

Differenciálegyenletek vizsga – 2014. december 15.

A feladatok megoldásához 90 perc áll rendelkezésre. Az összes feladat helyes megoldásával 100 pont szerezhető, az elégséges érdemjegy megszerzéséhez legalább 50 pont elérése szükséges.

1. feladat (11+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} x'(t) - \frac{2t}{t^2 + 1} x(t) &= t \\ x(0) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk közelítést $x(0.2)$ értékére implicit trapézszabály (ITR) segítségével!

2. feladat (16 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u''(t) - 4u'(t) + 4u(t) &= 8 \sin(2t) \\ u(0) &= 2 \\ u'(0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

3. feladat (15 pont)

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $u(t)$ megoldását Laplace-transzformáció segítségével!

$$\left. \begin{aligned} u'(t) - 3u(t) &= 13 \cos(2t) \\ u(0) &= -2 \end{aligned} \right\}$$

4. feladat (16+6+4+4 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u_1' &= -5u_1 + u_2 \\ u_2' &= -3u_1 - u_2 + 3e^{-t} \\ u_1(0) &= -3 \\ u_2(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

b.) Rajzoljuk fel vázlatosan az $u_2(t)$ függvény grafikonját a kezdeti érték körül a monotonitásra és konvexitásra ügyelve. Az ábrán szerepeljen a simuló kör is (pontos sugarát *nem* kell meghatározni).

c.) Igaz-e, hogy minden kezdeti érték esetén 0-hoz konvergál a *homogén* feladat megoldása ($t \rightarrow \infty$ esetén)?

d.) Ha csak a *homogén* feladat megoldását szeretnénk numerikusan közelíteni implicit trapézszabály (ITR) segítségével, akkor konvergens közelítő sorozatot kapunk-e a $\Delta t = 2$ időlépés-választással?

5. feladat (11+12 pont)

a.) Adjunk közelítő megoldást az alábbi peremérték-feladatra két belső pont alapján! Az első deriváltakat közelítsük *előrenéző*, a második deriváltakat pedig centrális sémával. A kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

$$\left. \begin{aligned} -2u_{xx} - u_x + 4u &= 10x - 6 \\ u(0) &= 1 \\ u(3) &= 6 \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk közelítést az $u(\frac{1}{10}, \frac{1}{3})$ értékére két belső pont alapján, egyetlen implicit Euler (IE) időlépés segítségével, ha $u(t, x)$ az alábbi kezdeti- és peremérték-feladat megoldása!

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} - 60x + 30 \\ u(0, x) &= \begin{cases} 1 & \text{ha } x < \frac{1}{2} \\ 4 & \text{ha } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ u(t, 0) &= 1 \\ u(t, 1) &= 4 \end{aligned} \right\}$$

A Laplace-transzformált legfontosabb tulajdonságai:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s)$$

$$\mathcal{L}(f(a \cdot t)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = F(s + a)$$

$$\mathcal{L}(f(t - t_0)H(t - t_0)) = e^{-t_0 s} F(s)$$

Nevezetes függvények Laplace-transzformáltjai:

$$\mathcal{L}(\delta(t - 0^+)) = 1$$

$$\mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s + a}$$

$$\mathcal{L}(\sin(bt)) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(t \sin(bt)) = \frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} t^n) = \frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\cos(bt)) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(t \cos(bt)) = \frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$$