

Differenciálegyenletek vizsga – 2014. január 17.

A feladatok megoldásához 90 perc áll rendelkezésre. Az összes feladat helyes megoldásával 100 pont szerezhető, az elégséges érdemjegy megszerzéséhez legalább 50 pont elérése szükséges.

1. feladat (12+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $u(t)$ megoldását!

$$\left. \begin{aligned} (t^2 - 2) \cdot u' + 2tu &= 2t + 1 \\ u(0) &= 4 \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk Implicit Trapézszabállyal közelítést $u(0.1)$ értékére!

2. feladat (12+6 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános (összes) $u(t)$ megoldását!

$$\left. \begin{aligned} t \cdot u' &= (u + 2)^2 \\ u(1) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk közelítést $u(1.1)$ értékére másodrendű (explicit) Taylor-sorfejtés alapján!

3. feladat (15 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $u(t)$ megoldását Laplace-transzformáció segítségével!

$$u'' + 6u' + 8u = 6e^{-2t}, \quad u(0) = 3, \quad u'(0) = -5$$

Legfontosabb tulajdonságai a Laplace-transzformálnak és nevezetes függvények Laplace-transzformáltjai ($\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$):

$$\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$\mathcal{L}(f(t - t_0)H(t - t_0)) = e^{-t_0 s} F(s)$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s + a}$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} t^n) = \frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

$$\mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(\sin(bt)) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = F(s + a)$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\cos(bt)) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

4. feladat (16+6 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u_1' + 2u_1 &= u_2 + 3 \\ u_2' + 2u_2 &= u_1 - 3 \\ u_1(0) &= 2, u_2(0) = -2. \end{aligned} \right\}$$

b.) Ha csak a feladathoz tartozó homogén problémát szeretnénk numerikusan közelíteni egy Explicit Euler-módszerrel, akkor mi az a maximális τ időlépés-választás, amivel még konvergens közelítő sorozatot kapunk?

5. feladat (6+11+11 pont)

a.) Adjunk meg egy (partikuláris) megoldást, mely kielégíti az alábbi differenciálegyenletet!

$$-4y'' - 8y' + 3y = x + 4$$

b.) Adjunk közelítő megoldást az $y(x)$ függvény értékére $N = 2$ belső pontban, ha a fenti egyenlethez az $y(0) = 1, y(6) = 5$ peremérték-feltétel adott. A második deriváltakat *centrális*, az első deriváltakat *előrenéző* sémával közelítsük. A kapott eredményt ábrázoljuk is grafikonon.

c.) Adjunk közelítést az $u(\frac{1}{10}, \frac{2}{3})$ értékére $N = 2$ belső pont alapján az $u(t, x)$ -re vonatkozó alábbi parciális differenciálegyenletben.

$$\left. \begin{aligned} u_t &= 2u_{xx} + \frac{10-90x^2}{3} \quad (0 \leq x \leq 1) \\ u(0, x) &= 27x^2(1 - x) \\ u(t, 0) &= 1, \quad u(t, 1) = 4 \quad (t > 0) \end{aligned} \right\}$$