

# Differenciálegyenletek vizsga – 2014. december 11.

A feladatok megoldásához 90 perc áll rendelkezésre. Az összes feladat helyes megoldásával 105 pont szerezhető, az elégséges érdemjegy megszerzéséhez legalább 50 pont elérése szükséges.

## 1. feladat (11+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u'(t) - tu(t) + t &= 0 \\ u(0) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk közelítést  $u(0.4)$  értékére implicit trapézszabály (ITR) segítségével!

## 2. feladat (15 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u''(t) - 4u'(t) + 5u(t) &= 5t^2 - 3t + 3 \\ u(0) &= 2 \\ u'(0) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

## 3. feladat (15 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat  $u(t)$  megoldását Laplace-transzformáció segítségével!

$$\left. \begin{aligned} u''(t) + 4u(t) &= 5e^{-t} \\ u(0) &= 3 \\ u'(0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

## 4. feladat (16+5+4+6+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u_1' &= -4u_1 + 2u_2 + 3e^{-t} \\ u_2' &= -2u_1 + u_2 \\ u_1(0) &= 0 \\ u_2(0) &= 3 \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk implicit Euler-módszerrel (IE) közelítést  $u_1(0.5)$  és  $u_2(0.5)$  értékére.

c.) Igaz-e, hogy az  $u_1(t)$  függvény konkáv a kezdeti érték körül?

d.) Korlátos-e a *homogén* feladat megoldása  $t \geq 0$  időkre?

e.) Ha csak a *homogén* feladat megoldását szeretnénk numerikusan közelíteni explicit trapézszabály (ETR) segítségével, akkor korlátos közelítő sorozatot kapunk-e a  $\Delta t = 0.5$  időlépés-választással?

## 5. feladat (11+12 pont)

a.) Adjunk közelítő megoldást az alábbi peremérték-feladatra két belső pont alapján! Mind az első, mind a második deriváltakat közelítsük *centrális* sémával. A kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

$$\left. \begin{aligned} -4u_{xx} - 8u_x + 6u &= 3x + 2 \\ u(0) &= 1 \\ u(6) &= 4 \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk közelítést az  $u(\frac{1}{10}, \frac{2}{3})$  értékére két belső pont alapján, egyetlen implicit Euler (IE) időlépés segítségével, ha  $u(t, x)$  az alábbi kezdeti- és peremérték-feladat megoldása!

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 162x - 73 \\ u(0, x) &= 3(1 - x)(9x^2 + 1) \\ u(t, 0) &= 3 \\ u(t, 1) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

A Laplace-transzformált legfontosabb tulajdonságai:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s)$$

$$\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$\mathcal{L}(f(a \cdot t)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = F(s+a)$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

$$\mathcal{L}(f(t-t_0)H(t-t_0)) = e^{-t_0 s} F(s)$$

Nevezetes függvények Laplace-transzformáltjai:

$$\mathcal{L}(\delta(t-0^+)) = 1$$

$$\mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}(\sin(bt)) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(t \sin(bt)) = \frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}t^n) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\cos(bt)) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(t \cos(bt)) = \frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$$