

Differenciálegyenletek vizsga – 2015. december 9.

A feladatok megoldásához 90 perc áll rendelkezésre. Az összes feladat helyes megoldásával 100 pont szerezhető, az elégséges érdemjegy megszerzéséhez legalább 50 pont elérése szükséges.

1. feladat (11+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} (t^2 + 1) \cdot u'(t) + 2t \cdot u(t) &= 2t + 1 \\ u(1) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk közelítést $u(1.4)$ értékére explicit trapézszabály (ETR) segítségével!

2. feladat (15 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u''(t) + 4u'(t) + 4u(t) &= 2 \cos(2t) \\ u(0) &= 1 \\ u'(0) &= -1 \end{aligned} \right\}$$

3. feladat (15 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $u(t)$ megoldását Laplace-transzformáció segítségével!

$$\left. \begin{aligned} u''(t) - u'(t) - 6u(t) &= 5e^{-2t} \\ u(0) &= 3 \\ u'(0) &= 3 \end{aligned} \right\}$$

4. feladat (16+11 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u_1' &= u_1 - 2u_2 + 4e^t \\ u_2' &= 4u_1 - 5u_2 \\ u_1(0) &= -1 \\ u_2(0) &= -2 \end{aligned} \right\}$$

b.) Rajzoljuk fel vázlatosan az $u_1(t)$ függvény grafikonját a kezdeti érték körül a monotonitásra és konvexitásra ügyelve. Határozzuk meg a kezdőponthoz tartozó érintő egyenes és simulókör egyenletét is!

5. feladat (10 pont)

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi pontjait, és vizsgáljuk meg stabilitásukat!

$$\left. \begin{aligned} u_1' &= u_1^2 - u_2 \\ u_2' &= 2u_1 - 2u_2 + 4 \end{aligned} \right\}$$

6. feladat (11+6 pont)

a.) Adjunk közelítő megoldást az alábbi peremérték-feladatra két belső pont alapján! Mind az első, mind a második deriváltakat közelítsük *centrális* sémával. A kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

$$\left. \begin{aligned} -3u_{xx} - 6u_x + 7u &= 33x - 37 \\ u(0) &= 1 \\ u(3) &= 6 \end{aligned} \right\}$$

b.) Írjuk fel a numerikus megoldást közelítő egyenletrendszer mátrixos alakját 5 belső pont esetén is! (Az egyenletrendszert nem kell megoldani.)

A Laplace-transzformált legfontosabb tulajdonságai:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s)$$

$$\mathcal{L}(f(a \cdot t)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = F(s + a)$$

$$\mathcal{L}(f(t - t_0)H(t - t_0)) = e^{-t_0 s} F(s)$$

Nevezetes függvények Laplace-transzformáltjai:

$$\mathcal{L}(\delta(t - 0^+)) = 1$$

$$\mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s + a}$$

$$\mathcal{L}(\sin(bt)) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(t \sin(bt)) = \frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} t^n) = \frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\cos(bt)) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(t \cos(bt)) = \frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$$