

Differenciálegyenletek vizsga – 2013. május 28.

A feladatok megoldásához 90 perc áll rendelkezésre. Az összes feladat helyes megoldásával 100 pont szerezhető, az elégséges érdemjegy megszerzéséhez legalább 50 pont elérése szükséges.

1. feladat (15+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet összes $y(x)$ megoldását!

$$xy' = x^3 \cos(x) + y$$

b.) Van-e olyan megoldása a feladatnak, ami kielégíti az $y(0) = 2$ feltételt is?

2. feladat (15+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet összes megoldását!

$$y'' + 9y = \cos(2x)$$

b.) Igaz-e, hogy minden megoldás korlátos marad $x \rightarrow \infty$ esetén?

3. feladat (15 pont)

Rajzoljuk fel vázlatosan $y_2(t)$ grafikonját a kezdeti érték körül (monotonitásra és konvexitásra figyelve)!

$$\left. \begin{aligned} y_1'(t) &= t \\ y_2'(t) &= \frac{y_1^2}{y_2 + t} \\ y_1(2) &= 1, y_2(2) = -1 \end{aligned} \right\}$$

4. feladat (5+10)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldásának közelítő értékét $x = 0,5$ -ben Explicit Euler-módszerrel és Implicit Trapézszabállyal.

$$\left. \begin{aligned} y' &= \cos(x) + 2xy \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

5. feladat (15+10+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$\left. \begin{aligned} y_1'(t) &= 3y_1 - 2y_2 \\ y_2'(t) &= 2y_1 - 2y_2 \\ y_1(0) &= 1, y_2(0) = 2. \end{aligned} \right\}$$

b.) Határozzuk meg $y_1(0.5)$ és $y_2(0.5)$ közelítő értékét Implicit Euler-módszerrel!

c.) Igaz-e, hogy ha $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$ helyett bármilyen kezdeti értéket adunk is meg, a megoldás mindig korlátos marad $t \rightarrow \infty$ esetén?