

# Differenciálegyenletek vizsga – 2015. január 7.

A feladatok megoldásához 90 perc áll rendelkezésre. Az összes feladat helyes megoldásával 100 pont szerezhető, az elégséges érdemjegy megszerzéséhez legalább 50 pont elérése szükséges.

## 1. feladat (11+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} (t^2 + 1) \cdot u'(t) + 2t \cdot u(t) &= 2t - 1 \\ u(1) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk közelítést  $u(1.4)$  értékére explicit trapézsabály (ETR) segítségével!

## 2. feladat (15 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) &= 4t^2 \\ u(0) &= 2 \\ u'(0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

## 3. feladat (15 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat  $u(t)$  megoldását Laplace-transzformáció segítségével!

$$\left. \begin{aligned} u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) &= -e^{-3t} \\ u(0) &= 1 \\ u'(0) &= -4 \end{aligned} \right\}$$

## 4. feladat (16+6+4+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u'_1 &= -5u_1 + 4u_2 \\ u'_2 &= -2u_1 + u_2 + 4e^t \\ u_1(0) &= 3 \\ u_2(0) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

b.) Rajzoljuk fel vázlatosan az  $u_2(t)$  függvény grafikonját a kezdeti érték körül a monotonitásra és konvexitásra ügyelve. Az ábrán szerepeljen a simuló kör is (pontos sugarát *nem* kell meghatározni).

c.) Igaz-e, hogy minden kezdeti érték esetén 0-hoz konvergál a *homogén* feladat megoldása ( $t \rightarrow \infty$  esetén)?

d.) Ha csak a *homogén* feladat megoldását szeretnénk numerikusan közelíteni explicit trapézsabály (ETR) segítségével, akkor *korlátos* közelítő sorozatot kapunk-e a  $\Delta t = \frac{2}{3}$  időlépés-választással?

## 5. feladat (11+12 pont)

a.) Adjunk közelítő megoldást az alábbi peremérték-feladatra két belső pont alapján! Mind az első, mind a második deriváltakat közelítsük *centrális* sémával. A kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

$$\left. \begin{aligned} -3u_{xx} - 6u_x + 7u &= 33x - 37 \\ u(0) &= 1 \\ u(3) &= 6 \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk közelítést az  $u(\frac{1}{10}, \frac{1}{3})$  értékére két belső pont alapján, egyetlen implicit Euler (IE) időlépés segítségével, ha  $u(t, x)$  az alábbi kezdeti- és peremérték-feladat megoldása!

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 120x - 60 \\ u(0, x) &= \begin{cases} 7 & \text{ha } x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{ha } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ u(t, 0) &= 7 \\ u(t, 1) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

A Laplace-transzformált legfontosabb tulajdonságai:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s)$$

$$\mathcal{L}(f(a \cdot t)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = F(s + a)$$

$$\mathcal{L}(f(t - t_0)H(t - t_0)) = e^{-t_0 s} F(s)$$

Nevezetes függvények Laplace-transzformáltjai:

$$\mathcal{L}(\delta(t - 0^+)) = 1$$

$$\mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s + a}$$

$$\mathcal{L}(\sin(bt)) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(t \sin(bt)) = \frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} t^n) = \frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\cos(bt)) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(t \cos(bt)) = \frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$$