

# Differenciálegyenletek vizsga – 2016. január 15.

A feladatok megoldásához 90 perc áll rendelkezésre. Az összes feladat helyes megoldásával 100 pont szerezhető, az elégséges érdemjegy megszerzéséhez legalább 50 pont elérése szükséges.

## 1. feladat (11+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u'(t) - \frac{2}{t} \cdot u(t) &= t^2 e^t \\ u(1) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk közelítést  $u(1.2)$  értékére implicit trapézszabály (ITR) segítségével!

## 2. feladat (15 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) &= 2t^2 \\ u(0) &= 2 \\ u'(0) &= 3 \end{aligned} \right\}$$

## 3. feladat (15 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat  $u(t)$  megoldását Laplace-transzformáció segítségével!

$$\left. \begin{aligned} u''(t) - 4u'(t) + 5u(t) &= 2e^{3t} \\ u(0) &= 2 \\ u'(0) &= -1 \end{aligned} \right\}$$

## 4. feladat (16+11 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u'_1 &= -u_1 - u_2 + 3e^t \\ u'_2 &= 2u_1 - 4u_2 + 3e^t \\ u_1(0) &= 2 \\ u_2(0) &= 3 \end{aligned} \right\}$$

b.) Rajzoljuk fel vázlatosan az  $u_1(t)$  függvény grafikonját a kezdeti érték körül a monotonitásra és konvexitásra ügyelve. Határozzuk meg az  $u_1(t)$  függvény érintő egyenesének és simulókörének egyenletét a kezdőpontban!

## 5. feladat (10 pont)

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi pontjait, és vizsgáljuk meg stabilitásukat!

$$\left. \begin{aligned} u'_1 &= -2u_1 + 2u_2 - 4 \\ u'_2 &= u_1^2 - 2u_2 - 11 \end{aligned} \right\}$$

## 6. feladat (11+6 pont)

a.) Adjunk közelítő megoldást az alábbi peremérték-feladatra két belső pont alapján! Az első deriváltakat közelítsük *előrenéző*, a második deriváltakat pedig *centrális* sémával. A kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

$$\left. \begin{aligned} 4u_{xx} - 2u_x + 3u &= 3x + 4 \\ u(0) &= 2 \\ u(6) &= 8 \end{aligned} \right\}$$

b.) Írjuk fel a numerikus megoldást közelítő egyenletrendszer mátrixos alakját 5 belső pont esetén is! (Az egyenletrendszert nem kell megoldani.)

A Laplace-transzformált legfontosabb tulajdonságai:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s)$$

$$\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$\mathcal{L}(f(a \cdot t)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = F(s+a)$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

$$\mathcal{L}(f(t-t_0)H(t-t_0)) = e^{-t_0 s} F(s)$$

Nevezetes függvények Laplace-transzformáltjai:

$$\mathcal{L}(\delta(t-0^+)) = 1$$

$$\mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}(\sin(bt)) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(t \sin(bt)) = \frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}t^n) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\cos(bt)) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(t \cos(bt)) = \frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$$