4. feladat (16+5+6+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u_1' + 2u_2 &= u_1 \\ u_2' + 4u_2 &= 2u_1 + 3e^{-t} \\ u_1(0) &= 3, \quad u_2(0) = 0. \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk implicit Euler-módszerrel közelítést $y_1(0.5)$ és $y_2(0.5)$ értékére.

c.) Igaz-e, hogy az $u_2(t)$ függvény konkáv a kezdeti érték körül?

d.) Ha csak a feladathoz tartozó homogén problémát szeretnénk numerikusan közelíteni egy explicit trapézsabály segítségével, akkor korlátos közelítő sorozatot kapunk-e a $\tau = 0.5$ időlépés-választással?

5. feladat (11+12 pont)

a.) Adjunk közelítő megoldást az $y(x)$ függvény értékére $N = 2$ belső pontban az alábbi peremérték-feladatra! A második deriváltakat *centrális*, míg az első deriváltakat *hátranéző* sémával közelítsük. A kapott eredményt ábrázoljuk is grafikonon.

$$\left. \begin{aligned} -8y'' - 6y' + 3y &= \frac{7x-16}{2} \\ y(0) &= 1, \quad y(6) = 8 \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk közelítést az $u(\frac{1}{10}, \frac{1}{3})$ értékére $N = 2$ belső pont alapján az $u(t, x)$ -re vonatkozó alábbi parciális differenciálegyenletben.

$$\left. \begin{aligned} u_t &= 2u_{xx} - 228x + 92 \\ u(0, x) &= \begin{cases} 10, & \text{ha } x < 0.8 \\ 0, & \text{ha } x \geq 0.8 \end{cases} \\ u(t, 0) &= 10, \quad u(t, 1) = 0 \end{aligned} \right\}$$