

# Differenciálegyenletek vizsga – 2014. január 22.

A feladatok megoldásához 90 perc áll rendelkezésre. Az összes feladat helyes megoldásával 100 pont szerezhető, az elégséges érdemjegy megszerzéséhez legalább 50 pont elérése szükséges.

## 1. feladat (11+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat  $u(t)$  megoldását!

$$\left. \begin{aligned} t \cdot u' - u &= 3t^3 \\ u(1) &= 3 \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk Implicit Euler-módszerrel közelítést  $u(1.1)$  értékére!

## 2. feladat (12 pont)

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános (összes)  $u(t)$  megoldását!

$$u'' - 6u' + 9u = 36 \sin(3t) - 90 \cos(3t)$$

## 3. feladat (16+5 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat  $u(t)$  megoldását Laplace-transzformáció segítségével!

$$u'' + 3u' = 8e^{-4t}, \quad u(0) = 8, \quad u'(0) = -23$$

Legfontosabb tulajdonságai a Laplace-transzformálnak és nevezetes függvények Laplace-transzformáltjai ( $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ ):

$$\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$\mathcal{L}(f(t - t_0)H(t - t_0)) = e^{-t_0 s} F(s)$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s + a}$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} t^n) = \frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

$$\mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(\sin(bt)) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = F(s + a)$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\cos(bt)) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

b.) Másodrendű Taylor-sorfejtés alapján adjunk közelítést  $u(0.1)$  értékére!

## 4. feladat (16+5+3+4 pont)

a.) Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$\left. \begin{aligned} u_1' + 3u_2 &= 2u_1 + 3e^{-t} \\ u_2' + 8u_2 &= 8u_1 + 3e^{-t} \\ u_1(0) &= 0, \quad u_2(0) = -3. \end{aligned} \right\}$$

b.) Rajzoljuk fel vázlatosan az  $u_1(t)$  függvényt a kezdeti érték körül a monotonitásra és konvexitásra figyelve. Az ábrán szerepeljen (vázlatosan) az érintő, a legjobban közelítő parabola és a simulókör is (a simulókör sugarát *nem* kell kiszámolni).

c.) Ha csak a feladathoz tartozó homogén problémát vizsgáljuk, igaz-e, hogy minden kezdeti érték esetén konvergens megoldásokat kapunk ( $t \rightarrow \infty$  esetén)?

d.) Ha csak a homogén problémát szeretnénk numerikusan közelíteni egy Implicit trapézsabály segítségével, akkor konvergens közelítő sorozatot kapunk-e a  $\tau = 2$  időlépés-választással?

## 5. feladat (12+11 pont)

a.) Adjunk közelítő megoldást az  $y(x)$  függvény értékére  $N = 2$  belső pontban az alábbi peremérték-feladatra! Mind a második deriváltakat, mind az első deriváltakat *centrális* sémával közelítsük. A kapott eredményt ábrázoljuk is grafikonon.

$$\left. \begin{aligned} -2y'' - 4y' + 3y &= 3x^2 - 9 \quad (0 \leq x \leq 3) \\ y(0) &= 1, \quad y(3) = 8 \end{aligned} \right\}$$

b.) Adjunk közelítést az  $u(\frac{1}{10}, \frac{2}{3})$  értékére  $N = 2$  belső pont alapján az  $u(t, x)$ -re vonatkozó alábbi parciális differenciálegyenletben.

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} - 87x + 39 \quad (0 \leq x \leq 1) \\ u(0, x) &= 9x - 3 \\ u(t, 0) &= 0, \quad u(t, 1) = 4 \end{aligned} \right\}$$