

Differenciálegyenletek vizsga – 2013. június 25.

A feladatok megoldásához 90 perc áll rendelkezésre. Az összes feladat helyes megoldásával 100 pont szerezhető, az elégséges érdemjegy megszerzéséhez legalább 50 pont elérése szükséges.

1. feladat (15+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet összes $y(x)$ megoldását!

$$y' = \sin(x) - y \sin(x)$$

b.) Van-e olyan megoldása a feladatnak, ami kielégíti az $y(0) = 2$ feltételt is?

2. feladat (15+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet összes megoldását!

$$y'' + 2y' = \sin(2x) - y$$

b.) Igaz-e, hogy minden megoldás korlátos marad $x \rightarrow \infty$ esetén?

3. feladat (15 pont)

Rajzoljuk fel vázlatosan $y_2(t)$ grafikonját a kezdeti érték körül (monotonitásra és konvexitásra figyelve)! Az ábrán szerepeljen a $t = 1$ pont körüli első- és másodrendű Taylor-polinom grafikonja, ill. a simulókör is.

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= \cos(y_1^2 y_2) - t^2 \\ y_2' &= y_1^2 + t \\ y_1(1) &= 1, \quad y_2(1) = 0 \end{aligned} \right\}$$

4. feladat (10+10)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldásának közelítő értékét $x = 0.2$ -ben Implicit Euler-módszerrel és Explicit Trapézsabállyal.

$$\left. \begin{aligned} y' &= x - y^2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

5. feladat (15+10 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$\left. \begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1 + y_2 \\ y_2'(t) &= 3y_1 + 4y_2 + e^{2t} \\ y_1(0) &= 2, \quad y_2(0) = -1. \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk implicit Euler-módszerrel közelítést $y_1(0.5)$ és $y_2(0.5)$ értékére.